

2 Kardinale Zeitmengen

Abstrakt

Eine ordinale Zeitmenge stellt für die von einem Beobachter beobachteten Ereignisse eine vollständige Ordnung her. Wenn dieser Beobachter die begründete Vermutung hat, dass die Abstände zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignissen nicht gleich sind, er aber über keine geeigneten Hilfsmittel verfügt, diese Abstände quantifizieren und vergleichen zu können, dann bleibt die vergleichende Bewertung des Werteverzehrs der einzelnen Transformationen nur unbefriedigend gelöst.

Also führen wir hier Konstrukte ein, mit denen wir Zeitabstände - vergleichbar zu Länge, Masse und Temperatur - messen können. Wenn wir diese Konstrukte - wie die Temperatur - auf eine allgemein beobachtbare Basis stellen, dann können wir Produktionskalender vereinbaren, die die Ereignisse in einem Produktionsbereich in eine vollständige Ordnung bringen, und andererseits Zeitabstände in einem mit einer reellen Zahl ausdrückbaren Verhältnis vergleichen. Und wenn die zugrundegelegte Basis auch für andere Produktionskalender gilt, dann können auch die Ereignisse dort mit den eigenen in eine Relation gebracht werden.

Inhaltsverzeichnis

• Zeitmengen	93
- Grundmodell einer additiven Zeitmenge	93
- Einschränkung der Zeitmenge	100
- Begrenzte Zeitmenge mit variabler Bewertung der Zeiteinheiten	101
- Additive Zeitmenge mit Modulo-Zeit	105
- Grundmodell einer multiplikativen Zeitmenge	107
- Zeitabschnittsmenge	108
• Kalender	110
- Zeitmodelle	111
- Produktionskalender	113
- Umrechnung von Zeitmengen	123
- Zeitabhängige Attribute und Relationen	127
• Faktorströme/Zeitfunktionen	130
- Einheitenströme	130
- Reguläre und nicht reguläre Ströme	131
- Zeitinvarianz	143
- Stochastische Prozesse	147
• Aufgaben	157
- Fragen	157
- Antworten	161
• Literatur	168

Ordinale Zeitmengen betrachten originäre (Produktions-) Prozesse. Sie erstellen hinsichtlich des Definitionsbereiches T eine vollständige Ordnung der (Produktions-) Ereignisse.¹ Jetzt wollen wir zusätzlich etwas über die Abstände der einzelnen Elemente t einer Zeitmenge T aussagen.² Eine ordinale Zeitmenge kann über diese Abstände keine Aussagen machen. Dazu brauchen wir einen Maßstab, der von den Elementen der zu ordnenden Zeitmenge unabhängig ist und uns seinerseits Zeitelemente/-einheiten liefert, um etwas über diese Abstände aussagen zu können.³

Gegeben sei eine Transformation a (bspw. die Montage von Fahrrad Nirwana), die vom Zeitpunkt A bis zum Zeitpunkt B verläuft, und eine zweite Transformation b , die vom Zeitpunkt B bis zum Zeitpunkt C verläuft.⁴ Der Anfangspunkt von b falle mit dem Endpunkt von a zusammen. Die Länge der Zeit zwischen dem Punkt A und dem Punkt C betrachten wir als das Ergebnis der Kombination von a und b . Wir verwenden die Operation „ $\circ$ “, um die Additivitätsregel für die Messung von zeitlichen Längen T zu formulieren:

$$T(a \circ b) = T(a) + T(b).^5$$

Wenn von zwei Transformationen die eine genau dann beginnt, wenn die andere endet, dann wird die Länge der Gesamttransformation die arithmetische Summe der Länge der beiden Teiltransformationen sein. Diese Additivitätsregel können wir nur auf Transformationen anwenden, die zeitlich benachbart sind, aber nicht auf beliebige Paare von Transformationen.⁶

Als Zeiteinheit wählen wir die Perioden einer von uns gewählten sich wiederholenden Transformation (im Kontext „Produktion“ bspw. der Takt einer Montagelinie). Wir sagen, dass jede dieser Strecken die Länge Eins hat.⁷

Wir können jetzt jedes beliebige Zeitintervall messen, indem wir einfach zählen, wie oft sich die Einheits-Periode ereignet, während die Transformation stattfindet, deren zeitliche Länge wir messen wollen. Die Gleichheitsregel besagt, dass zwei Zeitintervalle (die möglicherweise weit auseinanderliegen) gleich sind, wenn sie die gleiche Zahl von Einheitsperioden enthalten. Wir können nun den periodischen Prozess P mit einem anderen periodischen Prozess P' vergleichen, um zu sehen, ob sie „äquivalent“ sind. P' sei bspw. die Montage von Fahrrad Hades auf einer zweiten Montagelinie. Die Perioden der beiden Montagetransformationen sind nicht gleich. Wir vergleichen, indem wir die montierten Fahrräder beider Fahrradtypen während eines längeren Zeitintervalls zählen. Wenn wir finden, dass eine gewisse Zahl von Perioden eines Prozesses P stets mit einer gewissen

¹ siehe Bd. 1, Methodische Grundlagen, Kap. 5, Relationen oder [BRSE79]. Auch für kardinale Zeitmengen gelten die Aussagen, die wir für ordinale Zeitmengen zusammengestellt haben.

² siehe Bd. 1, Methodische Grundlagen, Kap. 7, Klassifizieren, Ordnen, Skalieren, Messen. Wenn wir jetzt nach einem Maßstab für die Zeit suchen, mit dem wir bspw. Zeitabstände vergleichen können, dann liegt damit eine Zeitmenge vor, die außerhalb des betrachteten Produktionsbereiches begründet ist/sein kann. In diese Zeitmenge ordnen wir die bisher beobachteten Zeitelemente wie „Chef kommt, Beginn Montage Fahrrad Nirwana, ...“ ein. Das heißt dann aber bspw. „09.00 Uhr $\leq$ Chef kommt, Beginn Montage Fahrrad Nirwana, ... < 10.00 Uhr“ (siehe Abschnitt Umrechnung von Zeitmengen). Wenn wir bisher von „Montag, Dienstag, ...“ gesprochen haben, dann geschah dies nur zur Anschaulichkeit. Wir haben bisher nicht gesagt, dass alle Tage gleich lange dauern, wann der Dienstag beginnt, usw. Genau das wollen wir in diesem Abschnitt leisten.

Zahl von Perioden eines Prozesses P' übereinstimmt, stellen wir fest, dass die beiden Periodizitäten äquivalent sind.

Die Natur besitzt eine große Klasse periodischer Prozesse, die zueinander in diesem Sinne äquivalent sind. Alle schwingenden Pendel gehören zu dieser Klasse, alle Bewegungen von Unruh-Rädern in Uhren, die scheinbare Bewegung der Sonne am Himmel usw. Wenn wir beschließen, unsere Zeitskala auf einem periodischen Prozess aufzubauen, der nicht zu dieser großen Klasse äquivalenter Prozesse gehört, bspw. auf dem Pulsschlag von Julius S., stellen wir fest, dass ein Tag so und so viele Pulsschläge lang ist, wenn Julius S. gesund ist. Tage, an denen er Fieber hat, sind viel länger. Wenn Julius S. am Montagabend im Freizeitsport eine gewisse Zeit schnell läuft und dann stehen bleibt, gehen nach seinem Puls viele Prozesse in der Natur langsamer vor sich. Kurze Zeit später beim gemeinsamen Abendessen haben sie dann wieder ihre vorherige Geschwindigkeit. Wir müssen daher unsere Wahl nach der Einfachheit treffen: Wenn wir ein Pendel als Zeit-Basis wählen, wird das System der physikalischen Gesetze viel einfacher als bei einem Pulsschlag. Diese Einfachheit würde verschwinden, wenn wir unser System der Zeitmessung auf einem Prozess aufbauten, der nicht zu der großen Klasse untereinander äquivalenter Prozesse gehört - der Pulsschlag einer bestimmten Person gehört zu einer sehr kleinen Klasse äquivalenter Prozesse. Abgesehen von Transformationen, die mit dem Kreislauf von Julius S. zu tun haben, würde es schwierig sein, einen zweiten Prozess in der Natur zu finden, der mit seinem Puls äquivalent wäre. Es ist daher zweckmäßig, als Basis für die Zeitmessung einen Prozess aus einer möglichst großen Klasse zu nehmen.

Wenn wir mit einem solchen Maßstab messen, dann können wir die Gleichzeitigkeit von „Müller kommt“ und „die Maschine fällt aus“ feststellen; beide Ereignisse ordnen wir in diesem Fall demselben Element unseres Maßstabes zu. Auf dem Maßstab selbst ist diese Gleichzeitigkeit eliminiert. Die Atomuhr tickt nicht zum selben Zeitpunkt zweimal - und jedes Ticken kann eindeutig mittels „<“, geordnet werden. Im folgenden diskutieren wir

³ Zur *Zeitmessung* in Prozessen werden hauptsächlich Systeme verwendet, die periodisch in denselben Zustand zurückkehren. Die Zeit wird dann durch das Zählen der Perioden bestimmt. Ein solches Gerät nennen wir Uhr. Doch auch monotone Bewegungen können Basis der Zeitmessung sein, z. B. bei den früheren Sand- und Wasseruhren.

Eine Uhr ist umso besser, je genauer der periodische Vorgang reproduzierbar ist und je weniger er sich von äußeren Bedingungen beeinflussen lässt, bspw. von mechanischen Störungen, der Temperatur oder magnetischen Feldern. Wenn wir als Uhr den Prozess „Bahnbetrieb der Deutschen Bahn AG“ verwenden, dann können wir täglich das Wiedereintreten desselben Zustands feststellen. Also können wir damit die Tage zählen. Bei der Bestimmung der Minuten werden wir bei der Unpünktlichkeit der Bahn zwar Schwierigkeiten haben, aber prinzipiell wäre auch das möglich. Samstag, Sonntag und Feiertage würden wir auf unserer Uhr nicht registrieren, wenn die festgelegten Zustände dort nicht eintreten. Die genauesten Uhren sind Atomuhren, die auf atomaren Schwingungsprozessen beruhen. Damit ist ein relativer Gangfehler erreichbar, der einer Sekunde Abweichung in 10^{15} Jahren entspricht. Die Zeit und damit auch die Frequenz, ihr mathematischer Kehrwert, sind die physikalischen Größen, die mit der höchsten Präzision überhaupt messbar sind, was dazu geführt hat, dass die Definition der Länge mittlerweile auf die der Zeit zurückgeführt wird, indem man den Meter als diejenige Strecke definiert, die das Licht im Vakuum während $1/299.792.458$ Sekunden zurücklegt [WIKIPEDIA].

⁴ Einen Zeitpunkt verstehen wir als ein Zeitelement, das einem Ereignis mit hinreichend kleiner zeitlicher Ausdehnung zugeordnet ist. Beispiele können „Chef kommt“ oder „Werker Müller beginnt mit Fahrrad Nirwana“ sein. Im jeweils betrachteten Kontext wird kein solches Zeitelement von einem anderen Zeitelement in zwei Zeitelemente zerteilt.

also zunächst Eigenschaften der Uhren, nicht der originären Zeitmengen, und deren Eignung für die Produktion. Wenn wir hier die Produktion ansprechen, dann sollten wir der Vollständigkeit halber noch folgenden Gedanken anführen: Wir verwenden nicht den Pulsschlag von Julius S. und auch nicht die vergleichsweise schwach periodische Zeitmenge des Eintreffens der Mitarbeiter aus Beispiel 16-3, sondern die Beginnzeitpunkte der Montagelinie Julius - dies ist der Prozess, auf den wir eine Vielzahl auch externer Vorgänge abstimmen müssen. Genau hier liegt das Problem: Wie übermitteln wir einem Lieferanten, dass nach Beheben einer längeren Störung jetzt der 84. Takt der Woche beginnt? Und eine derart komplizierte (Online-) Zeitübertragung müsste dieser Lieferant mit allen seinen Kunden bewältigen. Also ist es in der Regel zweckmäßiger, die Ereignisse in Paskalk auf einen allgemein beobachtbaren und rekonstruierbaren Prozess umzurechnen - und beim Lieferanten in dessen Prozesse umzusetzen.⁸

Wir beginnen unsere Diskussion der *kardinalen Zeitmengen* mit dem einfachsten algebraischen Konzept und einer einseitig begrenzten Zeitmenge.

• Zeitmengen

– Grundmodell einer additiven Zeitmenge

Wir betrachten eine bis ∞ fortlaufende Zeitmenge mit algebraischer Struktur und einem Nullpunkt t_0 . Negative Werte, also $t < t_0$, werden ausgeschlossen. Zeitliche Abstände drücken wir aus, indem wir den Abstand eines Zeitelements t zum minimalen Element t_0 verwenden. Eine *additive Zeitmenge* $(T, +, <, t_0)$ definieren wir durch:⁹

(1) $(T, +)$ ist ein Monoid mit Nullelement t_0 .¹⁰

⁵ Genauso vereinbaren wir im folgenden die additive Zeitmenge: Wir messen keine „Dauern“ als Differenzen zwischen einem Beginn- und einem Endezeitpunkt einer Transformation, um dann diese „Dauern“ addieren zu können, auch wenn die betrachteten Transformationen zeitlich nicht benachbart sind. Vielmehr zählen wir stets ausgehend vom Nullpunkt eines Maßstabs und lassen dort die erste Transformation beginnen. Also ist unsere Vorstellung weniger ein im Hintergrund immerwährend laufender Prozess, auf dem wir uns einordnen, sondern vielmehr eine „Stoppuhr“, die wir mit dem Beginn der betrachteten Transformation in Gang setzen. Bildlich gesprochen setzen wir die Stoppuhr mit dem Beginn des 100-m-Laufes in Gang. Unmittelbar anschließend folgen die zweiten 100 m. Wir lassen die Stoppuhr weiterlaufen und sagen: $T(0 - 100 \circ 100 - 200) = T(0 - 100) + T(100 - 200)$.

⁶ Damit machen wir indirekt zwei Aussagen:

- Die Zeit ist im Gegensatz zur Länge einheitlich gerichtet.
- Wie bei der Länge müssen die beiden betrachteten Transformationen/Ereignisse genau einen gemeinsamen (Zeit-)Punkt besitzen.

Nur dann können wir auf einen gerichteten Maßstab ohne Lücken/Abstände abbilden. Diesen Maßstab führen wir wie bei der Länge zwischen dem Beobachter und dem beobachteten Gegenstand ein.

⁷ siehe Bd. 1, Methodische Grundlagen, Kap. 7, Klassifizieren, Ordnen, Skalieren, Messen, Abschnitt Messung physikalischer Größen

⁸ Aber dann liefert der Lieferant wie vereinbart zwischen 10.15 und 10.30, nicht zum Beginn des 84. Taktes.

$$(2) \quad \forall t, t' \in T \quad \exists t'' \in T \quad t + t'' = t' \vee t' + t'' = t.$$

$$(3) \quad \forall t, t', t'' \in T \quad t' + t = t + t'' \leftrightarrow t' = t''.$$

$$(4) \quad \forall t, t' \in T \quad t' + t = t_0 \rightarrow t' = t_0.$$

(5) $<$ ist eine Relation auf T , die gegeben ist durch

$$t < t' : \leftrightarrow \exists t'' \in T \quad t'' \neq t_0 \wedge t + t'' = t'.$$

Also folgt immer: Zeit t + Zeit $t' =$ Zeit t'' . Als Operationszeichen ist daher auch nur „+“ vereinbart. Ein negatives Zeitelement kann nicht verwendet bzw. nicht vereinbart werden. Daher ist auch keine Addition von Zeiten/Zeitstrecken/Zeitintervallen möglich, die in die Vergangenheit zeigen.¹¹ Eine additive Zeitmenge $(T, +, <, t_0)$ bezeichnen wir mit dem Symbol „+ time“.

Beispiel 2-1: Zeitmenge + time

Zeitmenge $(T, +, <, t_0) := (\{0, 10, 20, 30, \dots\} \subset \mathbb{N}, +, <, 0)$

Die fünf Bedingungen der obigen Definition sind erfüllt.

■

Beispiel 2-2: Betriebsstundenzähler

Wir schauen auf den Betriebsstundenzähler einer Fräsmaschine. Er steht bei 80, wir warten, bis er bei 85 steht. Aber es geht nie zurück zu 75. $80 + 5 = 85$ ist erlaubt, aber nicht $80 - 5 = 75$.

■

Eine derartige additive Zeitmenge beschreibt zutreffend die reale Zeit:¹²

- t_0 ist der aktuelle Zeitpunkt
- In die Vergangenheit können wir uns nicht bewegen.
- In die Zukunft können wir uns sehr wohl bewegen - wir müssen nur warten. Also ist die Addition von zwei Zeitelementen in Wahrheit die Addition des zweimaligen Wartens von t_0 bis t' bzw. von t_0 bis t'' . Und t' bzw. t'' bestimmen sich bspw. aus der Anzahl

⁹ Das ist die Uhr, die die Dauer der Zugehörigkeit des HSV zur Bundesliga in Sekunden zählt. Und auf dieser Uhr tragen wir die Zeitpunkte der Amtsantritte und die Amtsdauern der einzelnen Präsidenten ein. Oder es ist eben die Uhr, die mit dem Start eines Marathonlaufes in Bewegung gesetzt wird. Weil wir in dieser Zeitmenge „=“ eliminiert haben und Additivität zulassen, müssen wir den Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Anzeigeereignissen als gleich voraussetzen.

¹⁰ Neutrales Element, siehe Bd. 1, Methodische Grundlagen, Kap. 6, Algebra, Abschnitt Algebraische Systeme mit inneren Verknüpfungen

¹¹ siehe „Additivität“ in Bd. 2, Statische Konstruktionen, Kap. 2, Faktorale Konzeption: Aktivitäten, Abschnitt Diskrete, additive und lineare Technismengen

¹² Wenn jemand behauptet, das sei ein Modell der realen Zeit, dann ist das zu mindestens nicht unsinnig: Es ist nicht möglich, durch irgendwelche Rechenoperationen zu Zeitpunkten t mit $t < t_0$ zu gelangen. Die reale Zeit startet mit dem Urknall, und es ist uns nicht möglich, in die Vergangenheit zu kommen. Aber wir können zu jedem beliebigen Punkt in der Zukunft kommen, wenn wir nur genügend lange warten; beliebig = heute + genügend langes Warten.

der Sonnenauf- bzw. -untergänge.

- Damit ist konsequenterweise nur eine Vorwärtsterminierung¹³ möglich; genau das drücken die 5 Bedingungen aus - definierter Startpunkt der Zeit (der „Urknall“) und Unendlichkeit in Richtung Zukunft. Und dafür immer Addition - das ideale Konzept, die reale Zeit zu messen und alle Ereignisse darauf abzubilden.
- Wir können zwei additive Zeitmengen zusammensetzen:
 $(T, +, <, t_0) < (T', +, <, t_0')$, siehe Verrechnung von Zeitmengen.
- Wir können Zeitfunktionen über additive Zeitmengen konkatenieren.
- Wir können aussagen, dass ein bestimmtes Zeitintervall „dreimal so lange dauert“ wie ein anderes.

Demnach betrachten wir in einem Produktionsbetrieb einen Produktionspunkt, an dem ab t_0 gezählt wird.

Beispiel 2-3: Arbeitszeit

Wir haben als Abszisse eine Zeitachse, auf der Addition unbeschränkt möglich ist: „Wir haben 5 Stunden gearbeitet, jetzt arbeiten wir noch weitere 3 Stunden. Dann haben wir insgesamt 8 Stunden gearbeitet und Zeitelement t erreicht.“

Diese Addition ist sinnvoll und korrekt. Zu diskutieren ist aber die Ausprägung der mit dieser Zeitmenge verbundenen Zeitfunktionen. Möglicherweise macht dort die Addition nur dann Sinn, wenn wir nach 8 Stunden genauso viele Räder montiert haben, wie wenn wir von vornherein 8 Stunden Fahrräder montiert hätten. Wir könnten ja bspw. nach 3 Stunden 6 Fahrräder, nach 5 Stunden 12 Fahrräder montiert haben. Aber wir werden müde und haben nach 8 Stunden nur 14 Fahrräder montiert. Also gilt: $6 + 12 \neq 14$, und es gibt keine „doppelte“ Additivität.¹⁴

Wir haben eine Additivität auf der Abszisse - und ggf. eine Konkatenation, die dann für die Anzahl produzierter Fahrräder für die Aussage „weitere 3 Stunden“ auf den bereits produzierten 5 Stunden aufsetzt und da fortfährt, ohne wieder ausgeruht von vorne anzufangen. Die Werker sind da genau gleich müde, wie wenn sie von vornherein 8 Stunden arbeiten.



Also betrachten wir im folgenden Zeitfunktionen über $(T, <)$ und verstehen diese als periodisch tickende Uhr: Wir stehen bspw. am Ende der Fahrradmontage und protokollieren zu jedem Zeitpunkt die Anzahl fertiggestellter Fahrräder („Fortschrittszahl“).

Es gilt dann das Gesetz¹⁵: In einer additiven Zeitmenge $(T, +, <, t_0)$ gelten für beliebige $t, t', t'' \in T$ die Beziehungen

$$I \quad t' + t = t + t' \quad \text{kommutativ,}$$

¹³ siehe bspw. [GKS72], [DANG09]

¹⁴ siehe Bd. 2, Statische Konstruktionen, Kap. 2, Diskrete, additive und lineare Technismengen. Das Beispiel ist nicht linear.

¹⁵ siehe auch Bd. 1, Methodische Grundlagen, Kap. 7, Klassifizieren, Ordnen, Skalieren, Messen, Abschnitt Kardinale Merkmale: Maßstab/Skala

II	$t + t' = t + t'' \rightarrow t' = t''$	linke Kürzung,
III	$t < t' \vee t = t' \vee t' < t$	vollständig,
IV	$\neg(t < t)$	nicht reflexiv,
V	$t < t' \rightarrow \neg(t' < t)$	nicht symmetrisch,
VI	$t < t' \wedge t' < t'' \rightarrow t < t''$	transitiv,
VII	$t < t' \leftrightarrow t'' + t < t'' + t'$	linksinvariant,
VIII	$t < t' \rightarrow t < (t' + t'')$	rechtserweiternd,
IX	$t \neq t_0 \leftrightarrow t_0 < t$	t_0 ist minimal,
X	$t' \neq t_0 \leftrightarrow t < (t + t')$	echt zunehmend.

Hier gibt es eine Einschränkung: Eine additive Zeitmenge $(T, +, <, t_0)$ besitzt nicht die Struktur einer Zeitmenge $(T, \leq, t_0)$ mit der oben eingeführten Definition; die Relation $<$ ist zwar transitiv und schwach asymmetrisch, aber nicht reflexiv, und daher keine Ordnungsrelation¹⁶:

- Bedingung (1) heißt: „Monoid“. Damit muss man mit T rechnen können, je nachdem, welche Verknüpfung angegeben ist, auch multiplizieren. Und man darf nicht „out of model“ geraten. Das ist mit einer begrenzten Menge wie {Meier, Müller, Meiers, Meyer, ...} nicht möglich.
- Das $\leq$ in $(T, \leq, t_0)$ lässt beginnend mit Abstand „0“ („=“) jeden beliebigen zeitlichen Abstand zu - es ist nichts darüber ausgesagt. Es gibt nur „gleich“ oder „kleiner“. In $(T, +, <, t_0)$ existiert kein „gleich“ - das „kleiner“ ist zu definieren (die Einheit „1“ ist festzulegen), und damit der (minimale) Abstand zwischen t und t' .

Die Erklärung ist sehr einfach: $(T, \leq, t_0)$ modelliert die reale Welt, bspw. auch das Geschehen bei den S.-Werken in der Produktion - eine große Vielzahl nebenläufiger Prozesse.¹⁷ $(T, +, <, t_0)$ modelliert eine Uhr mit einem so gewählten Aufeinanderfolgen der Zeitelemente, dass wir die Folge der „Tick-Tacks“ als Maß für die Zeit vorgeben können: Der „Abstand“ zwischen zwei „Tick-Tacks“ ist immer gleich - wir tun wenigstens so. Und es gibt keine zwei gleichzeitigen „Ticktacks“. Aber wenn wir die reale Welt auf diese Uhr abbilden, dann ist ein reales Ereignis möglicherweise gleichzeitig mit einem „Ticktack“, manche sind zwischen zwei „Ticktacks“ (siehe Beziehung III). Also brauchen wir eine Vorgehensweise zur Darstellung der realen Ereignisse auf einer „künstlichen Uhr“. Wenn wir dies erreichen wollen, gilt: Es bezeichne $=$ die Identität auf T , also $= := \{(t, t) : t \in T\}$. Wir definieren dann die Relation $\leq$ durch die Vereinigung $\leq := < \cup =$. Die Relation $\leq$ entsteht also aus $<$ durch Hinzunahme aller Diagonalelemente von $T \times T$.

Es gilt das folgende Gesetz: Es sei $(T, +, <, t_0)$ eine additive Zeitmenge. Dann stellt $(T, \leq, t_0)$ - also die um die Diagonalen-Elemente erweiterte Relation $<$ - eine Zeitmenge im Sinne unserer oben gegebenen Definition dar. Zum Beweis haben wir uns zu überzeugen,

¹⁶ siehe Bd. 1, Methodische Grundlagen, Kap. 5, Relationen oder [BRSE79]

¹⁷ Zur Transformation von additiven Zeitmengen in allgemeine Zeitmengen siehe [PICH75], [WIND67], [WIND71]. „Nebenläufige Prozesse“ siehe bspw. [LEEG89].

dass $\leq$, wie es hier aus $=$ und $<$ konstruiert wurde, eine vollständige Ordnungsrelation auf der Menge T ist. Da $= \subset \leq$ gilt, ist $\leq$ offenbar reflexiv. Gilt $t \leq t' \wedge t' \leq t$, so ist dies gleichbedeutend damit, dass $(t < t' \vee t = t') \wedge (t' < t \vee t = t')$ gilt, oder weiter ausgerechnet $(t < t' \wedge t' < t) \vee (t < t' \wedge t = t') \vee (t = t' \wedge t' < t) \vee (t = t')$. Wegen der Beziehungen (IV) und (V) des vorhergehenden Gesetzes ($<$ ist nicht reflexiv und nicht symmetrisch) kann aber nur $t = t'$ gelten. Dass $\leq$ transitiv ist, folgt unmittelbar daraus, dass $<$ nach (VI) des vorhergehenden Gesetzes transitiv ist und dass auch $=$ transitiv ist, des weiteren sehen wir, dass $\leq$ vollständig ist, da bereits $<$ nach (III) vollständig ist. Die Relation $\leq$ ist also eine vollständige Ordnungsrelation auf der Menge T . Dass t_0 bezüglich $\leq$ minimal ist, folgt unmittelbar aus (IX) des vorhergehenden Gesetzes. $(T, \leq, t_0)$ ist also eine Zeitmenge. Wir nennen $(T, \leq, t_0)$ die von der additiven Zeitmenge $(T, +, <, t_0)$ induzierte Zeitmenge.¹⁸

Beispiel 2-4: Zuordnung zu additiver Zeitmenge

Der Beweis betrachtet zwei Zeitelemente t und t' . Wir gehen davon aus, dass t ein Element der Zeitmenge der Uhr ist, bspw. 12.00 Uhr. t' sei ein Zeitelement aus der realen Welt, das wir jetzt einzuordnen haben. Also gilt in der Regel $t < t' \vee t' < t$. Nur wenn das Zeitelement „Beginn der Montage Fahrrad Nirwana“ genau um 12.00 Uhr stattfindet, gilt $t \leq t' \vee t' \leq t$. Damit haben wir die Zeitmenge der realen Beginnereignisse nach den Zeitelementen der Uhr strukturiert. Wir können bei einer Uhr mit den Zeitelementen 12.00, 13.00, 14.00, ... ein Beginnereignis, das 12.37 stattfindet, dann entweder 12.00 oder 13.00 zuordnen (bzw. dem Intervall 12.00 bis 13.00). Und dann beginnen ggf. in der induzierten Zeitmenge $(T, \leq, t_0)$ mehrere Fahrräder zum Zeitpunkt $t = 12.00$.



In der Produktion sind zwei spezielle additive Zeitmengen von besonderem Interesse:

- (1) $(N_0, +, <, 0)$, wobei N_0 die Menge der natürlichen Zahlen mit der Null 0, $+$ die übliche Addition und $<$ die übliche „kleiner“ Relation natürlicher Zahlen bedeuten, ist eine additive Zeitmenge. Sie ist der Prototyp einer diskreten Zeitmenge.
- (2) $(R_+, +, <, 0)$, wobei R_+ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen, $+$ die übliche Addition und $<$ die übliche „kleiner“ Relation auf R_+ bezeichnen, ist eine additive Zeitmenge. Sie ist der Prototyp einer kontinuierlichen Zeitmenge.¹⁹

¹⁸ Die entsprechende Argumentation gilt genauso für die Längen- oder Temperaturmessung in Bd. 1, Methodische Grundlagen, Kap. 7, Klassifizieren, Ordnen, Skalieren, Messen, Abschnitt Messung physikalischer Größen

¹⁹ Eine kontinuierliche Zeitmenge erlaubt ein beliebig genaues Einordnen eines Ereignisses. Damit ist aber auch die Vorgabe an ein Produktionssystem beliebig genau. Es gibt keinen „Dispositionsspielraum“ für eine unterlagerte Planungsebene oder für den Werker - die Vorgabe ist völlig exakt und damit die Abweichung zwischen Plan und Ist zwangsläufig. Dementsprechend muss auch jede Transformation einzeln rückgemeldet werden - eine Sammelmeldung am Ende des Zeitabschnitts ist nicht ausreichend. Bei einem Zeitraster - also einer diskreten Zeitmenge - stellt das Zeitelement dagegen den minimalen Spielraum für den Werker oder eine unterlagerte Planungsebene dar.

Es könnte sich folgende induzierte Zeitmenge ergeben:

$\{(0, \{\text{Bauer, Müller, Meier, Metzger}\}), (1, \{\text{Bürger, Maler, Schulze}\}), (2, \{\text{Burger}\}), (3, \{\text{Cicero}\}), (4, \{\text{Caesar, Schultze, Schmid}\}), (5, \{\text{Konrad, Schmied}\}), (6, \{\text{Kurt}\}), (7, \{\text{Maier}\}), (8, \{\text{Meiers, Schmitt, Schmidt}\}), (9, \{\text{Meyers}\}), (10, \{\text{Mayer}\})\}$.



Beispiel 2-6: Endmontage

Wenn jedes Werkstück einen Takt repräsentiert, kann über die Anzahl der Takte ein zeitlicher Abstand ausgesagt werden: 0, 1, 2, 3 ... Takte oder $(T, +, <, t_0): = (\{\text{Bauer, Bürger, Burger, Cicero, Cäsar, Konrad, Kurt, Maier, Meiers, Meyers, Mayer}\}, +, <, \text{Bauer})$, wenn die Namen der Kundenaufträge diese Zeitelemente bezeichnen.²⁰



Beispiel 2-7: Additive Zeitmenge Montagelinie

Wir starten mit einer additiven Zeitmenge, also bspw. dem Takt einer Montagelinie. Und dann ordnen wir alles nach diesen Takten. Ein Ereignis in der Lackiererei ist entweder $<$ oder $=$ einem bestimmten Takt, wenn wir eingeordnet haben. Hier ist der Ansatz: Wir lassen bei den S.-Werken alles nach dem Takt der Endmontage laufen und machen keine Aussage in Richtung Universal Time.²¹ Und dann können wir über $(T, +, <, t_0)$ eine Menge $(T, \leq, t_0)$ induzieren.



Beispiel 2-8: Entnahme aus dem Wareneingangslager

„ $\leq$ “ wirkt ereignisgetrieben wie ein Bestellpunkt: Die Entnahme definiert als Ereignis den Zeitpunkt. Hier können zwei Entnahmen gleichzeitig vorgenommen werden. „ $<$ “ wirkt zeitgetrieben wie ein Bestellzyklus: Der vorgegebene Zeitpunkt definiert, wann die einzelnen Entnahmen verbucht werden. Die vorgegebene Zeitpunkt-Menge ist redundanzfrei und ggf. per Definition äquidistant.²² Aber damit existieren nur die vorgegebenen Zeitpunkte! Und die Entnahmen werden diesen Zeitpunkten zugeordnet ($\rightarrow \leq$): Alle Entnahmeereignisse haben genau den Zeitpunkt, zu dem sie verbucht werden; also mehrere Ereignisse mit demselben Zeitpunkt.



Beispiel 2-9: Additive Zeitmenge mit Linearaddition

Es liegt die folgende Aussage vor:

„Wir machen eine Rückwärtsrechnung in irgendeinem Modell und berechnen bspw., wann wir hätten anfangen müssen,

- um rechtzeitig fertig zu sein
- nur bis zu einem bestimmten Grad in Stress zu geraten
- um eine „Erscheinung“ nutzen zu können

Dazu müssen wir nur - ausgehend von t_0 - das Minuszeichen vor t_1 einführen. Dann gilt alles bisher Gesagte analog.“

Eine solche Zeitmenge könnten wir bspw. folgendermaßen vereinbaren: Eine *unbeschränkte Zeitmenge* $(T, +, <, t_0)$ ist definiert durch:

- (1) $(T, +)$ ist eine Gruppe.

²⁰ wobei „Bauer“ dann den Beginn des ersten Takts bezeichnet, so dass Bürger + Burger = Cicero

²¹ zur „Universal time“ siehe [GEDR79], [BEP186].

²² Ggf. werden Feiertage, Urlaub, unterschiedliche Monatsdauern usw. einfach nivelliert.

$$(2) \quad \forall t, t' \in T \quad \exists t'' \in T \quad t + t'' = t' \vee t' + t'' = t.$$

$$(3) \quad \forall t, t', t'' \in T \quad t' + t = t + t'' \leftrightarrow t' = t''.$$

$$(4) \quad \forall t, t' \in T \quad \exists t' \in T \quad t + t' = t_0.$$

(5) $<$ ist eine Relation auf T , die gegeben ist durch

$$t < t' : \leftrightarrow \exists t'' \in T \quad t'' \neq t_0 \wedge t + t'' = t'.$$

Hier könnten wir bspw. auf R und Z zurückgreifen und einen negativen Zeitverbrauch einführen.

Derartige Konzepte einer Rückwärtsterminierung ausgehend von einem gegebenen Endtermin sind in der Produktionsplanung und -steuerung üblich. Trotzdem ist die vorliegende Aussage zu hinterfragen: Das zugrundeliegende Zeitmodell ist auch in diesem Fall eine hier diskutierte additive Zeitmenge. Es ist nicht möglich, durch irgendeine Transformation der Art „Wandeln“, „Transportieren“ oder „Speichern“ in der Zeit wieder zurückzukommen. Also ist z. B. eine zu klärende Frage, ob der kleinste zeitliche Abstand „Null“ oder „Eins“ ist, was die zugrundeliegende reale Zeiteinheit ist usw. (siehe Kalender). Aber das Zeitmodell geht davon aus, dass die Zeit immer von t_0 in Richtung Zukunft wegläuft.



– Einschränkung der Zeitmenge

Generell ist das Konzept der Einschränkung von Zeitmengen das gegebene Mittel zur Beschreibung des Übergangs von einer Zeitbeschreibung zu einer zugehörigen „gröberen“ Zeitbeschreibung mit einer anderen Zeiteinheit:

Es bezeichne $(T, +, <, t_0)$ eine additive Zeitmenge. Für eine Zeitmenge U betrachten wir dann die von $(T, <)$ induzierte Ordnungsstruktur $(T', <')$, die gegeben ist durch $T' := T \cap U$ und $<' \subset T' \times T' : t' < t'' \leftrightarrow t' < t''$. Existiert in $(T', <')$ ein minimales Element $t_0' \in T'$, dann stellt $(T', +, <, t_0')$ eine Zeitmenge mit dem minimalen Element t_0' dar. Wir bezeichnen sie als die *Einschränkung der Zeitmenge* $(T, +, <, t_0)$ auf die Menge U .

Beispiel 2-10: Zeitansage

Eine Uhr, die prinzipiell in der Lage ist, Sekunden anzuzeigen, ist so geschaltet, dass sie jede Minute die Zeit ansagt. Die Vorstellung ist hier nicht: Unsere „Stoppuhr“ läuft in bestimmten Zeitabschnitten nicht, und dann läuft sie wieder. Die hier betrachtete Uhr würde dann ja dort fortsetzen, wo sie vorher angehalten hat.²³ Daher wäre diese „Einschränkung“ auf unserer Uhr gar nicht sichtbar. Die Vorstellung ist vielmehr: Wir schauen nur zu bestimmten Zeitpunkten auf die Uhr. Die entscheidende Frage ist hier aber: Was passiert mit „+“, also einer Addition von Zeiten, die nicht ganze Minuten addiert? Diese Additionen gibt es nicht mehr. Nur zur ganzen Minute kann jetzt eine ganzzahlige Anzahl von Minu-

²³ ... der HSV ist wieder in die Bundesliga aufgestiegen. Jetzt läuft die Uhr wieder.

ten addiert werden. Weil jetzt unsere Stoppuhr auf „Minuten“ diskretisiert ist, können wir Zeitdauern von einer oder von zwei Sekunden nicht mehr darstellen.

Also kann U nicht beliebig gewählt werden: Mit U muss eine Zeitmenge T' generiert werden, in der wieder Additivität gewährleistet ist. Damit gilt T' als Quotientenmenge von T/U mit 0-59 sec. $\rightarrow$ Minute.

■

– Begrenzte Zeitmenge mit variabler Bewertung der Zeiteinheiten

Für eine gegebene additive Zeitmenge $(T, +, <, t_0)$ und für die Mengen T^t mit $t > t_0$, T_t mit $t \in T$ und $T_{t,t'}$ mit $t < t'$, die definiert sind durch $T^t := \{t'' : t'' \in T \wedge t'' < t\}$, $T_t := \{t'' : t'' \in T \wedge t \leq t''\}$ und $T_{t,t'} := \{t'' : t'' \in T \wedge t \leq t'' < t'\}$, seien die zugehörigen Einschränkungen time/T^t , time/T_t und $\text{time}/T_{t,t'}$ mit $\text{time}/T^t = (T^t, +, <, t_0)$, die Vergangenheit von t , $\text{time}/T_t = (T_t, +, <, t)$, die Zukunft von t , und $\text{time}/T_{t,t'} = (T_{t,t'}, +, <, t)$, das Zeitintervall mit Startzeit t und Stoppzeit t' .

Da wir für die Zukunft keine obere Beschränkung haben, ist die Zukunft einfach eine Zeitmenge, in der t_0 durch t als minimales Element ersetzt wird. Aber die Vergangenheit und das Zeitintervall haben jetzt eine Obergrenze, die bei der Addition nicht ignoriert werden kann: Meinen wir nur die Zeitelemente $t \in T$, dann ist das ganze trivial, oder meinen wir die Vorschrift $(T^t, +, <, t_0)$, in der ja alle Zeitpunkte außerhalb T^t ausgeschlossen sind. Damit müssen sich alle Additionen auf die Vergangenheit beschränken: Bspw. übernimmt die neue Geschäftsführung, die am 1. Juli antritt, keine offenen Transaktionen für die Zukunft. Also dürfen wir nichts mehr anfangen, was darüber hinaus geht. Dagegen ist ein Stichtag „Heute“ viel einfacher, wenn wir nur fragen: Wieviele Transaktionen sind zum Stichtag 1. Juli offen? Und wie viele haben wir bis dahin abgeschlossen? Das ist dann etwas ganz anderes als die Addition aus einer Menge in das Nichts hinein.

Wir betrachten allgemein eine bis t^* fortlaufende Zeitmenge mit algebraischer Struktur und einem Nullpunkt t_0 . Negative Werte mit $t < t_0$ schließen wir aus. Zeitliche Abstände drücken wir aus, in dem wir den Abstand eines Zeitelements t zum minimalen Element t_0 verwenden. Eine *begrenzte Zeitmenge* $(T, +, <, t^*, t_0)$ ist definiert durch:

- (1) $(T, +)$ ist ein Monoid mit Nullelement t_0 .
- (2) $\forall t, t' \in T \quad \exists t'' \in T \quad t + t'' = t' \vee t' + t'' = t$.

Falls $t + t'' \vee t' + t'' \notin T$:²⁴

Fall 2a: Kürzen des Summanden²⁵

$$t'' := (t + t'' = t^* \vee t' + t'' = t^*)$$

²⁴ Wir protokollieren: „außerhalb des Definitionsbereichs“.

²⁵ Wir kürzen die Summe: Am Ende der Schicht ist eine Kiste ggf. teilbar.

Fall 2b: keine Summation²⁶

$$t'' := (t + t' = t \vee t' + t'' = t')$$

$$(3) \quad \forall_{t, t', t'' \in T} \quad t' + t = t + t'' \leftrightarrow t' = t''.$$

$$(4) \quad \forall_{t, t' \in T} \quad t' + t = t_0 \rightarrow t' = t_0.$$

$$(5) \quad < \text{ ist eine Relation auf } T, \text{ die gegeben ist durch } t < t' : \leftrightarrow \exists_{t'' \in T} \quad t'' \neq t_0 \wedge t + t'' = t'.$$

Beispiel 2-11: Begrenzung einer Zeitmenge

Wir begrenzen eine Zeitmenge, die mit dem Beginn einer Woche startet und ein Minutenraster definiert, mit dem Zeitelement „Donnerstag, 00.00 Uhr“ und erhalten ein Zeitintervall „Donnerstag“ bis einschließlich Mittwoch 23.59 Uhr.



Wir gehen im Weiteren von einer *begrenzten*, nicht zyklischen *Zeitmenge* eines Faktors aus: $T := \{t\}$ mit $t_0 \leq t \leq t^*$. Mit zunehmender Zeit soll jetzt aber der Abstand t'' zwischen zwei Zeitpunkten t, t' abhängig von der Differenz $(t^* - t)$ als immer kleiner und bei $t = t^*$ schließlich als „Null“ empfunden werden. Dann ist wieder die Zeitfunktion in Ziffer (2) zu ändern. Wir wählen bspw.

$$(2c) \quad \forall_{t, t', t'' \in T} \quad t'' = \frac{1}{2}((1 - t/t^*) + (1 - t'/t^*)) \cdot (t - t') \text{ mit } (t \geq t'),$$

$$t_0'' = (1 - 0/t^*) \cdot (t - t'), \quad t^{*''} = (1 - t^*/t^*) \cdot (t - t').$$

Sei T ein abgeschlossenes Intervall der reellen Zahlen $[t_0, t^*]$. Wenn t^* eine endliche Zahl ist, dann startet t_0'' , also der Abstand zwischen zwei Zeitpunkten, bei t_0 mit $1 \cdot (t - t')$ und endet bei t^* mit $0 \cdot (t - t')$. Solange $t_0'' = 1 \cdot (t - t')$ ist, ist ein Faktor im Status der Geburt, komplett neu. Wenn nichts passiert, also die Zeit nicht fortschreitet, bleibt dieser Zustand erhalten. Am Ende der Zeitmenge ist $t_0'' = 0 \cdot (t - t')$, der Faktor ist „tot“. Kurz vorher wird der Abstand in der Zeit immer kleiner, die Zeit läuft immer schneller ab: Die Zeit zerrinnt, der Faktor gerät immer mehr in „Stress“. Am Ende fallen alle Ereignisse zusammen. Zwei Grenzfälle sind interessant: $t^* = 0$ und $t^* = \infty$. Für $t^* = \infty$ gilt: $(1 - t/\infty) = 1 = \text{const.}$, damit ist der Abstand zwischen zwei Zeitpunkten t, t' nur vom Intervall, aber nicht von der Lage des Intervalls abhängig. Ein solcher Faktor ist „unsterblich“, „fühlt sich immer neu geboren“ und „tickt“ mit absolut konstanten Zeitabständen vor sich hin: Genau das gilt für ein Pendel, das als Zeitmesser eingesetzt wird. Für das Pendel ändert sich nie etwas, es tickt absolut gleichförmig. Da es nicht „stirbt“, hat es immer Zeit und nie „Stress“, seine Zeitmenge ist unveränderlich „ ∞ “. $t^* = 0 \cdot (t - t')$ ist dagegen der Zustand am Ende einer Zeitmenge: Es gibt kein weiteres Zeitelement, keine

²⁶ Wir verkürzen den zweiten Summanden: Am Ende der Schicht nur ganze Kiste.

weiteren Ereignisse mehr. Die Zeitmenge ist aufgebraucht. Und da $0 : 0$ nicht definiert ist, ist auch keine Zeit mehr definiert. Das ist das Ende der Welt (siehe bspw. [KURZ99])²⁷ für diesen Faktor: „Man möchte noch so viel, es bleibt aber keine Zeit mehr“.

Beispiel 2-12: „Beliebig viel Zeit“

Wir betrachten die Situation zu Beginn und zum 1000. Zeitelement der Zeitmenge mit $t^* = \infty$:

$$t' = t_0, t = t_1: t'' = \frac{1}{2}((1 - t_1/\infty) + (1 - t_0/\infty)) \cdot (t_1 - t_0) = 2/2 = 1$$

$$t' = t_{999}, t = t_{1000}: t'' = ((1 - 1000/\infty) + (1 - 999/\infty))/2 \cdot (1000 - 999) = 2/2 = 1$$



Beispiel 2-13: „Stress“

Die S.-Werke haben 20 Tage Lieferzeit ($t^* = 20$) mit ihrem Großkunden vereinbart. Die „Gemütslage“ des Vertriebsmitarbeiters (bzw. sein Zigarettenkonsum) wird durch die folgende Zeitfunktion beschrieben:

$$t' = t_0, t = t_1: t'' = \frac{1}{2}((1 - t_1/t_{20}) + (1 - t_0/t_{20})) \cdot (t_1 - t_0) = 1,95/2 \quad (\text{„Absolute, souveräne Ruhe“})$$

$$t' = t_{19}, t = t_{20}: t'' = \frac{1}{2}((1 - 20/20) + (1 - 19/20)) \cdot (t_{20} - t_{19}) = 0,05/2 \quad (\text{„Herzinfarkt“})²⁸.$$

Wenn wir das mit etwas Abstand interpretieren: 1,95/2 bzw. 0,05/2 ist die Zeit, die „gefühlt“ für ein Ereignis verbleibt.²⁹ „Gefühlte Zeit“ ist wie folgt zu verstehen: Es existiert eine Zeitmenge, die auf einem Pendel mit unendlicher Zeit beruht, immer gleichförmig, immer stressfrei, keine Anstrengung und keine Schwäche oder Krankheit. In dieser Zeitmenge messen wir den Abstand von zwei Zeitpunkten, also bspw. 10 Jahre. Darüber hinaus existiert neben dieser objektiven Zeitmenge eine subjektive Zeitmenge, eine

²⁷ „Und wenn das Universum sich endlos ausdehnt? Dann würden die Sterne und Galaxien ihre Energie schließlich ganz aufzehren. Übrig bliebe ein sich weiter auseinanderdehnender stellarer Friedhof. Ein gewaltiges Chaos entstünde - viel Zufälligkeit ohne sinnvolle Ordnung. Nach dem Gesetz von Zeit und Chaos würde die Zeit auf diese Weise schrittweise zum Stillstand kommen. Und freilich gäbe es in einem solchen toten Universum auch keine Wesen mehr, die seine Existenz bewusst wahrnehmen könnten. Nach der Quantenmechanik und nach den fernöstlichen subjektivistischen Sichtweisen hieße es, das Universum würde aufhören zu existieren.“ R. Kurzweil: Homo sapiens [KURZ99]

²⁸ Alternativ: Die Taktzeit bleibt unverändert, aber die Einheit des Durchflusses wird verändert. Der Durchfluss berechnet sich dann über ein Integral (siehe Bd. 2, Statische Konstruktionen, Kap. 3, Funktionale Konzeption, Abschnitt Mittelbare Wirkrelationen). Die Einheit des Durchflusses bleibt unverändert (bspw. 1 Auto), aber die Taktzeit nimmt ab. Daher ist es auch nicht gleichgültig, ob wir die Betrachtung am 10. oder am 100. Takt aufsetzen.

²⁹ Angenommen, der Chef ist nicht da. Dann kann man am Anfang der 20 Tage noch 2 Tage warten, am Ende der 20 Tage ruft man ggf. den Chef an der Copacabana an, um eine Entscheidung in 0,05/2-Komma-Nichts zu erhalten. Wir können uns aber sehr wohl vorstellen, dass wir immer mehr Personal parallel einsetzen, um die Produktion zu beschleunigen.

Zeitfunktion, auf die wir dieses Zeitintervall als Individuum beziehen.³⁰



Beispiel 2-14: „Langeweile“

Die Lebenszeit betrage 80 Jahre. Die Normierung der Jahre von 50 bis 60 beträgt mit

$$t'' = \frac{1}{2}((1 - t/t^*) + (1 - t'/t^*)) \cdot (t - t')$$

$$t'' = \left(\left(1 - \frac{60}{80}\right) + \left(1 - \frac{50}{80}\right) \right) / 2 \cdot (10) = (0,25 + 0,375) / 2 \cdot (10) =$$

$$0,625 / 2 \cdot (10) = 3,125.$$

Wir legen bspw. fest: Wenn einem Menschen eine Zeitspanne doppelt so lange und länger als die normierte Zeit erscheint, hat er Langeweile. Dann gilt: Kommt die Zeitspanne vom 50. bis zum 60. Lebensjahr einem Menschen wie $\geq 6,25$ Jahre vor, hat er Langeweile (Das ist ungefähr die Situation von 20 - 30: (1,375 : 0,2)).



Wir verändern die Vorstellung von der additiven Zeit so, dass die Zeitabstände trotz prinzipiell unbegrenzter Zeit mit fortlaufender Zeit als immer kleiner empfunden werden.³¹ Dazu verändern wir Bedingung (2); im folgenden Beispiel sei unsere Zeitmenge definiert durch

$$(2) \quad \forall t, t', t'' \in T \quad t'' = \frac{2 \cdot (t - t')}{t + t'} \cdot (t - t') \quad \text{mit } t \geq t'$$

t'' ist vom Intervall und vom Mittelwert von t und t' abhängig.

Beispiel 2-15: „Älterwerden“

$3 \cdot 30$ Jahre sind 90 Jahre, aber von 30 bis 60 dauert es länger als von 60 bis 90:

$$2(60 - 30) / (60 + 30) > 2(90 - 60) / (60 + 90)$$

$$60/90 > 60/150$$

³⁰ Das ist genau die oben diskutierte Situation, wenn jeder die Zeit mit seinem eigenen Pulsschlag misst: Für unterschiedliche Menschen läuft die Zeit unterschiedlich schnell - ein Tag dauert für den einen länger, für den anderen weniger lang. Sagen wir also: Mit zunehmendem Alter wird der Pulsschlag immer langsamer ... „1 Jahr“ sind dann aber trotzdem 365 Sonnenaufgänge!

³¹ Westfalen-Blatt Nr. 304, 31.12.2011

„Die Zeit rennt mit dem Alter schneller, weil man viel mehr Gleichartiges erlebt hat. Der Neuigkeitswert ist geringer“, erklärt Prof. Dr. Markowitsch, Hirnforscher an der Uni Bielefeld. Ein Kind mache ständig neue Erfahrungen, die verarbeitet werden müssten und im Gehirn Speicherplatz benötigten. Mit dem Alter nehme das ab. Es geschehe weniger, was so fasziniere, dass es neue Spuren im Hirn hinterlasse. Von einem weiteren Erklärungsversuch der Wissenschaft berichtet Prof. Dr. Staiger: „Die biologische innere Uhr läuft mit dem Alter langsamer. Es könnte sein, dass deshalb die physikalische Zeit als schneller empfunden wird.“

Intervall

t	t'	Zeitinter- vall	Bewer- tung	Anzahl Zeit- elemente	t	t'	Zeitinter- vall	Bewer- tung	Anzahl Zeit- elemente
0	1	t'' _{0, 1}	2/1	· 1	8	9	t'' _{8, 9}	2/17	· 1
1	2	t'' _{1, 2}	2/3	· 1	9	10	t'' _{9, 10}	2/19	· 1
2	3	t'' _{2, 3}	2/5	· 1	10	11	t'' _{10, 11}	2/21	· 1
3	4	t'' _{3, 4}	2/7	· 1	60	61	t'' _{60, 61}	2/121	· 1
4	5	t'' _{4, 5}	2/9	· 1	60	80	t'' _{8, 9}	40/140	· 20
5	6	t'' _{5, 6}	2/11	· 1	90	95	t'' _{90, 95}	10/185	· 5
6	7	t'' _{6, 7}	2/13	· 1	80	100	t'' _{80, 100}	40/180	· 20
7	8	t'' _{7, 8}	2/15	· 1					



– Additive Zeitmenge mit Modulo-Zeit

Wir geben die Vorstellung von der ständig fortlaufenden unendlichen bzw. begrenzten Zeit auf. Dagegen sollen *Modulo Strukturen* möglich sein: Eine *Zeitmenge mit Modulo-Addition* ist definiert durch

- (1) $(T, +)$ ist ein Monoid mit Nullelement t_0 .
- (2) $\forall t, t' \in T \quad \exists t'' \in T \quad t + t'' = t' \vee t' + t'' = t$.
- (3) $\forall t, t', t'' \in T \quad t' + t = t + t'' \leftrightarrow t' = t''$.
- (4) Abgeschlossenheit in T : $\forall t, t' \in T \quad t + t' = t'', t'' \in T$ und Moduloaddition.
- (5) $<$ ist eine Relation auf T , die gegeben ist durch $t < t' : \leftrightarrow \exists t'' \in T \quad t'' \neq t_0 \wedge t + t'' = t'$.

Beispiel 2-16: Z_{24} als tägliche Zeitmenge in Stunden

Wir betrachten eine Uhr mit einem 24 Stunden Ziffernblatt und der Zeitmenge $T := (Z_{24} := \{0, 1, 2, \dots, 23\}, +, <, t_0)$

- (1) assoziative Addition, Addition Nullelement $\checkmark$.
- (2) Zwei Werte t, t' sind entweder gleich oder einer von den beiden ist der größere.
- (3) Gleichgültig ist, ob t der erste oder der zweite Summand, das Ergebnis ist dasselbe.
- (4) Die Definition des Grundmodells sieht vor: Jede weitere Addition entfernt uns weiter von t_0 . Hier können wir uns von t_0 wegbewegen und dann von „hinten“ nach t_0 (also von links! nach t_0) kommen. Also gibt es mit Z_{24} ein „Zurück“.
- (5) Auch in einer Modulo-Struktur gilt die $<$ -Relation: Wenn t'' nicht t_0 ist, dann verändert t'' einen Wert t bei einer Addition nach t' . Aber: Als Voraussetzung ist in (5) vorge-schrieben: $t < t'!$ Also bewegen wir uns innerhalb Z_{24} ; Wir haben immer ein Element, mit

dem wir ein beliebiges t bis t' , maximal $t' = 23$, ergänzen können. Also gilt: Ein Tag hat 24 Stunden, alles was darüber hinausgeht, betrifft den nächsten Tag. Das kann über das neutrale Element t_0 durch eine Rechtsaddition erreicht werden, z. B. $17.00 + 8.00 = 1.00$, und ein Tag ist mit $[0, 24)$ vereinbart. Das ist höchst einfach: Die Uhr schwappet in der Nacht auf Null. Dann ist das einfach „Dienstag, 09.00“ oder „Mittwoch, 16.00“. Das ist aber nicht: „Ein Bohrer wird neu geschliffen und hat jetzt wieder die volle Standzeit“ oder „Ein Inder wird neu geboren und beginnt jetzt sein nächstes Leben“. Das wäre - wie bereits betrachtet - ein neues t_0 und die Obergrenze wieder ∞ oder 100 Jahre. Der Zyklus, den wir bei einem Bohrer oder einem Inder betrachten, hat mit dem alten nichts zu tun - man ist am Ende eines solchen Zyklus „tot“ und nimmt nichts mit in das nächste Leben.³²



Beispiel 2-17: Diskrete Uhr $Z_{12}, +$

Wir betrachten bspw. die Uhr an der Wand mit den Ziffern von 1 bis 12. Diese Uhr sagt nichts darüber aus, ob Vormittag oder Nachmittag ist und sie sagt auch nichts über den Tag aus. Das wissen wir aus anderen Quellen. Wenn wir jetzt als x diese Uhr und als y die über einer Woche fortschreitende Zeit betrachten, dann ist am Montagvormittag der Zeiger auf 11, am Montagnachmittag auf 11, am Dienstagvormittag auf 11 Uhr. Und auch für die Zeigerstellung „0“ haben wir zwei y -Werte am Montag. Dasselbe gilt für ein Handrad an einer Drehmaschine: Die Stellung ist wieder auf „Null“, der Drehstuhl aber einer Umdrehung entsprechend „woanders“.

Zwei solche Uhren können wir addieren und miteinander vergleichen.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10



³² Das ist möglicherweise nicht ganz korrekt - auch die Leben des Inders stehen zueinander in Bezug. Aber die wichtige Aussage ist: Hier ist der Dienstag die ganz normale Zukunft vom Montag, auch wenn am Dienstag wieder von vorn gezählt wird.

– Grundmodell einer multiplikativen Zeitmenge

Im folgenden betrachten wir eine Zeitmenge T mit algebraischer Struktur und einem neutralen Element t_1 , von dem wir Vielfache miteinander in Relation setzen: Eine *multiplikative Zeitmenge* $(T, \cdot, <, t_1)$ ist definiert durch

(1) T ist eine nach oben unbeschränkte Menge mit dem minimalen Element t_1

(2) $\cdot$ ist eine vollständige äußere Verknüpfung $\alpha \times T \rightarrow T$ mit $\alpha \geq 1$

(3) $\forall_{t, t' \in T} \exists_{\alpha \in K} \alpha | t = \alpha \cdot t' \vee t' = \alpha \cdot t$

(4) $\forall_{t \in T} \forall_{\alpha, \beta \in K} \alpha \cdot t = \beta \cdot t \leftrightarrow \alpha = \beta$.

(5) $\forall_{\alpha \in K} \alpha \cdot t = t_1 \rightarrow t = \frac{t_1}{\alpha}, \alpha \cdot t = t \rightarrow \alpha = 1$

(6) $t' > t: \leftrightarrow \exists_{\alpha \in K} \alpha > 1 \wedge \alpha \cdot t = t'$

Vergleichbar zur Addition darf hier nur multipliziert, nicht dividiert werden.³³ Während beim Addieren alle Zeitpunkte durch Zusammenfügen erzeugt werden können, wird hier ein Zeitintervall um einen bestimmten Betrag gestreckt bzw. gegebene Zeitintervalle miteinander hinsichtlich ihrer Vielfachheit verglichen.

Es gilt für beliebige $t, t', t'' \in T$

I	$\alpha \cdot t = t \cdot \alpha$	kommutativ,
II	$t \cdot \alpha = t \cdot \beta \rightarrow \alpha = \beta$	linke Kürzung,
III	$t < t' \vee t = t' \vee t' < t$	vollständig,
IV	$\neg(t < t)$	nicht reflexiv,
V	$t < t' \rightarrow \neg(t' < t)$	nicht symmetrisch,
VI	$t < t' \wedge t' < t'' \rightarrow t < t''$	transitiv,
VII	$t < t' \leftrightarrow \alpha \cdot t < \alpha \cdot t'$	linksinvariant,
VIII	$\alpha \geq 1: t < t' \rightarrow t < (t' \cdot \alpha)$	rechtserweiternd,
IX	$t \neq t_1 \leftrightarrow t_1 < t$	t_1 ist minimal,
X	$\alpha > 1 \leftrightarrow t < (\alpha \cdot t)$	echt zunehmend.

Einen derartigen Sachverhalt haben wir bereits in Bd. 2, Statische Konstruktionen diskutiert: Wenn wir $\alpha \in \mathbb{N}$ setzen, dann können wir gegenüber einer additiven Zeitmenge nichts Neues ausdrücken. Dasselbe Zeitelement, multipliziert mit 6, gibt dasselbe Ergebnis wie die 6fache Addition unseres Ausgangselements. Also lassen wir zweckmäßigerweise $\alpha \in R_+$ zu. Wenn wir dann Produktionsvorgänge zu beliebigen Zeitpunkten $\in R$ beginnen und beenden sollen, dann stellt sich zum einen die Frage, wie wir das bewerkstelligen und zum anderen, wie wir das messen: Letztlich wird die Dauer einer Transformation nicht

³³ Multiplikation mit $1/\alpha$ in (5), keine Division mit α !

von der Transformation selbst, sondern von den Zeitpunkten der Erfassung von Beginn und Ende bestimmt. Damit haben wir zwangsläufig wieder eine Normierung auf eine additive Zeitmenge.

Keinen Sinn macht eine Zeitmenge, in der wir ein Zeitelement mit einem anderen Zeitelement direkt multiplikativ verknüpfen. Ein solches Beispiel zeigt für eine Z_{12} -Modulo-Struktur die folgende Tabelle.³⁴ Es gibt - zumindestens in der Produktion - keine vernünftige Interpretation von $(2) \cdot (3) = 6$. Sind das möglicherweise 6 Quadrat-Stunden?

.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10
3	0	3	6	9	0	3	6	9	0	3	6	9
4	0	4	8	0	4	8	0	4	8	0	4	8
5	0	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7
6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6
7	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
8	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4
9	0	9	6	3	0	9	6	3	0	9	6	3
10	0	10	8	6	4	2	0	10	8	6	4	2
11	0	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Beispiel 2-18: Multiplikative Zeitmenge

Wir beschreiben den Sachverhalt, dass die Zeit mit zunehmendem Alter schneller läuft. Wir verwenden den Faktor, mit dem ein Zeitintervall multipliziert werden soll als Basis und den Zeitpunkt als Hochzahl. Also erreichen wir bei einer „Multiplikation mit 2“ nicht den Zeitpunkt mit der doppelten Ordnungszahl, sondern eine Potenz dieser Basiszahl. Außerdem sei nach wie vor Addition möglich.

Multiplikation mit Faktor 2: Wir gehen von Zeitpunkt $t = 17$ aus. Zeitpunkt $17 +$ Zeitpunkt 17 führt zu Zeitpunkt 34 ; wir tragen also dieselbe Distanz ab. Zeitpunkt 17 mit dem Faktor 2 „verdoppelt“ führt zu: $t' = 2^t = 2^{17} = 131072$.



– Zeitabschnittsmenge

In einer Zeitmenge $+time$ sprechen wir von Zeitelementen, nicht ausschließlich von Zeitpunkten. $+time$ betrachtet den Abstand eines bestimmten Zeitelements vom minimalen bzw. zwischen zwei gegebenen Zeitelementen t und t' , macht aber keine Aussagen zur zeitlichen Ausdehnung eines Zeitelements. In einer Zeitmenge, die die reellen Zahlen zugrundelegt, ist diese Ausdehnung definitionsbedingt Null. Im folgenden gehen wir davon aus, dass auch in einer diskreten Zeitmenge $+time$ mit $T \subset \mathbb{N}_0$ ein Zeitelement $t \in T$ ohne

³⁴ Die Zeilen 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10 zeigen das Problem einer Modulo-Multiplikation. Das volle Ausschöpfen von m gelingt nur mit einer geeigneten Primzahl.

zeitliche Ausdehnung ist. Damit setzen wir isolierte Zeitpunkte voraus.³⁵ Jeweils zwei benachbarte Zeitpunkte definieren in einer solchen diskreten Zeitmenge $+time$ einen Zeitabschnitt t, t' :

Ein *Zeitabschnitt* t, t' bezeichnet den Zeitraum zwischen zwei benachbarten Zeitpunkten t und t' eines diskreten Zeitmodells. Für $t, t' \in T$ gilt:

$$t' \in T_t \wedge \bigvee_{\substack{t'' \in T \\ t'' \neq t, t'}} (t' < t'') \vee (t' = t'') .$$

Den Zeitabschnitt t, t' mit $t' = t_1$ und $t = t_0$ bezeichnen wir mit za_1 , jeder beliebige Zeitabschnitt erhält seine Bezeichnung über seinen Endzeitpunkt: $za: = t'$. Eine Zeitabschnittsmenge, die wir mit $\Delta time$ bezeichnen, ist damit über die zugehörige additive Zeitmenge definiert³⁶: $(\{za\}, +, <, za_1) := (T, +, <, t_0)$.

Beispiel 2-19: Datenerfassungsterminal

Ein Datenerfassungsterminal ordnet ein Ereignis (Beginn/Ende) t_1, t_2 oder (t_1, t_2) zu. $t_1 \rightarrow 07.00$ Uhr, $t_2 \rightarrow 08.00$ Uhr. Es gibt keine Aussage im Terminal „07.32“; vielmehr ist das Terminal so eingestellt: „Zuordnung von Produktionsereignis zu 08.00 Uhr“. 08.01 Uhr springt die Zuordnungsvorschrift und ordnet 9.00 Uhr zu.



Es ist offensichtlich, dass wir damit keine detaillierteren, andersartigen usw. Aussagen machen können, die über die generierende Zeitmenge $+time$ hinausgehen. Wir haben aber mit dem Zeitabschnitt ein Konstrukt geschaffen, dem wir zweckmäßig das Geschehen zwischen t und t' zuordnen können, ohne uns für t oder t' entscheiden zu müssen.³⁷ Der *Zeitabschnitt* definiert die nicht unterteilbare Einheit des Abstandes zwischen zwei Ereignissen (Zeitabstand im diskreten Zeitmodell in Zeitabschnitten)³⁸. Als exogene Einheit ist jede beliebige Vereinbarung wie Tage, Stunden, Sekunden, Takte usw. denkbar (z. B. ein Zeitabschnitt von 0,1 Stunden als 6 Minuten oder ein Zeitabschnitt mit 10 Sekunden).

³⁵ Isolierte Punkte einer Menge werden in [BRSE79], S. 243 definiert.

³⁶ Siehe bspw. den Modellierungsansatz von Allen in [ALLE84]. Er leitet seine temporale Logik auf der Basis eines intervallorientierten Zeitverständnisses her. Die Bahnhofsuhr verwendet den Beginnzeitpunkt einer Minute: Nach 60 Sekunden springt der Minutenzeiger, ggf. läuft zusätzlich der Sekundenzeiger.

³⁷ Damit ist auch die Frage beantwortet, ob die Zeitpunktangabe 12.00 jetzt einen Zeitraum von 60 Sekunden bezeichnet, 12.00 also 60 Sekunden dauert. Das gilt für den Zeitabschnitt 12.00, aber nicht für den Zeitpunkt 12.00, und zwar dann, wenn der nächste Zeitabschnitt „12.01“ heißt.

³⁸ Innerhalb einer Zeitmenge $\Delta time$ kann bei einer Planung kein feinerer Zeitabschnitt generiert werden - sonst war dieser a priori vorhanden („Zeitraster“). Wenn man sagt: „Nach 1,5 Stunden Bearbeitungszeit am 27.11. ist das Teil x fertig“, heißt das bei einem diskreten Zeitmodell mit dem Zeitabschnitt „Tag“ nicht „1,5 Stunden nach Beginn 27.11.“, auch wenn man am 27.11. so weiter macht, wie man am 16.11. aufgehört hat. Man kontrolliert z. B. erst am 27.11. abends. Werden die 1,5 Stunden z. B. als 8.30 Uhr interpretiert, war a priori ein feinerer Zeitabschnitt als „Tag“ vorhanden. Die 1,5 Stunden Bearbeitungszeit sind somit nur ein Anteil an der am 27.11. verfügbaren „Kapazität“ von z. B. 8 Stunden.

Beispiel 2-20: Kirchenglocke

Der Dom in Pasewalk gibt die Zeit - für diejenigen, die keinen Blickkontakt zu den Zeigern der Uhr haben - mit Glockenschlägen an. Das, was man als „6 Uhr“ bezeichnet, wird mit vier Schlägen mit Ton *a*, und sechs Schlägen mit Ton *c* angegeben. Etwas später folgt ein Schlag mit Ton *a*. Ob wir diesen Zeitabschnitt als „die Viertelstunde von 6.00 bis 6.15“ oder „6.00 - 6.15“ oder „6/I“ bezeichnen, ändert nichts an dem Sachverhalt, dass wir reale Ereignisse nur in diesen Zeitraum einordnen, nicht aber 6.12 Uhr zuordnen können: Die 4/6 Schläge sind Vergangenheit, der eine Schlag ist 6.12 Uhr noch Zukunft.



Die exogene Einheit kann aber auch eine sehr viel größere Einheit sein: Wir nehmen als Beispiel die Weinlese und definieren als Zeitabschnitte {Weinlese 2000, Weinlese 2001, ...}. Dann ist exogen nur das Jahr gegeben, obwohl die Weinlese jedes Jahr zu unterschiedlichen Kalendertagen beginnt und endet. Aber diese Zeitabschnitt partitionieren alle Ereignisse nach den Jahren und es gibt keine Überlappung. Eine solche Partitionierung könnte man sich auch mit Tagen vorstellen, wenn erst nach dem Sonnenaufgang begonnen und mit dem Sonnenuntergang geendet wird.

Schließen die Zeitabschnitte dagegen lückenlos aneinander, dann muss der Beginn eines Zeitabschnitts und sein Ende in der exogenen Zeitstruktur genauso als Zeitpunkt vereinbart werden, bspw. als $t_1 \leq \text{Schicht 1} < t_2$ oder als Schicht 1: = [07.00 Uhr, 16.00 Uhr], wie der Beginn eines neuen Jahres vereinbart werden muss.

Einen solchen Zeitabschnitt können wir abhängig von der Ereignisdichte im originären Produktionsgeschehen so klein wählen, dass - möglicherweise sogar mit Sicherheit - einem Zeitabschnitt nicht mehr als ein originäres Ereignis aus dem Produktionssystem zugeordnet werden kann/muss. Möglicherweise ist aber auch das Gegenteil gewollt: In einem Zeitabschnitt sind viele, möglicherweise sogar gleichartige Ereignisse zu verbuchen.

• Kalender

Mit einer ordinalen Zeitstruktur liegt eine Zeit(punkt)menge vor, die wir durch Beobachtung direkt aus dem betreffenden Produktionsgeschehen ableiten: Die einzigen Ereignisse, die uns für die Strukturierung und Einteilung der Zeit zur Verfügung stehen, sind die, die im Produktionssystem geschehen.³⁹ Diese Zeitpunktmenge führt zu einer vollständigen Ordnungsrelation: Alles, was im Produktionssystem geschieht, wird nach $\leq$ geordnet. Jedes Produktionsereignis ist ein individueller Zeitpunkt, ein Element dieser Menge. Darüber enthält diese Menge keine Zeitpunkte, auch keine Zeitpunkte einer (exogen verankerten) Uhr, die ein Beobachter auf das Produktionssystem abbildet. Damit haben wir aber auch keine Möglichkeit, die Produktion mit der Umwelt zu koordinieren.⁴⁰ Die Klassifikation dieser Ereignisse erfolgt über Attribute und Funktoren: „Fahrrad Maier, Montage, abgeschlossen“.⁴¹

Dadurch, dass wir einem Produktionspunkt (mit einer Uhr) eine exogen verankerte kardinale Zeitstruktur aufprägen, dem Terminal am Produktionspunkt eine Uhr einbauen und

³⁹ Wir haben keine extern basierte Uhr.

eine Zuordnungsvorschrift für interne Ereignisse vorgeben (dem Terminal eine Zuordnungsvorschrift einprogrammieren), können wir mit der produktionssystem-internen Zeit(punkt)menge (indirekt) rechnen. Eine exogen verankerte kardinale Zeitmenge, die allgemein beobachtbar ist oder auf einem allgemein beobachtbaren Prozess beruht, und darüber hinaus eine algebraische Struktur besitzt⁴², ermöglicht die geforderte Koordinationsmöglichkeit, führt aber die Eigenheiten seiner eigenen Struktur und vor allem der Abbildung auf die endogenen Produktionsereignisse ein: Keine Uhr der Welt kann das Kontinuum der reellen Zahlen exakt abbilden.⁴³ Selbst eine Wasseruhr wird einfach an der Fähigkeit, die Zeitaussage so genau abzulesen, scheitern. Also ist das, was wir als Zeitpunkt verstehen, immer eine ggf. sehr kleine Zeitstrecke. Dann stellen sich sofort zwei Fragen: Ist der Zeitpunkt 08.00 Uhr erreicht, wenn der Zeiger der Bahnhofsuhr auf 08.00 Uhr springt, ist der Zeitpunkt erreicht, wenn er auf 08.01 springt oder verstehen wir als Zeitpunkt 08.00 Uhr die Zeitspanne, in der der Zeiger auf 08.00 Uhr steht? Diese Fragen sind nicht unerheblich, wenn ein Lieferant für seine Lieferung von 07.45 Uhr bis 08.00 Uhr eingeräumt bekommt, und er unabhängig vom Ausmaß seiner Verspätung Konventionalstrafe bezahlen muss - möglicherweise kann der Kunde ja erst wieder in einer Woche bedient werden, oder jemandem der ICE vor der Nase wegfährt. Vor diesem Hintergrund ist es nur konsequent, gleichberechtigt mit Zeitpunkt-mengen und derselben algebraischen Struktur Zeitabschnittsmengen einzuführen.

– Zeitmodelle

Jede Teilmenge der reellen Zahlen und gewisse Systeme von Teilmengen sind ein *Zeitmodell*, wenn sie folgende Eigenschaften besitzen:

- Sie sind nicht leer.
- Es läßt sich auf ihnen eine vollständige Ordnung definieren, die durch die Ordnung auf der Menge der reellen Zahlen induziert wird.
- Sie sind beschränkt und abgeschlossen, so daß ein Zeitmodell ein kleinstes und ein größtes Element besitzt.

Die Zeitmodelle sollen nicht leer sein, weil andernfalls auf diesem Zeitmodell Ereignisse nicht sinnvoll definiert werden können. Die Forderung nach der Induktion der vollständigen Ordnung des Zeitmodells gewährleistet eine ordnungserhaltende (und damit konsi-

⁴⁰ Ein Lieferant kann mit der Aussage „Dieses Teil brauche ich zu Beginn des 5. Takts nach der 26. Wartung unserer Anlage“ nichts anfangen, solange er die angesprochenen Ereignisse nicht in seine eigenen Ereignisse einordnen kann. Ein ausgezeichnete interner Taktgeber - der Dirigent, ein Metronom oder der 1. Geiger - reicht zwar aus, um das geschlossene System eines Orchesters zu koordinieren, er kann aber nicht dafür sorgen, dass die Zuhörer pünktlich 20.00 Uhr im Konzertsaal sind. Der 1. Takt erfolgt später als 20.00 Uhr. Genauso kann für eine Montage ein Taktgeber intern völlig ausreichend sein: „Wir müssen 600 Takte arbeiten, dann können wir nach Hause. Derzeit sind wir bei Takt 479.“. Dieser Taktgeber kann aber nicht dafür sorgen, dass die Werker pünktlich 7.00 Uhr zur ersten Schicht eintreffen, wenn von 16.00 Uhr bis 7.00 Uhr nicht gearbeitet wird.

Für den Ablauf der Zeit relevante Ereignisse - wenn man von der Änderung der Ablaufstruktur und des Zeitmodells absieht - sind nur Ereignisse als Beginn und Ende von Transformationen. Nur dadurch läuft die Zeit, etwas anderes ist nicht möglich. Für Faktoren läuft die Zeit dadurch (selbständig) weiter, dass in nebenläufigen Prozessen Ereignisse geschehen.

⁴¹ Derartige Sachverhalte können wir sehr leicht über Petri- bzw. Stellen-Transitions-Netze modellieren.

stente) Abbildung⁴⁴ der realen Zeit. Die Beschränktheit und Abgeschlossenheit wird gefordert, weil Produktion sich immer auf einen Zeitraum bezieht. Aus dieser Definition ergeben sich drei Grundformen von Zeitmodellen: das (stückweise) stetige Zeitpunktmmodell, das diskrete Zeitpunktmmodell und das Zeitabschnittsmmodell. Das (stückweise) stetige Zeitabschnittsmmodell ist eine spezielle Teilmenge der reellen Zahlen, die aus (mehreren) abgeschlossenen Intervallen⁴⁵ gebildet wird. Seine Elemente repräsentieren reale Zeitpunkte. Das diskrete Zeitpunktmmodell ist ebenfalls eine spezielle Teilmenge der reellen Zahlen, die isolierte reale Zeitpunkte repräsentieren. Das Zeitraummodell ist definiert als Menge von Elementen, die jeweils ein halboffenes Intervall⁴⁶ der reellen Zahlen repräsentieren und paarweise disjunkt sind.

Da in den beiden ersten Fällen eine eindeutige Abbildung von der dem Zeitmodell zugrundeliegenden Teilmenge der reellen Zahlen auf die Elemente des Zeitmodells besteht, kann die Ordnung auf dem Zeitmodell unmittelbar durch Einschränkung der Ordnung der reellen Zahlen auf die dem Zeitmodell zugrundeliegende Teilmenge gewonnen werden. Dem Zeitabschnittsmmodell liegt ein System von Teilmengen der reellen Zahlen zugrunde, und dessen Elemente repräsentieren Zeiträume, bspw. Tage, Wochen oder Monate. Um die Ordnung auf dem Zeitmodell aus der Ordnung der reellen Zahlen induzieren zu können und um die Eindeutigkeit des Modells zu sichern, müssen die zur Repräsentation ausgewählten Intervalle paarweise disjunkt sein. Um dies auch bei einer Überdeckung der Zeitachse durch Intervalle zu gewährleisten, müssen die Intervalle nach rechts (oder links) halboffen sein. Die Ordnung auf dem Zeitmodell wird dann so definiert, daß zwei

⁴² Um eine weltweit einheitliche Verwendung von Maßen im Allgemeinen und Zeitskalen und -einheiten im Besonderen („*Chronometrie*“) zu unterstützen, legt das internationale Einheitensystem „Systeme International d’Unites (SI)“ als Basiszeiteinheit für die Zeitmessung die Sekunde fest. Zunächst wurde die Sekunde aus der Ende des 19. Jahrhunderts eingeführten Weltzeit abgeleitet, die der zum 0. Längengrad (Greenwich) gehörenden mittleren Sommerzeit entsprach [GEDR79], S. 120. Seit 1967 wird die Länge einer SI-Sekunde über die Dauer einer Anzahl atomarer Schwingungen definiert [GEDR79], S. 120 f.: „Die Basiszeiteinheit der Zeit 1 Sekunde ist das 9 192 631 770-fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids Cs entsprechenden Strahlung“ [GEDR79], S. 125. Darauf aufbauend führte man die internationale Atomzeit als neue, völlig gleichförmige Zeitskala ein [BEPi86], S. 123. Um beide Zeitskalen weiter verwenden zu können, wurde die heute allgemein anerkannte *koordinierte Weltzeit* (Universal Time Coordinated (UTC)) definiert, in der die Abweichungen zwischen der exakt angenommenen Atomzeit und der „vergleichsweise ungenauen“ klassischen Weltzeit durch Einführung von Schaltsekunden ausgeglichen werden [HOMÖ78], S. 52. Die UTC-Zeitskala basiert auf dem Skalenmaß SI-Sekunde und wird per Definition als kontinuierliche Zeitmenge aufgefasst, die theoretisch eine exakte Bestimmung aller Zeitpunkte erlaubt. Dies ist eine Vereinfachung, da auch mit Hilfe der derzeit genauesten Cäsium-Atom-Uhr nur eine Dauer gemessen werden kann, deren Länge das Vielfache einer Schwingung des Atoms beträgt. Diese Ungenauigkeit liegt jedoch im Bereich von 10^{-10} Sekunden und kann daher für die meisten Fälle als praktisch irrelevant bezeichnet werden.

Als Vielfache der Basiszeiteinheit gelten [HOMÖ78], S. 55: 1 Minute (min) = 60 Sekunden (sek), 1 Stunde (h) = 3600 sek, 1 Tag (d) = 864.000 sek.

Die Unterteilungen erfolgen im Dezimalsystem. Davon abzugrenzen sind die Skalenmaße Skalensekunde, -minute, -stunde, Kalendertag, -woche, -monat und -jahr, die jeweils exakt definierte Zeitabschnitte der Skala bezeichnen. Ein Kalendertag beginnt um 0 Uhr und endet um 0 Uhr des nächsten Kalendertages, während die Zeiteinheit 1 Tag eine beliebige Zeitspanne von 24 h beschreibt. Die Regeln des Gregorianischen Kalenders werden für die Zählung des Kalenders im Rahmen der UTC-Zeitskala übernommen [GEDR79], S. 126.

Elemente eines Zeitabschnittsmodells im Sinne dieser Ordnung genau dann aufeinanderfolgen, wenn die obere Grenze des einen und die untere Grenze des anderen repräsentierten Intervalls im Sinne der Ordnung der reellen Zahlen aufeinanderfolgen.

Es sei

- T die Menge aller Zeitmodelle eines Produktionssystems
 T^* die maximale Menge der Zeitmodelle und
 $T \in T$ ein Zeitmodell,

wobei gilt $T \in T \subseteq \mathcal{P}(R) \cup \mathcal{P}(I(R)) = : T^*$.

Ein Zeitmodell T heißt

- stetiges Zeitpunktmodell, wenn gilt $T \in \mathcal{P}(R)$ und $\forall (t \in T) : t$ ist Häufungspunkt⁴⁷,
- diskretes Zeitpunktmodell, wenn gilt $T \in \mathcal{P}(R)$ und $\forall (t \in T) : t$ ist isolierter Punkt,
- Zeitabschnittsmodell, wenn gilt: $T \in \mathcal{P}(I(R))$ und $\forall (t, t' \in T) : t \neq t' \rightarrow t \cap t' = \emptyset$.

Auf jedem Zeitmodell T ist eine vollständige Ordnung $\leq_T$ definiert, die aus $\leq_R$ wie folgt abgeleitet werden kann:

$$T \in \mathcal{P}(R) : \forall t_1, t_2 \in T : t_1 \leq_R t_2 \rightarrow t_1 \leq_T t_2$$

$$T \in \mathcal{P}(I(R)) : \forall t_1, t_2 \in T : \exists ((t' \in t_1), (t'' \in t_2))((t' \leq_R t'') \rightarrow t_1 \leq_T t_2).$$

– Produktionskalender

Ein *Kalender* ist ein mathematisches System⁴⁸, um mit Hilfe astronomischer Beobachtungen und Zeiteinheiten wie Tag, Monat, Jahr eine Zeitrechnung durchzuführen, den Zeitablauf einzuteilen und bestimmte, zyklisch wiederholte Sachverhalte (bspw. Ostern, Aussaat, Ernte, Weihnachten, Jahresanfang) bestimmten Tagen zuzuordnen. So regelt bspw. der gregorianische Kalender mittels seiner Zeitmenge die Länge des Jahres, die Länge der Monate, die Schaltregel (Alle 4 Jahre, nicht alle 100, 200, 300 Jahre, alle 400 Jahre)⁴⁹, die Festlegung des Osterfestes⁵⁰, die Benennung eines Tages mit einem identifizierenden (Datum) und einem klassifizierenden Namen (Montag, Dienstag, ...), usw.

Wie die Physik betrachtet der gregorianische Kalender die Zeit als Ganzes, auf der ganzen

⁴³ siehe die Anmerkungen zur Messung der Länge und die Verwendung von rationalen Zahlen in [CARN74].

⁴⁴ m.a.W.: Die Abbildung wird durch eine monotone Funktion realisiert: Ist D eine Teilmenge der reellen Zahlen, $D \subset R$, und ist jedem $x \in D$ genau eine reelle Zahl $y \in R$ zugeordnet, dann ist auf D eine reellwertige Funktion f definiert, symbolisch ausgedrückt $f: D \rightarrow R$ oder $y = f(x)$ für $x \in D$.

Gilt für eine Funktion f auf D für alle $x_1 \in D$ und $x_2 \in D$: Wenn $x_1 < x_2$, so $f(x_1) \leq f(x_2)$ bzw. wenn $x_1 < x_2$, so $f(x_2) \leq f(x_1)$, dann heißt sie monoton steigend bzw. fallend. Gilt statt „ $\leq$ “ die Relation „ $<$ “, so ist die Monotonie streng.

⁴⁵ Der Begriff *abgeschlossenes Intervall der reellen Zahlen* ist in [BRSE79], S. 242 definiert.

⁴⁶ Der Begriff *halboffenes Intervall der reellen Zahlen* ist in [BRSE79], S. 242 definiert.

⁴⁷ Zum Begriff *Häufungspunkt* siehe [BRSE79], S. 243.

⁴⁸ siehe die Rechenvorschrift für den gregorianischen Kalender in diesem Abschnitt und Fußnote 117 sowie Bd. 1, Methodische Grundlagen, Kap. 6, Beispiel 6-53.

Erde, im gesamten Weltall. Diese Sicht auf eine Zeit im Ganzen differenzieren die Technikwissenschaften durchaus: Jedes einzelne Produktionssystem kann als Mikrokosmos mit eigenem Zeitverständnis angesehen werden, in dem Ereignisse nach Sachverhalten geordnet werden, die in der restlichen Welt ohne jede Relevanz sind oder sein können. Und wenn Werksurlaub, arbeitsfreie Tage, arbeitsfreie Zeiten usw. produktionssystemintern einfach nicht definiert werden, entsteht möglicherweise intern eine durchgängige Sicht, die in die Umwelt als Menge einzelner Zeitabschnitte einzubinden ist. Weil dies auch noch für jeden Kunden und jeden Lieferanten vergleichbar gilt, ist es meist zweckmäßig, in der Umwelt⁵¹ diese universelle Sicht wiederherzustellen.⁵²

Ein *Produktionskalender* ist ein Kalender

- mit einem definierten räumlichen und zeitlichen Gültigkeitsbereich, der die Menge zugeordneter Ereignisse eindeutig abgrenzt
- mit Vorschriften zur Einordnung dieser Ereignisse in den Kalender der Umwelt (Gregorianisch, UTC, jüdisch, chinesisch) bzw. in die Kalender von Unternehmen, mit denen eine Relation besteht.⁵³
- ggf. mit einem eigenen Beschreibungsschema zur Benennung von Zeitpunkten/Zeitabschnitten, zur Festlegung von Zeitstrukturen (Produktionszyklen, Schichten, Wartungsintervallen usw.), zur Festlegung des Geschäftsjahres, des Produktionsmonats/der Produktionswoche usw. zum Zwecke der besseren Berechenbarkeit des Produktionsgeschehens.⁵⁴
- , der die Zeitpunkte zur Synchronisation mit der Umwelt festlegt.

⁴⁹ siehe die Ausführungen zu
 Gregorianischer Kalender http://de.wikipedia.org/wiki/Gregorianischer_Kalender
 Julianischer Kalender http://de.wikipedia.org/wiki/Julianischer_Kalender
 Chinesischer Kalender http://de.wikipedia.org/wiki/Chinesischer_Kalender
 Jüdischer Kalender http://de.wikipedia.org/wiki/Jüdischer_Kalender
 Maya Kalender http://de.wikipedia.org/wiki/Maya_Kalender
 und die dort jeweils angegebene vertiefende Literatur.

⁵⁰ Genau wegen der Festlegung der Feiertage muss in Israel weiterhin der jüdische und in China der chinesische Kalender benutzt werden.

⁵¹ siehe Bd. 1, Methodische Grundlagen, Kap. 1, Sprachausdrücke, Logik, Schlüsse, Abschnitt Modelle, Systeme, Theorien, Wissenschaften

⁵² Wir erinnern an die Postulate und Axiome von Euklid: Das Verhältnis zwischen einem unvollkommen gezeichneten Kreis und der vollkommenen Idee des Kreises kennzeichnet den Unterschied zwischen der sinnlich wahrnehmbaren und der idealen Welt. Natürlich gelten die Aussagen von Euklid für den idealen Kreis. Genauso gelten unsere Aussagen für eine ideale Zeit - und genauso für alle anderen Attribute und Adverbien am Produktionspunkt. Ggf. müssen wir uns in einer Fehlerrechnung - „Qualitäts“-Sicherung - Gedanken darüber machen, wie wir mit realen Abweichungen umgehen. https://de.wikipedia.org/wiki/Euklidische_Geometrie#

⁵³ Wenn wir in einer ordinalen Zeitstruktur eine vollständige Ordnung verlangen und keine isolierten nebenläufigen Prozesse zulassen wollen/können, dann erreichen wir diese Vollständigkeit ggf. einfacher, wenn wir das Geschehen in zwei räumlich getrennten Produktionsbereichen auf den extern basierten Produktionskalender abbilden anstatt alle Ereignisse mit allen Ereignissen zu vergleichen.

⁵⁴ Das Kirchenjahr beginnt nicht am 1. Januar, der 6. Dezember heißt in diesem Kalender „Nikolaus“, der 8. Dezember „Maria Empfängnis“ und der 31. Dezember „Silvester“. Selbstverständlich ist auch hier „Maria Empfängnis“ der zweite Tag nach „Nikolaus“.

- , der die Zeiträume festlegt, an denen das betroffene Produktionssystem keine Ereignisse generieren kann und daher „tot“ ist.

Ein Produktionskalender bestimmt die einem Faktor, einer Transformation, einem Ereignis bzw. einer Klasse oder einem Produktionspunkt zugeordnete, von diesem Faktor, dieser Transformation, diesem Ereignis oder Produktionspunkt unabhängige und in der Umwelt verankerte Zeit(punkt)menge, die dessen jeweilige Existenz bestimmt bzw. einschränkt. Nur innerhalb ihres Kalenders sind Faktoren, Transformationen und Relationen definiert; nur innerhalb des durch den Kalender definierten Bereichs kann ein reales Ereignis erfasst und protokolliert werden. Der Kalender definiert die „aktiven“ Zeitpunkte und/oder Zeitabschnitte, außerhalb des Kalenders ist keine in der Umwelt registrierbare Aussage möglich. Basis eines jeden Kalenders ist entweder *R* oder *N* oder die für ein Prod.system gültige Menge $\Delta\ time$, auf die alles referenziert wird (z. B. Gregorianischer Kalender).

Das (minimale) Element (za_1 bzw.) t_0 wird in der Regel einem ausgezeichneten realen Ereignis zugeordnet; für einen unternehmensspezifischen Fabrikkalender können wir zweckmäßigerweise den Zeitpunkt der Unternehmensgründung, den Beginn der Produktion einer Fahrzeugbaureihe oder den Beginn eines Geschäftsjahres wählen. Dies gilt z. B. für den Werkskalender in Bild 2-1, der als Zeitabschnittsmodell mit dem ersten Tag nach der Unternehmensgründung beginnt (über frühere Ereignisse kann keine einordnende Aussage gemacht werden).

Januar			Februar			März			April			Mai		
W	AT	Tag	W	AT	Tag	W	AT	Tag	W	AT	Tag	W	AT	Tag
	Neujahr	1 So	5	5974	1 Mi	9	5994	1 Mi		6018	1 Sa	T. d. A.		1 Mo
	5953	2 Mo		5975	2 Do		5995	2 Do			2 So		6037	2 Di
	5954	3 Di		5976	3 Fr		5996	3 Fr		6019	3 Mo	18	6038	3 Mi
1	5955	4 Mi			4 Sa			4 Sa		6020	4 Di		6039	4 Do
	5956	5 Do			5 So			5 So	14	6021	5 Mi		6040	5 Fr
	Hl. 3 Kö	6 Fr		5977	6 Mo		5997	6 Mo		6022	6 Do			6 Sa
		7 Sa		5978	7 Di		5998	7 Di		6023	7 Fr			7 So
		8 So	6	5979	8 Mi	10	5999	8 Mi			8 Sa		6041	8 Mo
	5957	9 Mo		5980	9 Do		6000	9 Do			9 So		6042	
	5958	10 Di		5981	10 Fr		6001	10 Fr						
2	5959	11 Mi			11 Sa									
	5960	12 Do												

W ... Woche

AT ... Arbeitstag (Fabrikkalendertag)

Bild 2-1 Unternehmensspezifischer Werkskalender

Im unternehmensspezifischen Werkskalender in Bild 2-1 kann mit Zeitabständen unmittelbar auf der Basis der Arbeits-/Fabrikkalendertage gerechnet werden, auch wenn ggf. eine Transformation in der einen Woche beginnt und in der anderen endet. Die Zuordnung zu einem auch außerhalb des Produktionssystems universell nutzbaren Kalender stellt hier einen zweiten Schritt dar. Dieses Beispiel macht aber auch die Vorteile eines Kalenders ohne Lücken für die Zuordnung der realen Ereignisse (z. B. Gregorianischer Kalender) deutlich: Wenn der Arbeitstag, der bisher als „Arbeitstag 6040“ bezeichnet wurde, abhän-

gig von der Beschäftigungssituation aus dem Kalender genommen werden kann/muss, ändert sich die Bezeichnung aller zukünftigen realen Arbeitstage im Werkskalender, während die Bezeichnung im gregorianischen Kalender erhalten bleibt. Zum anderen zeigt dieses Beispiel aber auch die Konsequenzen aus dem oben gesagten: Da die Sonntage nicht Teil des Fabrikkalenders sind, lässt sich für diese auch kein Ereignis mit einer Zustandsänderung eintragen. Es ist keine Aussage über Sonntage möglich; damit ist das Produktionssystem an Sonntagen „tot“.

Beispiel 2-21: Gleitzeitmodell

Die S.-Werke realisieren ein Gleitzeitmodell. Also wird jetzt die Zeitmenge aus Beispiel 16-3 auf die Zeitmenge eines externen Kalenders abgebildet. Die Kernarbeitszeit eines Werkers ohne Gleitzeit wird über Tages-, Wochen- und Schichtmodelle definiert. Tagesmodelle legen die tägliche Arbeitszeit fest.

Tagesmodell 1		Tagesmodell 2		Tagesmodell 3	
Arbeitsbeginn:	7.10	Arbeitsbeginn:	6.00	Arbeitsbeginn:	14.30
Pausenbeginn:	9.10	Pausenbeginn:	9.10	Pausenbeginn:	-
Pausenende:	9.25	Pausenende:	9.25	Pausenende:	-
Pausenbeginn:	12.10	Pausenbeginn:	12.15	Pausenbeginn:	19.00
Pausenende:	12.45	Pausenende:	12.45	Pausenende:	19.30
Arbeitsende	16.00	Arbeitsende	14.30	Arbeitsende	23.00

Ein weiteres Tagesmodell ist ein arbeitszeitverkürzter Freitag (Tagesmodell 4). Ein arbeitsfreier Samstag und Sonntag wird als Tagesmodell 0 bezeichnet. Ein Wochenmodell (WM) setzt die einzelnen Tage einer Woche aus einzelnen Tagesmodellen (TM) so zusammen, dass die vereinbarte Wochenarbeitszeit eingehalten wird.

Wochenmodell	Montag	Dienstag	Mittwoch/ Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag
WM1	TM1	TM1	TM1	TM4	TMØ	TMØ
WM2	TM2	TM2	TM2	TM2	TMØ	TMØ
WM3	TM3	TM3	TM3	TM3	TMØ	TMØ
WM4	TM2	TM2	TM2	TMØ	TMØ	TM2
WM5	TMØ	TM3	TM3	TM3	TMØ	TMØ

Schichtmodelle (SM) zeigen entsprechend die Aufeinanderfolge der einzelnen Wochenmodelle.

SM 1	WM 1→
SM 2	WM 2 → WM 2 → WM 2 → WM 3 → WM 3 →
SM 3	WM 4 → WM 4 → WM 5 → WM 5 →

Der Rhythmus der Wochenmodelle wiederholt sich.

Im Rahmen ihres Schichtmodells haben die dazu berechtigten Mitarbeiter die Möglichkeit zu gleiten (z. B. Beginn zwischen 6.40 und 8.15). Die Gleitzeitregeln werden wie folgt festgelegt:

1. Dem Gleitzeitkonto wird ein Guthaben zugewiesen, wenn länger als eine bestimmte (einstellbare fixe Arbeitszeit) pro Tag (tagesindividuell) gearbeitet wurde.

2. Das Gleitzeitkonto wird belastet, wenn weniger als die Arbeitszeit pro Tag (Tagesdurchschnitt pro Monat) gearbeitet wurde.
3. Das Gleitzeitkonto darf nach einem Monat das Saldo von plus/minus x Stunden nicht überschreiten.
 - a. Bei einem Defizit größer x Stunden erfolgen Maßnahmen der Geschäftsleitung (Mahnliste).
 - b. Bei einem Guthaben größer x Stunden werden die entsprechenden Stunden als Überstunden behandelt.
4. Bei ausreichendem Gleitzeitguthaben kann y-mal im Monat auch während der Kernarbeitszeit (Zustimmung durch den Vorgesetzten erforderlich) bis zu einem halben Tag frei genommen werden (Gleitzeitausgleich). Wird der Gleitzeitausgleich vormittags genommen, muss der Gleitzeitleiter spätestens um xx.xx Uhr „stempeln“. Beim Gleitzeitausgleich nachmittags kann der Gleitzeitleiter frühestens um yy.yy Uhr die Firma verlassen.
5. Geleistete Überstunden können bis zu einem Tag (= 8 Stunden) pro Monat „abgefeiert“ werden.

Das Personal-Zeiterfassungs-System führt die folgenden Personalstamm-Daten:

Persönliche Daten	Betriebliche Daten	Temporäre Daten zur Lohnabrechnung
- Personalnummer - Titel - Name - Vorname - Adresse - Geburtstag - Geschlecht - Ausbildung - Behinderung	- Personalnummer - Eintrittsdatum - voraussichtliches Ausscheiden - Funktion - Ausweisnummer - fixe/Gleitarbeitszeit - Schichtplan (Zeitmodell) - Wochenarbeitszeit - Urlaubstage - Sonderurlaubstage - Kostenstelle - Stammarbeitsplatz - Ausbildung (Text) - innerbetrieblicher Werdegang (Text) - Schulungen (Text)	- Abwesenheitsgrund (Code) - Abwesenheitsbeginn - voraussichtliches Abwesenheitssende - geplante Urlaubszeiten (Termine) - geplante Kurzzeiten (Termine) - geplante (genehmigte) Überstunden - Unterlassungswert für Kommenzeit - Unterlassungswert für Gehenzeit

Für jeden Mitarbeiter werden die folgenden Zeitkonten geführt:

Sollarbeitszeit	Anzahl Stunden, die der Mitarbeiter im laufenden Monat unter Berücksichtigung des Betriebskalenders ableisten muss (berechnet).
Anwesenheit:	Führt die reine Anwesenheitszeit (Netto).
Fehlzeit Unb. Pers.:	Summe aller unbezahlten persönlichen Fehlzeiten.
Fehlzeit Unb. Unent.:	Summe aller unentschuldigten Fehlzeiten(unbezahlt).
Fehlzeit Bez. Pers.:	Summe aller bezahlten persönlichen Fehlzeiten (z. B. Arztgang).
Urlaub bezahlt jährl.:	Der in diesem Jahr bereits genommene Urlaub in Stunden.
Urlaub bez. monatl.:	Der in diesem Monat genommene Urlaub in Stunden
Sonderurlaub bezahlt:	Gewährter Sonderurlaub z. B. für Hochzeit, Umzug, Behinderungen, Sterbefall etc. in Stunden.
Urlaub unbezahlt:	Summe an unbezahltem, genehmigtem Urlaub in Stunden.
Karenzzeit:	Summe an Krankheitszeit ohne Attest, jedoch entschuldigt (kürzer als 3 Tage) in Stunden.
Krankheit bezahlt:	Summe an bezahlter Krankheitszeit mit Attest.
Krankheit unbezahlt:	Summe von Krankheitszeit, welche von der Krankenversicherung bezahlt wird (in der Regel nach 6 Wochen Krankheit).
Betriebsunfall bez.:	Summe der Krankheitszeit (bezahlt) aufgrund eines Betriebsunfalls.
Betriebsunfall unbezahlt:	Summe der Krankheitszeit aufgrund eines Betriebsunfalls, welche die Krankenkasse bezahlt.

Kur bezahlt:	Summe an bezahltem Kuraufenthalt.
Kur unbezahlt:	Summe an Kuraufenthalt, welcher von der Krankenkasse bezahlt wird.
Wöchnerinnen unbezahlt:	Von der Krankenkasse bezahlte Arbeitszeit vor und nach einer Schwangerschaft.
Erziehungsurlaub unbezahlt:	Acht Wochen nach der Schwangerschaft kann die Mutter 15 Monate unbezahlten Erziehungsurlaub nehmen. In dieser Zeit sind alle Zeit-Konten und Vergünstigungen eingefroren und können danach wieder aktiviert werden.
Dienstgang:	Summe aller Dienstgangzeiten (bezahlt).
Überstunden 1:	Summe aller Überstunden, die mit 25% Zuschlag vergütet werden.
Überstunden 2:	Summe aller Überstunden, die mit 50% Zuschlag vergütet werden.
Überstunden 3:	Summe aller Überstunden, die bereits im laufenden Monat als Ausgleich genommen wurden (max. 8).
Überstundenausgleich:	Summe der Überstunden, die bereits im laufenden Monat als Ausgleich genommen wurden (max. 8).

Zusätzliche Konten für Gleitzeitler sind:

Gleitzeit:	Saldo der Gleitzeit (Plus/Minus). Übertrag in den Folgemonat möglich!
Kernarbeits-Saldo:	Anzahl Stunden, die der (gesunde und ansonsten anwesende) Mitarbeiter nicht in der Kernarbeitszeit anwesend war.
Gleitzeitausgleich: (Index)	Eintrag, ob in diesem Monat schon Gleitzeitausgleich während der Kernarbeitszeit genommen wurde.

Darüber hinaus gibt es noch Abrechnungskonten, die die Arbeitstage, Kranktage und Urlaubstage nominell zählen (Hier werden nur volle Tage gezählt; ein Arztbesuch an einem Arbeitstag gilt nicht als Kranktag):

Arbeitstage:	Anzahl der Tage, an denen der Mitarbeiter anwesend war und gearbeitet hat.
Urlaubstage:	Anzahl der genommenen Urlaubstage im Abrechnungsmonat.
Kranktage:	Anzahl der Tage, an denen der Mitarbeiter krankheitsbedingt abwesend war.

Zusätzliche Konten für gewerbliche Mitarbeiter sind:

Auftragszeit:	Anzahl der gestempelten Ist-Stunden auf Auftrag.
Gemeinkostenzeit:	Anzahl der Sonderzeiten für nicht zurechenbare Arbeiten (Gemeinkosten), wie z. B. Aufräumen, Leerzeit wegen Maschinenstörung, Betriebsrat etc.
Schichtzulage Früh:	Anzahl Schichtstunden in der Frühschicht, die mit 4% Zulage bezahlt werden.
Schichtzulage Spät:	Anzahl Schichtstunden in der Spätschicht, die mit 25% Zulage bezahlt werden.
Steuerfreie Std. 1:	Anzahl der Stunden, in denen 4% der Zulage steuerfrei sind.
Steuerfreie Std. 2:	Anzahl der Stunden, in denen 25% der Zulage steuerfrei sind.
Montagezulage	Anzahl der Stunden auf Montage mit fixer Zulage von 12%

Die Zutrittskontrolle wird über eine Tabelle gesteuert, die die Zuordnung der Personalnummer zur Ausweisnummer enthält. Es können auch mehrere Ausweisnummern einer Personalnummer zugeordnet sein. Außerdem gibt es Ersatzausweise, die nur bei Bedarf einer Personalnummer zugeordnet werden. Auch für Betriebsfremde, die sich nur zeitweise im Betrieb aufhalten, wird eine Reihe von Ausweisen vorgehalten.

Ausweis-nummer	Personal-nummer	Von_Datum	Terminals	Berechtigung	Status	Bis_Datum
2137	4711	01.05.88	10010000	001100001110	gesperrt	24.08.99
2288	4711	24.02.89	10000000	001100001110	aktiv	
1433	„fremd“	03.03.90	00010000	001000010000	aktiv	04.04.90
9999	„Ersatz“	01.01.87	11111111	111111111111	passiv	
2580	4712	01.12.88	00110000	000000010000	aktiv	

Mit den einzelnen Funktionsdaten des Personal-Zeiterfassungs-Terminals können die folgenden Buchungs-/Geschäftsvorgänge ausgelöst werden.

Funktions- taste	Dialog	Plausibilitäts-Prüfung Aktivitäten
Mitar- beiter geht F 1	Mitarbeiter meldet sich an. Nicht-Gleitzeitler: Je nach Schichtplan (normale Schicht 16.00 Uhr bzw. 12.15 Uhr zu Ende). Gleitzeitler: Gleitzeit (z. B. zwischen 15.15 und 17.15 Uhr Kernzeit).	Bei gewerblichen Mitarbeitern Schicht- bzw. Arbeitsende erreicht? Bei Gleitzeitlern Kernarbeitszeit überschritten? Nein: Fehlermeldung! Display „ Über F7 abmelden “ Korrektur! Ja: Ist Mitarbeiter überhaupt angemeldet Ja: Buchen! Nein: Anzeige auf Display: „Noch nicht angemeldet!“ → Korrektur oder Bestätigung.
Mitar- beiter kommt F 2	Mitarbeiter meldet sich an. Nicht-Gleitzeitler: Je nach Schichtmodell (normale Schicht 7.00 Uhr bzw. 7.30 Uhr Beginn). Gleitzeitler: Gleitzeit (z. B. zwischen 6.40 und 8.15 Uhr Kernzeit).	Berechtigungsprüfung: Darf dieses Terminal vom Mitarbeiter benutzt werden? Nein: Fehleranzeige auf Display. „ nicht benutzungsbefugt “ und keine Buchung (u. U. Angabe des Terminals, welches ihm zugeordnet ist.): Ja: Nicht-Gleitzeitler: Buchen! Gleitzeitler: Vor Kernarbeitszeit? Ja: Buchen! Nein: Fehleranzeige! Korrektur Display „ Über F8 anmelden “
Dienst- gang geht F 3	Mitarbeiter verlässt für einen Dienstgang das Werksgelände (während der Arbeitszeit).	Mitarbeiter überhaupt angemeldet? Nein: Fehleranzeige „ Noch nicht angemeldet! “ → Korrektur oder nochmalige Bestätigung Ja: Buchen!
Dienst- gang kommt F 4	Mitarbeiter kommt vom Dienst- gang zurück.	Letzte Eintragung „Dienstgang Geht“ oder Mitarbeiter noch nicht an- gemeldet? Ja: Buchen! Nein: Fehleranzeige! → Korrektur oder nochmalige Bestätigung
Arztgang geht F 5	Gleitzeitler kommt erst während der Kernarbeitszeit zur Arbeit und verrechnet dies mit seinem Gleitzeitguthaben.	Mitarbeiter überhaupt angemeldet? Nein: Fehleranzeige „ Noch nicht angemeldet! “ → Korrektur oder nochmalige Bestätigung Ja: Buchen!
Arztgang kommt F 6	Mitarbeiter kommt vom Arztgang zurück.	Letzte Eintragung „Arztgang Geht“ oder Mitarbeiter noch nicht ange- meldet? Ja: Buchen! Nein: Fehleranzeige! → Korrektur oder nochmalige Bestätigung
Gleitzeit- Aus- gleich geht F 7	Gleitzeitler geht während der Kernarbeitszeit nach Hause und verrechnet dies mit seinem Gleit- zeitguthaben.	Prüfen, ob Gleitzeitler! Nein: Funktionstaste gesperrt! Display „ Keine Gleitzeit “. Ja: Ist gerade Kernarbeitszeit? Nein: Fehleranzeige! „ Keine Kernarbeitszeit! “ Taste gesperrt. Ja: Mitarbeiter überhaupt angemeldet Nein: Fehleranzeige! „ Noch nicht angemeldet! “ → Korrektur oder Bestätigung. Ja: Buchen!
Gleitzeit- Aus- gleich kommt F 8	Gleitzeitler kommt erst während der Kernarbeitszeit zur Arbeit und verrechnet dies mit seinem Gleitzeitguthaben.	Prüfen, ob Gleitzeitler! Nein: Funktionstaste gesperrt! Display „ Keine Gleitzeit “. Ja: Ist gerade Kernarbeitszeit? Nein: Fehleranzeige! „ Keine Kernarbeitszeit! “ Taste geperrt. Ja: Buchen!
Über- stunden abfeiern F 9	Mitarbeiter geht früher und will sich dafür seine aufgelaufenen Überstunden anrechnen lassen	Prüfen, ob überstundenberechtigt! Nein: Funktionstaste gesperrt! Display „ nicht möglich “. Ja: Überstunden vorhanden? Ja: Bereits 8 Stunden in diesem Monat abgefeiert? Nein: o. k. Ja: Nicht möglich! Nein: Fehleranzeige! „ Keine Überstunden! “
Gleitzeit- Konto F 10	Anzeige des Gleitzeitsaldos in Stunden.	Abprüfen der Personalnummer. Gleitzeitler? Nein: Display „ Finde kein Gleitzeitkonto! “ Ja: Anzeige des Saldos
Urlaubs- Konto F 11	Anzeige des Urlaubs-Kontos in Stunden.	Abprüfen der Personalnummer. Anzeige des Urlaubs-Kontos.



Beispiel 2-22: Flexizeit

Im Zweigwerk Gelsenkirchen der S.-Werke stehen 3 Montagelinien, die mit jeweils 4 Teams besetzt sind. Dadurch ist es möglich, den Samstag als regulären Arbeitstag einzubeziehen. So wird eine Betriebszeit von 135 Stunden erreicht. Die Frühschicht von 5 Uhr 50 bis 13 Uhr 50 und die Spätschicht von 13 Uhr 50 bis 21 Uhr 50 werden um eine Nachtschicht von 21 Uhr 50 bis 5 Uhr 50 ergänzt. Bei der Variante A wechseln die Schichten wöchentlich; damit ergeben sich für die Arbeitnehmer größere Schichtblöcke. Möglichkeit B ist die kurze Variante. Hier werden insbesondere arbeitsmedizinische Belange berücksichtigt, da mit jeder in unmittelbarer Folge abgeleisteten Nachtschicht das Schlafdefizit zunimmt. Beide Versionen beachten, dass die Vorwärtsrotation mit Früh-, Spät-, Nachtschicht dem Rhythmus des Menschen angepasster ist. Außerdem sind beide Modelle so konzipiert, dass die Mitarbeitergruppen personell nicht durchmischt werden.

Variante A: Schichten werden blockweise gewechselt

	Woche 1							Woche 2							Woche 3								
Gruppe	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di
1	FS	FS	FS	FS	FS	FS	FS	SS	SS	SS	SS	SS	SS	SS	NS	NS	NS	NS	NS	NS			
2	SS	SS	SS	SS	SS	SS	SS	NS	NS	NS	NS	NS	NS									FS	FS
3	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS								FS	FS	FS	FS	FS	FS		SS	SS
4								FS	FS	FS	FS	FS	FS		SS	SS	SS	SS	SS	SS		NS	NS

Variante B: Kurzrotation (auf jede Nachtschicht folgen mind. 2 Tage Ruhezeit)

	Woche 1							Woche 2							Woche 3								
Gruppe	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di
1	FS	FS	SS	SS	NS	NS				FS	FS	SS	SS		NS	NS			FS	FS		SS	SS
2	SS	SS	NS	NS				FS	FS	SS	SS	NS	NS				FS	FS	SS	SS		NS	NS
3	NS	NS			FS	FS		SS	SS	NS	NS				FS	FS	SS	SS	NS	NS			
4			FS	FS	SS	SS		NS	NS			FS	FS		SS	SS	NS	NS				FS	FS

Legende zu den Tabellen:

FS = Frühschicht, SS = Spätschicht, NS = Nachtschicht, graue Felder markieren Freizeit bzw. Ruhezeit

Die durchschnittlich eingeteilte Arbeitszeit beträgt 33,75 Stunden pro Woche. Dadurch entsteht eine Differenz zur tariflich festgelegten Arbeitszeit, die gezielt einen Spielraum verschafft. Die Zeitschulden werden in rund sieben Zusatzschichten pro Jahr abgearbeitet. Voraussetzung dafür sind Mitarbeiter, die flexibel einsetzbar sind. Daher existiert für jeden Mitarbeiter eine Qualifikationsmatrix, die sowohl den Ist-Zustand der Kenntnisse und Fertigkeiten als auch Entwicklungs- und Trainingsbedarf offen legt. Zusätzlich gibt es einen Bereitschaftspool. Die Mitarbeiter einer Freischicht müssen während der ersten Stunde einer Schicht telefonisch erreichbar sein und im Notfall einspringen. Ebenso ist es möglich, die Betriebszeit zurückzufahren. Bei fehlender Auslastung können mit einer Woche Frist Schichten, auch für einzelne Gruppen, abgesagt werden. Außerdem können mit einer zweitägigen Voranmeldung Schichten gegenüber ihrer normalen Dauer um bis zu zwei Stunden verkürzt werden. All dies hat keine Auswirkungen auf den Monatslohn, der auf Basis der tariflichen 35-Stunden-Woche gezahlt wird. Dabei sind allerdings Mehrarbeitsvergütungen und -zuschläge ausgeschlossen, weil sich statt dessen Salden auf den für jeden einzelnen Mitarbeiter zu führenden Zeitkonten ergeben.



Beispiel 2-23: Werkstattkalender

In einem Werkstatt-Steuerungssystem (siehe [CAPO]) ist der Heute-Termin der Kalendertag 5000. Der 10. Tag in der Zukunft ist der Kalendertag 5010, der 10. Tag in der Vergangenheit ist der Kalendertag 4990. Ein Planungshorizont ≥ 5000 Tage in die Zukunft kann nicht abgebildet werden (interner Tag ≤ 9999). Damit findet bei jedem Planungslauf eine neue Zuordnung der im Gregorianischen Kalender angegebenen Kundenwunschtermine zu Zeitpunkten /-abschnitten im Kalender statt. Der Kalendertag wird 4-stellig geführt (TTTT) und in 1/10-Stunden unterteilt (SS.S). Damit können zunächst je Kalendertag 240 Zeitpunkte und 240 Zeitabschnitte angesprochen werden. Also wird die Zeitmenge aus Beispiel 16-3 in ein 6-Minuten-Raster eingeordnet. Wenn wir aber (SS.S) vollständig ausschöpfen wollen, dann ist (01.0) der Beginn der ersten Viertelstunde und die Zeit läuft bis (96.0). Das 6-Minuten-Raster bei 240 Zeitabschnitten wird dann zu einem 90-Sekunden-Raster.

**Beispiel 2-24:** Modellierung eines auf einem Werkskalender basierenden Schichtmodells.

Wir treffen die folgenden Annahmen:

- Das Unternehmen fertigt wochentags jeweils in zwei Schichten, samstags in einer Schicht, sonntags nicht.
- Die maximale Genauigkeit aller Zeitangaben soll bei 1 Minute liegen.
- Gegeben: UTC-Skala inklusive Einheiten und Strukturierung nach Gregorianischem Kalender.

Im Folgenden wird das Schichtmodell schrittweise aufgebaut („Ersatzwerte-Konzept“):

1. Zeitmodell 1: Rasterung der UTC-Skala auf ein Minutenraster.

Spezifikation:	Lückenlos abgeleitetes Zeitmodell
Bezugsmodell:	UTC-Skala
Basiszeiteinheit:	1 Minute
Selektionsvorschrift:	Rasterung mit der Rasterlänge 1 Minute Übernahme der Tagesstrukturen.
2. Zeitmodell 2: Erstellung eines Werkskalenders durch Eliminierung der arbeitsfreien Tage.

Spezifikation:	Partiell abgeleitetes Zeitmodell
Bezugsmodell:	Zeitmodell 1 inkl. Tagesstrukturen
Basiszeiteinheit:	1 Minute
Selektionsvorschrift:	Übernahme aller Zeitpunkte, die nicht zu Sonn- und Feiertagen gehören.
3. Zeitmodell 3: Eliminierung der arbeitsfreien Zeit je Tag.

Spezifikation:	Partiell abgeleitetes Zeitmodell
Bezugsmodell:	Zeitmodell 2
Basiszeiteinheit:	1 Minute
Selektionsvorschrift:	Übernahme aller Zeitabschnitte, zu denen gearbeitet werden soll.
4. Zeitskala 4: Zusammenfassung zu Schichten.

Spezifikation:	Lückenlos abgeleitetes Zeitmodell
Bezugsmodell:	Zeitmodell 3

Basiszeiteinheit: 1 Schicht
Selektionsvorschrift: Auswahl des Zeitpunkts Schichtende, Projektion aller
Zeitpunkte einer Schicht auf das jeweilige Schichtende.⁵⁵

Dieses Beispiel basiert auf der sukzessiven Ableitung von Zeitmodellen bis zum Schichtmodell, in dem jede Schicht durch einen Zeitpunkt repräsentiert wird. Alle Ereignisse, die während einer Schicht eintreten, werden diesem Zeitpunkt zugeordnet.



Beispiel 2-25: Modellierung eines Zeitrasters für eine rollierende Planung

Es gelten folgende Annahmen:

- Das Produktionssystem arbeitet montags bis freitags durchgehend.
- Die Planung erfolgt für den nächsten Tag taktgenau, für den 2. bis letzten Wochentag tages-, dann wochengenau.
- Die Taktlänge beträgt 5 Minuten.
- Gegeben: UTC-Skala als Zeitkontinuum inklusive Einheiten und Strukturierung nach Gregorianischem Kalender, Information über den aktuellen Zeitpunkt.

Im Folgenden bauen wir das Zeitmodell schrittweise auf:

1. Taktgenaue Planung am nächsten Tag (5 Minuten-Takt)
 - c. Generierung eines Zeitmodells durch Rasterung der UTC-Skala nach Takten
Spezifikation: Originäres Zeitmodell, Basiszeiteinheit: 1 Takt
 - d. Strukturierung zu Tagen⁵⁶
 - e. Eliminierung des Wochenendes
 - f. Bestimmung des aktuellen Zeitpunkts und des aktuellen Tages
 - g. Begrenzung des Zeitmodells auf alle Takte des aktuellen Tages.
2. Tagesgenaue Planung für die restlichen Tage der Woche
 - a. Rasterung der UTC-Skala auf ein Tagesraster
 - b. Eliminierung des Wochenendes
 - c. Bestimmung des aktuellen Tages
 - d. Begrenzung der Zeitskala in Abhängigkeit vom Wochentag auf:
aktueller Tag+1 bis aktueller Tag+5, falls aktueller Tag = Freitag
aktueller Tag+1 bis aktueller Tag+4, falls aktueller Tag = Montag
aktueller Tag+1 bis aktueller Tag+3, falls aktueller Tag = Dienstag
...
3. Wochengenaue Planung bis zum Planungshorizont
 - a. Rasterung der UTC-Skala auf ein Wochenraster
 - b. Bestimmung der aktuellen Woche
 - c. Begrenzung der Zeitskala auf aktuelle Woche+1 bis zum gewünschten Planungshorizont.
4. Kombination der unter 1. - 3. erzeugten Zeitmodelle durch Verknüpfung.

Dieses zusammengesetzte Zeitmodell ist täglich je nach Wochentag bezüglich der Schritte 1 und 2 oder 1, 2 und 3 zu aktualisieren.



⁵⁵ Diese Projektion auf das Schichtende ist hier nur beispielhaft ausgeführt. In der Realität kann dies zu erheblichen Problemen führen.

⁵⁶ Dies ist in diesem Fall problemlos möglich, da ein Tag ein ganzzahliges Vielfaches eines Takts bildet.

– Umrechnung von Zeitmengen

In allen Fällen, in denen

- eine Uhr läuft, also eine additive Zeitmenge gegeben ist, deren Zeitelemente nicht in dem betrachteten Produktionsgeschehen begründet sind

- parallel zur Uhr ein „realer“ Produktionsprozess betrachtet wird

generieren wir die von der additiven Zeitmenge $(T, +, <, t_0)$ induzierte Zeitmenge $(T, \leq, t_0)$. Dabei kann $(T, \leq, t_0)$ mit bspw. „Meyer kommt“, „Chef geht“, „Maschine fällt aus“ bereits nach der Uhr geordnet sein. Dann fällt diese Reihenfolge weg und es heißt: Alle drei Sachverhalte gleichzeitig 7.00. Und dazu müssen wir den realen Prozess nur den Diagonal-Elementen zuordnen, nicht nochmals untereinander sortieren.

Sollen in einem Produktionssystem mehrere Zeitmengen nebeneinander verwendet oder Zeitelemente aus der realen Produktion auf eine exogen gegebene diskrete Zeitpunkte bzw. eine Zeitabschnittsmenge abgebildet werden, dann müssen wir Zeitmengen ineinander umrechnen. Ist dies der Fall, so gehört zum Aufbau der Zeitmengen auch die Angabe von Zuordnungsvorschriften, auf deren Basis die Umrechnung stattfinden kann: Eine *Zuordnungsvorschrift* ist eine ordnungserhaltende Abbildung zwischen zwei Zeitmengen, die den Elementen einer Zeitmenge entweder das jeweils kleinste nachfolgende Element der anderen Zeitmenge zuordnet (ordinale Zuordnung) oder das jeweils umfassendere Element aus der anderen Zeitmenge zuordnet (explizite Zuordnung). Die Art der Zuordnung und deren Eigenschaften hängen von der Art der gewünschten Umrechnungen und der Art der beteiligten Zeitmengen ab. Mit stetigen Zeitpunktmodellen, diskreten Zeitpunktmodellen und Zeitabschnittsmodellen erhalten wir 6 grundlegende Umrechnungsformen. (sZPM ... stetiges Zeitpunktmodell, dZPM ... diskretes Zeitpunktmodell, ZAM ... Zeitabschnittsmodell).

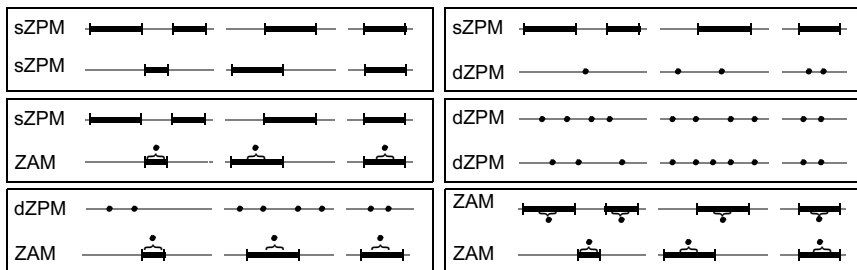


Bild 2-2 Mögliche Beziehungen zwischen Zeitmodellen

Bei der ordinalen Zuordnung wird auf den beiden beteiligten Zeitmengen eine gemeinsame Ordnung hergestellt, so daß sie sich für Umrechnungen eignet, die nur auf der Ausnutzung der Ordnungsbeziehung beruhen (Beispiel: „frühester Materialeingang nach erstem Takt der Maschine“, wobei das eine Zeitmodell auf Wareneingängen beruht und das andere auf Maschinentakten). Sind zwei stetige Zeitpunktmodelle einander ordinal zuzuordnen, so reicht es aus, „Synchronisationspunkte“ zu definieren, indem die Intervallgrenzen in die das andere Zeitmodell konstituierenden Intervalle abgebildet werden, oder, wenn das nicht möglich ist, die Intervallgrenzen zu ordnen. Im ersten Fall ist nicht nur die Ausnutzung der Ordnungsbeziehung möglich, sondern auch das gewöhnliche Rechnen, da im

Ergebnis ein Zeitmodell entsteht, das quasi Intervallskalenniveau⁵⁷ hat.

Die explizite Zuordnung eignet sich für die Umrechnung zwischen diskreten Zeitpunktmengen und Zeitabschnittsmengen und zwischen zwei Zeitabschnittsmengen. Zwei Elemente werden dann einander zugeordnet, wenn sie die Enthaltenseinsbeziehung erfüllen. Zwei Elemente, die sich überschneiden, die Enthaltenseinsbeziehung aber nicht erfüllen, können dann einander zugeordnet werden, wenn dadurch nicht die Bedingung der Ordnungserhaltung verletzt wird. Die explizite Zuordnung drückt also immer eine Vergrößerung der Elemente der Zeitmengen aus.

Es bezeichne

$U(T_1, T_2)$ die Zuordnungsvorschrift zwischen zwei Zeitmodellen T_1 und T_2 .

Dann gilt $I(T_1, T_2) = U_{\subseteq}(T_1, T_2) \cup U_{\leq}(T_1, T_2) \subseteq (T_1 \times T_2) \cup (T_2 \times T_1)$, wobei

$(t, t') \in U_{\subseteq}(T_1, T_2)$ bedeutet, dass $t \subseteq t'$, und

$(t, t') \in U_{\leq}(T_1, T_2)$ bedeutet, dass $t' \leq_{T_1 \cup T_2} t$.

Es gilt für $U_{\subseteq}(T_1, T_2)$:

$t \in T_1, t' \in T_2: (t, t') \in U_{\subseteq}(T_1, T_2) \wedge (t', t) \in U_{\subseteq}(T_1, T_2)) \rightarrow (t =_{T_1 \cup T_2} t')$,

$t \in T_1, t', t^0 \in T_2: (t, t') \in U_{\subseteq}(T_1, T_2) \wedge (t \neq_{T_1 \cup T_2} t')$ $\rightarrow \forall t^0: (t, t^0) \notin U_{\subseteq}(T_1, T_2)$,

$t_1, t_2 \in T_1, t_3, t_4 \in T_2$:

$(t_1, t_3) \in U_{\subseteq}(T_1, T_2) \wedge ((t_2, t_4) \in U_{\subseteq}(T_1, T_2): t_1 \leq_{T_1} t_2 \rightarrow t_3 \leq_{T_2} t_4$

bzw. Analoges für $t_3, t_4 \in T_1, t_1, t_2 \in T_2$.

Es gilt für $U_{\leq}(T_1, T_2)$:

$t \in T_1, t' \in T_2: (t, t') \in U_{\leq}(T_1, T_2) \wedge (t', t) \in U_{\leq}(T_1, T_2)) \rightarrow (t =_{T_1 \cup T_2} t')$,

$t \in T_1, t', t^0 \in T_2: ((t, t') \in U_{\leq}(T_1, T_2)) \rightarrow \forall t^0: (t' \leq_{T_2} t^0) \vee ((t, t^0) \notin U_{\leq}(T_1, T_2))$

bzw. Analoges für $t \in T_2, t', t^0 \in T_1$,

$t_1, t_2 \in T_1, t_3, t_4 \in T_2$:

$(t_1, t_3) \in U_{\leq}(T_1, T_2) \wedge ((t_2, t_4) \in U_{\leq}(T_1, T_2): t_1 \leq_{T_1} t_2 \rightarrow t_3 \leq_{T_2} t_4$

bzw. Analoges für $t_3, t_4 \in T_1, t_1, t_2 \in T_2$.

Beispiel 2-26: Zuordnung des jeweils kleinsten nachfolgenden Elements

Bereitstellung von Verpackungsmaterial mit Gabelstapler

Zeitmenge 1: {Müller, Meier, Metzger, Maler, Schulze, Schultze, Schmidt, Schmied, Schmitt, Schmidt}

Zeitmenge 2: {Still 1, Jungheinrich, Still 2, Wagner, Jungheinrich}

Zuordnung:

⁵⁷ Zum Begriff *Intervallskalenniveau* siehe [STELA77], S. 29f. und Bd. 1, Methodische Grundlagen, Kap. 7, Klassifizieren, Ordnen, Skalieren, Messen.

Müller, Meier, Metzger, Maler, Schulze, Schultze, Schmid, Schmied, Schmitt, Schmidt
 Jungheinrich Still 2 Wagner Jungheinrich Still 1

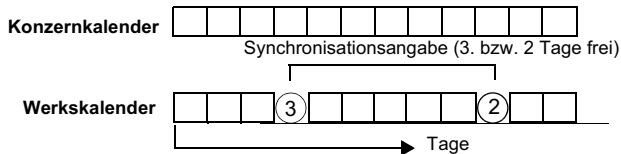
Ergebnis:

({Müller, Meier, Metzger, Maler}, Jungheinrich), ({Schulze}, Still 2), ({Schultze, Schmid}, Wagner), ({Schmied}, Jungheinrich), ({Schmitt, Schmidt}, Still 1).

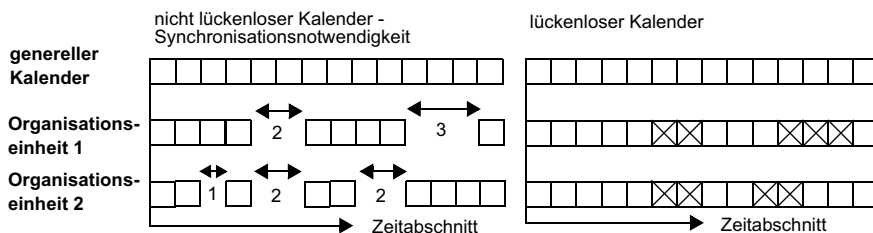


Beispiel 2-27: Verrechnung zwischen Kalendern

Über einen Kalender ist darzustellen, in welchem Zeitabschnitt eine Organisationseinheit im Leistungserstellungsprozess involviert sein kann, also Kapazität zur Verfügung stellt. Die Organisationseinheiten werden aber nicht alle zum selben Zeitpunkt kapazitiv verfügbar sein. Kalender, die nur die Zeitabschnitte, in denen Kapazität zur Verfügung steht, enthalten, sind ohne Synchronisationshinweise nicht ineinander umsetzbar oder vergleichbar (siehe Bild 2-1). Bspw. können wir zwei Bedarfslisten unterschiedlicher Organisationseinheiten, die nur aktive Zeitabschnitte enthalten, nicht ohne Synchronisationshinweise zu einer Gesamt-Bruttobedarfsliste addieren. Jede Art der Synchronisation solcher Kalender setzt einen übergeordneten Kalender voraus, an dem alle zu synchronisierenden Kalender/Organisationseinheiten verglichen werden. Muss man die Vergleichbarkeit bspw. über Werke sicherstellen, so bedeutet dies, dass ein werksübergreifender Kalender zu führen ist, der alle Tage/Schichten enthält, die nicht absolut (konzernweit) arbeitsfrei sind. Alle kapazitiv verfügbaren Zeitabschnitte sind durch Mitzählen der nicht verfügbaren Zeitabschnitte auf diesen Kalender justiert. Eine quasi-kontinuierliche Zeitmenge, wie z. B. der Gregorianische Kalender, ist als Referenzbasis am besten geeignet, da hier prinzipiell kein Kalender Zeitpunkte ansprechen kann, die im Gregorianischen Kalender nicht platziert werden könnten. Die Identifikation der Zeitpunkte und -abschnitte erfolgt über entsprechende Beschreibungen oder Indizes (z. B. Gregorianischer Kalender, Werkskalender).



Jeder spezielle Kalender einer Organisationseinheit enthält dann sinnvoller Weise alle Zeitabschnitte des übergeordneten Kalenders. Der Kalender auf höchster Ebene dient damit als Bezugssystem bzw. als Grundraster für alle untergeordneten Kalender. Jeder Zeitabschnitt in einem Kalender kann einem Zeitabschnitt in einem anderen Kalender ohne Synchronisationsrechnung eindeutig zugewiesen werden, da jeder Kalender - gleiche Detaillierung (z. B. Tag, Schicht) vorausgesetzt - gleich viele Zeitabschnitte enthält. Durch einfaches Abzählen lässt sich damit ein Zeitabschnitt in jedem beliebigen Kalender eindeutig ansprechen.

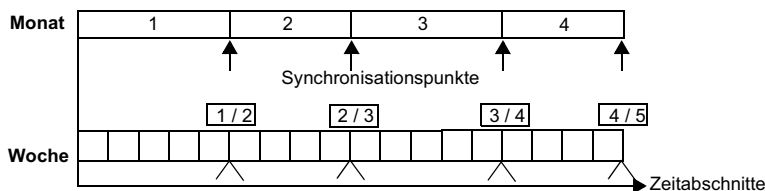


Hier besteht noch ein Zuordnungs-/Synchronisationsproblem: Ein Zeitabschnitt aus einem detaillierten Kalender (z. B. Schicht) muss einem Zeitabschnitt in einem größeren Kalender (z. B. Tag) zugeordnet werden und umgekehrt. Schließen wir eine Synchronisation über mehrere Ebenen (Tage $\rightarrow$ Monat) hinweg aus und lassen wir nur eine einstufige Zuordnung/Synchronisation zu, so lässt sich dieses Problem eingrenzen. Problemlos ist bspw. festzulegen:

8 Stunden $\rightarrow$ 1 Schicht; 3 Schichten $\rightarrow$ 1 Tag; 7 Tage $\rightarrow$ 1 Woche⁵⁸; ...;

3 Monate $\rightarrow$ 1 Quartal.

Offen bleibt jedoch die Zuordnung Woche $\rightarrow$ Monat, da nicht generell 4 bzw. 5 Wochen einem Monat zugeordnet werden können. Allein mit Abzählen kann diese Zuordnung nicht geleistet werden.



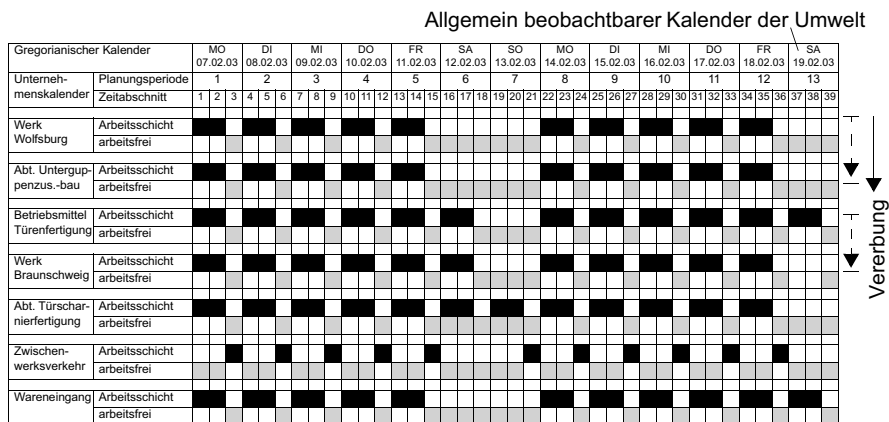
Um eine eindeutige Zuordnung zu erhalten, muss auf der jeweils größeren Ebene immer ein Zeitabschnitt zu finden sein, dem ein Zeitabschnitt aus dem detaillierten Raster zugeordnet werden kann. Im Schichttraster dürfen keine Zeitabschnitte enthalten sein, denen kein Tag auf der Tagesleiste zugeordnet werden kann. Dasselbe gilt z. B. für die Zuordnung Tages-/Wochenraster, wenn im Wochenraster zwei Wochen wegen Werksurlaub fehlen.



Beispiel 2-28: Vererbung zwischen Kalendern

Unterschiedlich detaillierende Diskursebenen werden unterschiedliche Kalender verwenden. Üblicherweise sind diese Kalender hierarchisch voneinander abgeleitet. Wir verwenden hier ein Beispiel aus einem Automobilunternehmen (Zeitabschnittsmodell).

⁵⁸ Es wäre bspw. denkbar, die Sonntage im Tagesraster entfallen zu lassen. Dann wäre eine Synchronisation Tag $\rightarrow$ Woche notwendig. Mit vergleichbarem Aufwand kann auch ein kompletter Tageskalender mit Sonntagen geführt werden, bei dem keine Synchronisationsprobleme auftreten.



Zwei unterschiedliche Werke (Wolfsburg, Braunschweig) haben zwei unterschiedliche Kalender. Innerhalb der Werke müssen Abteilungen mit abweichendem Kalender spezifiziert werden, innerhalb der Abteilung gilt dasselbe für abweichende Betriebsmittel (hierarchisches Ersatzwertekonzept). Der Zwischenwerksverkehr findet nur in der dritten Schicht statt, der Wareneingang ist in der ersten und zweiten Schicht Montag bis Freitag geöffnet. Der genaue Arbeitsbeginn (Schichtbeginn) und die Dauer einer Schicht werden erst auf Abteilungsebene geregelt.

– Zeitabhängige Attribute und Relationen

Jede Aussage zum sachlichen Bezug kann von der Zeit abhängig gemacht werden. Ein bestimmter Verwendungszusammenhang gilt dann bspw. nur für einen bestimmten Zeitraum, eine gewisse Eigenschaft ist erst ab einem bestimmten Zeitpunkt vorhanden, ein Bestand in einer gewissen Höhe nur bis zu einem bestimmten Zeitpunkt möglich. Damit grenzen wir eine Zeitmenge und damit den Definitionsbereich einer Zeitfunktion ein. Zweckmäßigerweise listen wir hier nicht alle Zeitelemente einer Zeitmenge auf, an denen ein bestimmter Sachverhalt definiert ist/zutrifft, sondern geben den Beginn/das Ende einer solchen Festlegung direkt als Zeitelement an.

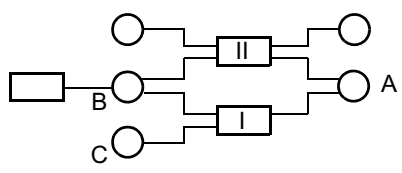
Verwendungszusammenhänge werden in der Regel mit einer Angabe versehen, wie zu Ende der Verwendung der Auslauf geregelt werden soll. Ist eine Verwendung eines Teils X in einer Baugruppe Y bis zum 31.08. begrenzt, dann muss - wenn keine andere Verwendung für das Teil X besteht - das letzte Los für das Teil X so bemessen werden, dass der Bedarf ab dem 01.09. von einem anderen Teil gedeckt und der Bestand des Teils X auf Null geregelt wird. Bei „Aufbrauchen“ umfasst auch das letzte Los die vor dem 31.08. übliche Losgröße und der Bestand wird über den 31.08. hinaus auf Null abgebaut. Als weitere Möglichkeit könnten Restbestände dem Bestand an Ersatzteilen zugehen usw.

Insbesondere auf frühen Produktionsstufen wird ein Auslauf nur sehr ungenau über Zeitpunkte zu steuern sein. Sehr viel einfacher und flexibler lässt sich der Auslauf hier über eine Orientierung am originären Prozess, also über Fortschrittszahlen steuern. Nimmt man bspw. eine Baugruppe X, die am 31.08. mit der Fortschrittszahl 1000 ausläuft, und

die Verwendungsmenge eines Teils Z ist 1, dann läuft die Herstellung von Teil Z (immer vorausgesetzt, es gibt keine weiteren Verwendungen) auch mit der Fortschrittszahl 1000 aus, unabhängig davon, zu welchem (früheren) Fabrikkalendertag diese Fortschrittszahl eintritt.

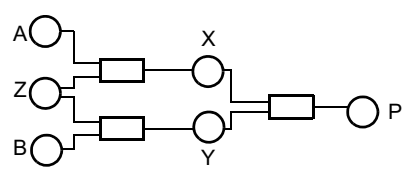
Beispiel 2-29: Zeitabhängige Attribute und Relationen

- Durchlaufzeit: Vom Zeitabschnitt 01.08.1995 bis zum Zeitabschnitt 31.08.1995 gilt „Durchlaufzeit = 5 Zeitabschnitte“, ab Zeitabschnitt 01.09.1995 gilt „Durchlaufzeit = 6 Zeitabschnitte“.
- Betriebsmittelzuordnung: Betriebsmittel A ist für die Vorgangsklasse I von Zeitabschnitt 02.08.95 bis einschließlich Zeitabschnitt 14.08.95 nicht verfügbar
- Verfahrenszuordnung: Bis einschließlich Zeitabschnitt 31.05.1995 wird Teil A mit Verfahren II hergestellt, ab Zeitabschnitt 01.06.1995 wird Teil A mit Verfahren I hergestellt. Bis einschließlich Zeitabschnitt 31.07.1995 verwendet Verfahren I das Material B, ab Zeitabschnitt 01.08.1995 wird Material C in Verfahren I verwendet (Exogenes Zeitmodell).



Relation	Einsatz	Entfall
A / II	-	31.05.95
A / I	01.06.95	-
I / B	-	31.07.95
I / C	01.08.95	-

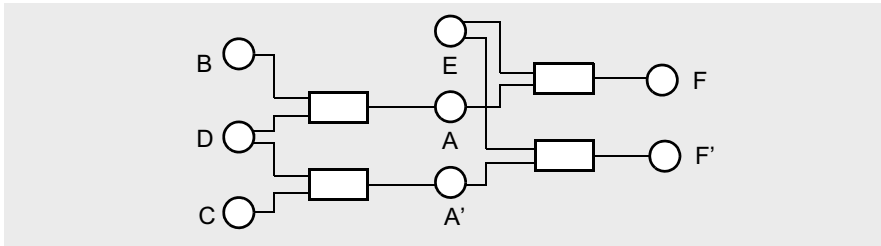
- Verwendung / Auslauf
Ein Produkt P verwendet nach einem bestimmten Zeitpunkt eine Komponente Y, die Komponente X läuft aus. Der Zeitpunkt des Wechsels bestimmt sich über die Fortschrittszahl 1000 für das Produkt P (Originäres Ereignis).



Abrechnung nach Fortschrittszahl 1001		
P / X	1000	1000
P / Y	1001	0001
X / A	1000	1000
X / Z	1000	1000
Y / Z	0001	1001
Y / B	0001	0001

■

Wenn wir in einer Baugruppe A zu einem Zeitpunkt T ein Teil B, das (über einen Montagevorgang) in diese Baugruppe A eingeht, gegen ein Teil C austauschen, dann ist diese Baugruppe A in der Realität vor dem Zeitpunkt T anders als nach dem Zeitpunkt T. Dann müsste auch die Identifikation von A in A' geändert werden. Darüber hinaus ändern sich alle Baugruppen/Erzeugnisse, in die A' eingeht, so dass deren Identifikation ebenfalls geändert werden müsste - insbesondere dann, wenn die alte Struktur neben der neuen bestehen bleiben soll.



Hier haben wir zwei Möglichkeiten:

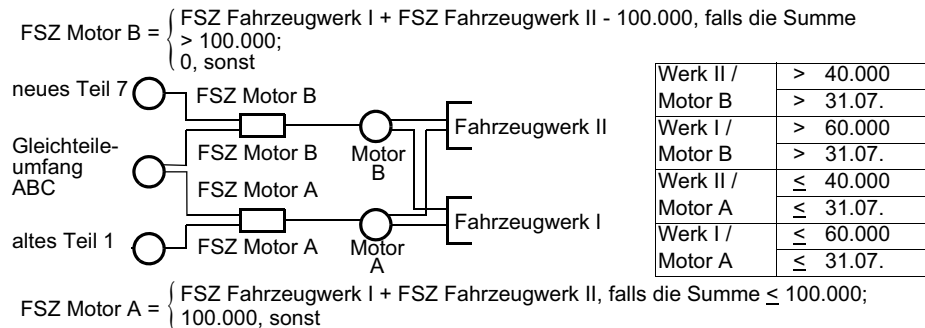
- Fall 1: Termine direkt am Produkt F bzw. F'

Es sind keine Termine an den anderen Relationen erforderlich. Einsatz-/Entfallzeitpunkte stehen nur an den Produkten F bzw. F', auf die der jeweilige Produktionsablauf zuführt.

Eigenschaften:

- Es müssen auf allen Ebenen geänderte Produktionsstrukturen aufgebaut werden.
- Für alle A' verwendenden Faktor-Klassen müssen neue Identifikationen vergeben werden.
- Alte und neue Produktionsstruktur existieren (zur Zuordnung von Rückmeldungen, die nach dem Änderungstermin eintreffen) über eine bestimmte Zeit parallel. Deshalb müssen ggf für alle von A' direkt verwendeten Faktor-Klassen neue Identnummern vergeben werden.

Beispiel 2-30: Auslauf mit Veränderung der Identifikation in den verwendenden Gruppen



- Fall 2: Termine an Knoten/Kanten

Hier werden keine vollständig parallelen Produktionsstrukturen aufgebaut. Es wird lediglich die Produktionsstruktur A durch A' ersetzt („Im Motor F ist jetzt ein gelber Dichtungsring anstatt ein roter“).

Eigenschaften:

- Es werden auf Produktebene keine neuen Identbegriffe vergeben.
- Die Identifikation einer Faktor-Klasse ist nur mit Angabe des Betrachtungszeitpunkts eindeutig („Ein VW-Golf mit Änderungsstand 13.11.2006“).
- Es werden keine komplexen Änderungsstrukturen aufgebaut.

– Der strukturelle Zusammenhang in der Produktionsstruktur ist terminlich bewertet.

- **Faktorströme/Zeitfunktionen**

An einem (Beginn-) Produktionspunkt betrachten wir ein Geschehen, das über der Zeit durch das Auftreten von Faktoren mit bestimmten wechselseitigen Relationen und das Auslösen von Transformationen geprägt ist, in denen diese Faktoren konsumptiert werden. Für jedes so beschriebene Beginn- und Endereignis ist der zeitliche Bezug über die Zuordnung zu den Zeitpunkten eines extern begründeten Kalenders herzustellen. Wir wollen jetzt Eigenschaften von Zeitfunktionen mit kardinalen Zeitmengen diskutieren, die an Produktionspunkten von besonderem Interesse sind, und geeignete Konzepte zusammenstellen.

– *Einheitenströme*

Die Vorstellung eines (Beginn-) Produktionspunktes als eine Linie, über die die Faktoren treten und sich dabei verändern bzw. verschwinden, kommt sehr nahe dem, was in der Physik als Strom oder Fluss bezeichnet wird. Fluss und Strom sind dabei zwei abstrakte Beschreibungen ein- und desselben Sachverhalts: Der *Strom* bezeichnet allgemein eine pro Zeiteinheit durch eine gegebene Querschnittsfläche hindurchtretende Menge. Der *Fluss* (skalarer Fluss eines Vektorfeldes) ist definiert als das innere/skalare Produkt aus Vektorfeld und Fläche (siehe [WIKIPEDIA]). Die Statistik verwendet die von uns gegebene Definition eines Prozesses als eine Menge von Zeitfunktionen und formuliert darauf aufbauend: Ein Strom Φ ist ein *monoton wachsender Prozess* P (siehe bspw. [FERS64]). Unter einem Prozess werden dabei Zeitfunktionen verstanden, die bspw. die Ankunft/den Abgang von Personen und/oder Gegenständen in einem bestimmten Umfeld beschreiben. Hier sind alle Ankunfts- oder Abgangsprozesse zu nennen, bei denen sich die ankommenden bzw. abgehenden Elemente in eine Menge einordnen. Die Kardinalität dieser Menge kann somit nur (monoton) wachsen. Ein Beispiel wäre die Ankunft der Patienten in einem Wartezimmer oder die in einem Unternehmen eingehenden Kundenaufträge: Die Liste dessen, was ankommt bzw. angekommen ist, wird immer länger. Die Statistik trifft eine weitere relevante Unterscheidung zur Einteilung der Zeitfunktionen: Ein *stetiger Strom* Φ^s ist ein monoton wachsender Prozess, der aus einer Menge stetiger Zeitfunktionen besteht, die nur reelle positive Zahlenwerte annehmen können: Als stetigen Strom beschreiben wir bspw. einen Wasserhahn, aus dem „ständig“ eine variable Menge Wasser austritt (nicht tropft!). Ein *diskreter Strom* Φ^d ist ein monoton wachsender Prozess, dessen Zeitfunktionen nur zu isolierten Zeitpunkten eine Veränderung anzeigen: Ein diskreter Strom wird bspw. von den in einem Unternehmen über der Zeit eingehenden Kundenaufträgen gebildet. Ein diskreter Strom Φ^e , dessen Zuwachs nur ganzzahlige Werte annehmen kann, heißt *Einheitenstrom* [FERS64]: $P: = \{f\}, f(t) \in \mathbb{N}_0, t \in T$. Das ist der tropfende Wasserhahn, bei dem wir die „Einheitstropfen“ zählen. Wir gehen davon aus, dass wir das Geschehen an einem Produktionspunkt in der Regel in eine Menge von Einheitenströmen dekomponieren können:

- Die bereitgestellten Faktoren lassen sich wie die ausgelösten Transformationen eindeutig benennen.
- Sachverhalte wie 2,8 m² Blech oder 1,74 kg Aluminium lassen sich eindeutig einer übergeordneten Einheit zuordnen.
- 87 Stück in einer Kiste bilden eine eindeutig ansprechbare Transporteinheit.
- *Reguläre und nicht reguläre Ströme*

Ein *regulärer Einheitenstrom* Φ^{er} liegt vor, wenn zu jedem beliebigen Zeitpunkt der Funktionswert $\in \{0, 1\}$ ist. Ein solcher Strom setzt voraus, dass wir die Zeit beliebig genau messen können, so dass wir nicht gezwungen sind, zwei aufeinanderfolgende Sachverhalte nur deshalb, weil unsere Uhr nicht genau genug ist, ein und demselben Zeitelement zuordnen zu müssen. Einheitenströme Φ^{ea} , bei denen wir mehrere Einheiten zeitlich nicht differenzieren können und daher für den Funktionswert eines Zeitelements $\in N_0$ gilt, sind *nicht regulär*. Dabei spielt es keine Rolle, ob das „in Wirklichkeit“ so ist, oder lediglich die von uns verwendete Uhr nicht fein genug misst (also bspw. das Pendel zu langsam schwingt).

- Fall 1: Wenig (interne) Ereignisse im externen Zeitmodell
Wir sprechen von einem Ereignisabstand und einer Ereigniswahrscheinlichkeit. Anhand dieser Größen bilden wir die Menge der originären Produktionsereignisse auf eine kardinale Zeitmenge mit dem Wertevorrat 0, 1 ab.
- Fall 2: Viele identische Ereignisse je Zeitabschnitt
Wir operieren mit der Zuordnung von Mengen/der Zuordnung von „Stückzahlen“ der gleichen Klasse zu einem Zeitelement.⁵⁹
- Fall 3: Viele nicht identische Ereignisse je Zeitabschnitt
Wir ordnen einem Zeitelement „Stückzahlen“ mehrerer Klassen zu.⁶⁰

Was hier deutlich wird - insbesondere bei der Definition eines Stromes -, ist der Fakt, dass über das, was denn nun fließt, nichts ausgesagt wird: Die Elemente der Menge sind über die Menge selbst ausreichend identifiziert; die Bezeichnung der Ereignisse in einem Zeitraum ist mit der Bezeichnung der Klasse hinreichend genau gegeben.⁶¹ [BUSL71] bspw. spricht in diesem Fall von „gleichartigen Ereignissen“: Unter einem *Strom von Elementen gleicher Klasse* (gleichartige Ereignisse) verstehen wir eine Folge von Ereignissen, deren Gleichartigkeit in dem Sinne zu verstehen ist, dass nur der Sachverhalt von Bedeutung ist, dass ein Ereignis zu einem gegebenen Zeitpunkt eintritt oder nicht.

Beispiel 2-31: Einheitenstrom Φ^e /Elemente gleicher Klasse

a) Wir tragen über der Zeit die Anzahl der in den Kundenaufträgen bestellten Fahrräder auf. Derjenige, der die externe Uhr vorgibt, hat diese nicht fein genug angelegt. Also ist

⁵⁹ Dieses Konzept wird häufig (siehe bspw. [FLEI90]) mit „small bucket“ charakterisiert.

⁶⁰ Dieser Sachverhalt wird häufig mit „big bucket“ [FLEI90] charakterisiert.

⁶¹ Ein „Ereignis“ vereinbaren wir immer je Zeitelement. Wenn das Zeitelement „groß“ ist, fassen wir die Veränderungen einer Klasse über dem Zeitabschnitt bzw. je Zeitelement zusammen. Tatsächlich haben wir auch kein Mittel für eine weitergehende zeitlich detaillierende Unterscheidung.

die Abbildung auf die externe Uhr im Sinne der Ordnungszahlen für die produktionssysteminternen Ereignisse unmöglich. Zwischen den externen Ereignissen sammeln sich jetzt die internen Ereignisse: Die Anzahl registrierter Fahrräder zu einem Zeitpunkt unserer Uhr ist ≥ 0 . Zu einem bestimmten Zeitpunkt können bspw. 5 fertiggestellte Fahrräder registriert werden.

b) Es sei ein Tagesraster gegeben, die endogenen Ereignisse seien „Abfüllen von Limonade-Flaschen auf Abfülllinie 3“

c) Es sei ein Schichtraster gegeben, die endogenen Ereignisse seien „Fertigstellen von Zigaretten“

d) An einem Produktionspunkt werden die fertig lackierten Fahrradrahmen erfasst. Die Fahrradrahmen werden nicht weiter unterschieden. Dann muss nur das Abgangsereignis an sich im Sinne einer 0/1-Information erfasst werden. Am Ende eines Tages zählen wir die Anzahl der „1“. Die Bezeichnung dieses Ereignisses wird über die Bezeichnung des Produktionspunkts geliefert. Bspw. hat das Erfassungsgerät, das diesem Produktionspunkt zugeordnet ist, eine eigene Identnummer. Über diese Identnummer wird das erfasste Element einer bestimmten Klasse zugeordnet.

e) Die Anzahl registrierter Fahrräder zu einem Zeitpunkt unserer Uhr ist maximal „1“. Wir registrieren also viel häufiger das Ticken der Uhr als „Fahrrad fertig“. Darüber hinaus ist die Zeiteinheit unserer Uhr so klein, dass zwei fertiggestellte Fahrräder immer zwei unterschiedlichen Zeitelementen zugeordnet werden können (regulär). Also hängt diese Unterscheidung im wesentlichen von der Zeiteinheit der eingesetzten Uhr in Relation zur „Ereignisdichte“ im realen Produktionsgeschehen ab: Ist die Zeiteinheit der Uhr nicht klein genug, ist auch ein „an sich regulärer“ Prozess nicht regulär. Produzieren wir nur jeden Tag ein Fahrrad, reicht auch die „stündlich schlagende Kirchturmuhr“ aus um festzustellen: Dieser Prozess ist regulär.



Beispiel 2-32: Terminal zu Beginn der Montage

Wir ordnen / ein Terminal ordnet ein Ereignis den Zeitpunkten t_1, t_2 oder dem Zeitabschnitt $t_1 t_2$ zu: $t_1 \rightarrow 07.00$ Uhr, $t_2 \rightarrow 08.00$ Uhr. Es gibt keine Aussage im Terminal „07.32“; vielmehr ist das Terminal so eingestellt: „Zuordnung von Produktionsereignis zu 08.00 Uhr“. 08.01 Uhr springt die Zuordnungsvorschrift ggf. auf 9.00 Uhr.



Wir gehen von einem nicht regulären Strom von Elementen gleicher Klasse aus und betrachten die Umsetzung des realen Geschehens eines Produktionssystems auf eine gegebene diskrete Zeitmenge (siehe Bild 2-2). Wenn wir dazu eine Zeitpunktmenge (bspw. ..., 10.00, 11.00, 12.00, ...) verwenden, dann sind zu einem Zeitpunkt zwei Zustände zu führen: Zustand vor dem Verbuchen der Ereignisse, Zustand nach dem Verbuchen. Wird dagegen eine Menge von Zeitabschnitten verwendet⁶², dann ist eine differenziertere Betrachtung anzustellen:

- Ein Faktor kann nur zu den Zeitpunkten der exogenen Zeitabschnittsmenge beobachtet werden.

⁶² definiert über Paare von Zeitelementen und deren zeitlichem Einheitsabstand

- Damit kann ein Zustand/Bestand im Produktionssystem nur zu den Zeitpunkten der exogenen Zeitmenge geführt werden. Während des Zeitabschnitts kann keine Zustandsaussage getroffen werden.
- Zur Abbildung der Ereignisströme in einem Produktionssystem sind drei grundsätzliche Verständnisse denkbar (siehe Bild 2-3):

1. gleichmäßiger Strom bzw. gleichverteilt über dem Zeitabschnitt (kombiniertes Zeitpunkt-/Zeitabschnittsmodell).

2. Konzentration der produktionssysteminternen Ereignisse auf das Ende eines Zeitabschnitts: Zugang/Abgang bzw. Bestandswirksamkeit zu Ende eines Zeitabschnitts; die Zeitangabe „Woche“ wird grundsätzlich als „Freitagabend“ interpretiert; wir erhalten die Auswirkungen eines Zeitpunktmodells.

3. Konzentration der produktionssysteminternen Ereignisse auf den Beginn eines Zeitabschnitts: Zugang/Abgang bzw. Bestandswirksamkeit zu Beginn eines Zeitabschnitts; die Zeitangabe „Woche“ wird grundsätzlich als „Montagsmorgen“ interpretiert; wir erhalten die Auswirkungen eines Zeitpunktmodells.⁶³

B Bestand zu Zugang ab Abgang	kombiniertes Zeitmodell	Zeitpunktmodell		
Zeitabschnitt 1 2 0 1 2 Zeitpunkt	gleichförmiger Ereignisstrom	Ende Zeitabschnitt	Anfang Zeitabschnitt	
	$\begin{aligned} \text{Vorwärtspfeil: } B_1 &= B_0 + zu_1 - ab_1 \\ \text{Rückwärtspfeil: } B_0 &= B_1 - zu_1 + ab_1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Vorwärtspfeil: } B_1 &= B_0' \\ B_1' &= B_1 + zu_1 - ab_1 \\ \text{Rückwärtspfeil: } B_1 &= B_1' - zu_1 + ab_1 \\ B_0' &= B_1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Vorwärtspfeil: } B_1 &= B_0' \\ B_1' &= B_1 + zu_2 - ab_2 \\ \text{Rückwärtspfeil: } B_1 &= B_1' - zu_2 + ab_2 \\ B_0' &= B_1 \end{aligned}$	

Bild 2-3 Verrechnen von Ereignisströmen (I)

Ein modellseitig gleichmäßig angenommener Strom von Ereignissen (z. B. in einer Wiederholfertigung) führt in einer in die Zukunft gerichteten Planung (Vorwärtsplanung) bei einem Abgang vom Lager zu einer Verminderung und bei einem Zugang zu einer Erhöhung des Bestands zu Ende des Zeitabschnitts. In einer in die Vergangenheit gerichteten Planung (Rückwärtsplanung) zur Berechnung spätester Ereigniszeitpunkte ist bei einem Abgang der Bestand zu Beginn des Zeitabschnitts zu erhöhen, bei einem Zugang zu vermindern. Damit wird der betrachtete Strom über dem Zeitabschnitt durch eine Gerade an-

⁶³ Vergleiche dazu die Annahmen der Statistik: Können Ereignisse zu beliebigen Zeitpunkten und/oder beliebiger Ausprägung auftreten, dann bildet man Intervalle und stellt den Sachverhalt als Histogramm dar. Treten Ereignisse nur zu diskreten Zeitpunkten und/oder diskreten Ausprägungen auf, dann wählt man zur Darstellung ein Stabdiagramm (siehe bspw. [BEGr97], S. A90ff.). Genau diese Zuordnungen muss das Terminal oder der Werker in der Realität leisten.

genähert. Je Zeitpunkt ist nur ein Bestandswert zu führen - der Ereignisstrom, der zum Zeitpunkt verbucht wird, hat für die Uhr während des Zeitabschnitts stattgefunden. Ein gleichmäßiger Strom für Zu- und Abgang vorausgesetzt, können Lagerzugang und -abgang dann im selben Zeitabschnitt erfolgen, ohne dass für die externe Uhr unzulässige Inkonsistenzen entstehen.⁶⁴ Die Konzentration auf das Ende eines Zeitabschnitts geht vom spätest möglichen Eintreten der Ereignisse aus. Das bedeutet insofern eine Änderung gegenüber einem gleichmäßig angenommenen Ereignisstrom, als dass zu Ende eines Zeitabschnitts der ursprüngliche und der aufgrund des Verbuchens veränderte Bestandswert vorliegt. Die Konzentration auf den Beginn eines Zeitabschnitts geht als dritte Möglichkeit dagegen vom frühest möglichen Eintreten der Ereignisse aus. Hier muss zu Beginn des Zeitabschnitts verbucht werden (zwei Bestandswerte zu Beginn des Zeitabschnitts). Auch hier ergeben sich bei einer konsequenten Anwendung keine Inkonsistenzen, wenn bspw. der Bestand zu einem Zeitpunkt konsequent den Zustand zu Beginn eines Zeitabschnitts nach Verbuchen aller zugeordneten Ereignisströme angibt; entsprechendes gilt beim Verbuchen zu Ende eines Zeitabschnitts.

Sollen für Abgang und Zugang unterschiedliche Annahmen zugelassen werden, ist eine Kombination aus „Zugang zu Anfang Zeitabschnitt / Abgang zu Ende Zeitabschnitt“ dadurch gekennzeichnet, dass zur Erhaltung der Konsistenz der Abgang eines Zeitabschnitts, der dann, wenn er dem Produktionssystem als Planwert für den Zeitabschnitt vorgegeben wird, in Realität ja zu Beginn des Zeitabschnitts erfolgen kann, zu dessen Beginn über einen Bestand gesichert werden muss⁶⁵. Wenn die Planvorgaben an die Realität lediglich „Ereignisströme/Zeitabschnitt“ ohne weitere Aussage über die Zuordnung zu Beginn oder Ende des Zeitabschnitts sind (Verständnis 1), kann ohne modellseitige Konsistenzverletzung eine Realisierung als „Zugang zu Ende Zeitabschnitt/Abgang zu Anfang Zeitabschnitt“ zu Nichtverfügbarkeiten führen. Daher sind in diesem Fall in der Realität des Produktionssystems ggf. entsprechende (Sicherheits-)Bestände einzuplanen (siehe Bild 2-4).

B Bestand zu Zugang ab Abgang 1 2 0 2 Zeitabschnitt Zeitpunkt	Zugang Anfang Zeitabschnitt Abgang Ende Zeitabschnitt	Zugang Ende Zeitabschnitt Abgang Anfang Zeitabschnitt
	$\xrightarrow{\quad}$ $B_1 = B_0'$ $B_1' = B_1 + zu_2 - ab_1$ $\xleftarrow{\quad}$ $B_1 = B_1' - zu_2 + ab_1$ $B_0' = B_1$	$\xrightarrow{\quad}$ $B_1 = B_0'$ $B_1' = B_1' + zu_1 - ab_2$ $\xleftarrow{\quad}$ $B_1 = B_1' - zu_1 + ab_2$ $B_0' = B_1$

Bild 2-4 Verrechnen von Ereignisströmen (II)

⁶⁴ Bei der Losgrößenermittlung (siehe [NADD71]) werden derartige Überlegungen durch die bestehenden Vorgehensmodelle explizit angestellt: Beim Lagerzugang setzt die „offene Produktion“ eine gleichmäßige Belieferung eines Lagers durch eine Produktion voraus, während die „geschlossene Produktion“ das gesamte Los in einem Transportvorgang abliefern. Der Lagerabgang wird bei der Anderschen Losgrößenformel [ANDL29] als gleichförmig angenommen. Bei variablen Losgrößen unterscheidet z. B. die Part period Rechnung, ob der Abgang gleichförmig oder zu Beginn eines Zeitabschnitts („worst case“) erfolgt.

⁶⁵ Dieser Bestand, der von der externen Uhr ignoriert wird, muss in Wirklichkeit den Abgang des Zeitabschnitts abdecken können. Damit stimmen der Bestand in der Realität und der von der Uhr induzierte Planbestand von Vornherein nicht überein.

Die Verbuchungsannahme „Zugang zu Ende Zeitabschnitt / Abgang zu Anfang Zeitabschnitt“ stellt auch bei beliebiger Interpretation der Vorgaben durch die Realität die absolute Verfügbarkeit sicher. Allerdings kann jetzt bei einer entsprechenden Realisierung des Zugangs in Zeitabschnitt 1 und des Abgangs in Zeitabschnitt 2 ein tatsächlicher Bestand über maximal zwei Zeitabschnitte erzeugt werden, obwohl von Bestand „Null“ ausgegangen wurde.

Bei einem gleichförmigen Faktorstrom verwenden wir zweckmäßigerweise ein gemischtes Zeitmodell (Zeitpunktmodell für den Bestand, Zeitraummodell für Zugang und Abgang). In der Praxis wird häufig der Bestand zu Ende des Zeitabschnitts aktualisiert und nach Verrechnung von Zu- und Abgang ausgewiesen. Somit liegt in diesen Fällen ein Zeitpunktmodell vor, in dem Vorwärts- und Rückwärtsplanung für dasselbe Resultat zwei unterschiedliche Vorgehensweisen verfolgen.⁶⁶

Wenn wir bei einem regulären Faktorstrom von maximal einem Ereignis je Zeitabschnitt ausgehen, dann kann dieses über dem gesamten Zeitabschnitt eintreten. Eine Gleichverteilung der Eintreffswahrscheinlichkeit kann dann wieder optimistisch oder pessimistisch interpretiert werden. Damit gelten alle obigen Aussagen auch hier. Die Ereignisse im Produktionssystem werden damit einem Zeitpunkt, nicht mehr einem Zeitabschnitt im Kalender zugeordnet. In der Realität können dann derartige Zugangs-/Endereignisse als „bis zu diesem Zeitpunkt“, Abgangs-/Beginnereignisse als „ab diesem Zeitpunkt“ interpretiert werden.⁶⁷

Wenn wir einen Strom als monoton wachsenden Prozess verstehen, dann kumulieren wir die an einem Produktionspunkt ankommenden/bereitstehenden Faktoren ab einem Stichtag t_0 („vom 1.1.2005 bis einschließlich 31.12.2005 haben wir 100.000 Waschmaschinen produziert“). Ein derartiges Kumulativ heißt *Fortschrittszahl*. Der Bestand zu einem bestimmten Zeitpunkt ist dabei als Differenz von Ab- und Zugangs - Fortschrittszahl zu ermitteln. Eine Visualisierung des Konzeptes der Fortschrittszahlen in einem Zeitpunktmodell zeigt Bild 2-5⁶⁸. Zeiten im Fabrikkalender werden horizontal, Stückzahlen

⁶⁶ Ausweisen des Bestands nach Verrechnen von Zu- und Abgang des vor dem Zeitpunkt liegenden Zeitabschnitts; dies ist aber in einer Rückwärtsbetrachtung ein Zeitabschnitt, der nach dem betrachteten Zeitpunkt liegt!

⁶⁷ Ideal wäre es, die Zeitpunkte eines Zeitmodells - wie die ordinalen Zeitmengen - auf den Beginn und das Ende von Transformationen, also auf die Ereignisse, zu legen. Dann müssten die Ereignisse a priori bekannt sein. Zwar ist dies z. B. bei getakteten Produktionseinrichtungen für die möglichen Outputereignisse der Fall, aber nicht die Regel (und in diesem Fall wählt man auch den Takt als Zeitabschnitt, auch wenn dies dann in „Minuten“ zu ganz „krummen“ Zahlenwerten führt). Deshalb muss - wenn a priori nichts besseres bekannt ist - zumindest für die Vergleichbarkeit nach außen abschnittsweise eine äquidistante, regelmäßige Unterteilung möglich sein.

⁶⁸ Die Grundlagen zum Fortschrittszahlenkonzept werden in [LÖDD01], [CMM67], [GGR92], S. 232ff; [HEIN88], [SCWO04], S. 98-108 oder [KURB98], S. 190ff vorgestellt. Unter Fortschrittszahl wird die über dem Planungshorizont kumulierte Anzahl von Zu- oder Abgängen einer Klasse verstanden. Sowohl die Eingangs- wie auch die Ausgangs-Fortschrittszahlen können als Soll- und als Istgrößen formuliert werden. Durch den Vergleich der Soll-Fortschrittszahl mit der Ist-Fortschrittszahl kann zu jedem Zeitpunkt ermittelt werden, in welchem Umfang eine Quantitäts- und Terminabweichung gegeben ist. Stellt man Produktionen mit Fortschrittszahlen graphisch dar, wird die Zuordnung von originärem und externem Referenzereignis/-zeitpunkt ganz besonders deutlich: Ein Bestand zu einem Zeitpunkt ist nichts anderes als die kumulative Differenz der Zu- und Abgangsereignisse bis zu diesem Zeitpunkt.

von Zu- und Abgängen sowie Zustände als Differenz zwischen einem Zugangs- und Abgangsstrom vertikal abgetragen bzw. abgelesen. Beide Achsen haben die Eigenschaften eines additiven Zeitmodells.

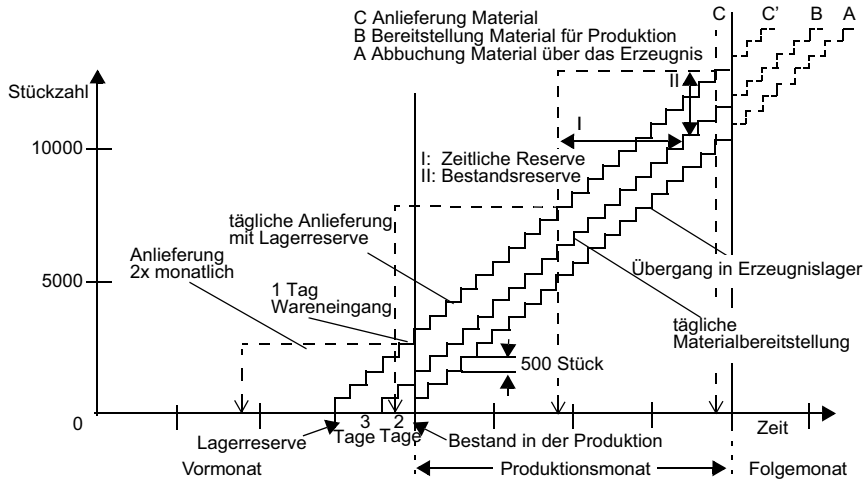


Bild 2-5 Beispiel für die Anwendung des Fortschrittszahlenkonzeptes (vgl. [WEBR84])⁶⁹

Alternativ dazu können wir den *Strom der Faktoren* als einen auf einen *Zeitabschnitt* bezogenen Wert angeben. Bestandswerte als Differenz zwischen zwei Zeitfunktionen müssen dann als Kumulativ den Zusammenhang über der Zeit herstellen.

Beispiel 2-33: Zeitabschnittswerte/Prognose von Bedarf/Multivariate Regression

Die multivariate Regression ist ein Verfahren, mit dem sich Bedarfszahlen auf kausale Weise ermitteln lassen. Zur Analyse einer Zeitreihe können bspw. wöchentliche, monatliche und jährliche Einflussfaktoren ebenso wie Kalendereinflüsse, bspw. die Verschiebung der terminlichen Lage von Ostern oder der Sommerferien, definiert werden. Untereinander können die einzelnen Faktoren additiv oder multiplikativ verknüpft sowie gewichtet werden. Sowohl diese Gewichtung als auch die einzelnen Zeitreihen selbst können zusätzlich noch Trends linearer oder höherer Ordnung unterliegen. Im Beispiel liegen Verbrauchswerte für die letzten 12 Quartale (3 Jahre) vor und es soll eine Prognose für die nächsten 4 Quartale erfolgen. Auf Grund des Verbrauchsverlaufs wird davon ausgegangen, dass als Basis ein linearer Trend und in den Quartalen 2, 3 und 4 eines Jahres jeweils ein Saison-einfluss vorliegt. Damit ergibt sich ein Gleichungsmodell mit fünf Unbekannten:

$$b^{prg} = b_0 \cdot x_{0t} + b_1 \cdot x_{1t} + b_2 \cdot x_{2t} + b_3 \cdot x_{3t} + b_4 \cdot x_{4t}$$

⁶⁹ In dieser Darstellung wird von einer Verrechnung (Zubuchung/Abbuchung) von Zu- und Abgang am Ende des Tages ausgegangen. Eine kontinuierliche Verrechnung würde die Darstellung als Gerade, bzw. als Kantenzug bspw. mit tageweise unterschiedlicher Steigung, aber nicht als Treppenkurve bedingen (was natürlich genauso wenig korrekt wäre, da maximal stückweise erfasst werden kann; siehe bspw. [NYHU08], [WEB84]).

Für jedes einzelne x_{it} werden die Werte festgelegt. Durch x_{0t} und x_{1t} wird der lineare Trend definiert. Die Variablen x_{2t} , x_{3t} und x_{4t} legen einen jeweiligen Saisoneinfluss für das 2., 3. und 4. Quartal fest.

Quartal	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
Verbrauch	510	425	630	600	550	465	770	650	590	500	810	700				
x0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
x1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
x2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
x3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
x4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
Prognose													659	572	845	759



Beispiel 2-34: Zeitabschnittswerte / Prognose von Bedarf / Exponentielle Glättung
Aus Vergangenheitswerten von Kundenbestellungen wird der voraussichtliche Verlauf der Kundenbestellungen geschätzt.

+ exponentielle Glättung 1. Ordnung, $\alpha = 0,1$

Zeitabschnitt	-5	-4	-3	-2	-1	0
Verbrauch	100	120	70	50	110	
Prognose		100	102	99	94	96

+ exponentielle Glättung 2. Ordnung, $\alpha = 0,2$

Zeitabschnitt	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
Verbrauch	100	120	100	80	120	80	120	100	
Mittelwert 1. Ordnung	100	104	103,2	98,6	102,9	98,3	103,6	102,1	
Mittelwert 2. Ordnung		104	103,8	102,8	102,8	102	102,1	102,1	
Steigung der Trendgerade*		0	-0,16	-1,06	0,01	-0,9	0,15	0,01	
Achsenabschnitt		104	102,6	94,4	103,0	94,6	103,1	102,1	
Prognose									102



+ Deterministische / stochastische Ströme

In einem *deterministischen Strom* sind die Werte $f(t)$ aller Zeitfunktionen $f \in P$ eindeutig bestimmt.⁷⁰ Dies gilt für stetige und diskrete Ströme. Ein diskreter Einheitenstrom mit Elementen gleicher Klasse ist abhängig von der Ereignisdichte auf der gewählten Zeitmenge zu behandeln. Existieren vergleichsweise viele Zeitabschnitte, denen der Funktionswert „0“ zugeordnet ist, kann es zweckmäßig sein, anstelle der vielen „Nullen“ einen Ereignisabstand oder direkt Zeitpunkt und Ereignis anzugeben. Insbesondere bei einem regulären Einheitenstrom kann sich diese Vorgehensweise anbieten, bspw. (Kundenauftrag, Zeitpunkt). Ein solcher Zeitpunkt ist dann ein bestimmtes Element der als Definitionsbereich

⁷⁰ zu sagen: „Die Wahrscheinlichkeit ist 1“ oder $p(f(t)) = 1$ hinzuschreiben, macht nur Sinn, wenn wir eine solche Zeitfunktion schon häufig beobachtet und ständig denselben Funktionswert festgestellt haben.

vorgegebenen Zeitmenge. Bei *stochastischen Zeitfunktionen*⁷¹, die in der Regel gerade solche (regulären) Einheitenströme betrachten, bewegen sich dann die Aussagen zu Funktionswert und Ereignisabstand in einer bestimmten Bandbreite. Der Quotient (Anzahl der Ereignisse gleicher Eigenschaft n_i) / (Gesamtanzahl der betrachteten Ereignisse n) ist der Funktionswert; er wird als *relative Häufigkeit* bezeichnet. Die *Wahrscheinlichkeit*, dass ein Ereignis mit der Eigenschaft n_i auftritt, ist definiert als

$$p(n_i) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_i}{n}; 0 \leq p \leq 1.^{72}$$

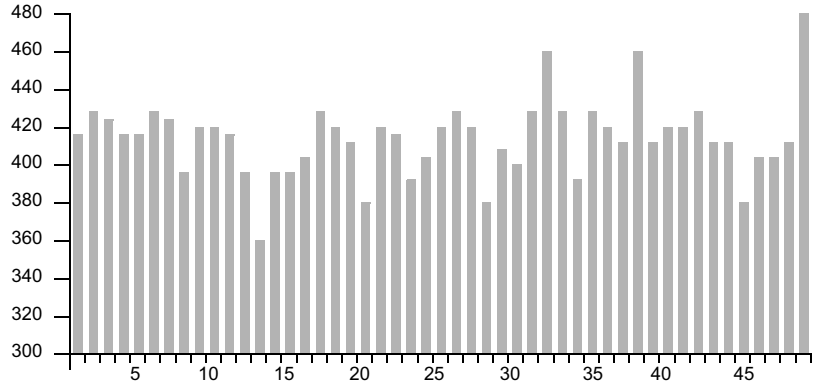
Eine Funktion $f = x(t)$, die jedem Ereignis, das in der betrachteten Gesamtheit auftreten kann, eine reelle Zahl zuordnet, heißt *Zufallsvariable*. Diskrete Zufallsvariable nehmen eine endliche oder abzählbar unendliche Menge, stetige Zufallsvariable ein Kontinuum von Werten an.

Beispiel 2-35: Aufträge in einem Produktionsbereich
 Die Zufallsvariable bezeichnet die Anzahl von Aufträgen in einem Produktionsbereich.

	Zufallsvariable	Interpretation
	0	Produktionsbereich leer
Werte der	1	
Zufalls-	2	Produktionsbereich arbeitet
variablen	3	
	4	
	5	Produktionsbereich voll



⁷¹ Das sind alles Aussagen über die Zukunft - sonst weiß man es ja! Dass wir hier von sehr großen Zahlen/ Zeiträumen sprechen ($n \rightarrow \infty$), wird häufig übersehen. Dazu einige Beispiele aus [SCHT11]: Wer jede Woche zwei Kästchen auf dem Lottoschein ausfüllt, darf mathematisch gesehen einmal in 135000 Jahren mit 6 Richtigen rechnen. Dennoch gibt es immer wieder Fälle, die der Statistik widersprechen: Im April 2006 hatte ein Ehepaar jeweils 6 Richtige bei derselben Ziehung. Die beiden spielten unabhängig voneinander und gewannen zusammen € 698.888. Im Mai 2003 tippten 133 Spieler die 6 korrekten Zahlen; jeder von ihnen gewann € 26.000. 1999 wurden bei einer Ziehung die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6 ermittelt. 38.000 Tipper hatten diese fünf Zahlen angekreuzt und erhielten jeweils DM 380. Die 13 ist die am seltensten gezogene Nummer im deutschen Nachkriegslootto. Nachfolgend die Zahlenverteilung im Lotto am Samstag (mit Zusatzzahl) vom 9. Oktober 1955 bis zum 26. Februar 2011:



Die Wahrscheinlichkeit p_i , dass eine Zufallsvariable zu einem bestimmten Zeitpunkt einen bestimmten Wert besitzt und damit $x(t) = i$ gilt, wird als *Zustandswahrscheinlichkeit* bezeichnet: $p_i := \text{Prob}\{X(t) = i\}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable ihren Wert von i nach j in einer Zeiteinheit ändert, heißt *Übergangswahrscheinlichkeit* w_{ij} :

$$w_{ij} := \text{Prob}\{X(t) = i | X(t+1) = j\}.$$

Als *Verteilungsfunktion* wird eine Regel bezeichnet, die jedem möglichen Wert einer Zufallsvariable eine Wahrscheinlichkeit zuordnet. Im Fall *diskreter* Zufallsvariabler wird die Wahrscheinlichkeit, die mit den Werten der Zufallsvariablen verbunden ist, mit Hilfe einer *Häufigkeitsfunktion* $p(x)$ definiert: $p(x_i) := \text{Prob}\{X = x_i\}$.

Für jeden möglichen Wert x_i bezeichnet die Funktion $p(x)$ eine spezifische Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable den Wert x_i annimmt. Die Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie bedingen für $p(x_i)$ die folgenden Restriktionen:

$$0 \leq p(x_i) \leq 1 \text{ für alle } i; \sum_i p(x_i) = 1.$$

Eine etwas andere Form besitzt die *kumulative Verteilungsfunktion* $F(x)$:

$$F(x) := \text{Prob}\{X \leq x\}.$$

In diesem Fall definiert die Funktion $F(x)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X einen Wert kleiner oder gleich x annimmt. Für $F(x)$ gilt:

$$0 \leq F(x) \leq 1 \text{ für alle } x; F(-\infty) = 0; F(\infty) = 1 \text{ und } F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i).$$

Für *stetige* Zufallsvariable wird eine andere Form der Zufallsverteilung benötigt. Da die Zufallsvariable jeden Wert aus einer unendlichen, nicht abzählbaren Menge annehmen kann, ist die Wahrscheinlichkeit für einen diskreten Wert Null. Dagegen ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable einen Wert zwischen zwei Grenzen a und b annimmt, im allgemeinen ungleich Null. Deshalb wird die Häufigkeitsfunktion für die Wahrscheinlichkeit, wie sie im diskreten Fall verwendet wird, im stetigen Fall durch die *Dichtefunktion* $f(x)$ ersetzt:

$$p(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Wird die Wahrscheinlichkeitsdichte zwischen a und b integriert, so gibt sie die Wahrscheinlichkeit wieder, dass die Zufallsvariable einen Wert im Intervall a, b annehmen wird. Um die Verträglichkeit mit den Axiomen der Wahrscheinlichkeitstheorie sicherzustellen, genügt die Wahrscheinlichkeitsdichte den Bedingungen:

⁷² Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen (siehe auch [CARN74]), dass diese Definition von einer unendlichen Gesamtanzahl ausgeht. Das wird in der Produktion nirgendwo erreicht und selbst „größere Stichproben“ sind häufig für diese Definition viel zu klein (siehe [FEYN07]). Damit nimmt diese Funktion eine Einteilung in (Teil-) Klassen vor, die in der Gesamtheit enthalten sind.

$$f(x) \geq 0 \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Die *kumulative Verteilungsfunktion* $F(x)$ ist im stetigen Fall

$$F(x) := \int_{-\infty}^x f(x) dx = \text{Prob}\{X \leq x\}.$$

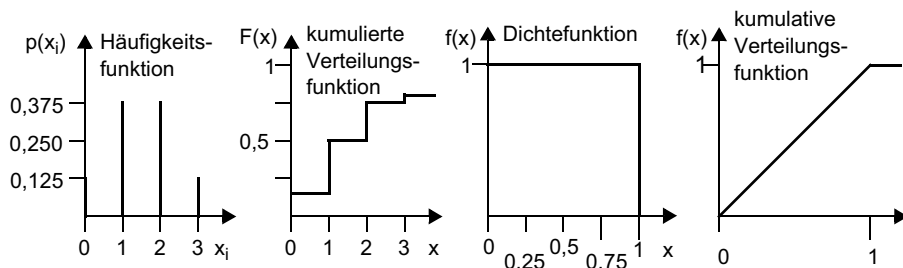
Die Funktion $F(x)$ definiert die Wahrscheinlichkeit, dass die stetige Zufallsvariable X einen Wert kleiner oder gleich x annimmt.

Eine stetige Verteilung ist eine Funktion von x , wobei x als stetiger Parameter sämtliche Werte in einem Intervall annehmen kann. Beispiele sind Gleich-, Dreiecks-, Exponential-, Normal-, Lognormale-, Gamma-, Erlang- und Weibull-Verteilung. Bei den diskreten Verteilungen kommen als Ergebnis nur bestimmte Werte in Frage, so z. B. die Anzahl der Forderungen in einem Bedienungssystem. Beispiele sind Diskrete Gleichverteilung, geometrische, Pascal-, Binomial- und Poissonverteilung.

Beispiel 2-36: Wahrscheinlichkeitsverteilung

Als ein Beispiel für eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung soll ein Experiment dienen, bei dem drei Würfe einer fairen Münze betrachtet werden. Die Zufallsvariable X soll die Anzahl von „Zahl“ bezeichnen, die bei den drei Würfeln erzielt wird. Die Zufallsvariable kann die diskreten Werte 0, 1, 2 und 3 annehmen. Bei den drei Würfeln gibt es 8 Kombinationen von Ergebnissen:

keine Zahl: eine Kombinationsmöglichkeit; einmal Zahl: drei Kombinationsmöglichkeiten; zweimal Zahl: drei Kombinationsmöglichkeiten; dreimal Zahl: eine Kombinationsmöglichkeit.



Als Beispiel für eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung verwenden wir eine Zufallsvariable X , die jeden Wert zwischen 0 und 1 annehmen kann. Hier drücken Dichte- und kumulative Verteilungsfunktion die Annahme aus, dass jeder Wert aus der nicht abzählbaren, unendlichen Menge von möglichen Werten gleich wahrscheinlich ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X einen Wert zwischen 0,5 und 0,75 annimmt, entspricht der Fläche unter der Dichtefunktion zwischen 0,5 und 0,75. Sie ist in diesem Beispiel 0,25.

■

Der *Erwartungswert* einer Zufallsvariablen X wird mit $E(x)$ bezeichnet:

$$E(x) := \sum_i x_i \cdot p(x_i) \text{ bei diskretem } X; E(x) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \text{ bei stetigem } X.$$

Der Erwartungswert ist ein mit der Wahrscheinlichkeit gewichteter Mittelwert aller Werte von X und wird aus diesem Grund auch Mittelwert genannt. Er stellt den Flächenschwerpunkt der Verteilungsfunktion dar.

Beispiel 2-37: Erwartungswert/diskreter Fall

$p(x_i)$	0,05	0,05	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,05	0,05
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$E(x)$	$0,05 \cdot 0 + 0,05 \cdot 1 + 0,1 \cdot 2 + \dots + 0,05 \cdot 8 = 4,0$								

■

Die Varianz $D^2(x)$ ist definiert als

$$D^2(x) := E([x - E(x)]^2) = \sum_i p_i (x_i - E(x))^2 \text{ bei diskretem } X \text{ und}$$

$$D^2(x) := \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 f(x) dx \text{ bei kontinuierlichem } X.$$

Die Standardabweichung σ ergibt sich zu $D(x)$.

Beispiel 2-38: Varianz/diskreter Fall (Werte aus Beispiel 17-118).

$$D^2(x) = 0,05(0-4)^2 + 0,05(1-4)^2 + \dots + 0,05 \cdot (8-4)^2$$

■

Ein *stochastischer Ereignisstrom* ist ein Einheitenstrom, der aus einer zufälligen Folge gleichartiger Ereignisse besteht. Der Ankunftsprozess der Forderungen in einem Bedienungssystem⁷³ stellt z. B. einen solchen Ereignisstrom dar. In diesem Fall ist das Ereignis die Ankunft einer Forderung. Ein Ereignisstrom läßt sich durch die Ereignishäufigkeit und den Ankunftsabstand beschreiben. Die Ereignishäufigkeit $h(t_1, t_2)$ gibt die mittlere Anzahl der Ereignisse während eines Intervalls (t_1, t_2) , der Ankunftsabstand t_e die mittlere Zeitdauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignissen an.

In einem stochastischen Strom sind die Intervalle zwischen den Zeitpunkten des tatsächlichen Eintretens gleichartiger Ereignisse und infolgedessen diese Zeitpunkte selbst vorher nicht bekannt; zufällige Größen werden Realität (also $T = R!$). In diesem Fall betrachten wir einen Strom dann als hinreichend definiert, wenn die Verteilungsfunktion für die Zeitpunkte des Eintretens des den Strom definierenden Ereignisses bekannt ist. In diesem Fall ist für beliebige $t_1, t_2, \dots, t_k$ und k die Funktion

$$F(t_1, t_2, \dots, t_k) = \text{Prob}\{t^{(1)} < t_1, t^{(2)} < t_2, \dots, t^{(k)} < t_k\}$$

⁷³ zu „Bedienungssystem“ und „Forderungen“ siehe bspw. [RPAB67]

bekannt. Dabei bezeichnen wir mit $t^{(i)}$ den Zeitpunkt, in dem das den Strom definierende Ereignis zum i -ten Male eintritt. In einer ersten Art der Darstellung dieser Verteilungsfunktion orientieren wir uns an einer externen Uhr: Wir betrachten das Zeitintervall $(t_0, t_0 + t)$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in diesem Intervall k Forderungen eintreffen. Diese Wahrscheinlichkeit ist im allgemeinen nicht nur von k und t abhängig, sondern auch von der Lage des Intervalls mit der Länge t auf der Zeitachse, also von t_0 . Bezeichnen wir die genannte Wahrscheinlichkeit mit $p_k(t_0, t)$, so besteht die Aufgabe darin, $p_k(t_0, t)$ für beliebige ganzzahlige positive Werte t_0 und t zu bestimmen. Wenn die Funktion $p_k(t_0, t)$ für beliebige Werte t_0 und t sowie für beliebige k bestimmt ist, dann ist auch der Strom definiert; die Verteilungsfunktion $F(t_1, t_2, \dots, t_k)$ kann durch diese Funktion ausgedrückt werden (allgemeiner stochastischer Prozess).⁷⁴ Bei der zweiten Art orientieren wir uns am originären Prozess. Wir betrachten die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Forderungen η_1 : $\eta_1 = t^{(j)} - t^{(j-1)}$.

Dabei ist $t^{(j)}$ der Zeitpunkt, zu dem die j -te Forderung eintrifft (regulärer stochastischer Prozess).⁷⁵ Es sei $f(z_1, z_2, \dots, z_k)$ die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte der Zeitintervalle $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$. Die Hauptaufgabe bei dieser Methode der Untersuchung von Strömen besteht in der Bestimmung der Funktion $f(z_1, z_2, \dots, z_k)$ für ein beliebiges positives k ($k = 0, 1, 2, \dots$). Die Funktion $f(z_1, z_2, \dots, z_k)$ bestimmt ebenso wie die Verteilungsfunktion der Zeitpunkte ($F(t_1, t_2, \dots, t_k)$) den Forderungenstrom vollständig; beide Arten, diese Verteilungsfunktion darzustellen, sind gleichwertig.

Unter einem *zufallsabhängigen* oder *stochastischen Prozess* wird eine *Familie von Zufallsvariablen* $\{X(t)\}$ verstanden, die von einem Parameter t abhängt [FERS64].⁷⁶ Für t gilt: $t \in \theta$. Die Menge θ wird als Parameterraum bezeichnet. Ist die Menge θ abzählbar, so liegt ein stochastischer Prozess mit diskretem Parameter vor (stochastische Kette). Wenn die Menge θ dagegen ein Intervall aus der Menge der reellen Zahlen ist, dann sprechen wir von einem Prozess mit stetigem Parameter. Die Realisation eines stochastischen Pro-

⁷⁴ Das ist die zeitorientierte, nicht reguläre Denkweise: Wir formulieren mit t_1, t_2 usw. eine additive Zeitmenge und notieren zwischen zwei Zeitpunkten t_0 und t die Anzahl der Ereignisse ≥ 0 .

⁷⁵ Das ist die reguläre Denkweise: In der additiven Zeitmenge können wir die Zeit zwischen zwei Ereignissen ausdrücken. Nicht jedem Zeitpunkt der additiven Zeitmenge ist notwendigerweise ein internes Ereignis zugeordnet.

Die Ereignisse haben keinen individuellen Bezug, sie gehören alle zu irgendeiner Klasse. Das individuelle Ereignis (Zeitpunkt) verhält sich entsprechend den Vorgaben der Klasse.

⁷⁶ Damit wird genau der oben angesprochene Zustand $z(t)$ adressiert. $t, t \in \theta$ wird hier als Parameter und θ als Parameterraum bezeichnet. Selbstverständlich liegt hier für stochastische Prozesse nur eine andere Sprechweise vor: t ist ein Zeitelement und θ die Menge der Zeitelemente T .

zesses ist eine Funktion über der Menge Θ . Dabei liegen die Funktionswerte in einer Menge Ω , dem *Zustandsraum*.⁷⁷

Ein stochastischer Strom ist ein monoton wachsender stochastischer Prozess $\{x_t; 0 \leq t \leq \infty\}$, der nur reelle positive Zahlen annehmen kann [DuBL73]. Für einen Strom gelten folglich mit $t \geq 0$ die Beziehungen $x_{t+\Delta t} - x_t \geq 0; \Delta t > 0; x_t \geq 0$.

Beispiel 2-39: Stochastischer Prozess [KIST74]

		Zeitmenge	
		stetig	diskret
Funktionswert	stetig	Wasserstand eines Stausees im Zeitablauf Parameter t: Zeit Zustandsraum Ω : tiefster bis höchster Wasserstand	Wasserstand eines Stausees, gemessen zu diskreten Zeitpunkten Parameter t: Zeit Zustandsraum Ω : tiefster bis höchster Wasserstand
	diskret	Zahl der Autos in einer Garage im Zeitablauf Parameter t: Zeit Zustandsraum Ω : 0,1,2,...,n; n = Fassungsvermögen der Garage	Zahl der Autos in einer Garage gemessen zu diskreten Zeitpunkten Parameter t: Zeit Zustandsraum Ω : 0,1,2,...,n; n = Fassungsvermögen der Garage

– *Zeitinvarianz*⁷⁸

Wir erklären „Zeitinvarianz“ anhand einer Zeitverschiebung. Wir verschieben eine Zeitfunktion um ein bestimmtes Zeitintervall - und dann hat sich bei Zeitinvarianz in dem Prozess, zu dem diese Zeitfunktion gehört - im Wertebereich nichts geändert. Dazu muss das Zeitintervall (t_a, t_b) eineindeutig auf das Zeitintervall (t_c, t_d) abgebildet werden können. Das können wir für die ordinale Zeitmenge $(T, \leq, t_0)$ in der Regel⁷⁹ nicht behaupten. Also verwenden wir eine Zeitmenge mit algebraischer Struktur bzw. den geforderten Eigenschaften.⁸⁰ In der Folge können dann Verschiebungen (Translationen) von Zeitfunktionen und Prozessen erklärt werden. Des weiteren gelingt es uns dann, den Begriff der Zeitinva-

⁷⁷ Siehe die Ausführungen zu Prozessen und Zeitmodellen sowie in [DAWA97, PICH75]. Natürlich ist Θ der Definitions- und Ω der Wertebereich.

⁷⁸ <http://de.wikipedia.org/wiki/Zeitinvarianz>, siehe auch <http://de.wikipedia.org/wiki/Stationär>

⁷⁹ Es sei denn, es handelt sich immer um die Wiederholung derselben Transformation: Wir montieren immer dasselbe Fahrrad. Und das ohne Unterbrechung und ohne irgendetwas anderes dazwischen zu schieben. Dazu brauchen wir aber auch keine Zeitfunktion: „Wir montieren auf Montagelinie Julius ausschließlich Fahrrad Hades“ ist dann genau dieselbe Aussage.

⁸⁰ Interne Ereignisse werden auf die extern begründete additive Zeitmenge abgebildet. Die Zeitverschiebung erfolgt - siehe oben - im externen Kalender: „Das Produktionsprogramm von Donnerstag diese Woche wird auf Dienstag diese Woche verschoben. Dadurch ändert sich etwas oder es ändert sich nichts“.

rianz bei allgemeinen Zeitsystemen, bei parametrisierten Zeitsystemen und bei Zustandsdarstellungen einzuführen. Die von uns gewählte algebraische Struktur der Zeitmenge ist aber noch so allgemein gehalten, dass sie die bekannten „algebraischen“ Zeitmengen, wie sie etwa mit den natürlichen Zahlen (diskrete Zeitmengen) oder den reellen Zahlen (kontinuierliche Zeitmengen) gebildet werden können, als Spezialfall sieht.

Das Konzept der *additiven Zeitmenge* erleichtert die Formalisierung von Aussagen wie „die Zeitfunktion g hat die gleiche Form wie die Zeitfunktion f_t “ oder „der Prozess Q sieht wie die t -Zukunft des Prozesses P aus“: Es bezeichne $(T, +, <, t_0)$ eine additive Zeitmenge und $time = (T, \leq, t_0)$ die davon induzierte Zeitmenge.⁸¹ Mit P sei ein *time*-Prozess mit Wertebereich M bezeichnet, demnach gilt $P \subset time \rightarrow M$. Für jeden Zeitpunkt t aus T definieren wir die Abbildung $\rightarrow t$ durch $\rightarrow t: P \rightarrow time \rightarrow M: f \rightarrow f \rightarrow t: T \rightarrow M$ mit $t' \rightarrow f \rightarrow t(t') = f(t + t')$.⁸² Wir nennen $\rightarrow t$ die *t-Verschiebung* auf P . Wir sagen auch, dass mit $\rightarrow t$ jede Zeitfunktion f aus P um t von der Zukunft in die Gegenwart verschoben wird. Mit $P \rightarrow t$ sei die Menge $P \rightarrow t := \{f \rightarrow t: f \in P\}$ bezeichnet. Mit P ist auch für jedes $t \in T$ $P \rightarrow t$ ein *time*-Prozess. Wir nennen ihn den um t von der Zukunft in die Gegenwart verschobenen Prozess P oder auch die *t-Verschiebung* von P .

Die Zeitachse/Zeitmenge ist von extern vorgegeben: Die Abstände werden in einem externen Maß gemessen und die Additivität gewährleistet. Die Verschiebung findet im externen Kalender statt:⁸³ Der *time*-Prozess P ist *zeitinvariant* gegenüber Verschiebungen, wenn für jede Zeitfunktion f aus P jede t -Verschiebung $f \rightarrow t$ wieder in P liegt. Dann gilt

$$\forall_{t \in T} P \rightarrow t \subset P.$$

„Zeitinvariant“ heißt, dass wir Zeitfunktionen übereinander legen. Wir wählen bspw. eine Zeitmenge mit 5 Zeitpunkten. Also können wir um 1, 2, 3 oder 4 Zeitabschnitte nach

⁸¹ Die additive Zeitmenge hat nur $<$, kein $\leq$: Wir ordnen eine Menge gegebener Zeitpunkte (extern vorgegebene Ereignisse); und die sind nicht gleich. In unserem Papierkalender mit Tageseinteilung sind keine zwei Kalenderblätter mit demselben Datum. Aber im praktischen Leben können an einem Tag mehrere Ereignisse eintreten. Also vergleichen wir in einer Zeitmenge zwei Ereignisse: Eine Karosseriepresse fällt aus, Werker Meier wird krank, und stellen fest: gleichzeitig. Dann werden diese Ereignisse nur einem Zeitelement zugeordnet - mehrere Ereignisse auf einem Kalenderblatt. Und die Zuordnung zum Kalenderblatt erlaubt die Aussage: Drei Tage vor dem 31.12. und wir können addieren. Aber wenn wir in der additiven Zeitmenge bleiben: Unser Kalender von 2012 enthält keine Seiten des Kalenders 2011. Wir können nicht nach 2011 schieben - wenn wir am 01.01.2012 stehen (weil wir keinen 2011 Kalender haben!). Und am 01.07.2012 können wir nichts mehr in das erste Halbjahr schieben, weil unser Kalender diese Seiten nicht mehr kennt und wir sie rausgerissen haben. Und wenn wir jetzt das Geschehen am Produktionspunkt in den externen Kalender einordnen, dann sind die externen Ereignisse eben ausgezeichnete, rot angestrichene Ereignisse, denen wir die internen Ereignisse mit anderen Farben zuordnen können.

⁸² „Für jeden Zeitpunkt t aus T ...“ bedeutet die Verschiebung einer Zeitfunktion um genau t - wir haben ja keine Dauer. Also ist das die Verschiebung um einen bestimmten Betrag, nicht eines Zeitpunkts t . Der laufende Zeitpunkt ist dann t' . Zu diesem Zeitpunkt gelten die Werte von $t + t'$. Wichtig: Über einer *adtime*-Menge können wir nur um ein bestimmtes t verschieben. Wir können zwar jedes $t > t_0$ wählen, aber nicht über der Zeitmenge variieren.

vorn schieben. Damit liegen jeweils 4 Zeitfunktionen vor, die durch Zeitverschiebung aus einer einzigen Zeitfunktion entstanden sind. Jede dieser Verschiebungen ist dann für jede dieser Zeitfunktionen bereits in P enthalten. Weil wir bei einem derart begrenzten Definitionsbereich Zeitfunktionen für einen Definitionsbereich $T^* \subset T$ definieren, gilt: Der Definitionsbereich ist entweder (zusammen mit dem Wertebereich) zyklisch oder unendlich. Wir haben bspw. einen Prozess vorliegen, der aus 5 Zeitfunktionen f besteht. Der Definitionsbereich dieser Zeitfunktionen ist eine additive Zeitmenge. Wir wählen eine beliebige dieser Zeitfunktionen aus und verschieben sie in Richtung Vergangenheit. Dann gilt zu jedem Zeitpunkt dieser Verschiebung: Die verschobene Zeitfunktion befindet sich bereits unter den Zeitfunktionen, die zu diesem Prozess zusammengefasst wurden. Dafür kann es zwei Gründe geben: Diese Zeitfunktion ändert sich bei einer Verschiebung nicht; sie wird auf sich selbst abgebildet. Oder: Durch die Verschiebung entsteht eine andere Zeitfunktion. Zu jedem Zeitpunkt aber gilt: Die neu entstandene Zeitfunktion ist eine der Zeitfunktionen aus P . Ggf. verschwindet also eine der Zeitfunktionen aus P , es kommt aber keine dazu - dann haben wir Zeitinvarianz.

Ein *time*-Prozess P heißt *stark zeitinvariant*, wenn gilt $\forall_{t \in T} P \rightarrow t = P$. Demnach reproduziert sich ein stark zeitinvarianter *time*-Prozess bei jeder t -Verschiebung. „Stark zeitinvariant“ ist eine starke Einschränkung: Keine der Zeitfunktionen darf durch die Verschiebung verschwinden. Entweder bilden wir deswegen eine bestimmte Zeitfunktion immer auf sich selbst, aber nicht auf ein f' ab oder aber muss der Prozess so angelegt sein, dass bei jeder Verschiebung um t jede Zeitfunktion eineindeutig eine andere ersetzt. Im ersten Fall sind alle Zeitfunktionen über der Zeit unveränderlich - sonst würde bei der Verschiebung eine Zeitfunktion verschwinden oder eine Zeitfunktion $f' \notin P$ dazukommen.⁸⁴ Im zweiten Fall bestimmt die Periodizität des Prozesses die Anzahl der Zeitfunktionen.

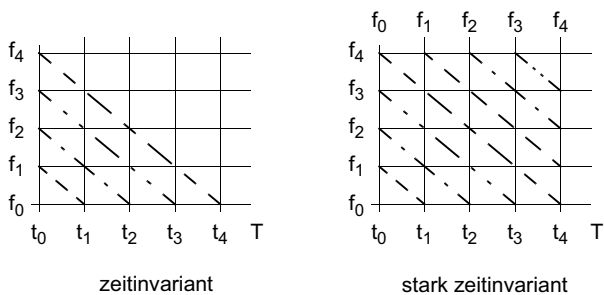
⁸³ Die unterschiedlichen Kalender, die wir beispielhaft diskutiert haben, sollen die Möglichkeiten unterschiedlicher additiver Zeitmengen darstellen.

+ Eine Verschiebung um eine Zeitstrecke t ist hier die Verschiebung um einen Zeitpunkt: Dauer = spezieller Zeitpunkt ab t_0 .

+ *time* kann endlich oder unendlich sein

+ durch die additive Zeitmenge haben die Elemente von *time* einen festen Abstand und können aufeinander abgebildet werden.

⁸⁴ Damit ist klar: Zeitinvarianz liegt viel leichter bei einem zufallsabhängigen als bei einem deterministischen Prozess vor. Wir reduzieren auf einen Mittelwert (das machen auch die deterministischen Prognoseverfahren wie die exponentielle Glättung 1. Ordnung) und geben noch einige Aussagen bezüglich der Verteilung.



Beispiel 2-40: Pressteile-Fertigung

Wir betrachten eine sich zyklisch wiederholende Produktion, wie sie für die Großserienproduktion typisch ist. Also nehmen wir bspw. einen 10 Tageszyklus. Wenn wir dafür nur eine Zeitfunktion „Beginn der Fertigung von Teilen xyz auf Presse ABC“ definieren, die im 10-Tages-Rhythmus mit Teil 4711 beginnt, dann ist das nicht zeitinvariant/stark zeitinvariant. Das ist dann aber auch fertigungstechnisch gar nicht anders gewollt: Es gibt eine feste Zuordnung eines Teils zu einem bestimmten Tag im 10 Tagesrhythmus. Wenn wir das als zeitinvariant verstehen wollen, dann müssen wir 10 Zeitfunktionen definieren, die alle um jeweils einen Tag versetzt sind, aber in derselben Reihenfolge ablaufen. Und der (Produktions-)Prozess am Produktionspunkt „Eintritt in die Pressenstraße“ enthält 10 gleichberechtigte Zeitfunktionen für den Beginn der Bearbeitung auf dieser Pressenstraße. Dieser Prozess ist dann zeitinvariant: Wenn wir eine beliebige Zeitfunktion nach vorne verschieben, haben wir eine Zeitfunktion weniger. Er ist stark zeitinvariant, wenn wir den gesamten Prozess mit allen Zeitfunktionen um ein Zeitelement in Richtung Vergangenheit schieben. Das heißt: Nach den Werksferien können wir beliebig anfangen.

K	A	B	C	D	E	F	G	H	I
I	K	A	B	C	D	E	F	G	H
H	I	K	A	B	C	D	E	F	G
G	H	I	K	A	B	C	D	E	F
F	G	H	I	K	A	B	C	D	E
E	F	G	H	I	K	A	B	C	D
D	E	F	G	H	I	K	A	B	C
C	D	E	F	G	H	I	K	A	B
B	C	D	E	F	G	H	I	K	A
A	B	C	D	E	F	G	H	I	K
Mo	Di	Mi	Do	Fr	Mo	Di	Mi	Do	Fr

Damit wird deutlich: Wenn wir sagen wollen, dass wir in einer 10-Tages-Sequenz mit jedem beliebigen Tag starten können, dann müssen wir dafür 10 jeweils um einen Tag verschobene Zeitfunktionen vereinbaren. Wir können sagen: „Dieser Prozess ist stark zeitinvariant“ - und meinen damit „Robustheit“: Wir bekommen alles - bspw. auch nach einem Maschinenausfall - wieder auf einen zulässigen Prozess abgebildet.



So, wie wir in diesem Beispiel argumentieren, bedeutet das aber, dass wir einen zukünftigen Zeitraum/Prozess betrachten. Aus den vielen, enumerativ generierten Zeitfunktionen wird letztlich nur eine realisiert. Die Aussage ist damit: Egal wie wir anfangen, die sich dann einstellende Zeitfunktion ist bekannt, zulässig, beherrschbar, nicht schlechter als alle

anderen.⁸⁵ Und alle Zeitfunktionen betrachten denselben Sachverhalt - sonst könnten wir sie nicht durch eine einfache Zeitverschiebung ineinander überführen.

Zu überlegen ist, ob die Verschiebung in einer begrenzten Zeitmenge am Ende des Horizonts zu einem um t gekürzten Prozess führt. Wenn das so sein sollte, dann erhalten wir keine Zeitinvarianz. Also müssen wir wie in Beispiel 2-40 von einer zyklisch wiederholten Zeitfunktion ausgehen und den Horizont geeignet auffüllen.

Der Trivialfall: Wir machen bis in alle Ewigkeit dasselbe, dann können wir beliebig oft um eine Zeiteinheit nach vorne schieben, ohne dass sich etwas ändert.⁸⁶ Dann heißt aber „stark zeitinvariant“ nicht nur „wir machen jeden Tag dasselbe“, sondern: Wir haben an einem Produktionspunkt eine sich zyklisch wiederholende Sequenz. Mit dieser Sequenz können wir an einem beliebigen Punkt starten. Diese Eigenschaft nennen wir „zeitinvariant“.⁸⁷

Jetzt könnten wir noch ein „schwach zeitinvariant“ für eine Verschiebung von 10 Tagen definieren. Das haben wir aber bereits mit einer zyklischen Zeit - bspw. Z_{10} - erreicht: Es fängt wieder von vorne an.

– Stochastische Prozesse

+ stationär⁸⁸

Wir betrachten einen Ereignisstrom, dessen Wahrscheinlichkeitsverhalten sich zeitlich nicht ändert; die Wahrscheinlichkeit $p_k(t_0, t)$ dafür, dass in einem Zeitintervall mit der Länge t genau k Ereignisse eintreffen, hängt nur von k und von der Länge des Intervalls t und nicht von seiner Lage auf der Zeitachse und damit nicht von seinem Beginnzeitpunkt t_0 ab. Einen Ereignisstrom mit dieser Eigenschaft bezeichnen wir als stationär: Ein Strom gleichartiger Ereignisse heißt *stationär*, wenn für ein beliebiges $t > 0$ und ein beliebiges

⁸⁵ Das ist möglicherweise ein guter Ansatz für die Diskussion um „Robustheit“: Egal wie es läuft, wir können das jederzeit in einen zulässigen Prozess überführen. Und vollständige Robustheit ist dann: Dieser Satz gilt immer!

Wenn wir für den gesamten Prozess nur eine Vergangenheit erhalten, dann liegt eine natürliche Zustandsbeschreibung vor: Es gibt nur eine Vergangenheit und wir können mit jeder Zukunft fortsetzen.

⁸⁶ In der Zukunft darf nichts wegfällen - sonst ist das eine neue Zeitfunktion und damit nicht zeitinvariant. Es darf höchstens eine Zeitfunktion ganz wegfällen: Aber: Wenn in der Zukunft etwas wegfällt, weil wir alles in Richtung Gegenwart schieben, dann verkraftet das die Vorstellung leichter als dass wir eine additive Zeitmenge in die Zukunft schieben. Dann hätten wir ja für die ersten drei Tage keinen externen Kalender ... Und nichts, worauf wir die internen Ereignisse abbilden könnten.

⁸⁷ Wenn wir uns den „Sinn“ wieder versuchen klarzumachen: Egal was passiert - an dem betrachteten Produktionspunkt reichen für den Prozess „Planung der Anlage“ diese 10 Zeilen für einen 10 Tages Zyklus aus (wenn eine Zeile den Ablauf auf dieser Anlage beschreibt). Auf dem Bildschirm kann keine weitere Zeile durch Verschieben generiert werden!

⁸⁸ Wir haben oben eine Prozess P als zeitinvariant bezeichnet. In diesem Prozess können unterschiedliche Ereignisse in unterschiedlichen Zeitfunktionen geschehen. Hier betrachten wir einen (diskreten) Einheitenstrom von Elementen gleicher Klasse, also eine isolierte Zeitfunktion. In der deterministischen Welt äquivalent wäre eine konstante Zeitfunktion, also bspw. ein Wasserhahn, aus dem stets dieselbe Quantität an Wasser austritt, oder ein Warenausgang, der täglich 5 Teile 4711 bereitstellt.

ganzzahliges $k \geq 0$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Zeitintervall $(t_0, t_0 + t)$ k Ereignisse auftreten, für alle t_0 gleich ist. Wir wollen diese Wahrscheinlichkeit mit $p_k(t)$ bezeichnen.

+ regulär

Für die Ereignisströme, die wir hier betrachten, gilt: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Zeitintervall nur eine endliche Anzahl von Ereignissen eintritt, ist 1. Auf diese Weise

gilt für ein beliebiges t folgende Beziehung: $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1$. Wir bezeichnen mit

$\psi(t_0, t)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Zeitintervall $(t_0, t_0 + t)$ mehr als ein Ereignis auftritt (es gibt mindestens zwei Ereignisse). Damit erhalten wir: $\psi(t_0, t) = 1 - p_0(t_0, t) - p_1(t_0, t)$.

Ein Strom gleichartiger Ereignisse heißt *regulär*⁸⁹, wenn bei $t \rightarrow 0$ und bei einem beliebigen konstanten $t_0 \geq 0$ gilt: $\psi(t_0, t)/t \rightarrow 0$.

In diesem Fall strebt die Wahrscheinlichkeit $\psi(t_0, t)$ bei $t \rightarrow 0$ schneller gegen 0 als t . Wenn t gegen 0 strebt, dann reduziert sich das Intervall $(t_0, t_0 + t)$ auf den Zeitpunkt t_0 , und die Wahrscheinlichkeit $\psi(t_0, t)$ wird zur Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Zeitpunkt t_0 mehrere Ereignisse eintreten. Bei einem regulären Ereignisstrom ist das praktisch unmöglich.⁹⁰ Wir wollen den Begriff der Regularität auch zur Beschreibung von Strömen verwenden, die nicht regulär sind und die Bedingung $\psi(t_0, t)/t \rightarrow 0$ nicht erfüllen. Um einen nichtregulären Ereignisstrom zu beschreiben, betrachten wir gesondert den Strom der (ausgezeichneten externen) Zeitpunkte, denen die Ereignisse zugeordnet (zu denen sie registriert, verbucht usw.) werden (bspw. $T \in R$). Es ist offensichtlich, dass ein Strom solcher Betrachtungszeitpunkte/-ereignisse regulär ist.⁹¹ Neben dem Strom der Betrachtungszeitpunkte geben wir die Wahrscheinlichkeit an, mit der in jedem solchen Betrachtungszeitpunkt eine bestimmte Anzahl von Ereignissen eintritt. Im allgemeinen hängen diese Wahrscheinlichkeiten vom betrachteten Zeitpunkt ab. Es sei t^k der k -te Betrachtungszeitpunkt und α_v^k die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Zeitpunkt t^k genau v Ereignisse eintreffen; dann ist α_v^k im allgemeinen eine Funktion von t^k : $\alpha_v^k = \alpha_v(t^k)$.

⁸⁹ Die Stochastik verwendet auch die Bezeichnung „ordinär“.

⁹⁰ Wenn wir von „Regularität“ sprechen, dann setzt der Grenzübergang gegen 0 voraus, dass wir zur Zeitmessung eine Uhr mit einer beliebig kleinen Einheit einsetzen können.

⁹¹ siehe Abschnitt „Grundmodell einer additiven Zeitmenge“ und Abschnitt Deterministische/Stochastische Ströme, erste Art der Darstellung: Das ist das Pendel am tiefsten Punkt oder das einmalige Ticken der Uhr.

Ist dieser Strom außerdem stationär, so ist auch der „Strom“ der Betrachtungszeitpunkte stationär. Dann hängen die Wahrscheinlichkeiten α_v^k nicht von t^k ab. Damit gilt $\alpha_v^k = \alpha_v$.

Beispiel 2-41: Nicht stationärer Strom

Es soll ein fester Zeitpunkt t_a gegeben sein, von dem ab in äquidistanten Zeitpunkten $t_a + b, t_a + 2b, t_a + 3b, \dots$ jeweils ein Ereignis eintritt. Dieser Strom ist nach der obigen

Definition nicht stationär, denn es gilt in einem Intervall von der Länge $b/2$ für die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens einer Forderung

$$p_1(t_a + b/4, t_a + 3b/4) = 0; \quad p_1(t_a + 3b/4, t_a + 5b/4) = 1.$$

■

+ Nachwirkung

Wir betrachten ein beliebiges Zeitintervall $(t_0, t_0 + t)$ und die Wahrscheinlichkeit $p_k(t_0, t)$ für die Anzahl der im Intervall $(t_0, t_0 + t)$ eintreffenden Ereignisse. Es ist denkbar, dass $p_k(t_0, t)$ außer von t_0 auch davon abhängt, wie der Strom bis zum Zeitpunkt t_0 verlief. Wenn wir von der Nachwirkung eines Forderungenstromes sprechen, so meinen wir genau diese Abhängigkeit.

Eine vergleichsweise geringe Abhängigkeit vom vorhergehenden Stromfluss besitzen „Ereignisströme mit beschränkter Nachwirkung“: Es sei t^i der Zeitpunkt, in dem das i -te Ereignis eintritt, wobei $t^{i-1} \leq t^i$ ($i = 1, 2, \dots; t^0 = 0$) gilt. Wir setzen $t^i - t^{i-1} = \eta_i$. Dann stellt η_i das Zeitintervall zwischen den Zeitpunkten des Eintreffens des $(i-1)$ -ten und des i -ten Ereignisses dar. η_i sind Zufallsgrößen und im allgemeinen voneinander abhängig. Ist aber die Folge $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen, so heißt dieser Strom *Ereignisstrom mit beschränkter Nachwirkung*. Da für Ströme mit beschränkter Nachwirkung die Größen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ voneinander unabhängige Zufallsgrößen sind, ist die Wahrscheinlichkeitsdichte des Systems der Zufallsgrößen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeitsdichten der einzelnen Komponenten: $f(z_1, z_2, \dots, z_n) = f_1(z_1)f_2(z_2)\dots f_n(z_n)$.

Für stationäre Ströme mit beschränkter Nachwirkung erhalten wir folgendes Gesetz (siehe bspw. [SMDB69]): Alle Zufallsgrößen $\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$ haben dieselbe Wahrscheinlichkeitsdichte und es gilt $f_2(z) = f_3(z) = \dots = f_n(z) = \dots = f(z)$.

Außerdem gilt für die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsgröße η_i die PALMsche Formel (siehe bspw. [BUSL71]): $f_1(z) = \lambda[1 - F(z)]$.

λ ist die mittlere Dichte des Forderungenstromes, die die mathematische Erwartung für

die Anzahl der Forderungen in einer Zeiteinheit angibt. $F(z)$ ist die Verteilungsfunktion der Intervalle zwischen dem Eintreffen aufeinanderfolgender Forderungen und damit der

$$\text{Zufallsgrößen } \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n: F(z) = \int_0^z f(t) dt.$$

Für Ereignisströme ohne Nachwirkung betrachten wir zwei sich nicht überschneidende Zeitintervalle $(t_1, t_1 + \Delta t_1)$ und $(t_2, t_2 + \Delta t_2)$ mit $t_1 + \Delta t_1 \leq t_2$, $\Delta t_1 > 0$. Wenn ein Strom als Strom ohne Nachwirkung gilt, dann hat der Stromfluss im Intervall $(t_1, t_1 + \Delta t_1)$ keinen Einfluss auf den Stromfluss im Intervall $(t_2, t_2 + \Delta t_2)$: Ein Strom gleichartiger Ereignisse heißt *Strom ohne Nachwirkung*, wenn die Wahrscheinlichkeit $p_k(t_0, t)$ dafür, dass im Intervall $(t_0, t_0 + t)$ genau k Ereignisse auftreten, nicht von der Aufeinanderfolge der Ereignisse bis zum Zeitpunkt t_0 abhängt und die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von k Ereignissen im Zeitintervall $(t_0, t_0 + t)$, die bei einer beliebigen Voraussetzung über die Aufeinanderfolge der Ereignisse bis zum Zeitpunkt t_0 bestimmt wurde, gleich der unbedingten Wahrscheinlichkeit desselben Ereignisses ist.⁹² Für einen Strom ohne Nachwirkung sind die Größen η_i voneinander unabhängig. Damit können wir den Strom ohne Nachwirkung als Sonderfall eines Ereignisstroms mit beschränkter Nachwirkung betrachten.⁹³

+ Poissonscher Ereignisstrom: stationär, regulär, ohne Nachwirkung

Ein Ereignisstrom mit den drei Eigenschaften stationär, regulär, ohne Nachwirkung besitzt eine Funktion der Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Eintreffen von k Ereignissen im Zeitintervall mit der Länge t der folgenden Form: $p_k(t) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^k / k!$.

Damit ist die Verteilungsfunktion bis auf den Parameter λ festgelegt [BUSL71]. Mit der Konstanten λ ist λt die mathematische Erwartung einer Poisson-Verteilung für die An-

⁹² Dieser Prozess wird als Markov-Prozess bezeichnet [FERS70]. Die allgemeingültige Definition lautet (s. z. B. [FERS64]):

Ein stochastischer Prozess $\{X(t)\}$ ist ein Markov-Prozess, wenn die Beziehung

$$\text{Prob}\{X(t) \leq x | X(t_1) = y_1, X(t_2) = y_2, \dots, X(t_n) = y_n\} = \text{Prob}\{X(t) \leq x | X(t_n) = y_n\}$$

$t_i < t_{i+1}; i = 1, 2, \dots, n$ für alle $y_i; i = 1, 2, \dots, n$ gilt.

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\text{Prob}\{X(t) \leq x | X(t_a) = y\}$ mit $t_a < t$ sind die Übergangswahrscheinlichkeiten. Eine stochastische Kette mit abzählbarem Zustandsraum und der Markov-Eigenschaft wird als Markov-Kette bezeichnet. Die Markov-Eigenschaft ist vergleichbar mit der T -bzw. T^t -Unabhängigkeit in Prozessen. Allerdings betrachten wir hier nur Abschnitte einer einzigen Zeitfunktion.

⁹³ Umgekehrt folgt jedoch nicht aus der Unabhängigkeit der Größe η_i das Fehlen einer Nachwirkung. Die gegenseitige Unabhängigkeit der Größen η_i schränkt die Nachwirkung zwar ein, schließt sie aber nicht aus.

zahl der Ereignisse in einem Zeitintervall der Länge t ; für $t = 1$ ist die Erwartung für die Anzahl der eintreffenden Ereignisse gleich λ .⁹⁴

Beim zweiten Herangehen zur Untersuchung eines Ereignisstromes interessiert uns die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zeitintervalle zwischen den Zeitpunkten des Eintreffens aufeinanderfolgender Ereignisse η_i . Da der Poissonsche Ereignisstrom stationär und gleichzeitig mit beschränkter Nachwirkung ist, gilt sowohl $f_2(z) = f_3(z) = \dots = f_n(z) = \dots = f(z)$ als auch die Palmsche Formel.

Entsprechend der Definition der Verteilungsfunktion können wir die folgende Beziehung angeben: $F(z) = 1 - P\{\eta_i \geq z\}; i = 2, 3, \dots$.

Wir ermitteln die Wahrscheinlichkeit $Prob\{\eta_i \geq z\}$ anhand der folgenden Überlegung: Dafür, dass die Länge des Intervalls zwischen dem Eintreffen des $(i-1)$ -ten und des i -ten Ereignisses größer oder gleich z ist, ist notwendig und hinreichend, dass im Zeitintervall der Länge z kein Ereignis eintrifft. Aus $p_k(t) = e^{-\lambda t} (\lambda t)^k / k!$ folgt, dass diese Wahrscheinlichkeit $p_0(z) = e^{-\lambda z}$ ist.

Auf diese Weise erhalten wir $F(z) = 1 - e^{-\lambda z}$ und $f(z) = F'(z) = \lambda e^{-\lambda z}$.

Mittels der Palmschen Formel erhalten wir die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Zufallsgröße η_1 : $f_1(z) = \lambda(1 - e^{-\lambda z}) = \lambda e^{-\lambda z}$.

Daraus ist ersichtlich, dass das Zeitintervall vom Anfangszeitpunkt bis zum Eintreffen des ersten Ereignisses der gleichen Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegt, wie das Intervall zwischen den eintreffenden Ereignissen.

Die durch $f(z)$ und $f_1(z)$ beschriebene Verteilungsfunktion heißt Exponentialverteilung mit dem Parameter λ . Die mathematische Erwartung für diese Verteilungsfunktion ist gleich $1/\lambda$: $M\eta_i = 1/\lambda$.

Es lässt sich beweisen, dass die Gleichung $M\eta_i = 1/\lambda$ für $i = 2, 3, \dots, n, \dots$ nicht nur für den Poissonschen Ereignisstrom gilt, sondern auch für Ströme, die stationär, regulär und von beschränkter Nachwirkung sind [BUSL71].

+ Ströme, deren Intervalle zwischen den Zeitpunkten des Eintreffens aufeinanderfolgender Ereignisse gleich verteilt sind

Wir betrachten einen Strom, der stationär, regulär und mit beschränkter Nachwirkung ist. Außerdem unterliegen die Intervalle zwischen den Zeitpunkten aufeinanderfolgender Ereignisse einer Gleichverteilung im Intervall $(0, b)$. Damit besitzt die oben definierte Funktion $f(z)$ die folgende Form:

⁹⁴ λ ist der Erwartungswert für die Anzahl der eingehenden Ereignisse in einer Zeiteinheit oder die mittlere Dichte des Stromes.

$$f(z) = \begin{cases} 1/b & \text{für } 0 < z < b, \\ 0 & \text{für } z \leq 0 \text{ und } z \geq b. \end{cases}$$

Die mathematische Erwartung einer im Intervall $(0, b)$ gleichverteilten Zufallsgröße ist gleich $b/2$ (siehe bspw. [BUSL71]). Daher gilt $M\eta_i = b/2$; $i = 2, 3, \dots$. Mit $M\eta_i = 1/\lambda$ folgt für die Dichte des Ereignisstromes: $\lambda = 2/b$. Damit lässt sich die Wahrscheinlichkeitsdichte für das erste Intervall η_1 berechnen. Mit Hilfe der Palmschen

$$\text{Formel erhalten wir } f_1(z) = \lambda(1 - \lambda/2z) = 2(b-z)/b^2.$$

Damit können wir die mathematische Erwartung für die Länge des Intervalls in bekannter Weise ermitteln:

$$M\eta_1 = b/3.$$

+ Erlangerscher Ereignisstrom

Ein stationärer, ordinärer Strom mit beschränkter Nachwirkung heißt m -dimensionaler Erlangerscher Ereignisstrom, wenn die Zeitintervalle zwischen den eintretenden Ereignissen als Summe von m unabhängigen Zufallsgrößen, die der Exponentialverteilung mit dem Parameter λ^* unterliegen, dargestellt werden können. Einen Erlangerschen Strom können wir erhalten, wenn wir in einem Poissonschen Ereignisstrom mit dem Parameter λ^* nur die Ereignisse betrachten, deren Nummer ein Vielfaches von m ist. Wenn z. B. $m = 2$ ist, so bilden alle Ereignisse des Poissonschen Stromes, deren Nummer geradzahlig ist, einen zweidimensionalen Erlangerschen Ereignisstrom. Dieser Fall liegt beispielsweise dann vor, wenn ein Bedienungssystem mit irgendeinem „Sortiergerät“ ausgerüstet ist und der eingehende Ereignisstrom den Bedingungen eines Poissonschen Stromes genügt.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte für die Intervalle zwischen den einlaufenden Ereignissen wird wie folgt berechnet:

$$f(z) = \frac{\lambda^* m}{(m-1)!} z^{m-1} e^{-\lambda^* z}.$$

Mit $M\eta_i = \frac{1}{\lambda}$ ist zu beweisen, dass $\lambda = \lambda^*/m$.

Wir beschränken uns auf die Berechnung von $f_1(z)$ für $m = 2$:

$$f_1(z) = \lambda [e^{-2\lambda z} + 2\lambda z e^{-2\lambda z}].$$

+ Verallgemeinerungen von Erlangerschen Strömen

Wir betrachten zuerst einen Strom, dessen Intervalle η_i ; $i = 2, 3, \dots$ als Summe von Zufallsgrößen, die der Exponentialverteilung mit unterschiedlichen Parametern unterliegen, dargestellt werden können. Wenn die Zahl dieser Summanden gleich m ist, dann wird $f(z)$ durch

$$f(z) = \left(\prod_{v=1}^m \lambda_v \right) \sum_{v=1}^m \left((e^{-\lambda_v z}) / \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq v}}^m (\lambda_i - \lambda_v) \right) \right)$$

gegeben. Aufgrund der Definition des Stromes und mit Hilfe von $M\eta_i = 1/\lambda$ folgt für die Dichte des Stromes λ :

$$\lambda = \left(\prod_{v=1}^m \lambda_v \right) / \left(\sum_{v=1}^m \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq v}}^m \lambda_i \right).$$

Wenn es sich um zwei Summanden handelt, dann folgt mit $f(z)$ und λ :

$$f(z) = \lambda_1 \lambda_2 \frac{e^{-\lambda_1 z} - e^{-\lambda_2 z}}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \lambda = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Wenn wir für diesen Fall die Palmsche Formel anwenden, dann erhalten wir

$$f_1(z) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\lambda_2 e^{-\lambda_1 z} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 z} \right).$$

Jetzt betrachten wir einen Erlangischen Ereignisstrom, dessen Intervalle η_i für $i > 1$ die Summe von m unabhängigen, im Intervall $(0, b_i)$ gleichverteilten Zufallsgrößen sein sollen. Für $m = 2$ geben wir diese Formeln ohne ihre Ableitung an. Dazu werden die Intervalle η_i als Summe zweier in den Intervallen $(0, b_1)$ und $(0, b_2)$ gleichverteilter Zufallsgrößen dargestellt. Es sei $b_1 < b_2$, dann gilt

$$f(z) = \begin{cases} z/(b_1 b_2) & \text{für } 0 < z \leq b_1, \\ 1/b_2 & \text{für } b_1 < z \leq b_2, \\ (b_1 + b_2 - z)/(b_1 b_2) & \text{für } b_2 < z \leq b_1 + b_2 \end{cases}$$

Die Dichte λ dieses Stromes ist $\lambda = 2/(b_1 + b_2)$.

Für η_1 drücken wir die Dichte der Verteilung wie folgt aus:

$$f_1(z) = \begin{cases} (2b_1 b_2 - z^2)/((b_1 + b_2)b_1 b_2) & \text{für } 0 < z \leq b_1, \\ (2(b_2 - z) + b_1)/(b_2(b_1 + b_2)) & \text{für } b_1 < z \leq b_2, \\ z^2/(b_1 b_2(b_1 + b_2)) + (b_1 - b_2 - 2(z - b_2))/b_1 b_2 & \text{für } b_2 < z \leq b_1 + b_2. \end{cases}$$

+ Ströme mit einem festen minimalen Zeitabstand zwischen den einzelnen Ereignissen
Wir betrachten Ströme, bei denen die Zeitpunkte für das Eintreffen der benachbarten Ereignisse $t^{i=1}$ und t^i nicht beliebig dicht beieinander liegen können. Der Abstand zwi-

schen aufeinanderfolgenden Ereignissen soll entweder gleich oder größer als eine beliebige feste Größe a sein.⁹⁵ In diesem Fall wird die Zufallsgröße $\eta_i = t^i - t^{i-1}$ von unten durch die Konstante a begrenzt. Sie kann deshalb als Summe der Konstanten a und der Zufallsgröße ξ_i dargestellt werden.

Wir betrachten zwei Fälle. Im ersten Fall setzen wir voraus, dass ξ_i der Exponentialverteilung mit dem Parameter λ^* unterliegt, und im zweiten Fall soll ξ_i im Intervall $(0, b)$ gleichverteilt sein.

Wir erhalten im ersten Fall:

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z \leq a, \\ \lambda^* e^{-\lambda^*(z-a)} & \text{für } z > a; \end{cases}$$

$$\lambda = \lambda^* / (1 + a\lambda^*);$$

$$f_1(z) = \begin{cases} \lambda^* / (1 + a\lambda^*) & \text{für } 0 \leq z \leq a, \\ (\lambda^* e^{-\lambda^*(z-a)}) / (1 + a\lambda^*) & \text{für } z > a \end{cases}$$

Ist ξ_i im Intervall $(0, b)$ gleichverteilt, so erhalten wir:

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} 0 & \text{für } z \leq a, \\ 1/(b-a) & \text{für } a < z \leq b, \\ 0 & \text{für } z > b \end{cases}$$

In diesem Fall ist die Zufallsgröße $\eta_i (i > 1)$ im Intervall (a, b) gleichverteilt. Deshalb gilt $\lambda = 2/(a+b)$.

Für die Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsgröße η_i erhalten wir:

$$f_1(z) = \begin{cases} 2/(a+b) & \text{für } 0 \leq z \leq a, \\ 2(b-z)/[(a+b) \cdot (b-a)] & \text{für } a < z \leq b, \\ 0 & \text{für } z > b \end{cases}$$

+ Nicht stationäre reguläre Ströme

Als erstes Beispiel betrachten wir einen nicht stationären, regulären Strom ohne Nachwirkung. In diesem Fall hat die Formel für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anzahl von Ereignissen, die in einem beliebigen Zeitintervall $(t_0, t_0 + 1)$ eintreffen, das folgende Aussehen [BUSL71]:

⁹⁵ Das ist bspw. die Auswirkung der Länge der Fahrräder auf einer Montagelinie.

$$p_k(t_0, t) = e^{-\Lambda(t_0, t)} \cdot [\Lambda(t_0, t)]^k / k! \quad \text{mit} \quad \Lambda(t_0, t) = \int_{t_0}^{t_0+t} \lambda(u) du.$$

Wenn wir $p_k(t_0, t)$ mit $p_k(t)$ für den Poissonschen Strom vergleichen, dann unterscheiden sich die so definierten Verteilungen der Form nach nur geringfügig: In die Berechnungsvorschrift für $p_k(t_0, t)$ tritt an Stelle des Ausdrucks λt die Funktion $\Lambda(t_0, t)$. Diese Funktion hängt vom Beginn des Intervalls t_0 ab. Infolgedessen hängen alle seine wahrscheinlichkeitstheoretischen Eigenschaften im Intervall $(t_0, t_0 + 1)$ von der Lage dieses Intervalls auf der Zeitachse ab.

Zur Erläuterung der unter dem Integral, das die Funktion $\Lambda(t_0, t)$ definiert, stehenden Funktion $\lambda(t)$ dividieren wir die Größe $\Lambda(t_0, t)$ durch die Länge des Intervalls t . Das Verhältnis $\Lambda(t_0, t)/t$ fassen wir als mittlere Dichte des Stromes im Zeitabschnitt $(t_0, t_0 + 1)$ auf. Außerdem folgt auf Grund des Mittelwertsatzes für bestimmte Integrale aus $\Lambda(t_0, t)$, dass $\Lambda(t_0, t)/t = \lambda(t_0 + \theta t)$, wobei $0 \leq \theta \leq 1$.

Wir lassen t gegen Null gehen und erhalten:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Lambda(t_0, t)}{t} = \lambda(t_0).$$

Die linke Seite dieses Ausdrucks entspricht der Dichte des Stromes im Zeitpunkt t_0 . Auf diese Weise ist $\lambda(t_0)$ die Dichte des Ereignisstromes im Zeitpunkt t_0 . Diese Dichte hängt bei einem nicht stationären Strom von dem Zeitpunkt ab, in dem der Strom betrachtet wird.

Anhand von $p_k(t_0, t)$ können wir die Verteilungsfunktion für die Länge des Intervalls zwischen einem beliebigen Zeitpunkt t und dem Zeitpunkt des Eintreffens des nächsten Ereignisses bestimmen. Es sei t' der Zeitpunkt, in dem dieses Ereignis eintrifft, ausgehend vom Zeitpunkt t . Dann ist im Zeitabschnitt (t, t') kein Ereignis eingetroffen. Bezüglich des Zeitpunktes t werden keine Voraussetzungen gemacht.

Wir führen die Bezeichnung $\xi_t = t' - t$ ein. Dann ist die Verteilung der Zufallsgröße ξ_t , also die Wahrscheinlichkeit $\text{Prob}\{\xi_t < u\}$ zu bestimmen. Wir drücken diese Wahrscheinlichkeit über die Wahrscheinlichkeit für das entgegengesetzte Ereignis aus: $\text{Prob}\{\xi_t < u\} = 1 - \text{Prob}\{\xi_t \geq u\}$.

Damit $\xi_t \geq u$ gilt, ist notwendig und hinreichend, dass im Intervall $(t, t + u)$ kein einziges Ereignis eintraf. Diese Wahrscheinlichkeit ergibt sich mit $p_k(t_0, t)$ zu

$$p_0(t, u) = e^{-\Lambda(t, u)}.$$

Aus $\text{Prob}\{\xi_t < u\}$ und $p_0(t, u)$ folgt $\text{Prob}\{\xi_t < u\} = 1 - e^{-\Lambda(t, u)}$.

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsgröße ξ_t differenzieren wir $Prob\{\xi_t < u\}$ nach u : $f(t, u) = \Lambda'_u(t, u)e^{-\Lambda(t, u)}$.

Für das erste Intervall η_1 erhält die so definierte Wahrscheinlichkeitsdichte die Form:

$$f_1(z) = \Lambda'_z(0, z)e^{-\Lambda(0, z)}.$$

Aus $f(t, u)$ lässt sich auch die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte des Zeitintervalls zwischen dem $(k-1)$ -ten und dem k -ten Ereignis unter der Voraussetzung ableiten, dass das $(k-1)$ -te Ereignis zum Zeitpunkt t_{k-1} eintraf:

$$f_k(z|t_{k-1}) = f(t_{k-1}, z) = \Lambda'_z(t_{k-1}, z)e^{-\Lambda(t_{k-1}, z)}.$$

Die Beschreibung eines nichtstationären Ereignisstromes, der regulär und mit beschränkter Nachwirkung ist, ist dann einfach, wenn dessen Wahrscheinlichkeitsdichten $f_i(z_i)$ für die Längen der Intervalle zwischen den aufeinanderfolgenden Ereignissen durch einheitliche analytische Ausdrücke mit unterschiedlichen, von i abhängigen Parametern gegeben sind. Bspw. sei $f_i(z_i)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte einer im Intervall (a_i, b_i) gegebenen Gleichverteilung:

$$f_i(z_i) = 1/(b_i - a_i) \text{ für } a_i \leq z_i \leq b_i.$$

Dann kann im Falle eines nichtstationären Stromes mittels $f_i(z_i)$ die Dichte des Zeitintervalls η_1 bis zum Eintreffen des ersten Ereignisses bestimmt werden und wir können annehmen, dass $f_i(z_i)$ für alle $i = 1, 2, 3, \dots$ anwendbar ist. Damit wird die Verteilungsfunktion für eine beliebige Größe η_1 durch zwei Parameter definiert, nämlich durch a_i und b_i . Ggf. können wir a_i und b_i auch als Funktion des Index i angeben, bspw. $a_i = \alpha_1 + \beta_1 i$, $b_i = \alpha_2 + \beta_2 i$.

- **Aufgaben**

- *Fragen*

Aufgabe 2-1: Erklären Sie die Begriffe additive Zeitmenge, Zeitmodell, Kalender, Produktionskalender, Strom, stetiger Strom, diskreter Strom, regulärer Einheitenstrom, Strom von Elementen gleicher Klasse, deterministischer Strom, stochastischer (Ereignis-)Strom, Zeitinvarianz, stark zeitinvariant, stationär, ohne Nachwirkung.

Aufgabe 2-2:

Wir definieren folgende Zeitmenge:

t_0 2. Januar 2002

T alle Tage des gregorianischen Kalenders ab t_0

$<$ ist die Ordnung der Tage des greg. Kalenders

Gegeben sei der 4. Januar 2002 als t' und der 7. Januar 2002 als t'' .

- a) Addieren Sie $t' + t''$
- b) Subtrahieren Sie $t'' - t'$
- c) Was passiert am 1. Januar 2002?
- d) Was passiert am 1. Januar 2003?

Aufgabe 2-3:

- a) Lässt sich die Zeitmenge aus Aufgabe 9-1 in eine additive Zeitmenge transformieren?
- b) Sind dann die Intervalle {Mette, Laudes, Prima} und {Nona, Vesper, Komplet} gleich groß?
- c) Ist dazu folgender, ergänzender Hinweis hilfreich: Mette frühmorgens; Laudes zwischen 5 und 6 Uhr morgens; Prima gegen 7.30 Uhr; Tertia gegen 9 Uhr; Sexta mittags; Nona zwischen 14 und 15 Uhr; Vesper gegen 16.30 Uhr; Komplet gegen 18 Uhr?
- d) „Die bisher betrachteten Zeitmodelle sind reine Zeitpunkt-Modelle“. Richtig oder falsch?

Aufgabe 2-4:

Ermitteln Sie die Reihenfolge der Päpste beginnend mit Petrus (mit Jahreszahl).

Tragen Sie ein: Abspaltung der Orthodoxie, Luther's Thesen, Trienter Konzil (wieviele Päpste?), Kaiser Karl der Große, Kaiser Maximilian, Sacco di Roma, 1618 - 1648.

Lässt sich in diese Zeitmenge der Zeitpunkt der nächsten Fußballweltmeisterschaft korrekt eintragen?

Aufgabe 2-5:

Im Kölner Dom wurde für jedes beendete Amtsjahr des amtierenden Erzbischofs ein Holzstab neben der Sakristei aufgehängt. Mit wievielen Stäben starb Kardinal Frings?

Aufgabe 2-6:

Die Fahrer von Greyhound auf der Canada Highway 1 tragen an ihrer Schulter bspw. „10 years safe“. Was heißt das?

Aufgabe 2-7: Prozess

Der Controller der S.-Werke führt, beginnend mit dem 2. Januar, je Kalendertag folgende Kennzahlen:

	Nirwana	Hades	Elysium	Coelis	Walhall
Planabgang	x	x	x	x	x
Istabgang	x	x	x	x	x
Rückstand	x				
Vorlauf	x				
Ausschuss			x	x	x

Gemessen wird einheitlich in Stück; von jeder erfassten Größe wird der Tageswert und das Kumulativ ab Jahresbeginn dargestellt.

- Von wievielen Prozessen muss hier mindestens gesprochen werden?
- Zusätzlich wird der Lagerbestand der 5 Fahrräder (zu Beginn eines Tages) dargestellt. Ist dies ein zusätzlicher Prozess?

Aufgabe 2-8: Wochentagsformel

Welcher Wochentag war der 22.12.1949? (Hinweis: Der 01.01.1900 war ein Montag. Schaltjahre: Alle durch 4 teilbaren Jahre mit Ausnahme der durch 100 teilbaren wenn diese nicht auch durch 400 teilbar sind.)

Aufgabe 2-9: Werkskalender

In einem Produktionssteuerungssystem ist der Heute-Termin der Kalendertag 5000. Der 10. Tag in der Zukunft ist der Kalendertag 5010, der 10. Tag in der Vergangenheit ist der Kalendertag 4990. Damit findet bei jedem Planungslauf eine neue Zuordnung der im Gregorianischen Kalender angegebenen Kundenwunschtermine zu Zeitpunkten im Werkskalender statt. Der Tag wird 4-stellig geführt (TTTT) und in 1/10-Stunden unterteilt (SS.S). Damit können je Tag 240 Zeitpunkte angesprochen werden. Ein Planungshorizont > 5000 Tage kann nicht abgebildet werden.

- Ein Zeitpunkt wird mit TTTT.SS.S bezeichnet. Lässt sich damit eine vollständige Ordnung herstellen?
- Addieren Sie zum Zeitpunkt 9999.23.3 eine Dauer von 2 Stunden 36 Minuten.
- Was passiert mit Sachverhalten, die
 - + zwischen zwei Zeitpunkten geschehen?
 - + bspw. 33 Minuten dauern?

Aufgabe 2-10: In der französischen Revolution wurde ein „vernünftiger“ Kalender eingeführt: Der Monat hatte 30, die Woche 10 Tage. Napoleon hat diesen Kalender sofort wieder abgeschafft und wurde dafür von den meisten (nicht allen!) Franzosen gelobt. Warum?

Aufgabe 2-11: In Russland gilt der julianische Kalender, in Israel wird seit Adam und Eva gezählt. Was muss ein Spediteur beachten?

Aufgabe 2-12: Ein Zulieferer der S.-Werke ist in Wales ansässig. Zu Beginn der Kooperation lieferte dieses Unternehmen mehrfach mit 3 Tagen Verzug. Woran könnte das gelegen haben?

Aufgabe 2-13:

Der Zeitraum für eine Bachelorarbeit ist 3 Monate. Berechne die kürzeste und längste Dauer in Tagen/in Werktagen.

Aufgabe 2-14:

Die Einspruchsfrist nach einer Prüfung ist 5 Werktage, beginnend mit dem ersten Werktag nach dem Tag der Prüfung. Sie brauchen zum Überlegen vergleichsweise lange Zeit. An welchem Tag sollten Sie 2016 unbedingt eine Prüfung schreiben?

Aufgabe 2-15: Welche Aussagen sind wahr?

- a) Ein Zeitmodell als Bestandteil eines Planungsmodells ist die Voraussetzung, um Ereignisse/Zustände als Teil eines für die Zukunft geplanten und mit der Umwelt abgestimmten Ablaufs auffassen, sie einem Produktionssystem vorgeben und die Einhaltung der Planvorgaben überwachen zu können.
- b) Eine Zeitmenge wird definiert als: $(T, \leq, T_0)$, wobei T eine Menge bezeichnet und $\leq$ eine vollständige Ordnungsrelation von T ist.
- c) Bei einem diskreten Zeitpunktmodell ist ein beliebig genaues Einordnen eines Ereignisses möglich.
- d) Bei einem kontinuierlichen Zeitmodell werden Ereignisse auf ausgewählte Zeitpunkte zusammengezogen.
- e) Der Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Zeitpunkten bei einem diskreten Zeitpunktmodell ist immer 1.
- f) Ein Kalender ist das einem Faktor, einem Vorgang oder einem Ereignis zugeordnete, unabhängige Zeitmodell, das dessen jeweilige Existenz im Modell der Produktion bestimmt bzw. einschränkt.
- g) Bei einem kontinuierlichen Zeitmodell ist die Vorgabe durch die Planung völlig exakt und damit ist die Abweichung zwischen Plan und Ist zwangsläufig.
- h) Der Planungshorizont beschreibt die Menge der Zeitpunkte eines Kalenders, die in der Planung betrachtet werden.
- i) Ein Kalender, der für einen Werker erstellt wurde, regelt dessen Arbeitszeit.
- j) In einem Zeitpunktmodell finden Zustandsänderungen immer an einem Zeitpunkt statt. Daher müssen bei einer Zustandsänderung zu einem Zeitpunkt zwei Zustände geführt werden.
- k) Ein Kalender muss mindestens auf Sekundenbasis geführt werden.
- l) Ein Plan muss mit einem Zeitpunkt beginnen, zu dem auch in der Wirklichkeit eine Zustandsaussage abgegeben werden kann.
- m) Ein Plan kann zu einem beliebigen Zeitpunkt, der möglicherweise nicht im Kalender ist, beginnen.
- n) Die von der rollierenden Planung beplanten Zeiträume sind immer disjunkt. Überlappungen sind nicht zugelassen.
- o) Die rollierende Planung wird häufig eingesetzt, wenn der vom Planungshorizont und Heute-Linie aufgespannte Zeitraum größer ist als der Planungszyklus.
- p) Detailliertheit und Differenziertheit sind Merkmale von Planungssystemen.
- q) Die rollierende Planung bietet sich an, wenn die Bedarfe häufigen Änderungen unterliegen.
- r) Bei der rollierenden Planung wird über alle Planungen immer eine optimale Lösung er-

zielt.

- s) In der Serienfertigung bietet sich ein kombiniertes Zeitpunkt-/Zeitraummodell an.
- t) Bei einem kombinierten Zeitmodell können Zustände auch zwischen zwei Zeitpunkten geführt werden.
- u) Ein Zeitabschnitt kann nur zum vorgelagerten / nachgelagerten Zeitpunkt abgerechnet werden. Was sind die Konsequenzen?
- v) Fortschrittszahlen sind eigentlich nur kumulierte Ereignisse und damit die kumulierte Veränderung.
- w) Fortschrittszahlen zeigen nicht – zumindestens nicht unmittelbar – auf, was in einem Zeitabschnitt an Veränderungen gefordert wird.

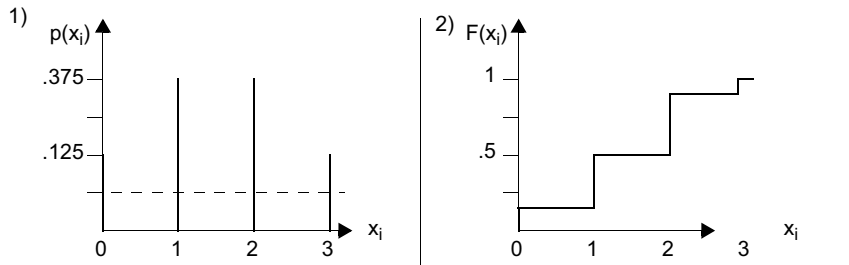
Aufgabe 2-16: Welche Aussagen bzgl. big bucket und small bucket sind wahr?

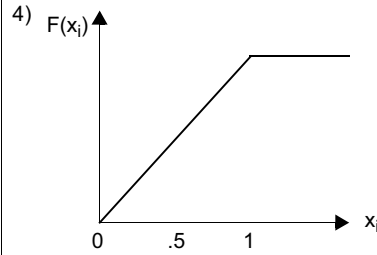
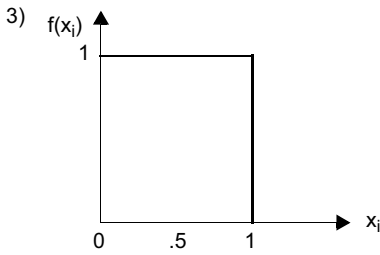
- a) Big und small bucket beschreiben, wie die Länge eines Zeitabschnitts des Kalenders, der einem Produktionssystem, einem Knoten oder einem Punkt im Modell zugeordnet ist, in Relation zur Ereignisdichte in der originären Produktion gesetzt wird.
- b) Der big bucket-Fall erlaubt in einem Zeitabschnitt eine beliebige Anzahl von Ereignissen.
- c) Der small bucket-Fall erlaubt in einem Zeitabschnitt eine beliebige Anzahl von Ereignissen.
- d) Der small bucket-Fall erlaubt in einem Zeitabschnitt höchstens ein singuläres Ereignis.
- e) Nur im big bucket-Fall können reihenfolgeabhängige Rüstzeiten berücksichtigt werden.
- f) Im big bucket-Fall wird sichergestellt, dass in jeder Periode der gleiche Kapazitätsbedarf besteht.
- g) Im big bucket-Fall gibt es nie große Planungsfehler.

Aufgabe 2-17: Zeitlich begrenzte Gültigkeit von Festlegungen

- a) Alle Aussagen können in ihrer zeitlichen Gültigkeit bis zu einem Zeitpunkt, ab einem Zeitpunkt und für einen Zeitraum begrenzt werden.
- b) Fortschrittszahlen sind für eine derartige Begrenzung nicht geeignet.
- c) Der Auslauf ist ein Problem, das mit einem derartigen Termin nichts zu tun hat.
- d) Das Änderungswesen nimmt alle Änderungen sinnvollerweise am 1. Januar vor.
- e) Für werksübergreifende Zusammenhänge verwendet man quadrierte Fortschrittszahlen.

Aufgabe 2-18: Welche Aussagen zu den folgenden Graphen sind wahr?





- a) 1 stellt eine Verteilungsfunktion dar.
- b) 2 stellt eine Verteilungsfunktion dar.
- c) 1 und 2 stellen Verteilungsfunktionen ar.
- d) 4 stellt eine Dichtefunktion dar.
- e) 3 stellt eine Dichtefunktion dar.

Aufgabe 2-19: Welche Aussagen sind wahr?

- a) Diskrete Zufallsvariablen nehmen eine endliche oder abzählbar unendliche Menge, stetige Zufallsvariable ein Kontinuum von Werten an.
- b) Bei der Übergangswahrscheinlichkeit handelt es sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.
- c) Wenn das Zeitverhalten nicht vollständig vorhersehbar ist, können Produktionssysteme als stochastische Bediensysteme modelliert werden.
- d) Eine Verteilungsfunktion ordnet jedem möglichen Wert einer Zufallsvariable eine Wahrscheinlichkeit zu.
- e) Im stetigen Fall ist die Wahrscheinlichkeit für einen Wert innerhalb eines Intervalls a, b immer Null.

– Antworten

Aufgabe 2-1:

Additive Zeitmenge: Eine *additive Zeitmenge* $(T, +, <, t_0)$ definieren wir durch:

- (1) $(T, +)$ ist ein Monoid mit Nullelement t_0 .
- (2) $\forall t, t' \in T \exists t'' \in T \quad t + t'' = t' \vee t' + t'' = t$.
- (3) $\forall t, t', t'' \in T \quad t' + t = t'' + t' \leftrightarrow t' = t''$.
- (4) $\forall t, t' \in T \quad t' + t = t_0 \rightarrow t' = t_0$.
- (5) $<$ ist eine Relation auf T , die gegeben ist durch

$$t < t' : \leftrightarrow \exists t'' \in T \quad t'' \neq t_0 \wedge t + t'' = t'.$$

Eine additive Zeitmenge $(T, +, <, t_0)$ bezeichnen wir mit dem Symbol „+ time“ (siehe auch additive Technikmenge in Bd. 2, Kap. 2, Faktoriale Konzeption, Abschnitt Diskrete, additive und lineare Technikmengen).

Zeitmodell: Jede Teilmenge der reellen Zahlen und gewisse Systeme von Teilmengen sind ein *Zeitmodell*, wenn sie folgende Eigenschaften besitzen:

- Sie sind nicht leer.
- Es läßt sich auf ihnen eine vollständige Ordnung definieren, die durch die Ordnung auf der Menge der reellen Zahlen induziert wird.
- Sie sind beschränkt und abgeschlossen, so daß ein Zeitmodell ein kleinstes und ein größtes Element besitzt.

Die Zeitmodelle sollen nicht leer sein, weil andernfalls auf diesem Zeitmodell Ereignisse nicht sinnvoll definiert werden können. Die Forderung nach der Induktion der vollständigen Ordnung des Zeitmodells gewährleistet eine ordnungserhaltende (und damit konsistente) Abbildung der realen Zeit. Die Beschränktheit und Abgeschlossenheit wird gefordert, weil Produktion sich immer auf einen Zeitraum bezieht. Aus dieser Definition ergeben sich drei Grundformen von Zeitmodellen: das (stückweise) stetige Zeitpunktmodell, das diskrete Zeitpunktmodell und das Zeitabschnittsmodell. Das *(stückweise) stetige Zeitabschnittsmodell* ist eine spezielle Teilmenge der reellen Zahlen, die aus (mehreren) abgeschlossenen Intervallen gebildet wird. Seine Elemente repräsentieren reale Zeitpunkte. Das *diskrete Zeitpunktmodell* ist ebenfalls eine spezielle Teilmenge der reellen Zahlen, die isolierte reale Zeitpunkte repräsentieren. Das *Zeitraummodell* ist definiert als Menge von Elementen, die jeweils ein halboffenes Intervall der reellen Zahlen repräsentieren und paarweise disjunkt sind.

Es sei

T die Menge aller Zeitmodelle eines Produktionssystems

T^* die maximale Menge der Zeitmodelle und

$T \in T$ ein Zeitmodell,

wobei gilt $T \in T \subseteq P(R) \cup P(I(R)) = : T^*$.

Ein Zeitmodell T heißt

- stetiges Zeitpunktmodell, wenn gilt $T \in P(R)$ und $\forall (t \in T) : t$ ist Häufungspunkt⁹⁶,
- diskretes Zeitpunktmodell, wenn gilt $T \in P(R)$ und $\forall (t \in T) : t$ ist isolierter Punkt,
- Zeitabschnittsmodell, wenn gilt: $T \in P(I(R))$ und $\forall (t, t' \in T) : t \neq t' \rightarrow t \cap t' = \emptyset$.

Auf jedem Zeitmodell T ist eine vollständige Ordnung $\leq_T$ definiert, die aus $\leq_R$ wie folgt abgeleitet werden kann:

$$T \in P(R) : \forall t_1, t_2 \in T : t_1 \leq_R t_2 \rightarrow t_1 \leq_T t_2$$

$$T \in P(I(R)) : \forall t_1, t_2 \in T : \exists ((t' \in t_1), (t'' \in t_2)) ((t' \leq_R t'') \rightarrow t_1 \leq_T t_2)$$

Kalender: Ein *Kalender* ist ein mathematisches System, um mit Hilfe astronomischer Beobachtungen und Zeiteinheiten wie Tag, Monat, Jahr eine Zeitrechnung durchzuführen, den Zeitablauf einzuteilen und bestimmte, zyklisch wiederholte Sachverhalte (bspw. Ostern, Aussaat, Ernte, Weihnachten, Jahresanfang) bestimmten Tagen zuzuordnen. So regelt bspw. der gregorianische Kalender mittels seiner Zeitmenge die Länge des Jahres, die Länge der Monate, die Schaltregel, die Festlegung des Osterfestes, die Benennung eines Tages mit einem identifizierenden (Datum) und einem klassifizierenden Namen (Mon-

⁹⁶ Zum Begriff *Häufungspunkt* siehe [BRSE79], S. 243.

tag, Dienstag, ...), usw.

Produktionskalender: Ein *Produktionskalender* ist ein Kalender

- mit einem definierten räumlichen und zeitlichen Gültigkeitsbereich, der die Menge zugeordneter Ereignisse eindeutig abgrenzt
- mit Vorschriften zur Einordnung dieser Ereignisse in den Kalender der Umwelt (Gregorianisch, UTC, jüdisch, chinesisch) bzw. in die Kalender von Unternehmen, mit denen eine Relation besteht.
- ggf. mit einem eigenen Beschreibungsschema zur Benennung von Zeitpunkten/Zeitabschnitten, zur Festlegung von Zeitstrukturen (Produktionszyklen, Schichten, Wartungsintervallen usw.), zur Festlegung des Geschäftsjahres, des Produktionsmonats/der Produktionswoche usw. zum Zwecke der besseren Berechenbarkeit des Produktionsgeschehens.
- , der die Zeitpunkte zur Synchronisation mit der Umwelt festlegt.
- , der die Zeiträume festlegt, an denen das betroffene Produktionssystem keine Ereignisse generieren kann und daher „tot“ ist.

Strom: Ein Strom Φ ist ein *monoton wachsender Prozess* P .

Stetiger Strom: Ein *stetiger Strom* Φ^s ist ein monoton wachsender Prozess, der aus einer Menge stetiger Zeitfunktionen besteht, die nur reelle positive Zahlenwerte annehmen können.

diskreter Strom: Ein *diskreter Strom* Φ^d ist ein monoton wachsender Prozess, dessen Zeitfunktionen nur zu isolierten Zeitpunkten eine Veränderung anzeigen. Ein diskreter Strom Φ^e , dessen Zuwachs nur ganzzahlige Werte annehmen kann, heißt *Einheitenstrom*:
 $P: = \{f\}, f(t) \in N_0, t \in T$.

Regulärer Einheitenstrom: Ein *regulärer Einheitenstrom* Φ^{er} liegt vor, wenn zu jedem beliebigen Zeitpunkt der Funktionswert $\in \{0, 1\}$ ist. Ein solcher Strom setzt voraus, dass wir die Zeit beliebig genau messen können, so dass wir nicht gezwungen sind, zwei aufeinanderfolgende Sachverhalte nur deshalb, weil unsere Uhr nicht genau genug ist, ein und demselben Zeitelement zuordnen zu müssen. Einheitenströme Φ^{ea} , bei denen wir mehrere Einheiten zeitlich nicht differenzieren können und daher für den Funktionswert eines Zeitelements $\in N_0$ gilt, sind *nicht regulär*.

Strom von Elementen gleicher Klasse: Unter einem *Strom von Elementen gleicher Klasse* (gleichartige Ereignisse) verstehen wir eine Folge von Ereignissen, deren Gleichartigkeit in dem Sinne zu verstehen ist, dass nur der Sachverhalt von Bedeutung ist, dass ein Ereignis zu einem gegebenen Zeitpunkt eintritt oder nicht.

Deterministischer Strom: In einem *deterministischen Strom* sind die Werte $f(t)$ aller Zeitfunktionen $f \in P$ eindeutig bestimmt. Dies gilt für stetige und diskrete Ströme

Stochastischer Ereignisstrom: Ein *stochastischer Ereignisstrom* ist ein Einheitenstrom, der aus einer zufälligen Folge gleichartiger Ereignisse besteht. Ein Ereignisstrom lässt sich durch die Ereignishäufigkeit und den Ankunftsabstand beschreiben. Die Ereignishäufigkeit $h(t_1, t_2)$ gibt die mittlere Anzahl der Ereignisse während eines Intervalls (t_1, t_2) , der Ankunftsabstand t_e die mittlere Zeitdauer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignis-

sen an.

Zeitinvariant: Der *time*-Prozess P ist *zeitinvariant* gegenüber Verschiebungen, wenn für jede Zeitfunktion f aus P jede t -Verschiebung $f \rightarrow t$ wieder in P liegt. Dann gilt

$$\forall_{t \in T} P \rightarrow t \subset P.$$

Stark zeitinvariant: Ein *time*-Prozess P heißt *stark zeitinvariant*, wenn gilt

$$\forall_{t \in T} P \rightarrow t = P.$$

Stationär: Ein Strom gleichartiger Ereignisse heißt *stationär*, wenn für ein beliebiges $t > 0$ und ein beliebiges ganzzahliges $k \geq 0$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Zeitintervall $(t_0, t_0 + t)$ k Ereignisse auftreten, für alle t_0 gleich ist. Wir bezeichnen diese Wahrscheinlichkeit mit $p_k(t)$.

Ohne Nachwirkung: Ein Strom gleichartiger Ereignisse heißt *Strom ohne Nachwirkung*, wenn die Wahrscheinlichkeit $p_k(t_0, t)$ dafür, dass im Intervall $(t_0, t_0 + t)$ genau k Ereignisse auftreten, nicht von der Aufeinanderfolge der Ereignisse bis zum Zeitpunkt t_0 abhängt und die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von k Ereignissen im Zeitintervall $(t_0, t_0 + t)$, die bei einer beliebigen Voraussetzung über die Aufeinanderfolge der Ereignisse bis zum Zeitpunkt t_0 bestimmt wurde, gleich der unbedingten Wahrscheinlichkeit desselben Ereignisses ist.

Aufgabe 2-2:

- Wir können den 04.01 und den 07.01 nicht addieren. Addieren können wir nur die Abbildung auf N_0 . Dann wäre das $2 + 5 = 7$. Wenn dann noch der Rückbezug gegeben ist, könnten wir ablesen: 9. Januar 2002.
- Dasselbe gilt für die Subtraktion: Wir ermitteln über die Abbildung auf N_0 den Abstand in Tagen und ziehen 2 Tage ab: $5 - 2 = 3$. Das wäre der 5. Januar 2002.
- Der 01.01.2002 ist nicht definiert. Also ist dazu keine Aussage möglich.
- Der 01.01.2003 ist im gregorianischen Kalender definiert. Also „passiert“ am 01.01.2003 in dieser Zeitmenge nichts besonderes; es geht „weiter“.

Aufgabe 2-3:

- Dazu schließen wir aus, dass zwei Zeitelemente gleich sein können. Also gilt nur „ $\leq$ “ und wir setzen den Abstand = 1. Dann werden die Mönche zwischen Laudes und Prima ggf. mehr Zeilen schreiben als zwischen Nona und Vesper, aber das würden wir dann als „Leistungskurve über dem Tag“ interpretieren.
- Ja, diese Intervalle sind dann jeweils 2 Zeitelemente.
- Dieser Hinweis ist nicht hilfreich, weil die Mönche ja keine Uhr haben, die ihnen 07.30 Uhr anzeigt. Der Hinweis sagt ja nur, dass die Intervalle im gregorianischen Kalender nicht gleich sind.
- Wir haben bisher nicht gesagt, dass ein Zeitelement eines Zeitmodells ein einzelner Punkt in einer Zeitmenge R ist. Die einzelnen Zeitelemente wie „Laudes“ haben durchaus eine zeitliche Ausdehnung (die wir allerdings nicht quantifizieren können).

Aufgabe 2-4:

1.	Petrus, hl.	+ 64/67 (?)	
2.	Linus, hl.	67 - 76 (?)	
3.	Anenkletos (Anaklet I.) hl.	79 - 90 (?)	
4.	Klemens I., hl.	92 - 101 (?)	
5.	Evaristus, hl.	99 - 107 (?)	
6.	Alexander I., hl.	107 - 116 (?)	
7.	Sixtus I. (Xystus I.), hl.	116 - 125 (?)	
8.	Telesphorus, hl.	125 - 136/38 (?)	
9.	Hyginus, hl.	136/38 - 140/42 (?)	
...			
90.	Gregor II., hl.	*669) 715 - 731	
91.	Gregor III., hl.	731 - 741	
92.	Zacharias, hl.	741 - 752	- - -
	Stephan (II.)	752	- - -
93.	Stephan II. (III.)	752 - 757	- - -
94.	Paul. I., hl.	757 - 767	- - -
	Konstantin II. (Philippus)	767 - 768 768	- - -
95.	Stephan III. (IV.)	768 - 772	- - -
96.	Hadrian I.	772 - 795	- - -
97.	Leo III., hl.	795 - 816	- - -
98.	Stephan IV. (V.)	816 - 817	- - -
...			
152.	Damasus	1048	
153.	Leo IX., hl.	(*1002) 1049 - 1054	- - -
154.	Viktor II.	1055 - 1057	- - -
155.	Stephan IX. (X.)	1057 - 1058	- - -
156.	Benedikt X.	1058 - 1059	- - -
157.	Nikolaus II.	1058 - 1061	- - -
...			
211.	Martin V.	(*1368) 1417 - 1431	
	Klemens (VIII.)	1423 - 1429	
	(* 1380, + 1446)		
212.	Eugen IV.	(* 1383) 1431 - 1447	
	Felix V.	(* 1383, + 1451) 1439 - 1449	
213.	Nikolaus V.	(* 1397) 1447 - 1455	
214.	Kalixt III.	(* 1378) 1455 - 1458	
215.	Pius III.	(* 1405) 1458 - 1464	- - -
216.	Paul II.	(* 1418) 1464 - 1471	- - -
217.	Sixtus IV.	(* 1414) 1471 - 1484	- - -
218.	Innozenz VIII.	(*1432) 1484 - 1492	- - -
219.	Alexander VI	1492 - 1503	- - -
	(* 1431[1432?])		- - -
220.	Pius III.	(* 1439) 1503	- - -
221.	Julius II.	(* 1443) 1503 - 1513	- - -
222.	Leo X.	(* 1475) 1513 - 1521	- - -
223.	Hadrian VI.	(* 1459) 1522 - 1523	- - -
224.	Klemens VII.	(* 1478) 1523 - 1534	- - -

Karl der Große
02.04.747 - 28.01.814

Abspaltung der
Orthodoxie

Kaiser Maximilian
22.3.1459 - 21.1.1519

Luthers Thesen,
31.10.1517

- - - Sacco di roma

225.	Paul III.	(* 1468) 1534 - 1549	--	
226.	Julius III.	(* 1487) 1550 - 1555		] Trienter Konzil
227.	Marcellus II.	(* 1501) 1555		
228.	Paul IV.	(* 1476) 1555 - 1559		] 1545 - 1563, 5 Päpste
229.	Pius IV.	(* 1499) 1559 - 1565	--	
230.	Pius V., hl.	(* 1504) 1566 - 1572		
231.	Gregor XIII.	(* 1502) 1572 - 1585	--	- 1582 gregorianischer Kalender
232.	Sixtus V.	(* 1521) 1585 - 1590		
233.	Urban VII.	(* 1521) 1590		
234.	Gregor XIV.	(* 1535) 1590 - 1591		
235.	Innozenz IX.	(* 1519) 1591		
236.	Klemens VIII.	(* 1536) 1592 - 1605		
237.	Leo XI.	(* 1535) 1605		
238.	Paul V.	(* 1552) 1605 - 1621	--	] 1618 - 1648
239.	Gregor XV.	(* 1554) 1621 - 1623		
240.	Urban VIII.	(* 1568) 1623 - 1644		
241.	Innozenz X.	(* 1574) 1644 - 1655	--	
242.	Alexander VII.	(* 1599) 1655 - 1667		

Von der nächsten Fußballweltmeisterschaft können wir bisher nur aussagen, dass Sie nach dem Amtsantritt des jetzigen Papstes beginnt (siehe [MEYE92]).

Aufgabe 2-5:

Kardinal Frings war 26 Jahre Kölner Erzbischof [WLFF80].

Aufgabe 2-6:

Das kann nur zwei Dinge heißen: Entweder ist der Fahrer seit 10 Jahren bei Greyhound oder er hatte vor 11 Jahren einen Unfall.

Aufgabe 2-7:

a) Einen Prozess haben wir für einen einheitlichen Wertebereich definiert. Darüber hinaus können wir Zeitfunktion beliebig zu Prozessen zusammenfassen. Hier haben alle Zeitfunktionen den Wertebereich N_0 . Also können wir alle 30 Zeitfunktionen zu einem Prozess zusammenfassen. Demnach stellen wir uns diesen Prozess als eine Seite DIN A4 mit 30 Zeilen und je einer Spalte je Kalendertag vor.

b) Den Lagerbestand können wir in diesen Prozess einschließen. Die DIN A4-Seite enthält 5 Zeilen mehr.

Aufgabe 2-8: Wochentagsbestimmung

Der 22.12.1949 war ein Donnerstag.

Aufgabe 2-9: Werkskalender

a) Das vorliegende 6-Minutenraster stellt innerhalb des Kalenders eine vollständige Ordnung her. Ein Ereignis, dass zwischen zwei solchen Zeitpunkten geschieht, kann nur dem davor oder dahinter liegenden Zeitelement des Kalenders zugeordnet werden. Dann gilt: Für alle einem Zeitpunkt des Kalenders zugeordneten Ereignisse gilt „=“.

b) $9999.23.3 + 2.6 = 0000.01.9$

c) siehe a)

Aufgabe 2-10:

Die Woche des Revolutionskalenders hatte 10 Tage. Also hatten die Bauern nur alle 10 Tage einen Tag frei. Das war natürlich gegenüber der gerade abgeschafften aristokratischen Zeit eine Verschlechterung.

Aufgabe 2-11:

Der Spediteur muss darauf achten, dass in Rußland oder Israel kein hier bei uns nicht üblicher Feiertag begangen wird. Zumindestens muss er seinen Lkw während des Feiertags zulässig abstellen.

Aufgabe 2-12:

Wenn der Spediteur des Zulieferers das europäische Festland über die Fähre erreicht, wäre zu prüfen, ob diese von Freitagabend bis Montagmorgen auch Lkw befördert (befördern darf).

Aufgabe 2-13:

Die längste Zeit für 3 Monate ist 92 Tage. Die kürzeste Zeit ist (Februar, März, April) mit 89 Tagen.

Aufgabe 2-14:

Mit dem Prüfungstermin 24.03. (Gründonnerstag) hätte man bis zum 01.04. Zeit zu reagieren, also insgesamt 8 Kalendertage.

Aufgabe 2-15:

a, b, e, f, g, h, i, l, o, p, q, s und v sind wahr. n: Nur am Ende des Zeitabschnitts liegt der aktuelle Zustand vor.

Aufgabe 2-16:

a, b und d sind wahr.

Aufgabe 2-17:

a ist wahr.

Aufgabe 2-18:

- a) 1 stellt eine Verteilungsfunktion dar. Hier liegt der spezielle Fall diskreter Zufallsvariablen vor.
- b) 1 stellt bei diskreten Zufallsvariablen eine kumulative Verteilungsfunktion dar.
- c) Damit sind 1 und 2 (spezielle) Verteilungsfunktionen.
- d) 4 stellt die kumulierte Dichtefunktion dar.
- e) $f(x)$ ist für stetige Zufallsvariable eine Dichtefunktion. Das ist die Häufigkeitsverteilung im stetigen Fall.

Aufgabe 2-19:

a, b, c und d sind richtig, e ist falsch.

• Literatur

- [ALLE84] ALLEN, J. F.: Toward a General Theory of Action and Time. Artificial Intelligence 23 (1984), S. 123-154.
- [ANDL29] ANDLER, K.: Rationalisierung der Fabrikation und optimale Losgröße. München: Diss. Univ. 1929.
- [BEGr97] BEITZ, W.; GROTE, K.-H. (Hrsg.): DUBBEL. Taschenbuch für den Maschinenbau. 19. Aufl. Berlin: Springer 1997.
- [BEPi86] BENDER, D.; PIPPIG, E.-E.: Einheiten Maßsysteme SI. 5. Aufl., Berlin: Akademie-Verlag 1986.
- [BRSe79] BRONSTEIN, I.N.; SEMENDJAJEW, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. 21. Aufl., hrsg. von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler, Moskau: Verlag Nauka; Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1979.
- [BUSL71] BUSLENKO, N. P.: Simulation von Produktionsprozessen. Leipzig: Teubner 1971.
- [CAPO] IBM-Deutschland Capacity Planning and Operation Sequencing System-Extended (CAPOSS-E) - Programmbeschreibung Band 1: Planungssystem IBM Form SH12-5422.
- [CARN74] CARNAP, R.: Einführung in die Philosophie der Naturwissenschaften. 2. Aufl., München: Nymphenburger Verlagsbuchhandlung 1974.
- [CMM67] CONWAY, R. W.; MAXWELL, W. L.; MILLER, L. W.: Theory of Scheduling. Reading: Addison-Wesley 1967.
- [DANG09] DANGELMAIER, W.: Theorie der Produktionsplanung und -steuerung. Im Sommer keine Kirschen! Berlin: Springer 2009.
- [FERS64] FERSCHL, F.: Zufallsabhängige Wirtschaftsprozesse. Grundlagen und Anwendungen der Theorie der Wartesysteme. Würzburg: Physica 1964.
- [FLEI90] FLEISCHMANN, B.: The Discrete Lot-Size and Scheduling Problem. European Journal of Operations Research 44 (1990) S. 337-348.
- [GEdr79] GERMAN, S.; DROTH, P.: Handbuch SI-Einheiten. Braunschweig: Vieweg 1979.
- [GGR92] GLASER, H.; GEIGER, W.; ROHDE, V.: PPS - Produktionsplanung und -steuerung. Grundlagen - Konzepte - Anwendungen. 2. Aufl., Wiesbaden: Gabler 1992.
- [GKS72] GEWALD, K.; KASPAR, K.; SCHELLE, H.: Netzplantechnik. Band 2: Kapazitätsoptimierung. München: Oldenbourg 1972.
- [HEIN88] HEINEMEYER, W.: Die Planung und Steuerung des logistischen Prozesses mit Fortschrittszahlen. In: [ADAA88], Bd. II, S. 5-32.
- [HOMÖ78] HOPPE, U.; MÖNTER, B.: Das Internationale Einheitensystem SI. Köln: Verlagsgesellschaft Schulbuchfernsehen 1978.
- [KURB98] KURBEL, K.: Produktionsplanung und -steuerung: Methodische Grundlagen von PPS-Systemen und Erweiterungen. 3. Aufl., München: Oldenbourg 1998.
- [KURZ99] KURZWEIL, R.: Homo s@piens. Leben im 21. Jahrhundert - Was bleibt vom Menschen? Köln: Kiepenheuer & Witsch 1999.
- [LEEG89] LESZAK, M.; EGGERT, H.: Petri-Netz-Methoden und -Werkzeuge: Hilfsmittel zur Entwurfsspezifikation und -validation von Rechensystemen. Berlin: Springer 1989.
- [LÖDD01] LÖDDING, H.: Dezentrale Bestandsorientierte Fertigungsregelung. Diss. Univ. Hannover. Düsseldorf: VDI 2001.

-
- [NADD71] NADDOR, E.: Lagerhaltungssysteme. Frankfurt/M.: Deutsch 1971.
- [NYHU08] NYHUIS, P. (Hrsg.): Beiträge zu einer Theorie der Logistik. Berlin: Springer 2008.
- [PICH75] PICHLER, F.: Mathematische Systemtheorie: dynamische Konstruktionen. Berlin: de Gruyter 1975.
- [SCWO04] SCHENK, M.; WOJANOWSKI, R.: Fortschrittszahlen. In: Koether, R. (Hrsg.): Taschenbuch der Logistik, Sp. 98-108. München: Hanser 2004.
- [STELA77] STEINHAUSEN, D.; LANGER, K.: Clusteranalyse. Einführung in Methoden und Verfahren der automatischen Klassifikation. Berlin: de Gruyter 1977.
- [WEBR84] WEBER, H.: Ford-System der Fortschrittszahlen. Köln: Ford AG 1984.
- [WIKIPEDIA] <https://de.wikipedia.org>
- [WIND67] WINDEKNECHT, T. G.: Mathematical Systems Theory: Causality. Math. Syst. Th., 3 (1967), S. 279-288.
- [WIND71] WINDEKNECHT, T. G.: General Dynamical Processes. A Mathematical Introduction. New York: Academic Press 1971.
- [WLFF80] WOLFF, A.: Dombau in Köln - Photographen dokumentieren die Vollendung einer Kathedrale. Stuttgart: Müller und Schindler 1980

Produktionstheorie 3
Dynamische Konstruktionen
Dangelmaier, W.
2017, XI, 665 S., Hardcover
ISBN: 978-3-662-54918-6