

14.5 Einwirkung elektrischer Felder auf Elektronenbahnen: Elektronenoptik

Die im elektrischen Feld auf Elektronen ausgeübten Kräfte finden vielfache Anwendung bei Elektronenströmen im Hochvakuum. Als Beispiel werde die *Braunsche Röhre* schematisch betrachtet, deren Prinzip durch Abb. 14.5 dargestellt ist. Von der Kathode K (Glühkathode, siehe Abschnitt 38) werden Elektronen ausgestrahlt. Eine zwischen der Anode A und der Kathode K liegende Gleichspannung U_a beschleunigt diese Elektronen; jedes Elektron nimmt dabei eine bestimmte Geschwindigkeit v sowie eine kinetische Energie an, die gleich der Arbeit ist, die ihm vom elektrischen Feld zugeführt wird.

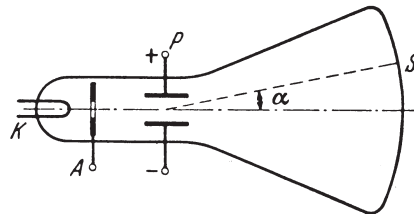


Abbildung 14.5. Die Braunsche Röhre

Wäre die Masse des Elektrons unabhängig von der Geschwindigkeit, so wäre seine kinetische Energie $(1/2)mv^2$ und daher mit den Gln. (13.3) und (13.4)

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU_a. \quad (14.48)$$

Hieraus folgt die Geschwindigkeit des Elektrons nach dem Durchlaufen der Spannung U_a

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m}U_a}. \quad (14.49)$$

Diese Beziehung gilt, solange die Geschwindigkeit v klein gegen die Lichtgeschwindigkeit c ist. Bei höheren Geschwindigkeiten nimmt die Masse des Elektrons von dem Ruhewert m_0 auf den der Geschwindigkeit v entsprechenden Wert m zu (vgl. Abschnitt 37.2.1). Nun ist der Energieinhalt einer Masse m allgemein durch mc^2 gegeben. Die Differenz des Energieinhaltes mc^2 bei der Geschwindigkeit v und des Energieinhaltes des ruhenden Elektrons m_0c^2 wird durch die elektrisch zugeführte Arbeit eU_a gedeckt:

$$mc^2 - m_0c^2 = eU_a. \quad (14.50)$$

Hieraus erhält man mit Gl.(37.85)

$$v = c \frac{\sqrt{1 + 2\eta}}{1 + \eta}, \quad (14.51)$$

wobei zur Abkürzung

$$\eta = \frac{m_0 c^2}{e U_a} \quad (14.52)$$

gesetzt ist.

Da die kinetische Energie eines Elektrons gleich $e U_a$ ist, kann sie durch die „Anlaufspannung“ U_a ausgedrückt werden, d.h. durch die Spannung, gegen die das Elektron anlaufen könnte, ehe es zum Stillstand kommt. Man gibt die kinetische Energie bewegter Elektronen deshalb häufig in Elektronenvolt an, benutzt also $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Ws}$ als Energieeinheit. Bei einer Anlaufspannung von 1000 V ist die Energie des Elektrons $1000 \text{ eV} = 1 \text{ keV}$. Dabei ist

$$\eta = \frac{m_0 c^2}{e U_a} = \frac{9,11 \cdot 10^{-28} \cdot 9 \cdot 10^{20} \text{ g cm}^2}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1000 \text{ V As s}^2} = 512. \quad (14.53)$$

Damit wird

$$v = c \frac{\sqrt{1025}}{513} = 0,0624 c = 18700 \frac{\text{km}}{\text{s}}. \quad (14.54)$$

Für einige weitere Spannungswerte gibt die folgende Tabelle 14.1 die Elektronengeschwindigkeit an. In der Braunschen Röhre wird mit Anlaufspannungen

$U_a (\text{V}) =$	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
$\eta =$	51200	5120	512	51,2	5,12	0,512	0,0512
$v/c =$	0,00625	0,0198	0,0624	0,195	0,548	0,941	0,999
$v (\frac{\text{km}}{\text{s}}) =$	1874	5940	18710	58500	164300	282000	299500

Tabelle 14.1. Elektrische Spannung und Elektronengeschwindigkeit

von einigen 100 bis zu einigen 10000 V gearbeitet.

Durch eine Öffnung in der Anode gelangen die Elektronen in den Ablenkraum; die Auftreffstelle des Elektronenstrahles wird auf dem Leuchtschirm S beobachtet. Mit Hilfe der Plattenkondensatoren, die der Strahl durchläuft, und von denen einer in Abb. 14.5 angedeutet ist, kann der Strahl abgelenkt werden, da auf jedes Elektron durch das elektrische Feld des Plattenkondensators eine Kraft senkrecht zur Achsenrichtung ausgeübt wird. Bezeichnet U die Spannung zwischen den beiden Ablenkplatten, d den Plattenabstand, dann ist die ablenkende E-Feldstärke U/d und die quer zur Achse der Röhre gerichtete Beschleunigung der Elektronen $eU/(md)$. Die Elektronen beschreiben daher eine Parabelbahn ähnlich wie ein waagrecht abgeworfener Stein im Gravitationsfeld der Erde. Die Beschleunigung wirkt auf die Elektronen während der Zeit $\tau = l/v$ ein, die sie zum Durchlaufen des Plattenkondensators mit der Länge l benötigt. Die Elektronen erhalten daher in der Ablenkrichtung eine Geschwindigkeitskomponente

$$v_1 = \frac{e}{m} \frac{U}{d} \frac{l}{v}. \quad (14.55)$$

Ihre Bewegungsrichtung am Ausgang des Kondensators ist gegeben durch

$$\tan \alpha = \frac{v_1}{v} = \frac{e}{m} \frac{U}{d} \frac{l}{v^2} \approx \frac{1}{2} \frac{l}{d} \frac{U}{U_a}. \quad (14.56)$$

Die Ablenkung des Leuchtpunktes auf dem Leuchtschirm ist also proportional der Ablenkspannung U und umgekehrt proportional der Anlaufspannung U_a der Elektronen. Da die Elektronenlaufzeit τ im Ablenkbereich sehr kurz ist (z.B. bei $U_a = 1 \text{ kV}$, $v = 19000 \text{ km/s}$ wird für $l = 2 \text{ cm}$: $\tau = l/v = 10^{-9} \text{ s}$), so gilt diese Proportionalität auch bei zeitlich rasch veränderlichen Ablenkspannungen bis zur Größenordnung 10^8 Hz .

Eine scharfe Bündelung des Elektronenstrahles auf dem Leuchtschirm kann durch eine „elektrische Linse“ herbeigeführt werden. Eine solche Linse wird dargestellt durch ein rotationssymmetrisches elektrisches Feld, dessen Feldlinien im wesentlichen parallel zur Strahlachse verlaufen. Jedes derartige Feld wirkt auf einen Elektronenstrahl in ähnlicher Weise wie eine Glaslinse auf einen Lichtstrahl. Dies folgt ebenfalls aus der Wirkung der Feldkräfte auf die Elektronen.

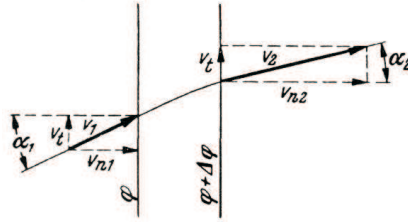


Abbildung 14.6. Brechung von Elektronenbahnen im elektrischen Feld

Fliegt ein Elektron mit der Geschwindigkeit v_1 in den Raum zwischen zwei nahe benachbarten Potenzialflächen mit dem Potenzialunterschied $\Delta\varphi$, Abb. 14.6, so wird die Flugrichtung durch die Feldkräfte geändert. Das Elektron beschreibt eine Wurfparabel, wobei die senkrecht zu den elektrischen Feldlinien gerichtete Geschwindigkeitskomponente v_t unverändert bleibt, während die kinetische Energie sich entsprechend der Potentialdifferenz von dem Wert $(1/2)mv_t^2 = e\varepsilon$ auf den Wert $(1/2)mv_t^2 = e(\varepsilon + \Delta\varphi)$ vergrößert. Für die Eintritts- und Austrittswinkel folgt daher

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{\Delta\varphi}{a\varphi}}. \quad (14.57)$$

Diese Beziehung entspricht dem *Brechungsgesetz* der Optik. Die Potenzialflächen entsprechen den Grenzflächen zwischen Stoffen verschiedener Brechzahl. Mit Hilfe der Gl. (14.57) kann die Bahnkurve eines Elektrons in einem beliebigen elektrischen Feld abschnittsweise konstruiert werden, wenn das Feldbild bekannt ist.

Ein anderes Verfahren zur Abschätzung der Elektronenbahnen in einem elektrischen Feld besteht darin, dass man den Vektor der elektrischen Feldstärke abschnittsweise in die beiden Komponenten senkrecht und parallel zur Bahnrichtung zerlegt. Die letztere hat keinen Einfluss auf die Bahnkurve und ergibt nur eine Beschleunigung oder Verzögerung des Elektrons, während die erstere eine Ablenkung des Elektrons verursacht.

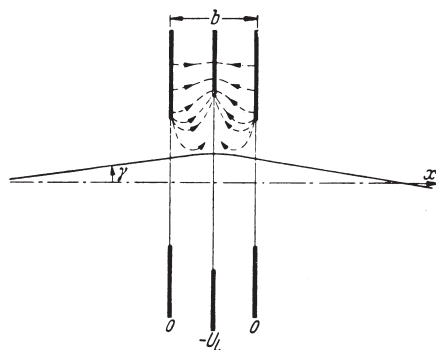


Abbildung 14.7. Elektrische Linse

Die Abb. 14.7 zeigt als Beispiel das Schema einer sogenannten *Einzellinse*. Sie besteht aus drei ringförmigen ebenen Blechscheiben, von denen die beiden äußeren gleiches Potenzial 0 haben und die mittlere das negative Potenzial $-U_L$ besitzt. Da hier also die gesamte von den Elektronen durchlaufene Spannung Null ist, wird die Geschwindigkeit der Elektronen beim Austritt aus der Linse ebenso groß wie beim Eintritt. Die Wirkung der Linse besteht darin, dass die Elektronen in der Mitte der Linse radial gegen die Achse hin gerichtete Kräfte erfahren, die mit dem Abstand von der Achse rasch wachsen. Man erkennt dies, wenn man das genauere Feldbild Abb. 14.7 betrachtet, in dem auch der Verlauf der radialen Komponente E_r in Achsennähe sowie der Verlauf der axialen Komponente E_x in der Achse angegeben ist. Für einen Elektronenstrahl, der in Achsennähe das Feld durchläuft, kann man etwa folgende Gebiete unterscheiden: Das Gebiet $0 \cdots 1$, in dem die radiale Komponente des E-Feldes nach der Achse hin gerichtet ist, das Gebiet $1 \cdots 3$, in dem diese Komponente von der Achse weg zeigt, und das Gebiet rechts von 3, in dem wieder die gleichen Verhältnisse wie im Gebiet $0 \cdots 1$ vorliegen. In dem ersten Gebiet wird daher der Elektronenstrahl von der Achse weggebogen. Im zweiten Gebiet wirken dagegen Kräfte auf die Elektronen ein, die zur Achse hin gerichtet sind. Wegen der größeren Dichte der Feldlinien in diesem Gebiet ergibt sich eine entsprechend stärkere Krümmung der Elektronenbahn. Im dritten werden die Elektronen wieder von der Achse weggelenkt, so dass sich eine entgegengesetzte Krümmung des Strahles ergibt. Die daraus hervorgehen-

de Elektronenbahn ist in Abb. 14.8 oben eingezeichnet. Das erste und dritte Gebiet sind Zerstreuungsgebiete, das mittlere Gebiet ist das Sammlungsgebiet. Die genaueren Verhältnisse sollen an Hand von Abb. 14.9 untersucht werden.

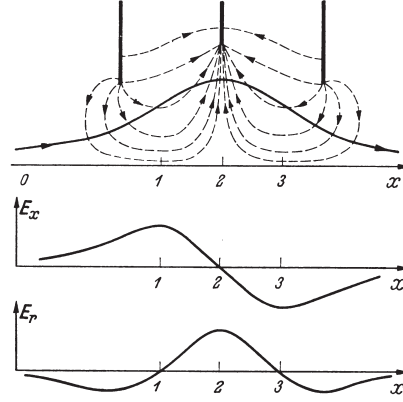


Abbildung 14.8. Feldverteilung und Elektronenbahn in der elektrischen Linse

In einem Punkt P der Elektronenbahn mit dem Abstand r von der Achse kann die Geschwindigkeit des Elektrons in die beiden Komponenten v_x und v_r zerlegt werden. Das E-Feld in dem Punkt P lässt sich ebenfalls in die beiden Komponenten E_x und E_r zerlegen, von denen die erste die Achsenrichtung hat und die zweite radial gerichtet ist. Die radiale Beschleunigung ist

$$\frac{dv_r}{dt} = -\frac{e}{m} E_r. \quad (14.58)$$

Nun ist die Zeit dt , die das Elektron zum Durchlaufen eines kurzen Abschnittes des E-Feldes von der Länge dx benötigt, $dt = dx/v_x$. Daher folgt

$$v_r = \frac{dr}{dt} = v_x \frac{dr}{dx}, \quad (14.59)$$

und es wird aus Gl.(14.59)

$$\frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{dx} \frac{dx}{dt} = v_x \frac{dv_r}{dx} = v_x \frac{d}{dx} \left(v_x \frac{dr}{dx} \right) = -\frac{e}{m} E_r. \quad (14.60)$$

Zwischen dem radialen Anteil E_r und dem Längsanteil E_x des E-Feldes auf der Achse eines solchen rotationssymmetrischen E-Feldes besteht nun in der Nähe der Achse ein einfacher Zusammenhang, der dadurch bedingt ist, dass jede Abnahme des Längsanteils ein radiales Entweichen der E-Feldlinien zur Voraussetzung hat und umgekehrt. Man erkennt diesen Zusammenhang genauer, wenn man einen kleinen Zylinder von der Länge dx und dem Radius dr

Betrachtung von Abb. 14.8 zeigt, wie dieser Zusammenhang auch aus dem Feldlinienbild hervorgeht, E_r ist dem negativen Differentialquotienten von E_x proportional. Setzt man E_r aus Gl.(14.63) in Gl.(14.60) ein, so folgt

$$v_x \frac{d}{dx} \left(v_x \frac{dr}{dx} \right) = -\frac{1}{2} r \frac{e}{m} \frac{d^2 \varphi}{dx^2}. \quad (14.64)$$

Nun ist bei achsennaher Bahn $v_x \approx v$ an jeder Stelle x durch die insgesamt durchlaufene Spannung $U_a + \varphi$ bestimmt, nämlich

$$v_x = \sqrt{2 \frac{e}{m} (U_a + \varphi)}, \quad (14.65)$$

wenn U_a die Anlaufspannung der Elektronen beim Eintritt in die Linse ($x = 0$) ist. Damit wird aus Gl.(14.64)

$$\sqrt{U_a + \varphi} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{U_a + \varphi} \frac{dr}{dx} \right) = -\frac{1}{4} r \frac{d^2 \varphi}{dx^2}. \quad (14.66)$$

Durch Integration ergibt sich hieraus mit $r \approx \text{konst.} = r_m$ innerhalb der Linse

$$\frac{dr}{dx} = -\frac{1}{4} r_m \frac{1}{\sqrt{U_a + \varphi}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{U_a + \varphi}} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \gamma. \quad (14.67)$$

dr/dx stellt den Winkel der Bahn gegen die Achse dar unter der hier gemachten Voraussetzung, dass dieser Winkel klein ist; für $x = 0$ ergibt sich der Eintrittswinkel γ als Integrationskonstante.

Den Austrittswinkel findet man, wenn man x gleich der Dicke b der Linse setzt. Für $x = b$ wird $\varphi = 0$, und es ergibt sich daher für den Austrittswinkel

$$\delta = -\frac{1}{4} r_m \frac{1}{\sqrt{U_a}} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{U_a + \varphi}} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \gamma = -\frac{r_m}{f} + \gamma, \quad (14.68)$$

wobei zur Abkürzung

$$f = \frac{4\sqrt{U_a}}{\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{U_a + \varphi}} \frac{d^2 \varphi}{dx^2}} \quad (14.69)$$

gesetzt ist. Da nun nach Abb. 14.9 $\gamma = r_m/a_1$ und $-\delta = r_m/a_2$ ist, wenn man b gegen a_1 und a_2 vernachlässigen kann, so ergibt sich aus Gl.(14.68)

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{f}. \quad (14.70)$$

Dies ist die Linsenformel der Optik; Gl.(14.69) gibt die Brennweite f der elektrischen Linse an. Die Brennweite ist unabhängig von r_m , solange gemäß den bei der Ableitung gemachten Voraussetzungen r_m hinreichend klein ist; das bedeutet aber, dass sich alle von einem Punkt A der Achse ausgehenden achsennahen Strahlen in ein und demselben Punkt B der Achse vereinigen.

wie bei einer optischen Sammellinse ergibt sich die in B eine Abbildung einer senkrecht von der Achse geschnittenen Fläche in A .

Die Brennweite lässt sich durch Verändern der Spannung U_L einstellen. Je größer U_L gemacht wird, um so kleiner wird nach Gl. (14.69) die Brennweite der Linse. Bei der Braunschen Röhre kann man mit Hilfe von solchen Linsen die Kathode oder eine Blende auf dem Leuchtschirm abbilden und dadurch einen scharfen Leuchtpunkt herstellen. Diese Eigenschaften der Elektronenstrahlen werden ferner zur Abbildung von elektronenemittierenden Oberflächen und von elektronenstreuenden oder -undurchlässigen Gegenständen benutzt (Elektronenmikroskope, Übermikroskope, Bildwandler).