

Lösungsverfahren für die Vektor-Poissongleichung

21.1 Ableitung der Vektor-Poissongleichung

Wir wissen aus Abschnitt 18, dass sich das $\mathbf{H}$ -Feld unter Berücksichtigung des Nahwirkungsprinzips und des Helmholtzschen Satzes hinsichtlich seines divergenzfreien Anteils in folgender Weise ergibt

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (21.1)$$

Diese Beziehung wird nach Abschnitt 19.3 auch differentielle Form des Durchflutungsgesetzes genannt, das man aus (21.1) mit Hilfe des Stokesschen Satzes in die integrale Form bringen kann

$$\oint_{C_A} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} = I. \quad (21.2)$$

Beispiel: Für ein $\mathbf{H}$ -Feld mit geraden parallelen Feldlinien, wie es z. B. angenähert in den Eisenblechen einer Drosselspule vorliegt, sei

$$H_x = H, \quad H_y = 0, \quad H_z = 0. \quad (21.3)$$

Die x -Achse hat also die Richtung des $\mathbf{H}$ -Feldes. Ferner sei die $\mathbf{H}$ -Feldliniendichte in allen Ebenen parallel zur x, z -Ebene konstant, $H = \|\mathbf{H}\|$ also nur von y abhängig. Dann gilt definitionsgemäß

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot}_y \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot}_z \mathbf{H} = -\frac{\partial H}{\partial y}. \quad (21.4)$$

Nach Gl.(21.1) folgt nun, dass das vorausgesetzte Magnetfeld mit einem Strom verbunden sein muss, der parallel zur z -Achse fließt. Die Stromdichte beträgt nach Gl.(21.1)

$$J_z = -\frac{\partial H}{\partial y}. \quad (21.5)$$

Wäre das Magnetfeld homogen, dann wäre also die Stromdichte Null. Nimmt die Flussdichte mit der y -Richtung ab, so fließt Strom in der z -Richtung, nimmt sie zu, in der entgegengesetzten Richtung. Ein konstante Stromdichte ist mit einer linearen Zunahme der Flussdichte verbunden.

Da das B-Feld nach Abschnitt 18.23 quellenfrei ist, so gilt unter der Voraussetzung, dass $\mu = \text{konst.}$ ist,

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (21.6)$$

Bemerkung: In ferromagnetischen Stoffen kann $\operatorname{div} \mathbf{H}$ wegen des feldstärke-abhängigen μ von Null verschieden sein.

Auf Grund der Gl. (21.6) kann man nun den Ansatz machen

$$\mathbf{H} =: \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (21.7)$$

wobei $\mathbf{A}$ ein Vektorfeld darstellt, das durch diese Beziehung definiert ist¹.

Führt man dies in Gl. (21.1) ein, so folgt

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{J}, \quad (21.8)$$

oder mit einer Rechenregel für den Operator $\operatorname{rot} \operatorname{rot}$ (siehe A.1)

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \Delta \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{J}. \quad (21.9)$$

Nach Gl. (21.7) ist nur die Rotation des Vektorfeldes $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ festgelegt, so dass über seine Divergenz noch verfügt werden kann. Man spricht in diesem Zusammenhang von der Eichung des Vektorfeldes $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Im Rahmen der Theorie des stationären Magnetfeldes verwendet man üblicherweise die sogenannte Coulomb-Eichung

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (21.10)$$

Damit folgt aus Gl. (21.9)

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}, \quad (21.11)$$

eine Gleichung, die der Laplaceschen PDgl. (6.9) der Elektrostatik ähnlich ist. Sie wird auch als Vektor-Poissongleichung bezeichnet, auf die bereits in Abschnitt 18 kurz eingegangen wurde. Auf einige Lösungsmethoden dieser

¹ Im folgenden wird der Buchstabe $\mathbf{A}$ für das Vektorfeld $\mathbf{A}$ als auch für das gerichtete Flächenelement in differentieller Form $d\mathbf{A}$ (z. B. in Flächenintegralen) verwendet. Dennoch sollte keine Verwechslung mit dem Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ auftreten, wenn der Kontext beachtet wird.

partiellen Differentialgleichung wird in den folgenden Abschnitten eingegangen.

Die Coulomb-Eichung $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ ist natürlich konsistent mit der im stationären Magnetfeld gültigen Beziehung $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$. Das folgt nach Möller ([202], S. 257) daraus, dass man bei der Divergenzbildung des Vektorpotenzials $\mathbf{A}$ das Stromsystem festhalten und den Aufpunkt verändern muss. Wenn aber der Integrationsbereich das Stromsystem völlig einschließt, kann man auch den Aufpunkt festhalten und das Stromsystem verschieben. Mathematisch kann man dieses Resultat durch eine partielle Integration erhalten. Mit der Lösung der Vektor-Poissongleichung (21.21) aus dem folgenden Abschnitt ergibt sich nämlich

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} \left(\frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V} \right), \quad (21.12)$$

wobei der Divergenzoperator auf Funktionen von $\mathbf{r}$ wirkt. Das wird zusammen mit einer partiellen Integration ausgenutzt, um das folgende Ergebnis zu erhalten

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\operatorname{div} \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V}, \quad (21.13)$$

wobei der Divergenzoperator nunmehr auf Funktionen von $\tilde{\mathbf{r}}$ wirkt. Da die Integration über ein beliebiges Volumen durchzuführen ist, ergibt sich die gewünschte Äquivalenz der Beziehungen $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ und $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$. Eine detaillierte Ableitung dieses Ergebnisses findet man bei Lehner [162]. Dort findet man auch den Hinweis, dass dieses Ergebnis nicht bedeutet, dass man immer die Coulomb-Eichung zu wählen hat, sondern dass die bei der Ableitung der Vektor-Poissongleichung gewählte Eichbedingung auch wieder reproduzierbar ist.

21.2 Das vektorielle Kirchhoff-Integral

21.2.1 Kirchhoff-Integral für Stromdichteverteilungen

Im vorherigen Abschnitt 21.1 haben wir eine partielle Differentialgleichung für ein Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ abgeleitet, aus dem man bei bekannter Materialgleichung auch das B- und das H-Feld ableiten kann. Die Größe kann somit wie im elektrostatischen Feld als Zustandsgröße angesehen werden, wobei die Beziehung (21.7) als Beobachtungsgleichung für dieses physikalische Feld $\mathbf{H}$ aufgefasst werden kann.

Es wurde auch erwähnt, dass die Bestimmungsgleichung (21.11) vom Typ einer Vektor-Poissongleichung ist. Ein Unterschied gegenüber der Poissongleichung in der Elektrostatik scheint lediglich darin zu bestehen, dass $\mathbf{A}$ und $\mathbf{J}$ hier Vektorfelder sind. Im Sonderfall der x, y, z -Koordinaten kann sogar eine Lösungsformel abgeleitet werden, die in ihrer Form der Kirchhoffschen Lösungsformel für das skalare elektrostatische Potenzial entspricht. Im Anhang B.2 wird nämlich gezeigt, dass der Laplace-Operator Δ auf vektorielle

Felder im Sonderfall der x, y, z -Koordinaten komponentenweise angewendet werden kann. Somit zerfällt die Gl. (21.11) in xyz -Koordinaten in drei nicht gekoppelte Poissongleichungen für die Komponenten des Vektorpotenzials

$$\Delta A_x = -\mu J_x, \quad (21.14)$$

$$\Delta A_y = -\mu J_y, \quad (21.15)$$

$$\Delta A_z = -\mu J_z. \quad (21.16)$$

Diese günstige Situation ergibt sich jedoch nur dann, wenn keine Randbedingungen im Endlichen vorliegen. Sind Randbedingungen im Endlichen vorhanden, so erhält man Bedingungsgleichungen, die zu Kopplungen zwischen den Komponenten führen. Wird nämlich das physikalisch relevante B-Feld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ auf einem Rand im Endlichen vorgegeben, so wird dort $\text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})$ vorgeschrieben, woraus sich nach Definition des Rotationsoperators offensichtlich Kopplungen der Ableitungen des Vektorpotenzials $\mathbf{A}$ ergeben.

Wie im Anhang B.2 gezeigt wird, verkompliziert sich die Situation, wenn man ein Problem in allgemeineren Koordinatensystemen betrachtet. Bei der Anwendung des Laplaceoperators auf das Vektorpotenzial treten dann weitere Terme auf, die zu einer expliziten Kopplung der Poissongleichungen für die Komponenten führen. Beispielsweise koppeln die radiale Komponente und die Winkelkomponente in Zylinderkoordinaten, während alle drei Komponenten in Kugelkoordinaten gekoppelt sind. Die Verwendung des Vektorpotenzials bei praktischen Rechnungen ist dann eher fraglich.

Auf Grund der Analogie zu den Verhältnissen im elektrischen Feld können wir für die Komponenten von $\mathbf{A}$ sofort die Lösungen anschreiben, wenn wir in xyz -Koordinaten arbeiten und keine Randbedingungen im Endlichen vorliegen. Ist im elektrischen Feld die Ladungsdichte an jeder Stelle des Raumes bekannt, so gilt für das Potential (vgl. Gl.(11.28))

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\varrho(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V}, \quad (21.17)$$

wobei $d\tilde{V}$ das Volumenelement ist, $\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|$ den Abstand des Aufpunktes von diesem Volumenelement bezeichnet und das Integral über den ganzen geladenen Raum zu erstrecken ist. An die Stelle von ϱ/ϵ in der skalaren Poissongleichung der Elektrostatik tritt in der Theorie des stationären Magnetfeldes nach Gl. (21.11) $\mu\mathbf{J}$. Entsprechend gilt daher

$$A_x(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J_x(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V}, \quad (21.18)$$

$$A_y(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J_y(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V}, \quad (21.19)$$

$$A_z(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J_z(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V}, \quad (21.20)$$

wobei sich die Integrationen auf den von der elektrischen Stromdichte $\mathbf{J}$ erfüllten Raumbereich V bezieht. Diese drei Gleichungen kann man wieder zu einer einzigen Vektorgleichung zusammenfassen

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V}. \quad (21.21)$$

Mit Hilfe der Rechenregeln der Vektoranalysis lässt sich zeigen, dass dieser Ansatz auch die Bedingung (21.10) erfüllt. Wenn die elektrische Strömung in jedem Punkt des Raumes gegeben ist, kann also mit der Formel (21.21) das Vektorpotenzial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ berechnet werden.

Das Vektorpotenzial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ kann auch zur Berechnung des magnetischen Flusses Φ herangezogen werden. Nach den Abschnitten 18 und 19.1 ist der durch eine beliebige Fläche A gehende magnetische Fluss gleich dem Flächenintegral des B-Feldes über diese Fläche

$$\Phi = \iint_A \mathbf{B}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{A}}. \quad (21.22)$$

Wegen

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (21.23)$$

folgt somit

$$\Phi = \iint_A \text{rot } \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{A}} \quad (21.24)$$

und mit Hilfe des Stokesschen Satzes schließlich

$$\Phi = \oint_{\mathcal{C}_A} \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot d\tilde{\mathbf{r}}. \quad (21.25)$$

Man erhält demnach den magnetischen Fluss Φ , der durch eine beliebig berandete Fläche A hindurchgeht, indem man das Linienintegral des Vektorpotenzials $\mathbf{A}$ längs der Randlinie $\mathcal{C}_A$ der Fläche A bildet.

21.2.2 Kirchhoff-Integral für einen Linienleiter

Das Vektorpotenzial $\mathbf{A}$ ist bei einer beliebigen Stromdichte $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ mit der Kirchhoffschen Formel aufgrund des komplizierten und möglicherweise singulären Integranden nur selten analytisch berechenbar. Wird jedoch der elektrische Strom in dünnen und sehr gut leitenden Drähten geführt, wobei außerhalb des Drahtes die Stromdichte gleich null ist, kann man eine Näherungsformel entwickeln. Im folgenden stellen wir uns den Draht als einen langen zylindrischen Leiter mit einem kreisförmigen Querschnitt vor, dessen Durchmesser überall konstant und klein gegenüber der Länge des Leiters ist. Weiterhin soll die Stromdichte $\mathbf{J}$ über dem Querschnitt konstant sein und es soll gelten $\mathbf{J} \perp d\mathbf{A}$, wobei $d\mathbf{A}$ die Flächennormale der infinitesimalen Querschnittsfläche

ist. Unter diesen Voraussetzungen kann das Volumenintegral der Kirchhoffschen Formel auf ein Linienintegral reduziert werden, wobei die Integration der Stromdichte über die Querschnittsfläche den Strom I durch den Leiter ergibt. Die Kurve $\mathcal{C}$, über die das Linienintegral berechnet wird, muss noch passend gewählt werden. Beispielsweise kann man die Mittellinie des zylindrischen Leiters wählen und konzentriert damit den elektrischen Strom auf diese Linie. Man erhält die Näherung des Vektorpotenzials für diesen Linienleiter

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{\mathbf{r}}, \quad (21.26)$$

die zur Berechnung des Vektorpotenzials einer beliebigen Drahtspule im Sinne der Linienleiter-Näherung verwendet werden kann. Für analytische oder numerische Rechnungen muss für die Kurve $\mathcal{C}$ eine Parametrisierung vorhanden sein. Mit (21.25) ergibt sich dann der magnetische Fluss Φ eines Linienleiters durch eine beliebige Fläche A mit der Berandung $\mathcal{C}_A$ zu

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}_A} \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\tilde{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r}}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|}. \quad (21.27)$$

Eine ebene kreisförmige Stromschleife mit dem Radius R wird zweckmäßigerweise in Zylinderkoordinaten parametrisiert; es ergibt sich

$$\tilde{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \psi \\ R \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (21.28)$$

Der beliebige Punkt $\mathbf{r}$ im Raum, in dem das Vektorpotenzial bestimmt werden soll, wird in folgender Weise parametrisiert

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix}. \quad (21.29)$$

$d\tilde{\mathbf{r}}$ berechnet sich über

$$\frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\psi} = \begin{pmatrix} -R \sin \psi \\ R \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (21.30)$$

Das Vektorpotential wird damit zu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{R (-\sin \psi, \cos \psi, 0)^T d\psi}{\sqrt{(R \cos \psi - \rho \cos \phi)^2 + (R \sin \psi - \rho \sin \phi)^2 + z^2}}. \quad (21.31)$$

Mit den gelösten Binomen im Nenner und dem Additionstheorem

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \quad (21.32)$$

folgt

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{R(-\sin \psi, \cos \psi, 0)^\top d\psi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + z^2 - 2R\rho \cos(\psi - \phi)}}. \quad (21.33)$$

Mit der Substitution $\psi \rightarrow \psi + \phi$ folgt

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_\phi^{2\pi+\phi} \frac{R(-\sin(\psi + \phi), \cos(\psi + \phi), 0)^\top d\psi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + z^2 - 2R\rho \cos \psi}}. \quad (21.34)$$

Mit den Additionstheoremen

$$-\sin(\psi + \phi) = -\cos \phi \sin \psi - \cos \psi \sin \phi \quad (21.35)$$

$$\cos(\psi + \phi) = \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \sin \phi \quad (21.36)$$

folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I & \left(\int_\phi^{2\pi+\phi} \frac{R \cos(\phi) (-\sin \psi, \cos \psi, 0)^\top d\psi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + z^2 - 2R\rho \cos \psi}} \right. \\ & \left. + \int_\phi^{2\pi+\phi} \frac{R \sin(\phi) (-\cos \psi, -\sin \psi, 0)^\top d\psi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + z^2 - 2R\rho \cos \psi}} \right). \end{aligned} \quad (21.37)$$

Integrale der folgende Form lassen sich exakt berechnen

$$\int_\phi^{2\pi+\phi} \frac{\sin \psi d\psi}{\sqrt{a + b \cos \psi}} = - \frac{2\sqrt{a + b \cos \psi}}{b} \Big|_\phi^{2\pi+\phi} = 0. \quad (21.38)$$

Daraus lässt sich Gl. (21.37) vereinfachen zu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_\phi^{2\pi+\phi} \frac{R(-\sin \phi \cos \psi, \cos \phi \cos \psi, 0)^\top d\psi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + z^2 - 2R\rho \cos \psi}}. \quad (21.39)$$

Diese Gleichung kann kompakter geschrieben werden, da durch Ableiten von $\mathbf{r}$ nach ϕ folgt

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\mathbf{r}}{d\phi} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (21.40)$$

Damit folgt für Gl. (21.39)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{R}{\rho} \frac{d\mathbf{r}}{d\phi} \int_\phi^{2\pi+\phi} \frac{\cos \psi d\psi}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + z^2 - 2R\rho \cos \psi}}. \quad (21.41)$$

Integrale folgender Form sind elliptisch

$$\int \frac{\cos \psi d\psi}{\sqrt{a - b \cos \psi}} = \frac{2}{b\sqrt{a-b}} \left(aF\left(\frac{\psi}{2}, -\frac{2b}{a-b}\right) - (a-b)E\left(\frac{\psi}{2}, -\frac{2b}{a-b}\right) \right), \quad (21.42)$$

Dabei ist $F(a, b)$ das elliptische Integral 1. Art und $E(a, b)$ das elliptische Integral 2. Art; vgl. z. B. [2]. Mit $k := R^2 + \rho^2 + z^2$, $\kappa := 2R\rho$ und $\lambda^2 := k - \kappa$ folgt

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{\rho^2} \frac{d\mathbf{r}}{d\phi} \left(\frac{k}{\lambda} F\left(\frac{\psi}{2}, -\frac{2\kappa}{\lambda^2}\right) - \lambda E\left(\frac{\psi}{2}, -\frac{2\kappa}{\lambda^2}\right) \right) \Big|_{\phi}^{2\pi+\phi} \quad (21.43)$$

Für elliptische Integrale 1. Art gilt die Beziehung

$$F(2\pi + \phi, a) - F(\phi, a) = 2K(a) \quad (21.44)$$

dabei ist $K(a)$ das komplette elliptische Integral 1. Art. Für das Integral 2. Art gilt die Beziehung

$$E(2\pi + \phi, a) - E(\phi, a) = 2E(a) \quad (21.45)$$

dabei ist $E(a)$ das komplette elliptische Integral 2. Art. Mit dem Einsetzen der Grenzen folgt also aus Gl. (21.43)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\rho^2} \frac{d\mathbf{r}}{d\phi} \left(\frac{k}{\lambda} K\left(-\frac{2\kappa}{\lambda^2}\right) - \lambda E\left(-\frac{2\kappa}{\lambda^2}\right) \right). \quad (21.46)$$

Dies ist die exakte Lösung für das Vektorpotential einer Stromschleife in einem beliebigen Raumpunkt $\mathbf{r}$.

Daraus kann nach (21.25) der magnetische Fluss Φ durch eine mit der Kurve $\mathcal{C}_A$ berandete Fläche A ermittelt werden

$$\Phi = \oint_{\mathcal{C}_A} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (21.47)$$

Wählt man beispielsweise eine ebene kreisförmige Fläche, die konzentrisch zur Stromschleife angeordnet ist und die Berandung

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ h \end{pmatrix}. \quad (21.48)$$

besitzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\tilde{R}^2} \left(\frac{k}{\lambda} K\left(-\frac{2\kappa}{\lambda^2}\right) - \lambda E\left(-\frac{2\kappa}{\lambda^2}\right) \right) \oint_0^{2\pi} \frac{d\mathbf{r}}{d\phi} d\phi \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\tilde{R}^2} \left(\frac{k}{\lambda} K\left(-\frac{2\kappa}{\lambda^2}\right) - \lambda E\left(-\frac{2\kappa}{\lambda^2}\right) \right) \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\rho \sin \phi \\ \rho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\rho \sin \phi \\ \rho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi \\ &= \mu_0 I \left(\frac{k}{\lambda} K\left(-\frac{2\kappa}{\lambda^2}\right) - \lambda E\left(-\frac{2\kappa}{\lambda^2}\right) \right). \end{aligned} \quad (21.49)$$

Dabei ist zu beachten, dass die Radien R und ρ sowie der konzentrische Abstand h noch nicht festgelegt wurden, denn k , κ und λ hängen von diesen Größen ab.

21.3 Das Biot-Savart-Integral

Eigentlich war das Gesetz von Biot, Savart und Amperè der Ausgangspunkt für die quantitative Behandlung des Magnetfeldes von stromführenden Leitern – der sogenannte *Elektromagnetismus* – und dessen Kraftwirkung Anfang des 19. Jahrhunderts. Einzelheiten der Entstehungsgeschichte der Theorie, die in überraschend kurzer Zeit ausgebaut wurde, findet man u. a. bei H. Ebert [70]. An dieser Stelle soll nur überblicksartig auf einige historische Aspekte eingegangen werden.

Grundsätzlich waren magnetische Erscheinungen schon seit den Griechen bekannt, aber dabei handelte es sich um magnetische Wirkungen sogenannter Magneteisensteine. Erste Beobachtungen über die Kraftwirkung von stromführenden Leitern gehen auf Romagnosi im Jahre 1802 zurück. Systematische Experimente über elektromagnetische Erscheinungen anhand eines stromdurchflossenen Drahtes und einer Magnetnadel (vgl. Abschnitt 22.3.4) wurden dann erstmals von Ørsted durchgeführt. Seine Ergebnisse teilte er am 21. Juli 1820 mit. Ørsteds Entdeckung teilte Arago am 4. September 1820 seinen französischen Kollegen mit; der Versuch wurde dort am 11. September 1820 demonstriert. Wenige Tage später, nämlich am 25. September 1820 zeigte Amperè die gegenseitige Beeinflussung zweier stromführender Drähte. Weitere vier Wochen später – 30. Oktober 1820 – präsentierten Biot und Savart erste quantitative Aussagen über die „magnetische Kraft“ auf einen Draht. Die bekannte Illustration der magnetischen Kraftwirkung mit Eisenspänen wurde übrigens erstmals von Seebeck im Jahre 1821 angegeben. Mit Hilfe eines „Schwingungsvariometers“ zeigten sie, dass folgende Proportionalitäten gelten

$$\|\mathbf{B}\| \sim \frac{1}{\|\mathbf{r}\|}, \quad \|\mathbf{B}\| \sim I, \quad (21.50)$$

wobei wir uns der modernen Bezeichnungsweise $\|\mathbf{B}\|$ für die Kraftwirkung bedienen.

Daraus ergibt sich dann insgesamt (C : Konstante)

$$\|\mathbf{B}\| = C \frac{I}{\|\mathbf{r}\|}. \quad (21.51)$$

Eine allgemeinere Form wurde 1823 von Amperè angegeben. Dieses Ergebnis war damals höchst ungewöhnlich und erregte die Gemüter, denn die Kraftwirkung fiel nicht wie beim Gravitationsgesetz und der elektrostatischen Coulombkraft mit $1/\|\mathbf{r}\|^2$ ab sondern mit $1/\|\mathbf{r}\|$. Laplace zeigte schließlich, dass es eine differentielle Form der Biot-Savartschen Gesetzmäßigkeit für die magnetische Kraftwirkung gibt, die wieder im Einklang mit dem $1/\|\mathbf{r}\|^2$ -Abfall der Kraftwirkung steht, obwohl Laplace dazu – in mathematisch nicht zwingender Weise – von der Summe auf die Summanden schließen musste; vgl. z. B. Behnke, Muschik, Päsler [23]. Man kann jedoch ein Experiment angeben, dass in einem gewissen Sinne die Vorgehensweise von Laplace rechtfertigt. Im folgenden gehen wir auf die Ableitung des Biot-Savart-Integrals auf der Grundlage

des Vektorpotenzials ein, das in dieser Form eigentlich von Laplace stammt und daher auch Biot-Savart-Laplace-Integral genannt werden sollte.

In Abschnitt 21.2.2 haben wir gezeigt, dass das B-Feld eines Linienleiters mit einem modifizierten Kirchhoffintegral für das Vektorpotenzial $\mathbf{A}$ ermittelt werden kann. Oft braucht man jedoch das Vektorpotenzial selbst nicht zu berechnen. Wir leiten im folgenden aus dem Vektorpotenzial eine Formel zur Berechnung des H-Feldes ab, die es gestattet, eine entsprechende Formel für das B-Feld anzugeben.

Das H-Feld ist nach Gl. (21.7) und (21.21)

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \left(\iiint_V \frac{\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V} \right). \quad (21.52)$$

Diese Gleichung wenden wir nun auf einen „Stromfaden“ an, also auf einen stromdurchflossenen Leiter von sehr geringem Querschnitt, oder auf einen durch Strömungslinien begrenzten Ausschnitt aus einem drahtförmigen Leiter endlichen Querschnittes. Mit der Näherungsbeziehung in Gl. (21.26) ergibt sich

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \operatorname{rot} \left(\oint_{C_A} \frac{d\tilde{\mathbf{s}}}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} \right) = \frac{I}{4\pi} \oint_{C_A} \operatorname{rot} \left(\frac{d\tilde{\mathbf{s}}}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} \right), \quad (21.53)$$

wobei der Operator rot auf Funktionen von $\mathbf{r}$ wirkt. Verwenden wir die Be-

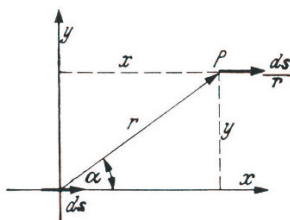


Abbildung 21.1. Zur Ableitung der Formel von Biot-Savart und Amperé

ziehung (z. B. Wunsch, Schulz [310], S. 328)

$$\operatorname{rot}(U(r) \mathbf{a}) = \frac{dU}{dr} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{a} \right) \quad (21.54)$$

mit $r := \|\mathbf{r}\|$, dann erhält man für den Integranden von (21.53)

$$\operatorname{rot} \left(\frac{d\tilde{\mathbf{s}}}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} \right) = \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|^2} \right) d\tilde{\mathbf{s}} \times \frac{\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|}, \quad (21.55)$$

oder in Komponenten

$$\operatorname{rot}_x \left(\frac{d\tilde{\mathbf{s}}}{r} \right) = 0, \quad (21.56)$$

$$\operatorname{rot}_y \left(\frac{d\tilde{\mathbf{s}}}{r} \right) = 0, \quad (21.57)$$

$$\operatorname{rot}_z \left(\frac{d\tilde{\mathbf{s}}}{r} \right) = \frac{\sin \alpha ds}{r^2}, \quad (21.58)$$

wobei $r := \|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|$ ist, unter $\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}$ ein Vektor verstanden wird, der durch den Abstand zwischen dem Nullpunkt und dem Punkt P gegeben ist und nach dem Punkt P hinzeigt und α nach Abb. 21.1 der eingeschlossene Winkel zur x -Achse ist. Für das H-Feld ergibt sich damit schließlich die Laplacesche Formel

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint_c \frac{d\tilde{\mathbf{s}} \times (\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|^3}, \quad (21.59)$$

welche meistens nach Biot und Savart benannt wird. Man kann diese Formel zur Berechnung magnetischer Felder von stromdurchflossenen linienförmigen Leitern folgendermaßen deuten. Das H-Feld setzt sich aus Anteilen zusammen, die von den einzelnen Längenelementen $d\mathbf{s}$ des Leiters herrühren, und die sich einfach summieren. Jeder Anteil ist gegeben durch

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}. \quad (21.60)$$

Er hat also den Betrag

$$dH := \|d\mathbf{H}\| = \frac{I}{4\pi} \frac{ds \sin \alpha}{\|\mathbf{r}\|^2} \quad (21.61)$$

und eine Richtung, die senkrecht auf der durch $d\mathbf{s}$ und $\mathbf{r}$ gebildeten Ebene steht. Das H-Feld selbst ergibt sich, wenn man alle Teilvektoren, die von den einzelnen Längenelementen des elektrischen Stromkreises herrühren, geometrisch addiert. Da der räumliche Verlauf des Stromes in den meisten Fällen durch die Stromleiter vorgeschrieben ist, so kann man mit Hilfe der Laplace-sche Formel, Gl. (21.59), grundsätzlich die Aufgabe der Berechnung magnetischer Felder von elektrischen Stromkreisen lösen, wenn auch die zu diesem Zweck auszuführende Integration in vielen Fällen nicht zu einfachen Ausdrücken führt.

Weiterhin wird, wie bereits gesagt, bei der Laplaceschen Interpretation von (21.59) von der „Summe“ auf die Summanden geschlossen, was natürlich nicht korrekt ist. Außerdem ist zu beachten, dass die Laplacesche Formel nur unter der Voraussetzung gilt, dass μ im ganzen Raum konstant ist.

21.4 Die Multipolmethode

In Abschnitt 21.2.1 haben wir das Kirchhoff-Integral für die Vektor-Poisson-gleichung $\triangle \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$ diskutiert, wobei es sich um eine spezielle Lösung dieser partiellen Differentialgleichung handelt; man erhält nach Gl. (21.21)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{V}. \quad (21.62)$$

Dieses Integral lässt sich nur sehr selten analytisch behandeln. Daher haben wir in Abschnitt 21.2.2 ein Näherungsverfahren diskutiert, bei dem „dünne“ Stromfäden vorausgesetzt werden. Aus dem Volumenintegral in Gl. (21.62) wird dann ein Linienintegral, das man deutlich öfter in analytischer Weise bestimmen kann. In diesem Abschnitt wollen wir noch kurz auf eine andere Näherung eingehen, die wir schon in Zusammenhang mit der skalaren Poissonsche Gleichungen vorgestellt haben; es handelt sich um die Multipol-Entwicklung. Wie in Abschnitt 11.5 beschrieben, gehen wir dabei von einer vollständig im Endlichen gelegenen Stromverteilungsdichte $\mathbf{J}$ aus und entwickeln den Nenner des Integranden des Kirchhoff-Integrals (21.62) $1/\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|$ in eine Reihe; im allgemeinen führt das nach Gl. (11.31) auf Legendre-Polynome. Man erhält dann eine Reihe von additiven Anteilen des Vektorpotenzials

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n(\mathbf{r}), \quad (21.63)$$

wobei die Anteile $\mathbf{A}_n$ in integraler Form vorliegen. Die ersten beiden Terme ergeben sich zu

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r}\|} d\tilde{V} + \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|^3} d\tilde{V}. \quad (21.64)$$

Der interessanteste Anteil ist der magnetische Monopolterm in Gl. (21.64). Das Verschwinden des Monopolterms folgt aus $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$, wobei eine etwas verwickeltere Rechnung durchgeführt werden muss; vgl. z. B. Schnackenberg [256], S. 137ff).

Der Dipolterm in Gl. (21.64) kann etwas umgeformt werden; man erhält (siehe auch Abschnitt 19.4)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{\mu}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}, \quad (21.65)$$

mit

$$\mathbf{m} := \frac{1}{2} \iiint_V \tilde{\mathbf{r}} \times \mathbf{J}(\tilde{\mathbf{r}}) d\tilde{V}. \quad (21.66)$$

Man kann natürlich die Multipol-Entwicklung auch noch mit der in Abschnitt 21.2.2 behandelten Näherung mit Stromfäden kombinieren, so dass die Dipol- und sogar die Quadrupol-Näherung analytisch ausgewertet werden kann.

Allgemeinere Überlegungen zur magnetischen Multipol-Entwicklung findet man bei u. a. Eder [71] und Schnackenberg [256]. Verallgemeinerte Multipol-Entwicklungen mit sogenannten Debye-Potenzialen diskutiert Gray [93], wo man auch zahlreiche weitere Hinweise und Literatur zur Methode der Multipol-Entwicklung findet. In Abschnitt 21.1 wurde gezeigt, dass die Coulomb-Eichung $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ und $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$ äquivalent sind. Somit ist die

bei der Ableitung der Vektor-Poissongleichung (21.11) verwendete Coulomb-Eichung also auch die Ursache dafür, dass der Monopolterm des Vektorpotenzials $\mathbf{A}$ verschwindet.

21.5 Das skalare magnetische Potenzial und konforme Abbildungen

Die Berechnung des *genauen* Verlaufes des H-Feldes, aus dem dann bei konstanter Permeabilität das B-Feld berechnet werden kann, stellt ein ähnliches Problem dar wie die Berechnung elektrischer Felder, und es gelten sogar außerhalb der stromdurchflossenen Leiter ganz ähnliche Gesetze wie dort.

Nach dem Durchflutungsgesetz hat das Linienintegral des H-Feldes den Wert Null, wenn der Integrationsweg nicht mit Strömen verkettet ist. In der äquivalenten differentiellen Form gilt

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0}. \quad (21.67)$$

Unter bestimmten Voraussetzungen kann man eine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung angeben

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \psi. \quad (21.68)$$

Aus der integralen Form geht hervor, dass das Linienintegral des H-Feldes für beliebige Wege zwischen zwei Punkten a und b denselben Wert hat, wenn die Wege ineinander übergeführt werden können, ohne dass stromdurchflossene Leiter geschnitten werden. Das Linienintegral hängt nur von der Lage der Endpunkte a und b im magnetischen Feld ab; man kann dies, wie im Falle des elektrischen Feldes mit Hilfe des skalaren Feldes ψ ausdrücken, das wir gerade eingeführt haben. Wir verwenden daher auf der Grundlage der Gleichung (21.68) die folgende Integraldarstellung des *magnetischen Potenzials*

$$\int_a^b \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \psi_a - \psi_b. \quad (21.69)$$

Das H-Feld kann also außerhalb der Stromleiter durch den Gradienten eines skalaren Potenzials ausgedrückt werden.

Das Linienintegral des H-Feldes zwischen zwei Punkten bezeichnet man daher auch als *magnetische Spannung*. Es kann mit dem magnetischen Spannungsmesser nach Rogowski (vgl. Abschnitt 19) gemessen werden. Das Linienintegral über einen in sich geschlossenen Weg ist die *magnetische Umlaufspannung*, und das Durchflutungsgesetz kann daher auch in der Form ausgesprochen werden: „Die magnetische Umlaufspannung längs eines beliebigen Weges ist gleich der Durchflutung des Weges.“

Als Einheit der magnetischen Spannung dient wie für die Durchflutung 1A; früher wurde auch die folgende Einheit benutzt:

$$1 \text{ Gilbert} = \frac{10}{4\pi} A = \frac{1}{1,257} A. \quad (21.70)$$

Führt man in Gl.(21.68) das B-Feld mit Hilfe der Gln. (18.23) ein, so ergibt sich

$$\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \psi) = 0. \quad (21.71)$$

Wenn die Permeabilität μ eine Konstante ist, wie insbesondere in Luft, so folgt daraus

$$\Delta \psi = 0. \quad (21.72)$$

Für das magnetische Potenzial außerhalb der Stromleiter gilt also die Laplace'sche Potenzialgleichung. Zur Berechnung solcher magnetischen Felder können daher die gleichen Methoden angewendet werden wie beim elektrischen Feld.

Um das magnetische Potenzial ψ explizit berechnen zu können, gehen wir von der Biot-Savart-Laplace-Formel (21.59) aus und verwenden eine Variante des Stokesschen Satzes (A.22), die im Anhang A.1 angegeben wird. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{I}{4\pi} \oint_{C_A} \frac{d\tilde{\mathbf{s}} \times (\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|^3} = \frac{I}{4\pi} \iint_A (d\tilde{\mathbf{A}} \times \tilde{\nabla}) \times \frac{(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|^3} \\ &= -\frac{I}{4\pi} \iint_A (d\tilde{\mathbf{A}} \times \nabla) \times \frac{(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|^3} \\ &= \nabla \left(\frac{I}{4\pi} \iint_A \frac{(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|^3} \cdot d\tilde{\mathbf{A}} \right) - \frac{I}{4\pi} \iint_A \Delta \frac{1}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} d\tilde{\mathbf{A}}, \end{aligned}$$

wobei eine Operatorbeziehung verwendet wurde, die auf der bekannten Vektorzerlegung $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ basiert. Da $1/(\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|)$ proportional zur Greenfunktion des Laplaceoperators ist, entartet der Integrand des zweiten Terms zu einer Deltafunktion. Dieser Term verschwindet, wenn wir die Fläche A durch die Leiterschleife so legen, dass der Aufpunkt $\mathbf{r}$ nicht auf dieser Fläche liegt. Der erste Term kann offensichtlich aus der skalaren Funktion

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \iint_A \frac{(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}})}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|^3} \cdot d\tilde{\mathbf{A}} \quad (21.73)$$

abgeleitet werden, die gerade dem magnetischen Potenzial in Gl. (21.68) entspricht.

Beispiel: Als Anwendungsbeispiel werde die magnetische Schirmwirkung einer Hohlkugel aus Eisen betrachtet. Die Hohlkugel mit den Radien r_1 und r_2 , Abb. 21.2, bestehe aus Material mit der konstanten Permeabilität μ und befinde sich in einem homogenen magnetischen Feld. Gefragt ist nach dem H-Feld H_i im Innern des Hohlraumes, wenn das H-Feld H_a des ursprünglichen homogenen Feldes gegeben ist.

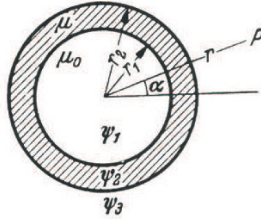


Abbildung 21.2. Zur Berechnung der magnetischen Schirmwirkung einer Hohlkugel

Wir wenden die in Abschnitt 10.1.4 behandelte Vorgehensweise an und versuchen, die Grenzbedingungen durch den Ansatz (10.28) zu erfüllen. Es gelte also

für den Innenraum

$$\psi_1 = \left(c_{11}r + \frac{c_{21}}{r^2} \right) \cos \alpha, \quad (21.74)$$

für die Kugelwand

$$\psi_2 = \left(c_{12}r + \frac{c_{22}}{r^2} \right) \cos \alpha, \quad (21.75)$$

für den Außenraum

$$\psi_3 = \left(c_{13}r + \frac{c_{23}}{r^2} \right) \cos \alpha, \quad (21.76)$$

Die Grenzbedingungen sind

$$\text{für } r = r_1 : \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha} \quad \text{und} \quad \mu_0 \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \mu \frac{\partial \psi_2}{\partial r}; \quad (21.77)$$

$$\text{für } r = r_2 : \frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha} = \frac{\partial \psi_3}{\partial \alpha} \quad \text{und} \quad \mu \frac{\partial \psi_2}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial \psi_3}{\partial r}. \quad (21.78)$$

Ferner muss im Innenraum ψ_1 endlich bleiben, d. h. $c_{21} = 0$ sein, und das Potenzial im Außenraum muss für $r \rightarrow \infty$ in das Potenzial des homogenen Feldes übergehen, d. h. $c_{13} = H_a$. Durch Einführen der Ansätze (21.74)-(21.76) in die Grenzbedingungen findet man leicht, dass diese mit bestimmten Werten der Koeffizienten erfüllt werden können. Für das H-Feld H_i im Innenraum ($= c_{11}$) ergibt sich

$$H_i = 9H_a \left(2\mu_r + 5 + \frac{5}{\mu_r} - 2 \frac{(\mu_r - 1)^2}{\mu_r} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 \right)^{-1}. \quad (21.79)$$

Wenn die relative Permeabilität des Schirmmaterials μ groß gegen 1 ist, folgt aus Gl. (21.79) die Näherungsformel für den „Schirmfaktor“

$$\frac{H_i}{H_a} = \frac{4,5}{\mu_r} \frac{r_2^2}{r_2^3 - r_1^3}. \quad (21.80)$$

Im Innern, der Hohlkugel entsteht also ebenfalls ein homogenes Feld mit einem H-Feld, das um so kleiner wird, je größer μ_r ist. In der folgenden Tabelle 21.1 sind einige Zahlenwerte angegeben für ein Abschirmgehäuse mit einem Radius $r_1 = 5\text{cm}$ aus gewöhnlichem Eisen mit $\mu_r = 200$ und verschiedener Wandstärke d . In gleicher Weise kann man untersuchen, wie eine Unterteilung

$$\begin{array}{cccc} d/\text{mm} = & 1 & 2 & 5 & 10 \\ H_i/H_a = & 0,40 & 0,20 & 0,090 & 0,053 \end{array}$$

Tabelle 21.1. Zusammenhang von Schirmfaktor und Wandstärke

der Kugelwand in mehrere Schichten die Schirmwirkung verbessert. Das hier berechnete Verhältnis der H-Felder gilt nur für stationäre magnetische Felder. Bei magnetischen Wechselfeldern wächst die Schirmwirkung infolge der im Eisen entstehenden Wirbelströme, die das erzeugende Feld noch weiter schwächen, siehe Abschnitt 29 und 34.1.

Das magnetische Potenzial ist keine eindeutige Größe, da das Linienintegral des H-Feldes, also die Spannung bei einem mit Strömen verketteten Weg, nicht Null ist, sondern Θ . Geht man n -mal um den Stromleiter herum, so vergrößert sich das Potenzial ψ um den Wert $n\Theta$. Da jedoch nur *Potenzialdifferenzen* gemessen werden können und die Wirkungen nur von dem H-Feld abhängen, so spielt diese Vieldeutigkeit praktisch keine andere Rolle als die Unbestimmtheit des Potenzials überhaupt.

An die Stelle der Grenzbedingungen des elektrischen Feldes treten hier die in Abschnitt 22.3 abgeleiteten analogen Bedingungen und das Durchflutungsgesetz.

Genau wie beim elektrischen Feld kann in 2-dimensionalen Situationen auch *die Methode der konformen Abbildung* (vgl. Abschnitt 11.7) benutzt werden. Z.B. liefert die Funktion

$$f(\zeta) = c \ln \zeta \quad (21.81)$$

das H-Feld in der Umgebung eines geraden langgestreckten (unendlich langen) Leiters, das konzentrische kreisförmige H-Feldlinien aufweist und ebene Potenzialflächen, die die Leiterachse enthalten. Das Potenzial ist

$$\psi = c\alpha; \quad (21.82)$$

die Potenzialflächen sind durch $\alpha = \text{konst.}$ gegeben. Für den Betrag des H-Feldes folgt daraus

$$\|\mathbf{H}\| = H_\alpha = -\frac{d\psi}{d(r\alpha)} = -\frac{c}{r}, \quad (21.83)$$

und die Konstante c ergibt sich aus dem Durchflutungsgesetz; man erhält

$$c = -\frac{I}{2\pi}, \quad (21.84)$$

wenn die positive Richtung von α und $\|\mathbf{H}\|$ rechtsläufig mit der positiven Richtung des Stromes I verknüpft ist.

Da die Potenzialgleichung eine lineare Differentialgleichung ist, so folgt, dass sich bei Vorhandensein mehrerer Leiter die Einzelfelder ungestört überlagern. Voraussetzung dafür ist lediglich, dass überall

$$\mu = \text{konst.} \quad (21.85)$$

ist. Mit Hilfe dieses Satzes kann man die magnetischen Felder in der Umge-

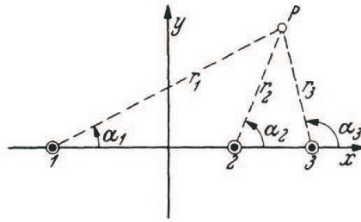


Abbildung 21.3. Berechnung des magnetischen Feldes

bung von *Mehrleitersystemen* berechnen. Bezeichnet 1, 2 und 3 in Abb. 21.3 drei parallele Leiter, die von den Strömen I_1, I_2, I_3 durchflossen werden (positive Richtung von hinten nach vorn), so gilt für das magnetische Potenzial in irgendeinem Punkt P

$$\psi = -\frac{1}{2\pi}(I_1\alpha_1 + I_2\alpha_2 + I_3\alpha_3). \quad (21.86)$$

Daraus leiten sich die Komponenten des H-Feldes in der x - und y -Richtung ab. Es ist z.B.

$$H_x = -(\text{grad}\psi)_x = \frac{1}{2\pi} \left(I_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + I_2 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + I_3 \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} \right). \quad (21.87)$$

Die partiellen Differentiale der Winkel α bei einer Änderung von x findet man aus der Beziehung

$$x = y \cot \alpha + k. \quad (21.88)$$

Hieraus ergibt sich durch partielles Differenzieren

$$1 = -\frac{y}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x}. \quad (21.89)$$

oder

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{\sin^2 \alpha}{y} = -\frac{\sin \alpha}{r}. \quad (21.90)$$

Daher wird

$$H_x = -\frac{1}{2\pi} \left(I_1 \frac{\sin \alpha_1}{r_1} + I_2 \frac{\sin \alpha_2}{r_2} + I_3 \frac{\sin \alpha_3}{r_3} \right). \quad (21.91)$$

Genau so folgt für die Komponente von H in der y -Richtung

$$H_y = \frac{1}{2\pi} \left(I_1 \frac{\cos \alpha_1}{r_1} + I_2 \frac{\cos \alpha_2}{r_2} + I_3 \frac{\cos \alpha_3}{r_3} \right). \quad (21.92)$$

In *großer* Entfernung von den drei Leitern werden die Abstände und die Winkel einander gleich. Dann folgt

$$H_x = -\frac{1}{2\pi r} (I_1 + I_2 + I_3) \sin \alpha, \quad (21.93)$$

$$H_y = +\frac{1}{2\pi r} (I_1 + I_2 + I_3) \cos \alpha. \quad (21.94)$$

Der Betrag des H-Feldes ist in großer Entfernung

$$\|\mathbf{H}\| = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = \frac{1}{2\pi r} (I_1 + I_2 + I_3). \quad (21.95)$$

Das magnetische Feld ist also in großer Entfernung von einem System paralleler Leiter so beschaffen, als ob nur ein Leiter vorhanden wäre, der die Summe der Ströme führt.

Handelt es sich um Hin- und Rückleitung eines einzigen Stromkreises, dann ist zu setzen $I_1 = -I_2 = I$, und es wird

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} I (\alpha_1 - \alpha_2). \quad (21.96)$$

Die Potenziellinien sind daher Kreise, die durch die Spuren der Leiterachse hindurchgehen, und deren Mittelpunkte auf der Mittelsenkrechten zur Verbindungslinie dieser Spuren liegen; sie entsprechen den Verschiebungslinien des elektrischen Feldes. Da die magnetischen Induktionslinien die Potenziellinien senkrecht schneiden müssen, so sind sie durch die Appollonischen Kreise dargestellt wie die Potenziellinien des elektrischen Feldes (Abb. 10.14). Das H-Feld ist auf der Verbindungslinie der Leiterspuren

$$\|\mathbf{H}\| = H_y = \frac{1}{2\pi} I \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad (21.97)$$

da $\cos \alpha_1 = +1$ und $\cos \alpha_2 = -1$. Sie setzt sich zusammen aus den von den beiden Leitern herrührenden Beiträgen kreisförmiger Leiter nach dem Durchflutungssatz. Bezeichnet a den Abstand zwischen den beiden Drahtachsen, so wird $r_2 = a - r_1$ und

$$\|\mathbf{H}\| = \frac{1}{2\pi} I \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{a - r_1} \right). \quad (21.98)$$

Der magnetische Fluss Φ , der durch einen Streifen von der Breite dr_1 und der Länge l zwischen den beiden Leitern hindurchgeht, ist

$$d\Phi = B l dr_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} I l \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{a - r_1} \right) dr_1. \quad (21.99)$$

Der gesamte Fluss im Luftraum zwischen den beiden Leitungen ergibt sich hieraus durch Integration von $r_1 = r_0$ bis $r_1 = a - r_0$, wenn r_0 den Leiterradius bezeichnet. Es wird

$$\Phi = \frac{\mu_0}{2\pi} I l \int_{r_0}^{a-r_0} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{a - r_1} \right) dr_1 = \frac{\mu_0}{\pi} I l \ln \frac{a - r_0}{r_0}. \quad (21.100)$$

Von dem Prinzip der ungestörten Überlagerung der Einzelfelder kann man ferner Gebrauch machen zur Berechnung des magnetischen Feldes bei *stabförmigen Leitern beliebigen Querschnitts*. Man zerlegt den Querschnitt in Flächenelemente dA ; dann wird bei einer Stromdichte J die Stromstärke in einem solchen Querschnitt JdA . Die Komponenten des H-Feldfeldes in einem Punkt P sind dann nach den Gl. (21.91) und (21.92)

$$H_x = -\frac{1}{2\pi} J \iint \frac{\sin \alpha}{r} dA, \quad (21.101)$$

$$H_y = \frac{1}{2\pi} J \iint \frac{\cos \alpha}{r} dA, \quad (21.102)$$

wobei die Integrale über den ganzen Leiterquerschnitt zu bilden sind.

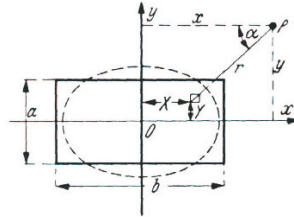


Abbildung 21.4. Berechnung des magnetischen Feldes eines Rechteckstabes

Beispiel: Für die in Abb. 21.4 gezeichnete Schiene mit rechteckigem Querschnitt stellt man das Flächenelement durch ein kleines Rechteck dar. Die Koordinaten des Rechtecks seien $x = X$, $y = Y$, die Seiten ΔX und ΔY . Dann wird

$$r = \sqrt{(y - Y)^2 + (x - X)^2}, \quad (21.103)$$

$$\sin \alpha = \frac{y - Y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x - X}{r}, \quad (21.104)$$

und es ergibt sich nach einem Grenzübergang ($\Delta X, \Delta Y \rightarrow 0$)

$$H_x = -\frac{1}{2\pi} \frac{I}{ab} \int_{-b/2}^{+b/2} dY \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{y-Y}{(y-Y)^2 + (x-X)^2} dX. \quad (21.105)$$

Die Ausführung der Integration liefert

$$H_x = \frac{I}{2\pi ab} \left(\frac{1}{2} x_{+b/2} \ln \frac{y_{+a/2}^2 + x_{+b/2}^2}{y_{-a/2}^2 + x_{+b/2}^2} \right. \quad (21.106)$$

$$\left. -\frac{1}{2} x_{-b/2} \ln \frac{y_{+a/2}^2 + x_{-b/2}^2}{y_{-a/2}^2 + x_{-b/2}^2} \right. \quad (21.107)$$

$$\left. + y_{+a/2} \left(\arctan \frac{x_{+b/2}}{y_{+a/2}} - \arctan \frac{x_{-b/2}}{y_{+a/2}} \right) \right. \quad (21.108)$$

$$\left. - y_{-a/2} \left(\arctan \frac{x_{+b/2}}{y_{-a/2}} - \arctan \frac{x_{-b/2}}{y_{-a/2}} \right) \right). \quad (21.109)$$

mit $x_{+b/2} := x + b/2$, $x_{-b/2} := x - b/2$, $y_{+a/2} := y + a/2$ und $y_{-a/2} := y - a/2$. Der Ausdruck für H_y ergibt sich hieraus, wenn überall x und y sowie a und b miteinander vertauscht werden. Die Feldlinien bilden ellipsenähnliche Kurven, wie in Abb. 21.4 gestrichelt angedeutet.

Die Beziehungen (21.101) und (21.102) gelten auch für das Feld innerhalb des Leiters, wenn der Leiter die gleiche Permeabilität besitzt wie die Umgebung. Genau so wie außerhalb des Leiters addieren sich auch im Innern in jedem Punkt des Leiterquerschnitts die Wirkungen der Ströme aus den übrigen Querschnittsteilen. Dagegen gilt im Innern der Leiter nicht die Laplacesche Potenzialgleichung, bei deren Ableitung vorausgesetzt wurde, dass der betrachtete Raumteil stromlos ist. Beim geraden Leiter mit Kreisquerschnitt

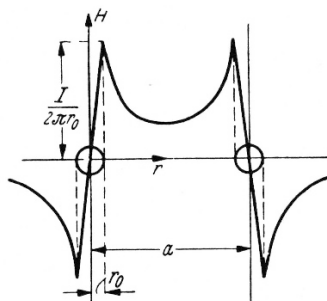


Abbildung 21.5. H-Feld bei einer Doppelleitung

muss wegen der Symmetrie das H-Feld im Innern des Leiters ebenso wie außerhalb für Punkte gleichen Abstandes von der Achse konstante Werte haben;

die Feldlinien sind konzentrische Kreise. Man kann daher das Durchflutungsgesetz unmittelbar anwenden. Bei gleichmäßiger Verteilung des Stromes über den Leiterquerschnitt ist die durch eine Feldlinie mit dem Radius r hindurchgeführte Stromstärke

$$I_r = \frac{r^2}{r_0^2} I, \quad (21.110)$$

wenn r_0 wieder den Leiterradius und I den Gesamtstrom bezeichnen. Daher wird nach dem Durchflutungsgesetz

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \|\mathbf{H}\| \oint_C ds = \|\mathbf{H}\| 2r\pi = \frac{r^2}{r_0^2} I, \quad (21.111)$$

$$\|\mathbf{H}\| = \frac{r}{2\pi r_0^2} I. \quad (21.112)$$

Auf der Verbindungsebene der beiden Drahtachsen ergibt sich damit ein Verlauf des H-Feldes, wie ihn Abb. 21.5 zeigt.

Das Feld im Leiterinnern genügt nicht der Laplaceschen Potenzialgleichung. Diese lautet im vorliegenden zylindrischen Fall aufgrund der Rotationssymmetrie (vgl. Anhang B.1)

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \quad (21.113)$$

Aus der Gl. (21.112) ergibt sich das Potenzial ($H := \|\mathbf{H}\|$)

$$\psi = - \int H r d\alpha = - \frac{1}{2\pi} \frac{r^2}{r_0^2} \alpha I + k. \quad (21.114)$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = - \frac{1}{\pi} \frac{r}{r_0^2} \alpha I; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = - \frac{1}{\pi} \frac{\alpha I}{r_0^2}. \quad (21.115)$$

Der Ausdruck auf der linken Seite von Gl. (21.113) wird daher $-(2/\pi)(\alpha I/r_0^2)$, ist also von Null verschieden.

Küpfmüller Theoretische Elektrotechnik
Elektromagnetische Felder, Schaltungen und
elektronische Bauelemente

Mathis, W.; Reibiger, A.

2017, XXXIV, 789 S. 377 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-54836-3