

2 **Aussagen:** **Elemente einer Produktionstheorie**

Abstrakt

Eine Produktionstheorie ist eine systematisch geordnete Menge von Aussagen über einen bestimmten Bereich der Realität. Wichtige Bestandteile dieser Theorie sind Regeln für die zulässige Verknüpfung dieser Aussagen, um weitere Aussagen über Produktionen bzw. Produktionsmodelle zu gewinnen. Demnach gehen wir von primären Aussagen aus, verknüpfen diese zulässig und prüfen, ob die so erhaltenen abgeleiteten Aussagen zutreffen. In einem weiteren Schritt machen wir unterschiedliche Aussagen vergleichbar: Unterschiedliche Personen werden zu unterschiedlichen Modellen gelangen und nicht dieselben Konstrukte verwenden, ggf. aber äquivalente Aussagen treffen. Selbstverständlich stellen wir unseren Beispielen einen Bezug zu Produkt und Produktion her.

Inhaltsverzeichnis

• Funktoren und Ausdrücke	105
• Primäre Regeln der Annahmesysteme und Beweisformen	108
- Abtrennungsregel (AR)	109
- Einführen der Konjunktion (EK)	110
- Beseitigen der Konjunktion (BK)	110
- Einführen der Disjunktion (ED)	110
- Beseitigen der Disjunktion (BD)	111
- Einführen der Äquivalenz (EÄ)	111
- Beseitigen der Äquivalenz (BÄ)	112
- Direkter Annahmeweis	113
- Üblicher direkter Beweis	114
- Indirekter Annahmeweis	115
- Üblicher indirekter Beweis	116
• Annahmeweise der sekundären Gesetze und Regeln	118
- Bedingter Syllogismus (Syl)	118
- Modus tollens (Tol)	119
- Transposition	120
- Zusammengesetzte Transposition	121
- Negation der Disjunktion (ND)	121
- de Morgan: Negation der Konjunktion (NK)	122
- Reflexivität der Implikation	123
- Reflexivität der Äquivalenz	123
- Multiplikation der Implikation	124
- Neuer Faktor	124
- Addition der Implikationen	125
- Zusammengesetztes konstruktives Dilemma	125
- Neuer Summand	126
- Abtrennung der Äquivalenz	126
- Kommutativität der Äquivalenz	127
- Transitivität der Äquivalenz	127
- Negation der Äquivalenzglieder	128
- Multiplikation der Äquivalenzen	129
- Neuer Faktor für die Äquivalenz	129
- Addition der Äquivalenzen	130
- Neuer Summand für die Äquivalenz	131
- Extensionalität der Äquivalenz	132
- Kommutativgesetz der Konjunktion und der Disjunktion	134
- Assoziativgesetz der Konjunktion und der Disjunktion	135
- Idempotenzgesetz der Konjunktion und der Disjunktion	136
- Kommutativgesetz Disjunktion und Konjunktion	137

-	<i>Zusätzlicher Beweis: rule of inference (RoI)</i>	137
-	<i>Kommutativgesetz der Prämissen</i>	138
-	<i>Export-/Importgesetz der Prämissen</i>	138
-	<i>Multiplikationsgesetz für die Hintersätze</i>	139
-	<i>Additionsgesetz für die Vordersätze</i>	141
-	<i>Regel des einfachen konstruktiven Dilemmas</i>	142
-	<i>Distributivgesetz der Konjunktion bezüglich der Disjunktion</i>	142
-	<i>Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten</i>	144
-	<i>Distributivgesetz der Disjunktion bezüglich der Konjunktion</i>	144
-	<i>Gesetz von der doppelten Negation</i>	145
-	<i>Gesetz der Negation der Disjunktion</i>	146
-	<i>Ersetzen der Konjunktion durch die Disjunktion und die Negation</i>	147
-	<i>Gesetze der Negation der Konjunktion</i>	148
-	<i>Ersetzen der Disjunktion durch die Konjunktion und die Negation</i>	149
-	<i>Gesetze des Ersetzens der Implikation</i>	151
-	<i>Gesetz des Ersetzens der Äquivalenz</i>	152
-	<i>Gesetz der Negation der Implikation</i>	152
-	<i>Gesetz der Negation der Äquivalenz</i>	152
-	<i>Regel des zusammengesetzten destruktiven Dilemmas</i>	153
-	<i>Regel des einfachen destruktiven Dilemmas</i>	153
-	<i>Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch</i>	154
-	<i>Duns-Scotus-Regel</i>	154
-	<i>Regel Reductio ad absurdum (Widerspruchsregel)</i>	155
-	<i>Regel der Umkehrung der Implikationen</i>	156
•	<i>Wahrheitsfunktoren. Null-Eins-Prüfung</i>	158
-	<i>Wahrheitsfunktoren</i>	158
-	<i>Null-Eins-Prüfung</i>	171
•	<i>Normalformen</i>	177
-	<i>Konjunktive Normalform</i>	177
-	<i>Disjunktive Normalform</i>	184
-	<i>Implikative Normalform</i>	186
•	<i>Axiomatische Systeme des Aussagenkalküls</i>	186
-	<i>Alle Termini des Annahmesystems Grundtermini</i>	187
-	<i>Nicht alle Termini des Annahmesystems Grundtermini</i>	189
•	<i>Aufgaben</i>	196
-	<i>Fragen</i>	196
-	<i>Antworten</i>	200
•	<i>Literatur</i>	208

• Funktoren und Ausdrücke

Das *Aussagenkalkül* prägen drei Merkmale [BUCH87]:

1. Die einzige Variablenart in den Ausdrücken dieses Kalküls sind Aussagenvariablen. Aussagenvariablen bezeichnen wir mit den Buchstaben $p, q, r, s, t, p_1, q_1, r_1, \dots$. Für sie können wir beliebige Aussagen einsetzen.
2. Die logischen Konstanten, die in den Ausdrücken dieses Kalküls auftreten, sind aussagenbildende Funktoren von Aussagenargumenten.
3. Für diese Konstanten führen wir Symbole sowie Regeln für die Durchführung von Operationen mit diesen Symbolen ein.¹

Wir behandeln zuerst die wichtigsten *konstanten Symbole* dieses Kalküls:

Das Zeichen der *Negation*, das Symbol „ $\neg$ “, ist ein aussagenbildender Funktor von *einem* Aussagenargument. Ein aus dem Negationszeichen und einem darauffolgenden Aussagenausdruck W bestehender Ausdruck heißt die *Negation* oder die *Verneinung* des Ausdruckes W . Den Ausdruck „ $\neg p$ “ lesen wir auf eine der folgenden Arten: nicht p ; es ist nicht so, dass p ; es ist nicht wahr, dass p .² Aussagenbildende Funktoren von *zwei* Aussagenargumenten sind die folgenden Konstanten des Aussagenkalküls: Das Symbol „ $\wedge$ “ ist das Zeichen der *Konjunktion*. Ein Aussagenausdruck mit zwei durch das Konjunktionszeichen verbundenen Aussagenausdrücken heißt die *Konjunktion* dieser Ausdrücke oder ihr *logisches Produkt*, die Glieder der Konjunktion heißen die *Faktoren der Konjunktion*. Den Ausdruck „ $p \wedge q$ “ lesen wir: p und q . Das Symbol „ $\vee$ “ ist das Zeichen der *Disjunktion*.³ Ein aus zwei Aussagenausdrücken mittels des Oder-Zeichens gebildeter Aussagenausdruck ist die *Disjunktion* dieser Ausdrücke oder ihre *logische Summe*. Die Glieder dieser Disjunktion heißen ihre *Summanden*. Den Ausdruck „ $p \vee q$ “ lesen wir: p oder q . Wir verwenden dabei eine bestimmte Sinnentsprechung des Wortes „oder“.⁴ Das Symbol „ $\rightarrow$ “ ist das Zeichen der *Implikation*. Ein mit Hilfe des Implikationszeichens gebildeter Aussagenausdruck aus zwei Ausdrücken heißt *Implikation* oder *Bedingungsaussage*. Das erste Glied einer Implikation ist ihr *Vordersatz*, das zweite ihr *Hintersatz*.⁵ Den Ausdruck „ $p \rightarrow q$ “ lesen wir: wenn p , so q und verwenden dabei eine der Sinnentsprechungen des Ausdruckes „wenn ..., dann“. Um diese Sinnentsprechung von anderen Entsprechungen des Ausdruckes „wenn p , dann q “ zu unterscheiden, nennen wir die mit Hilfe des Zeichens „ $\rightarrow$ “ gebildete Implikation die *materiale Implikation*. Das Symbol „ $\leftrightarrow$ “ ist das Zeichen der *Äquivalenz*. Ein aus zwei Aussagenausdrücken mit Hilfe des Äquivalenzzeichens ge-

¹ Demnach geht es um das Verknüpfen beliebiger wahrer oder falscher Aussagen. Dafür werden Regeln angegeben.

² In der Umgangssprache tritt das Wort „nicht“ als aussagenbildendes Negationszeichen mit einem Aussagenargument nur in einfachen Kontexten auf, z. B. in: Es regnet nicht. Er lieferte das Fahrrad nicht. Vor zusammengesetzten Aussagen verwenden wir dagegen Wendungen wie „es ist nicht so, dass p “, „es ist nicht wahr, dass p “ als Negationszeichen.

³ Auch Adjunktion (siehe bspw. [ZOGL97])

⁴ Die unterschiedlichen Sinnentsprechungen behandeln wir im Abschnitt Wahrheitsfunktoren.

⁵ Auch Vorder- und Hinterglied (siehe [ZOGL97], [BORK76]).

bildeter Aussagenausdruck heißt *Äquivalenz*. Ihr erstes Glied ist die *linke* Seite der Äquivalenz, das zweite ihre *rechte*. Den Ausdruck „ $p \leftrightarrow q$ “ lesen wir: p dann und nur dann, wenn q . Die Äquivalenz „ $p \leftrightarrow q$ “ lässt sich als Konjunktion der zwei materialen Implikationen „ $p \rightarrow q$ “ sowie „ $q \rightarrow p$ “ auffassen (*materiale Äquivalenz*).

Beispiel 2-1: Konjunktion

Wir betrachten den Satz: „Radfahren ist anregend und unterhaltsam“. Zur Formalisierung führen wir zwei Abkürzungen ein: p = Radfahren ist anregend. q = Radfahren ist unterhaltsam. Damit ist $p \wedge q$ = Radfahren ist anregend und unterhaltsam. Im Satz „Eine Schraube und die passende Mutter sind ein Wirkpaar“ liegt dagegen keine Konjunktion zweier Aussagen vor; die Aussage lässt sich nicht in eine Konjunktion von zwei Teilaussagen zerlegen. In diesem Fall ist „Wirkpaar sein“ eine zweistellige Relation.

Wir betrachten den Satz „Julius raucht und trinkt nicht“ und verwenden die Abkürzungen r : „Julius raucht“ und t : „Julius trinkt“. Wir geben zwei Interpretationen dieser Aussage:

a) $r \wedge \neg t$ = (Julius raucht) und (Julius trinkt nicht).

b) $\neg r \wedge \neg t$ = Julius raucht nicht und er trinkt nicht.

Gegeben seien die beiden Aussagen: p = Julius geht schwimmen. q = Siegfried geht schwimmen. Damit können wir die folgenden Sätze bilden:

c) $p \wedge q$ = Julius und Siegfried gehen schwimmen = Sowohl Julius als auch Siegfried gehen schwimmen.

d) $\neg p \wedge \neg q$ = Julius geht nicht schwimmen und Siegfried geht nicht schwimmen = Julius und Siegfried gehen beide nicht schwimmen = Weder Julius noch Siegfried gehen schwimmen.



Beispiel 2-2: Implikation

– Implikation mit falschem Vordersatz

„Wenn ein Kunde mit einem Fahrrad ins Büro fährt und immer zu Fuß geht, dann erhält er einen Gutschein.“ Auch wenn der Vordersatz falsch ist, ist die ganze Aussage immer wahr: $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$.

– Implikation mit wahrem Hintersatz

„Wenn der Kunde ein Fahrrad bestellt, dann investieren wir in eine neue Lackiererei oder wir arbeiten mit der alten weiter.“ Diese Regel hat die Struktur: $p \rightarrow (q \vee \neg q)$.

Weil der Hintersatz $(q \vee \neg q)$ immer wahr ist, ist auch die ganze Aussage immer wahr.



Die *Aussagenausdrücke* des Aussagenkalküls sind Aussagenvariablen und sinnvolle Ausdrücke, die sich aus Aussagenvariablen und Funktoren des Aussagenkalküls zusammensetzen.⁶ Es gilt:

1. Die Aussagenvariablen sind Aussagenausdrücke.

⁶ Wir sprechen deshalb anstelle von Funktoren in diesem Zusammenhang auch von Junktoren (siehe bspw. [ZOGL97]).

2. Die Negation eines Aussagenausdrucks ist wie die Konjunktion, die Disjunktion, die Implikation und die Äquivalenz zweier Aussagenausdrücke ein Aussagenausdruck.
3. Jeder Aussagenausdruck ist eine Aussagenvariable oder er wird aus Aussagenvariablen über eine einmalige oder mehrmalige Verbindung einfacherer Ausdrücke mit Hilfe von Funktoren des Aussagenkalküls hergestellt.

Wenn wir für die Funktoren des Aussagenkalküls Symbole einführen und diese zwischen ihren Argumenten anordnen, dann werden zur Sicherung der Eindeutigkeit der Zerlegung des Ausdruckes in Funktoren und Argumente Klammern notwendig. Bspw. unterscheiden wir durch die Einführung von Klammern den Ausdruck „ $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ “ vom Ausdruck „ $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ “. Wir legen fest:

1. Die Negation von Variablen, die Negation solcher Negationen usw., also die Ausdrücke: $\neg p$, $\neg\neg p$ usw. schreiben wir ohne Klammern.
2. Das Negationszeichen bindet stärker als das Konjunktionszeichen. Der Ausdruck „ $\neg p \wedge q$ “ hat die gleiche syntaktische Zerlegung⁷ wie der Ausdruck „ $(\neg p) \wedge q$ “.
3. Das Konjunktionszeichen bindet stärker als das Disjunktionszeichen. Der Ausdruck „ $p \wedge q \vee r$ “ hat die gleiche syntaktische Zerlegung wie der Ausdruck „ $(p \wedge q) \vee r$ “.
4. Das Disjunktionszeichen bindet stärker als das Implikationszeichen. Der Ausdruck „ $p \vee q \rightarrow r$ “ hat die gleiche syntaktische Zerlegung wie der Ausdruck „ $(p \vee q) \rightarrow r$ “.
5. Das Implikationszeichen bindet stärker als das Äquivalenzzeichen. Der Ausdruck „ $p \rightarrow q \leftrightarrow r$ “ hat die gleiche syntaktische Zerlegung wie der Ausdruck „ $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$ “.

Beispiel 2-3: Konjunktion, Disjunktion, Negation, Implikation, Äquivalenz

- Aussage p_1 : „Tisch 4711 enthält Tischplatte 4712“,
 „Fahrrad Nirwana enthält Sattel Sputnik“.
- Aussage p_2 : „Tischplatte 4712 hat eine rote Oberfläche“,
 „Sattel Sputnik hat einen Lederbezug“.
- Aussage p_3 : „Tisch 4711“ enthält Tischbein 4713“,
 „Fahrrad Nirwana hat Mittelzugbremsen Durace“.
- Aussage p_4 : „Tischbein 4713 enthält Rolle 4719“,
 „Mittelzugbremse Durace hat Bremshebel Optigriff“.
- Aussage p_5 : „Tisch 4711 enthält 24 Schrauben 4714“,
 „Fahrrad Nirwana hat Edelstahlspeichen“.
- Aussage p_6 : „Tisch 4711 enthält 24 Schrauben 4715“,
 „Fahrrad Nirwana hat verchromte Speichen“.
- Aussage p_7 : „Tisch 4711 enthält Tischplatte 4716“,
 „Fahrrad Nirwana enthält Sattel Futur“.
- Aussage p_8 : „Tisch 4711 wird bei Verwendung der Schrauben 4714 nur auf Montagelinie A montiert“,
 „Fahrrad Nirwana mit Edelstahlspeichen wird nur an Rennfahrer geliefert“.

⁷ Zerlegung in Funktoren und ihre Argumente

Negation $\neg p : \neg p_7$,

Konjunktion $p \wedge q$: Auf einen Gegenstand treffen mehrere Aussagen zu, bspw. $p_1 \wedge p_3$.

Das gilt bspw. auch für die Sachmerkmaleiste nach DIN 4000-22: Ein Drehstahl hat eine Vielzahl von Eigenschaften.

Disjunktion $p \vee q$: Gewisse Aussagen schließen sich gegenseitig aus, bspw. $p_5 \vee p_6$,

Implikation $p \rightarrow q : p_5 \rightarrow p_8$.

Damit lassen sich bspw. die folgenden Aussagen treffen: Für den Tisch 4711 gilt

$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4 \wedge p_8 \wedge \neg p_6 \wedge \neg p_7$ und für das Fahrrad Nirwana gilt $p_3 \wedge p_6 \wedge p_7$.



Auch Aussagen, die inhaltlich nichts miteinander verbindet, können miteinander verknüpft werden.

Beispiel 2-4: Willkürliche Verknüpfung von Aussagen⁸

„Kinder haben kurze Beine und Lügen gehen in die Kita.“ Diese Aussage ist falsch, weil Lügen nicht in die Kita gehen.

„Fahrräder sind Verkehrsmittel oder $2 + 3 = 6$.“ Diese Aussage ist wahr, obwohl $2 + 3$ nicht 6 ist. „Pasewalk ist größer als Berlin *und* ein Plattenkondensator ist ein Ladungsspeicher“.

Diese Aussage ist falsch, weil Pasewalk nicht größer als Berlin ist.

„Wasser läuft bergab *oder* $2 + 3 = 7$.“ Das ist wieder wahr.



• **Primäre Regeln der Annahmesysteme und Beweisformen**

Die Regeln des Annahmesystems legen den Aufbau der Annahmeweise fest. Wir verwenden als Beispiel den Beweis des Satzes „Wenn jetzt die Frühschicht ist, dann ist die übernächste Schicht die Nachtschicht“ anhand der Prämissen (1) „Wenn jetzt Frühschicht ist, dann ist die nächste Schicht die Spätschicht“, (2) „Wenn die nächste Schicht die Spätschicht ist, dann ist die übernächste Schicht die Nachtschicht“. Diesen Beweis führen wir folgendermaßen: Nehmen wir an, jetzt läuft die Frühschicht. Daraus folgt aufgrund von (1), dass die nächste Schicht die Spätschicht ist. Daraus wiederum erfolgt aufgrund von (2), dass die übernächste Schicht die Nachtschicht ist. Demnach gilt: Wenn jetzt die Frühschicht läuft, dann ist die übernächste Schicht die Spätschicht. Diesen Beweis schreiben wir formal wie folgt:

- (1) Wenn jetzt die Frühschicht läuft, dann ist die Spätschicht die nächste Schicht.
- (2) Wenn die nächste Schicht die Spätschicht ist, dann ist die übernächste Schicht die Nachtschicht.
- (3) Jetzt läuft die Frühschicht.
- (4) Die Spätschicht ist die nächste Schicht (aufgrund von (1) und (3)).
- (5) Die Nachtschicht ist die übernächste Schicht (aufgrund von (2) und (4)).

⁸ Ein Alltagssprachliches Denken könnte diese Aussageverknüpfungen als sinnlose Aussagen ansehen. Die Inhalte spielen hier aber keine Rolle. Die Aussagen bzw. Aussageverknüpfungen müssen nur wahr oder falsch sein, ohne empirisch sinnvolle Sachverhalte auszudrücken.

Die Prämissen (1) und (2) und der Vordersatz der zu beweisenden Implikation (3) sind die Annahmen (*Annahmesystem*)⁹. Aus diesen Annahmen leiten wir die weiteren Zeilen des Beweises ab. Wir legen dabei die Regel zugrunde, dass sich aus einer Implikation und ihrem Vordersatz ihr Nachsatz ergibt (4) und (5). Wenn wir auf diese Weise den Nachsatz des zu beweisenden Theorems erhalten haben, sehen wir den Beweis als beendet an.¹⁰

Dieses Beispiel zeigt: Die Regeln des Annahmesystems bestimmen den Aufbau der Annahmeweise. Hier wird bspw. von 2 Implikationen ausgegangen. Unter den Regeln, die die Annahmeweise festlegen, können wir zwei Arten von Regeln unterscheiden: 1. Regeln des Hinzufügens neuer Zeilen zu einem Beweis, 2. Regeln des Bildens von Beweisen.

Die Regeln des Hinzufügens neuer Zeilen zu einem Beweis stellen fest, dass aus Ausdrücken einer bestimmten Form andere Ausdrücke einer bestimmten Form logisch folgen, die wir aufgrund der bisherigen Zeilen dem Beweis hinzufügen können. Von dieser Art sind bspw. die Zeilen (4) und (5) unseres Beispiels. Einige solcher Regeln nehmen wir ohne Beweis als Primärregeln (*Axiome*) an. Diese primären Regeln des Hinzufügens neuer Zeilen zu einem Beweis sind die Abtrennungsregel sowie die Regeln der Einführung und der Beseitigung der Konjunktion, der Disjunktion und der Äquivalenz. Alle anderen Regeln dieser Art sind darauf aufbauend bewiesene, sekundäre Regeln (*Theoreme*)¹¹.

– Abtrennungsregel (AR)

Die Regel AR (modus ponens) stellt fest: Aus einer Bedingungsangabe (einer Implikation) und ihrem Vordersatz folgt ihr Hintersatz. Nach dieser Regel ist das Abtrennungsschema

$$\frac{p \rightarrow q \quad p}{q}$$

ein logisches Schema. Wenn also zu einem Beweis als bisherige Zeilen des Beweises eine Implikation und ihr Vordersatz gehören, dann können wir ihren Hintersatz als neue Zeile des Beweises in den Beweis einführen, weil diese Zeile aus den bisherigen Zeilen des Beweises folgt. Natürlicherweise sind die Zeilen des Beweises Aussagenausdrücke.

Beispiel 2-5: Abtrennungsregel

(1) Wenn Pasewalk der Standort der S.-Werke ist, dann wohnt Julius S. in Pasewalk.

(2) Pasewalk ist der Standort der S.-Werke

(3) Julius S. wohnt in Pasewalk



⁹ siehe Kap. 1, Sprachausdrücke, Logik, Schlüsse, Abschnitt Logische Systeme

¹⁰ Um es ausdrücklich zu betonen: Die Frage ist, ob die Annahme „Wenn jetzt die Frühschicht ist, so ist die übernächste Schicht die Nachtschicht“ anhand der Prämissen (1), (2) und (3) bewiesen werden kann. Dazu muss jemand diese drei Prämissen vorgeben. Sie stehen nicht in Frage. Jetzt ist nur noch der passende Beweis der Annahme zu führen: Es wird ja in den Prämissen nicht explizit gesagt: „Wenn jetzt die Frühschicht ist, so ist die übernächste Schicht die Nachtschicht“.

¹¹ siehe Kap. 1, Sprachausdrücke, Logik, Schlüsse, Abschnitt Logische Systeme

– *Einführen der Konjunktion (EK)*

Die Regel EK stellt fest: Aus zwei Aussagenausdrücken folgt ihre Konjunktion.
Nach dieser Regel ist das Schema des Einführens der Konjunktion:

$$\frac{p}{\frac{q}{p \wedge q}}$$

ein logisches Schema.

Beispiel 2-6: Einführen der Konjunktion

- (1) Die S.-Werke sind der Hersteller von Fahrrad Nirwana
 - (2) Die S.-Werke sind der Hersteller von Fahrrad Kismet
-
- (3) Die S.-Werke sind der Hersteller von Fahrrad Nirwana und die S.-Werke sind der Hersteller von Fahrrad Kismet



– *Beseitigen der Konjunktion (BK)*

Die Regel BK stellt fest: Aus einer Konjunktion folgt jedes ihrer Glieder.
Nach dieser Regel sind die beiden Schemata des Beseitigens der Konjunktion:

$$\frac{p \wedge q}{p} \quad \frac{p \wedge q}{q}$$

logische Schemata. Nach der Regel BK folgt aus der Aussage (3) in Beispiel 2-6 wiederum jede der Aussagen (1), (2).

Beispiel 2-7: Beseitigen der Konjunktion

- (1) Die S.-Werke sind der Hersteller von Fahrrad Kismet und die S.-Werke sind der Hersteller von Fahrrad Nirwana
-
- (2) Die S.-Werke sind der Hersteller von Fahrrad Kismet
 - (3) Die S.-Werke sind der Hersteller von Fahrrad Nirwana



– *Einführen der Disjunktion (ED)*

Die Regel ED stellt fest: Aus einer beliebigen Aussage folgt die Disjunktion, deren erstes oder zweites Glied diese Aussage ist. Nach dieser Regel sind die beiden Schemata des Einführens der Disjunktion:

$$\frac{p}{p \vee q} \quad \frac{q}{p \vee q}$$

logische Schemata.

Beispiel 2-8: Einführen der Disjunktion

(1) Die S.-Werke produzieren Fahrrad Nirwana

(2) Die S.-Werke produzieren Fahrrad Nirwana oder die S.-Werke produzieren Fahrrad Kismet



– Beseitigen der Disjunktion (BD)

Die Regel BD¹² stellt fest: Aus einer Disjunktion und der Negation eines ihrer Glieder folgt ihr zweites Glied. Nach dieser Regel sind die beiden Schemata des Beseitigens der Disjunktion:

$$\begin{array}{c} p \vee q \quad p \vee q \\ \frac{\neg p}{q} \quad \frac{\neg q}{p} \end{array}$$

logische Schemata.

Beispiel 2-9: Beseitigen der Disjunktion

(1) Das Vorderrad ist platt oder das Hinterrad ist platt

(2) Das Vorderrad ist nicht platt

(3) Das Hinterrad ist platt

(1) Die Frühschicht fällt aus oder die Nachtschicht fällt aus

(2) Die Frühschicht fällt nicht aus

(3) Die Nachtschicht fällt aus



– Einführen der Äquivalenz (EÄ)

Die Implikation $H \rightarrow F$ heißen wir die umgekehrte Implikation in bezug auf die Implikation $F \rightarrow H$. Die Äquivalenz $F \leftrightarrow H$ heißen wir die der Implikation $F \rightarrow H$ entsprechende Äquivalenz; analog nennen wir die Implikation $F \rightarrow H$ die der Äquivalenz $F \leftrightarrow H$ entsprechende Implikation. $H \rightarrow F$ ist die der Äquivalenz $F \leftrightarrow H$ entsprechende umgekehrte Implikation.

Die Regel EÄ stellt fest: Aus einer gegebenen Implikation und der umgekehrten Implikation folgt die dieser Implikation entsprechende Äquivalenz. Nach dieser Regel ist das Schema des Einführens der Äquivalenz:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ q \rightarrow p \\ p \leftrightarrow q \end{array}$$

ein logisches Schema.

¹² Auch Disjunktiver Syllogismus (siehe bspw. [ZOGL97], S. 65)

Beispiel 2-10: Einführen der Äquivalenz

- (1) Wenn der Reifen platt ist, dann ist der Luftdruck unter 1 bar
 - (2) Wenn der Luftdruck unter 1 bar ist, dann ist der Reifen platt
-
- (3) Der Reifen ist platt dann und nur dann, wenn der Luftdruck unter 1 bar ist



– Beseitigen der Äquivalenz (BÄ)

Die Regel BÄ stellt fest: Aus einer gegebenen Äquivalenz folgen die ihr entsprechende Implikation sowie die umgekehrte Implikation. Nach dieser Regel sind die beiden Schemata des Beseitigens der Äquivalenz:

$$\begin{array}{cc} \underline{p \leftrightarrow q} & \underline{p \leftrightarrow q} \\ p \rightarrow q & q \rightarrow p \end{array}$$

logische Schemata. Nach der Regel BÄ folgt aus der Aussage (3) wieder jede der Aussagen (1), (2).

Beispiel 2-11: Beseitigen der Äquivalenz

- (1) Der Reifen ist platt dann und nur dann, wenn der Luftdruck unter 1 bar ist
-
- (2) Wenn der Luftdruck unter 1 bar ist, dann ist der Reifen platt
 - (3) Wenn der Reifen platt ist, dann ist der Luftdruck unter 1 bar



Zur Formulierung der Bildungsregeln für Annahmeweise führen wir im folgenden eine zweckmäßige Terminologie ein. Die Ausdrücke $W_1, W_2, \dots, W_{n-1}$, die in dem Ausdruck

$$(W) W_1 \rightarrow \{W_2 \rightarrow [W_3 \rightarrow \dots \rightarrow (W_{n-1} \rightarrow W_n) \dots]\}$$

auftreten, nennen wir die Vordersätze des Ausdruckes (W). Bspw. sind die Ausdrücke $p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$, p die Vordersätze des Ausdruckes $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$. Es seien $W_1, W_2, \dots, W_i$ aufeinanderfolgende Vordersätze des Ausdruckes (W). Dann hei-

ßen wir den verbleibenden Teil des Ausdruckes (W) $W_{i+1} \rightarrow [\dots \rightarrow (W_{n-1} \rightarrow W_n)]$ den diesen Vordersätzen entsprechenden Hintersatz des Ausdruckes (W). Bspw. ist im Ausdruck $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$ der Ausdruck „ $(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ “ der Hintersatz, der dem Vordersatz „ $p \rightarrow q$ “ entspricht, der Ausdruck „ $p \rightarrow r$ “ der Hintersatz, der den Vordersätzen „ $p \rightarrow q$ “ und „ $q \rightarrow r$ “ entspricht, der Ausdruck „ r “ der Hintersatz, der den Vordersätzen $p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$, p entspricht.

Für den *Annahmeweise einer Regel*, die die Gültigkeit eines gegebenen logischen Schemas feststellen soll, notieren wir zuerst als *Beweisannahmen* die Prämissen dieses Schemas und die Vordersätze seiner Conclusio. Aus diesen Annahmen leiten wir gemäß der (primären) Regel des Hinzufügens neuer Zeilen zu einem Beweis neue Zeilen ab. Neue Zeilen können auch vorher bewiesene Theoreme sein.

Den *Annahmeweise eines Theorems* beginnen wir mit dem Aufschreiben der Vorder-

sätze des Theorems als *Annahmen des Beweises*. Gemäß der (primären) Regel des Hinzufügens neuer Zeilen zu einem Beweis fügen wir dem Beweis neue Zeilen bzw. vorher bewiesene Theoreme hinzu.

– *Direkter Annahmewebeweis*

Der *direkte Annahmewebeweis* ist beendet, wenn wir einen Hintersatz erhalten, der den Vordersätzen der Conclusio, die als Beweisannahmen notiert wurden, entspricht.¹³ Ein Beispiel für einen solchen Beweis ist der Beweis der *Regel des bedingten Syllogismus*. Sie stellt die Gültigkeit des folgenden Schemas fest:

$$p \rightarrow q$$

$$\frac{q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$$

$$p \rightarrow r$$

Beweis:

(1) $p \rightarrow q$	}	{Annahmen}
(2) $q \rightarrow r$		
(3) p		
(4) q		{AR: 1, 3}
r		{AR: 2, 4}

Die rechte Seite der einzelnen Zeilen gibt an, aus welchen Regeln und Zeilen sie folgen. Die letzte Zeile wird nicht numeriert. Wir zeigen damit an, dass der Beweis beendet ist.

Beispiel 2-12: Direkter Annahmewebeweis einer Regel

(1) Wenn der Luftdruck unter 1 bar ist, dann ist der Reifen platt.	}	{Annahmen}
(2) Wenn der Reifen platt ist, dann rollt das Fahrrad schlecht.		
(3) Der Luftdruck ist unter 1 bar.		
(4) Der Reifen ist platt.		{AR: 1, 3}
Das Fahrrad rollt schlecht.		{AR: 2, 4}



Sobald wir aus den Vordersätzen des Theorems, die als Beweisannahme geschrieben wurden, den entsprechenden Hintersatz des Theorems erhalten, ist der *direkte Annahmewebeweis* eines gegebenen Theorems beendet.¹⁴

Der direkte Annahmewebeweis des Gesetzes: $(p \rightarrow q \rightarrow [(q \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow r)])$ entspricht dem oben angegebenen Beweis der Regel des bedingten Syllogismus.

Der direkte Annahmewebeweis des Gesetzes: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ hat die Form

¹³ Es ist wichtig festzuhalten, dass die Wahrheit der Vordersätze nur angenommen ist [MONJ71].

¹⁴ Womit nichts anderes gezeigt wurde, als dass sich aus den Annahmen mit den erlaubten Operationen die Conclusio herleiten lässt.

(1) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	}	{Annahmen}
(2) p		
(3) $p \rightarrow q$	}	{BK: 1}
(4) $q \rightarrow r$		
(5) q		{AR: 3, 2}
r		{AR: 4, 5}

Dieses Beispiel eines Beweises macht für den Fall, dass eine Annahme eine Konjunktion ist, deutlich, dass wir daraus mit Hilfe der Regel BK beide Glieder dieser Konjunktion als besondere Zeilen des Beweises ableiten können. Um abzukürzen, können wir statt der Annahme, die eine Konjunktion darstellt, als Annahmen die einzelnen Glieder dieser Konjunktion aufschreiben. Dann deckt sich der so abgekürzte Beweis des Gesetzes: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ mit dem vorher angegebenen Beweis der Regel des bedingten Syllogismus.

Beispiel 2-13: Annahmewebeweis eines Theorems

- (1) (Wenn der Luftdruck unter 1 bar fällt, dann ist der Reifen platt) und (Wenn der Reifen platt ist, dann rollt das Fahrrad schlecht)
 - (2) Der Luftdruck ist unter 1 bar.
 - (3) Der Luftdruck ist unter 1 bar. Der Reifen ist platt.
 - (4) Der Reifen ist platt. Das Fahrrad rollt schlecht.
- Das Fahrrad rollt schlecht.



– *Üblicher direkter Beweis*

Wir unterscheiden den direkten Annahmewebeweis eines Theorems von einem üblichen direkten Beweis. Einen *üblichen direkten Beweis* eines Theorems beginnen wir mit vorher bewiesenen Theoremen. Aus diesen leiten wir mittels der Regeln des Hinzufügens neuer Zeilen zu einem Beweis das zu beweisende Theorem ab. Bei einem üblichen direkten Beweis ist jede Zeile des Beweises ein Theorem, also eine bewiesene Aussage, während die Zeilen eines Annahmewebeweises, insbesondere die Annahmen des Beweises, keine Theoreme zu sein brauchen und es oft auch nicht sind. Der Beweis des folgenden Gesetzes stellt ein Beispiel für einen üblichen direkten Beweis dar:

$$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p.$$

Beweis:

- (1) $p \wedge q \rightarrow q \wedge p$
 - (2) $q \wedge p \rightarrow p \wedge q$
- $$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p \quad \{\text{EÄ: 1, 2}\}$$

Die Zeilen (1) und (2) seien hier vorher bewiesene Theoreme.

Beispiel 2-14: Direkter Beweis (siehe Definition der Äquivalenz)

- (1) Wenn (Julius S. ist ein Techniker und Julius S. ist ein Unternehmer), dann (Julius S. ist ein Unternehmer und Julius S. ist ein Techniker).
- (2) Wenn (Julius S. ist ein Unternehmer und Julius S. ist ein Techniker), dann (Julius S. ist ein Techniker und Julius S. ist ein Unternehmer).

Die Aussagen

Julius S. ist ein Techniker und Julius S. ist ein Unternehmer

und

Julius S. ist ein Unternehmer und Julius S. ist ein Techniker

sind äquivalent; aus (1) folgt (2) und aus (2) folgt (1).



– Indirekter Annahmeweis

Der *indirekte Annahmeweis* einer Regel, die die Gültigkeit eines gegebenen logischen Schemas feststellt, beginnt mit dem Notieren der Annahmen des Beweises. Diese Annahmen sind die Prämissen des Schemas sowie die Vordersätze seiner Conclusio. Als *Annahme des indirekten Beweises* notieren wir denjenigen Ausdruck, der mit dem entsprechenden Hintersatz dieser Conclusio einen Widerspruch bildet. Sich widersprechende Ausdrücke sind dabei der Ausdruck W und seine Negation $\neg W$. Als Annahme des indirekten Beweises schreiben wir entweder das Negationszeichen vor den gegebenen Hintersatz oder wir streichen im Hintersatz das anfängliche Negationszeichen. Dem Beweis fügen wir nach den (primären oder vorher bewiesenen) Regeln des Hinzufügens neuer Zeilen zu einem Beweis neue Zeilen oder vorher bewiesene Theoreme hinzu. Der indirekte Annahmeweis ist beendet, wenn wir in ihm zwei sich widersprechende Zeilen erhalten.¹⁵

Zum *indirekten Annahmeweis eines Theorems* besteht der Unterschied darin, dass die Vordersätze dieses Theorems die Annahmen des Beweises sind.

Wir geben im folgenden zwei Beispiele für indirekte Annahmeweise. Das erste Beispiel sei:

$$\frac{\neg p \rightarrow q}{\neg q \rightarrow p}.$$

Beweis:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad \neg p \rightarrow q \\ (2) \quad \neg q \end{array} \right\} \quad \{\text{Annahmen}\}$$

Wir schreiben als Annahme des indirekten Beweises vor dem Hintersatz der Conclusio das Negationszeichen.

¹⁵ Wie alles in der Logik, ist der indirekte Beweis dann, wenn die Grundlagen bewiesen und klar sind, sture Anwendung der eingeführten Konzeption und die heißt hier: Wir schreiben die Prämissen und den Vordersatz der Conclusio auf. Dann folgt mit $\neg$ als Annahme des indirekten Beweises der Hintersatz der Conclusio. Entweder haben wir dann bereits sich zwei widersprechende Zeilen oder wir müssen neue Zeilen hinzufügen, die natürlich zulässig sein müssen. Dann folgt der Widerspruch - wenn es denn einer ist - eben später. Also steht bei so einem Beweis dem Sinne nach ein „ $\wedge$ “ zwischen den Zeilen.

- | | | |
|-----|-------------|-----------------------------------|
| (3) | $\neg p$ | {Annahme des indirekten Beweises} |
| (4) | q | {AR: 1, 3} |
| | Widerspruch | {2, 4} |

Beispiel 2-15: Indirekter Annahmewebeweis

- (1) Der Luftdruck ist nicht über 1 bar, daher ist der Reifen platt.
 - (2) Der Reifen ist nicht platt.
 - (3) Der Luftdruck ist nicht über 1 bar.
 - (4) Der Reifen ist platt
- Widerspruch (2, 4)



Als zweites Beispiel wählen wir:

$$\frac{p \rightarrow q}{\neg q \rightarrow \neg p}.$$

Beweis:

- | | | | |
|-----|-------------------|---|------------|
| (1) | $p \rightarrow q$ | } | {Annahmen} |
| (2) | $\neg q$ | | |

Wir schreiben als Annahme des indirekten Beweises „ p “, indem wir im Hintersatz „ $\neg p$ “ der Conclusio das anfängliche Negationszeichen streichen.

- | | | |
|-----|-------------|-----------------------------------|
| (3) | p | {Annahme des indirekten Beweises} |
| (4) | q | {AR: 1, 3} |
| | Widerspruch | {2, 4} |

Beispiel 2-16: Indirekter Annahmewebeweis

- (1) Der Luftdruck ist unter 1 bar, daher ist der Reifen platt.
 - (2) Der Reifen ist nicht platt.
 - (3) Der Luftdruck ist unter 1 bar.
 - (4) Der Reifen ist platt
- Widerspruch (2, 4)



– Üblicher indirekter Beweis

Der *übliche indirekte Beweis* eines Theorems unterscheidet sich von einem indirekten Annahmewebeweis dadurch, dass in ihm außer der Annahme des indirekten Beweises keine weiteren Annahmen auftreten. In einem solchen Beweis ist die Annahme des indirekten Beweises der mit dem zu beweisenden Theorem im Widerspruch stehende Ausdruck.

Als Beispiel verwenden wir:

$$\neg[(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)]$$

Beweis:

(1)	$(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$	{Annahme des indirekten Beweises}
(2)	$p \rightarrow q$	{BK: 1}
(3)	$p \wedge \neg q$	
(4)	p	{BK: 3}
(5)	$\neg q$	
(6)	q	{AR: 2, 4}
	Widerspruch	{5, 6}

Wir zeigen den Abschluss eines indirekten Annahmewebes bzw. eines indirekten üblichen Beweises an, indem wir am Ende „Widerspruch“ schreiben und rechts die Nummern der beiden widersprüchlichen Zeilen angeben.

Beispiel 2-17: Indirekter Beweis

Wir wollen zeigen, dass die Aussage

[(Der Luftdruck ist unter 1 bar, daher ist der Reifen platt) und (Der Luftdruck ist unter 1 bar, und der Reifen ist nicht platt)]

nicht gilt. Dazu ist zu zeigen:

- (1) (Der Luftdruck ist unter 1 bar, daher ist der Reifen platt) und (Der Luftdruck ist unter 1 bar, und der Reifen ist nicht platt)
 - (2) Der Luftdruck ist unter 1 bar, daher ist der Reifen platt.
 - (3) Der Luftdruck ist unter 1 bar, und der Reifen ist nicht platt.
 - (4) Der Luftdruck ist unter 1 bar.
 - (5) Der Reifen ist nicht platt.
 - (6) Der Reifen ist platt.
- Widerspruch (5, 6)



Jeder direkte Annahmewebeweis einer Regel bzw. eines Theorems lässt sich in einen indirekten Annahmewebeweis umwandeln; dazu notieren wir als Annahme des indirekten Beweises nach den Annahmen denjenigen Ausdruck, der mit dem entsprechenden Hintersatz der Conclusio bzw. dem entsprechenden Hintersatz des zu beweisenden Theorems im Widerspruch steht. Genauso können wir jeden üblichen direkten Beweis in einen üblichen indirekten Beweis transformieren, indem wir den mit dem zu beweisenden Theorem im Widerspruch stehenden Ausdruck als die Annahme des indirekten Beweises an den Anfang des Beweises stellen. Daher gilt: Wenn es einen direkten Annahmewebeweis bzw. einen direkten üblichen Beweis für eine Regel oder ein Theorem gibt, dann gibt es auch einen indirekten Annahmewebeweis bzw. einen indirekten üblichen Beweis. Daher ist die Bildungsregel des direkten Beweises in bezug auf die Bildungsregel des indirekten Annahmewebeweises bzw. indirekten üblichen Beweises nachgeordnet. Es reicht aus, als primäre Regel der Beweisbildung die Bildungsregel des indirekten Annahmewebeweises und des indirekten üblichen Beweises anzunehmen.

- **Annahmeweise der sekundären Gesetze und Regeln**

– *Bedingter Syllogismus (Syl)*¹⁶

Die Regel *Syl* stellt die Gültigkeit des folgenden Schemas fest:

$$p \rightarrow q$$

$$\frac{q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$$

$$p \rightarrow r$$

Den Beweis dieses Schemas haben wir als Beispiel für einen direkten Annahmeweise verwendet (siehe Beispiel 2-13).

Beispiel 2-18: Bedingter Syllogismus

- a) (1) Wenn jetzt die Frühschicht läuft, dann ist die Spätschicht die nächste Schicht.
(2) Wenn die nächste Schicht die Spätschicht ist, dann ist die darauf folgende die Nachtschicht.

(3) Wenn jetzt die Frühschicht läuft, dann ist die übernächste die Nachtschicht.
- b) (1) Wenn die S.-Werke viele Aufträge haben, dann sind die Montagebänder ausgelastet.
(2) Wenn die Montagebänder ausgelastet sind, verdienen die Werker gut.

(3) Wenn die S.-Werke viele Aufträge haben, verdienen die Werker gut.
- c) (1) Wenn der Reifendruck hoch ist, rollt ein Fahrrad gut.
(2) Wenn ein Fahrrad gut rollt, ist der Reifen hart.

(3) Wenn der Reifendruck hoch ist, ist der Reifen hart.
- d) (1) Die S.-Werke liegen in Pasewalk.
(2) Pasewalk liegt in Mecklenburg-Vorpommern.

(3) Die S.-Werke liegen in Mecklenburg-Vorpommern.
- e) Wenn wir den Film gesehen haben, dann kennen wir den Mörder. Wenn wir den Mörder kennen, dann wird uns das Buch langweilen. Folglich gilt: Wenn wir den Film gesehen haben, dann wird uns das Buch langweilen.
- f) Wenn der Determinismus zutrifft, dann gibt es keinen freien Willen. Wenn es keinen freien Willen gibt, dann kann man für begangenes Unrecht nicht verantwortlich gemacht werden. Folglich gilt: Wenn der Determinismus zutrifft, dann kann man für begangenes Unrecht nicht verantwortlich gemacht werden.
- g) „Wenn wir im Sommer Rad fahren, fahren wir auch bei Hitze. Falls wir bei Hitze Rad fahren, gibt es immer wieder Hitzschläge. Wir fahren im Sommer Rad. Folglich gibt es immer wieder Hitzschläge.“ In diesem Schluss verwenden wir sowohl den Kettenschluss (*Syl*) als auch den *Modus ponens* (*AR*). Der Syllogismus liefert als Zwischenergebnis die Aussage: „Wenn wir im Sommer Rad fahren, dann gibt es immer wieder Hitzschläge“. Zusammen mit der Prämisse „Wir fahren im Sommer Rad“ ergibt sich die *Conclusio*: „Also gibt es immer wieder Hitzschläge“.



¹⁶ Auch hypothetischer Syllogismus oder Kettenschluss (siehe bspw. [ZOGL97], [BORK76])

– *Modus tollens (Tol)*

Die Regel *Tol* stellt fest: Aus einer Implikation und dem mit ihrem Hintersatz im Widerspruch stehenden Ausdruck folgt ein Ausdruck, der mit ihrem Vordersatz im Widerspruch steht. Es gelten die folgenden Schemata:

$$\frac{p \rightarrow q \quad \neg p \rightarrow q}{\neg p} \quad \frac{p \rightarrow \neg q \quad \neg p \rightarrow \neg q}{p} \quad \frac{p \rightarrow q \quad \neg p \rightarrow \neg q}{\neg p} \quad \frac{p \rightarrow \neg q \quad \neg p \rightarrow \neg q}{p}.$$

Diese Schemata beweisen wir wie folgt:

(1) $p \rightarrow q$	$\neg p \rightarrow q$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg p \rightarrow \neg q$	} {Annahmen}
(2) $\neg q$	$\neg q$	q	q	
(3) p	$\neg p$	p	$\neg p$	{A. d. indir. B.}
(4) q	q	$\neg q$	$\neg q$	{AR: 1, 3}
Widerspruch				Widerspruch
Widerspruch				Widerspruch
Widerspruch				Widerspruch
Widerspruch				{2, 4}

Beispiel 2-19: Modus tollens

- a) (1) Der Luftdruck ist unter 1 bar, daher ist der Reifen platt.
 (2) Der Reifen ist nicht platt.
 (3) Der Luftdruck ist unter 1 bar.
 (4) Der Reifen ist platt
 Widerspruch
- b) (1) (Es gilt nicht: Der Luftdruck ist über 1 bar), daher ist der Reifen platt.
 (2) Der Reifen ist nicht platt.
 (3) Der Luftdruck ist nicht über 1 bar.
 (4) Der Reifen ist platt
 Widerspruch
- c) (1) Der Luftdruck ist unter 1 bar, (daher gilt nicht: Der Reifen ist nicht platt)
 (2) Der Reifen ist nicht platt.
 (3) Der Luftdruck ist unter 1 bar.
 (4) Der Reifen ist platt.
 Widerspruch
- d) (1) (Es gilt nicht: Der Luftdruck ist über 1 bar) (daher gilt nicht: Der Reifen ist nicht platt)
 (2) Der Reifen ist nicht platt.
 (3) Der Luftdruck ist über 1 bar.
 (4) Der Reifen ist platt.
 Widerspruch



Beispiele für das Schließen nach der Regel modus tollens sind entsprechend aufzubauen.

Beispiel 2-20: Modus tollens

- (1) Wenn die S.-Werke nicht in Mecklenburg-Vorpommern liegen, dann liegen die S.-Werke nicht in Pasewalk.

(2) Die S.-Werke liegen in Pasewalk.

(3) Die S.-Werke liegen in Mecklenburg-Vorpommern.

(1) Wenn das Fahrrad Firlefanz von den S.-Werken produziert wurde, dann hat das Fahrrad Firlefanz eine hohe Qualität.

(2) Das Fahrrad Firlefanz hat keine hohe Qualität.

(3) Das Fahrrad Firlefanz wurde nicht von den S.-Werken produziert.



– Transposition

Transposition einer gegebenen *Implikation* nennen wir eine Implikation, deren Vordersatz mit dem Hintersatz und deren Hintersatz mit dem Vordersatz der gegebenen Implikation im Widerspruch steht. Wir erhalten die Transposition einer gegebenen Implikation, wenn wir in dieser Implikation den Vordersatz mit dem Hintersatz vertauschen und beide Ausdrücke negieren.

Die Regel der Transposition (*Transp*) stellt fest: Aus einer Implikation folgt ihre Transposition. Es gelten folgende Schemata:

$$\frac{p \rightarrow q}{\neg q \rightarrow \neg p} \quad \frac{\neg p \rightarrow q}{\neg q \rightarrow p} \quad \frac{p \rightarrow \neg q}{q \rightarrow \neg p} \quad \frac{\neg p \rightarrow \neg q}{q \rightarrow p}.$$

Die Schemata beweisen wir wie folgt:¹⁷

(1)	$p \rightarrow q$	$\neg p \rightarrow q$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg p \rightarrow \neg q$	} {Annahmen}
(2)	$\neg q$	$\neg q$	q	q	
(3)	p	$\neg p$	p	$\neg p$	{A. d. indir. B.}
(4)	q	q	$\neg q$	$\neg q$	{AR: 1,3}
	Widerspruch	Widerspruch	Widerspruch	Widerspruch	{2, 4}

Auf den Unterschied zwischen den Transpositionsschemata und den Schemata des modus tollens ist hinzuweisen. In Transpositionsschemata ist die Prämisse und die Conclusio eine Implikation. In den Schemata des modus tollens ist von den beiden Prämissen die erste eine Implikation, die zweite aber nicht. Die Conclusio ist keine Implikation.

Beispiel 2-21: Schließen nach der Transpositionsregel

(1) Wenn die S.-Werke viele Fahrräder herstellen müssen, dann sind die Montagebänder ausgelastet.

(2) Die Montagebänder sind nicht ausgelastet, daher müssen die S.-Werke wenig (nicht viele) Fahrräder herstellen.

Wir erinnern an: Wenn es regnet, ist die Straße nass. Es gilt nicht: Wenn die Straße nass ist, dann regnet es. Es gilt nur: Wenn die Straße nicht nass ist, dann regnet es nicht. Ge-

¹⁷ Die Beweise zweier dieser Schemata wurden im vorangegangenen Abschnitt als Beispiele für indirekte Annahmebeweise angeführt.

nauso gilt hier: Wenn die Montagebänder nicht ausgelastet sind, dann müssen die S.-Werke wenig Fahrräder herstellen.



– *Zusammengesetzte Transposition*

Nach dieser Regel sind folgende Schemata gültig:

$$\frac{r \wedge p \rightarrow q}{r \wedge \neg q \rightarrow \neg p} \quad \frac{r \wedge \neg p \rightarrow q}{r \wedge \neg q \rightarrow p} \quad \frac{r \wedge p \rightarrow \neg q}{r \wedge q \rightarrow \neg p} \quad \frac{r \wedge \neg p \rightarrow \neg q}{r \wedge q \rightarrow p}.$$

Die Schemata beweisen wir wie folgt:

(1) $r \wedge p \rightarrow q$	$r \wedge \neg p \rightarrow q$	$r \wedge p \rightarrow \neg q$	$r \wedge \neg p \rightarrow \neg q$	} {Annahmen}
(2) r	r	r	r	
(3) $\neg q$	$\neg q$	q	q	
(4) p	$\neg p$	p	$\neg p$	{A. d. indir. B.}
(5) $r \wedge p$	$r \wedge \neg p$	$r \wedge p$	$r \wedge \neg p$	{EK: 4, 2}
(6) q	q	$\neg q$	$\neg q$	{AR: 1, 5}
Widerspruch	Widerspruch	Widerspruch	Widerspruch	{3, 6}

Wir erhalten aus den Schemata der zusammengesetzten Transposition die ihnen entsprechenden Transpositionsschemata, wenn wir die Variable „ r “ und das Konjunktionszeichen im Vordersatz der Prämisse und der Conclusio streichen.

Beispiel 2-22: Schließen nach der Regel der zusammengesetzten Transposition

(1) Wenn die Auftragsnummer einer Fahrradgabel 4711 und die Auftragsnummer eines Fahrradrahmens 4711 ist, dann werden beide in der Endmontage zu einem Fahrrad 4711 zusammengefügt.

(2) Wenn die Auftragsnummer einer Fahrradgabel 4711 ist und nicht mit dem Fahrradrahmen in der Endmontage zusammengefügt wird, dann ist die Auftragsnummer des Rahmens nicht 4711.

(1) Herrenfahrräder ab einem Verkaufspreis von € 200,00 werden gelötet.

(2) Wenn ein Fahrrad mit einem Verkaufspreis von € 700,00 geschweißt (nicht gelötet) wird, dann ist es kein Herrenrad.



– *Negation der Disjunktion (ND)*¹⁸

Diese Regel stellt fest: Aus der Negation einer Disjunktion folgt die Negation jeder ihrer Glieder, also auch die Konjunktion der Negation ihrer Glieder. Es gelten die folgenden Schemata:

$$\frac{\neg(p \vee q)}{\neg p} \quad \frac{\neg(p \vee q)}{\neg q} \quad \frac{\neg(p \vee q)}{\neg p \wedge \neg q}.$$

¹⁸ siehe Regeln von de Morgan und Gesetz von der doppelten Negation

Die beiden ersten Schemata beweisen wir wie folgt:

- | | | | |
|-----|------------------|------------------|-------------------|
| (1) | $\neg(p \vee q)$ | $\neg(p \vee q)$ | {Annahmen} |
| (2) | p | q | {A. d. indir. B.} |
| (3) | $p \vee q$ | $p \vee q$ | {ED: 2} |
| | Widerspruch | Widerspruch | {1, 3} |

Im Beweis des dritten Schemas verwenden wir die beiden ersten Schemata und die Regel der Einführung der Konjunktion.

- | | | |
|-----|------------------------|------------|
| (1) | $\neg(p \vee q)$ | {Annahme} |
| (2) | $\neg p$ | {Schema 1} |
| (3) | $\neg q$ | {Schema 2} |
| | $\neg p \wedge \neg q$ | {EK: 2, 3} |

Beispiel 2-23: Negation der Disjunktion

Nach dieser Regel folgen aus der Aussage:

- (1) Es ist nicht wahr, dass Laufrad A das Vorderrad von Fahrrad B oder Laufrad A das Hinterrad von Fahrrad B ist.

die Aussagen:

- (2) Laufrad A ist nicht das Vorderrad von B.
(3) Laufrad A ist nicht das Hinterrad von Fahrrad B
und ihre Konjunktion.

Analog folgt:

- (1) Es ist nicht wahr, dass Shimano der bevorzugte Lieferant der S.-Werke ist oder Campagnolo der bevorzugte Lieferant der S.-Werke ist.

-
- (2) Shimano ist nicht der bevorzugte Lieferant der S.-Werke
(3) Campagnolo ist nicht der bevorzugte Lieferant der S.-Werke
(4) (2) $\wedge$ (3)

■

Wenn an irgendeiner Stelle unseres Aussagensystems „Speiche 17 wird in Fahrrad 37 verwendet“ zutrifft, dann trifft dies im gesamten Aussagensystem zu. Und es ist unerheblich, an welcher Stelle wir diese Aussage zuerst treffen.

– *de Morgan: Negation der Konjunktion (NK)*

Wir nutzen die Negation der Disjunktion (ND), um die Negation der Konjunktion zu beweisen. Hier reicht eine Richtung, da alle Umformungen Äquivalenzformungen sind. Exemplarisch sind jedoch beide Richtungen dargestellt.

Zu zeigen ist: $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

(1)	$\neg(p \wedge q)$	{Annahme}	(1)	$\neg p \vee \neg q$	{Annahme}
(2)	$\neg(\neg(\neg p \vee \neg q))$	{ND: 1}	(2)	$\neg(\neg(\neg p \vee \neg q))$	{1}
(3)	$\neg p \vee \neg q$	{2}	(3)	$\neg(p \wedge q)$	{ND: 2}

Beispiel 2-24: Negation der Konjunktion

Nach dieser Regel folgt aus jeder der folgenden Aussagen:

- (1) Es ist nicht wahr, dass Laufrad A das Vorderrad von Fahrrad B ist und Laufrad A das Hinterrad von Fahrrad B ist
 - (2) Laufrad A ist nicht das Vorderrad von Fahrrad B oder Laufrad A ist nicht das Hinterrad von Fahrrad B
- die jeweils andere.



– Reflexivität der Implikation

Das Gesetz $p \rightarrow p$ beweisen wir wie folgt:

(1)	p	{Annahme}
(2)	$\neg p$	{A. d. indir. B.}
	Widerspruch	{1, 2}

Beispiel 2-25: Reflexivität der Implikation

Aussage: Wenn Speiche 17 wird in Fahrrad 37 verwendet, dann wird Speiche 17 in Fahrrad 37 verwendet.

Die Aussage „Speiche 17 wird nicht in Fahrrad 37 verwendet“ führt zu einem Widerspruch.



– Reflexivität der Äquivalenz

Das Gesetz $p \leftrightarrow p$ beweisen wir anhand des Gesetzes der Reflexivität der Implikation und der Regel der Einführung der Äquivalenz wie folgt (*Identitätsgesetz*):

(1)	$p \leftrightarrow p$	{Annahme}
(2)	$p \rightarrow p$	{BÄ: 1}
(3)	$p \rightarrow p$	{EÄ: 2, 3}
	$p \leftrightarrow p$	

Beispiel 2-26: Reflexivität der Äquivalenz

- (1) Dann und nur dann, wenn wir ein leichtes Fahrrad besitzen, besitzen wir ein leichtes Fahrrad.
- (2) (Wenn wir ein leichtes Fahrrad besitzen) $\rightarrow$ (Wir besitzen ein leichtes Fahrrad)
- (3) (Wir besitzen ein leichtes Fahrrad) $\rightarrow$ (Wenn wir ein leichtes Fahrrad besitzen)

(4) (Wenn wir ein leichtes Fahrrad besitzen) $\leftrightarrow$ (Wir besitzen ein leichtes Fahrrad)

(5) Es gilt nicht: (Wenn wir ein leichtes Fahrrad besitzen) $\rightarrow$ (Wir besitzen ein leichtes Fahrrad)
Widerspruch



Das Gesetz von der Reflexivität der Implikation und das Gesetz von der Reflexivität der Äquivalenz verwenden wir in einigen Beweisen als bereits bewiesene Behauptungen (Theoreme).

– *Multiplikation der Implikation*

Nach dieser Regel ist das folgende Schema gültig:

$$\frac{p \rightarrow q \quad r \rightarrow s}{p \wedge r \rightarrow q \wedge s}.$$

Das Schema beweisen wir wie folgt:

(1)	$p \rightarrow q$	}	{Annahmen}
(2)	$r \rightarrow s$		
(3)	p		
(4)	r		
(5)	q		{AR: 1, 3}
(6)	s		{AR: 2, 4}
	$q \wedge s$		{EK: 5, 6}

Beispiel 2-27: Multiplikation der Implikation

(1) Wenn wir ein leichtes Rad wollen, dann brauchen wir einen leichten Rahmen.

(2) Wenn wir im Gelände fahren wollen, dann brauchen wir breite Reifen.

(3) Wenn wir ein leichtes Rad und im Gelände fahren wollen, so brauchen wir einen leichten Rahmen und breite Reifen.



– *Neuer Faktor*

Nach dieser Regel sind folgende Schemata gültig:

$$\frac{p \rightarrow q}{p \wedge r \rightarrow q \wedge r} \quad \frac{p \rightarrow q}{r \wedge p \rightarrow r \wedge q}.$$

Die Schemata beweisen wir wie folgt:

(1)	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q$	{Annahmen}
(2)	$r \rightarrow r$	$r \rightarrow r$	{Reflexivität der Implikation}
	$p \wedge r \rightarrow q \wedge r$	$r \wedge p \rightarrow r \wedge q$	{Multiplikation der Implikation}

Beispiel 2-28: Einführen eines neuen Faktors

- (1) Wenn der Fahrradschlauch ein Loch hat, dann müssen wir dieses flicken.
-
- (2) Wenn der Fahrradschlauch ein Loch hat und wir einen neuen Mantel verwenden müssen, so müssen wir das Loch im Schlauch flicken und wir müssen einen neuen Mantel verwenden.

– *Addition der Implikationen*

Nach dieser Regel ist das folgende Schema gültig:

$$\frac{p \rightarrow q \quad r \rightarrow s}{p \vee r \rightarrow q \vee s}.$$

Das Schema beweisen wir wie folgt:

(1)	$p \rightarrow q$	}	{Annahmen}
(2)	$r \rightarrow s$		
(3)	$p \vee r$		
(4)	$\neg(q \vee s)$	}	{A. d. indir. B.}
(5)	$\neg q$		{Negation der Disjunktion: 4}
(6)	$\neg s$		
(7)	$\neg p$		{Tol.: 1, 5}
(8)	$\neg r$		{Tol.: 2, 6}
(9)	r		{BD: 3, 7}
	Widerspruch		{8, 9}

Beispiel 2-29: Schließen nach der Additionsregel für Implikationen

- (1) Wenn der Fahrradschlauch ein Loch hat, dann müssen wir dieses flicken.
- (2) Wenn der Fahrradmantel ein Loch hat, dann müssen wir einen neuen Mantel verwenden.
-
- (3) Wenn der Fahrradschlauch ein Loch hat oder der Fahrradmantel ein Loch hat, dann müssen wir das Loch im Schlauch flicken oder wir müssen einen neuen Mantel verwenden.

– *Zusammengesetztes konstruktives Dilemma*

Aus zwei Implikationen und der Disjunktion ihrer Vordersätze folgt die Disjunktion ihrer Hintersätze. Demnach ist das folgende Schema gültig:

$$\frac{p \rightarrow q \quad r \rightarrow s \quad p \vee r}{q \vee s}.$$

Das Schema beweisen wir wie folgt:

(1)	$p \rightarrow q$	}	{Annahmen}
(2)	$r \rightarrow s$		
(3)	$p \vee r$		
(4)	$p \vee r \rightarrow q \vee s$		{Addition der Implikation: 1, 2}
	$q \vee s$		{AR: 4, 3}

Beispiel 2-30: Schließen nach dem zusammengesetzten konstruktiven Dilemma

- (1) Wenn wir mit dem Pkw fahren, sind wir um 07.00 Uhr in Pasewalk.
 (2) Wenn wir mit dem Bus fahren, sind wir um 10.00 Uhr in Pasewalk.
 (3) Wir sind um 07.00 Uhr in Pasewalk oder wir sind um 10.00 Uhr in Pasewalk.

■

– *Neuer Summand*

Nach dieser Regel sind die folgenden Schemata gültig:

$$\frac{p \rightarrow q}{p \vee r \rightarrow q \vee r} \quad \frac{p \rightarrow q}{r \vee p \rightarrow r \vee q}.$$

Zum Beweis dieser Schemata wenden wir das Gesetz der Reflexivität der Implikation und die Additionsregel der Implikationen an. Diese Schemata beweisen wir dann wie folgt:

(1)	$p \rightarrow q$	{Annahme}
(2)	$r \rightarrow r$	{Reflexivität der Implikation: 2}
	$p \vee r \rightarrow q \vee r$	{Addition der Implikation: 1, 3}

Beispiel 2-31: Schließen nach der Regel des neuen Summanden

- (1) Wenn dies die Gabel ist, die in das Fahrrad Nirwana eingebaut wird, dann hat das Fahrrad Nirwana eine Gabel mit Dämpfung.
 (2) Wenn dies die Gabel ist, die in das Fahrrad Nirwana eingebaut wird, oder diese Gabel ist Ersatzteil von Fahrrad Nirwana, dann hat das Fahrrad Nirwana eine Gabel mit Dämpfung oder das Fahrrad Nirwana hat ein Ersatzteil.

■

– *Abtrennung der Äquivalenz*

Aus einer Äquivalenz und einem ihrer Glieder folgt das zweite Glied. Demnach sind folgende Schemata gültig:

$$\frac{p \leftrightarrow q}{\frac{p}{q}} \quad \frac{p \leftrightarrow q}{\frac{q}{p}}.$$

Die Schemata beweisen wir wie folgt:

(1)	$p \leftrightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	}	{Annahmen}
(2)	p	q		
(3)	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$		{BÄ: 1}
	q	p		{AR: 3, 2}

Beispiel 2-32: Abtrennungsregel für die Äquivalenz

- (1) Das Fahrrad wurde dann und nur dann von den S.-Werken produziert, wenn es eine S.-Identnummer hat.
 - (2) Das Fahrrad wurde von den S.-Werken produziert.
-
- (3) Das Fahrrad hat eine S.-Identnummer.

- (1) Das Fahrrad wurde dann und nur dann von den S.-Werken produziert, wenn es eine S.-Identnummer hat.
 - (2) Das Fahrrad hat eine S.-Identnummer.
-
- (3) Das Fahrrad wurde von den S.-Werken produziert.



– *Kommutativität der Äquivalenz*

Aus einer gegebenen Äquivalenz folgt eine Äquivalenz, die durch die Umstellung ihrer Glieder entsteht. Demnach ist das folgende Schema gültig:

$$\frac{p \leftrightarrow q}{q \leftrightarrow p}$$

Das Schema beweisen wir wie folgt:

(1)	$p \leftrightarrow q$	{Annahme}
(2)	$p \rightarrow q$	{BÄ: 1}
(3)	$q \rightarrow p$	
	$q \leftrightarrow p$	{EÄ: 3, 2}

Beispiel 2-33: Kommutativität der Äquivalenz

- (1) Das Fahrrad wurde dann und nur dann von den S.-Werken produziert, wenn es eine S.-Identnummer hat.
-
- (2) Dann und nur dann, wenn das Fahrrad eine S.-Identnummer hat, wurde das Fahrrad von den S.-Werken produziert.



– *Transitivität der Äquivalenz*

Nach dieser Regel ist das folgende Schema gültig:

$$p \leftrightarrow q$$

$$\underline{q \leftrightarrow r}$$

$$p \leftrightarrow r$$

Das Schema beweisen wir wie folgt:

- | | | | |
|-----|-----------------------|--------------|------------|
| (1) | $p \leftrightarrow q$ | } | {Annahmen} |
| (2) | $q \leftrightarrow r$ | | |
| (3) | $p \rightarrow q$ | } | {BÄ: 1} |
| (4) | $q \rightarrow p$ | | |
| (5) | $q \rightarrow r$ | } | {BÄ: 2} |
| (6) | $r \rightarrow q$ | | |
| (7) | $p \rightarrow r$ | {Syl.: 3, 5} | |
| (8) | $r \rightarrow p$ | {Syl.: 6, 4} | |
| | $p \leftrightarrow r$ | {EÄ: 7, 8} | |

Das Schema der Regel der Transitivität der Äquivalenz und das Schema der Regel des bedingten Syllogismus für die Implikation sind analoge Schemata.

Beispiel 2-34: Transitivität der Äquivalenz

- (1) Das Fahrrad wurde dann und nur dann von den S.-Werken gebaut, wenn es eine S.-Identnummer hat.
 - (2) Das Fahrrad hat dann und nur dann eine S.-Identnummer, wenn es die S.-Werke-Endkontrolle durchlaufen hat.
-
- (3) Das Fahrrad wurde dann und nur dann von den S.-Werken gebaut, wenn es die S.-Werke-Endkontrolle durchlaufen hat.



– Negation der Äquivalenzglieder

Aus einer aus zwei Ausdrücken gebildeten Äquivalenz folgt eine Äquivalenz, die aus den Negationen dieser Ausdrücke gebildet ist. Demnach ist das folgende Schema gültig:

$$\underline{p \leftrightarrow q}$$

$$\neg p \leftrightarrow \neg q$$

Das Schema beweisen wir wie folgt:

- | | | |
|-----|---------------------------------|--------------------|
| (1) | $p \leftrightarrow q$ | {Annahme} |
| (2) | $p \rightarrow q$ | } |
| (3) | $q \rightarrow p$ | |
| (4) | $\neg p \rightarrow \neg q$ | {Transposition: 3} |
| (5) | $\neg q \rightarrow \neg p$ | {Transposition: 2} |
| | $\neg p \leftrightarrow \neg q$ | {EÄ: 4, 5} |

Beispiel 2-35: Negation der Äquivalenzglieder

- (1) Das Fahrrad wurde dann und nur dann von den S.-Werken produziert, wenn es eine S.-Identnummer hat.
-
- (2) Das Fahrrad wurde dann und nur dann nicht von den S.-Werken produziert, wenn es keine S.-Identnummer hat.



– *Multiplikation der Äquivalenzen*

Nach dieser Regel ist das folgende Schema gültig:

$$\frac{p \leftrightarrow q \quad r \leftrightarrow s}{p \wedge r \leftrightarrow q \wedge s}$$

Das Schema beweisen wir wie folgt:

- | | | |
|---|--|--|
| (1) $p \leftrightarrow q$ | | |
| (2) $r \leftrightarrow s$ | | {Annahmen} |
| (3) $p \rightarrow q$ | | |
| (4) $q \rightarrow p$ | | {BÄ: 1} |
| (5) $r \rightarrow s$ | | |
| (6) $s \rightarrow r$ | | {BÄ: 2} |
| (7) $p \wedge r \rightarrow q \wedge s$ | | {Multiplikation der Implikation: 3, 5} |
| (8) $q \wedge s \rightarrow p \wedge r$ | | {Multiplikation der Implikation: 4, 6} |
| $p \wedge r \leftrightarrow q \wedge s$ | | {EÄ: 7, 8} |

Beispiel 2-36: Multiplikation der Äquivalenzen

- (1) Wir fahren von Paderborn nach Pasewalk mit dem Fahrrad dann und nur dann, wenn die Sonne scheint.
- (2) Wir fliegen von Berlin nach New York mit dem Flugzeug dann und nur dann, wenn es keinen Hurrikan gibt.
-
- (3) Wir fahren von Paderborn nach Pasewalk mit dem Fahrrad und fliegen von Berlin nach New York mit dem Flugzeug dann und nur dann, wenn die Sonne scheint und es keinen Hurrikan gibt.



– *Neuer Faktor für die Äquivalenz*

Diese Regel stellt anhand des Gesetzes von der Reflexivität der Äquivalenz und der Regel der Multiplikation der Äquivalenzen die Gültigkeit folgender Schemata fest:

$$\frac{p \leftrightarrow q}{p \wedge r \leftrightarrow q \wedge r} \quad \frac{p \leftrightarrow q}{r \wedge p \leftrightarrow r \wedge q}.$$

Die Schemata beweisen wir wie folgt:

- | | | |
|-----|---|--|
| (1) | $p \leftrightarrow q$ | {Annahme} |
| (2) | $r \leftrightarrow r$ | {Reflexität der Äquivalenz} |
| | $p \wedge r \leftrightarrow q \wedge r$ | {Multiplikation der Äquivalenz:
1, 2} |

Beispiel 2-37: Neuer Faktor für die Äquivalenz

- (1) Wir fahren von Paderborn nach Pasewalk mit dem Fahrrad dann und nur dann, wenn die Sonne scheint.
-
- (2) Wir fahren von Paderborn nach Pasewalk und das Gepäck ist leicht dann und nur dann, wenn die Sonne scheint und das Gepäck leicht ist.



– Addition der Äquivalenzen

Diese Regel stellt anhand der Regel der Beseitigung der Äquivalenz, der Additionsregel der Implikationen und der Regel der Einführung der Äquivalenz die Gültigkeit des folgenden Schemas fest:

$$\frac{\begin{array}{c} p \leftrightarrow q \\ r \leftrightarrow s \end{array}}{p \vee r \leftrightarrow q \vee s}.$$

Das Schema beweisen wir wie folgt:

- | | | | |
|-----|-------------------------------------|------------------------------------|------------|
| (1) | $p \leftrightarrow q$ | } | {Annahmen} |
| (2) | $r \leftrightarrow s$ | | |
| (3) | $p \rightarrow q$ | } | {BÄ: 1} |
| (4) | $q \rightarrow p$ | | |
| (5) | $r \rightarrow s$ | } | {BÄ: 2} |
| (6) | $s \rightarrow r$ | | |
| (7) | $p \vee r \rightarrow q \vee s$ | {Addition der Implikationen: 3, 5} | |
| (8) | $q \vee s \rightarrow p \vee r$ | {Addition der Implikationen: 4, 6} | |
| | $p \vee r \leftrightarrow q \vee s$ | {EÄ: 7, 8} | |

Beispiel 2-38: Addition der Äquivalenz

- (1) Wir fahren von Paderborn nach Pasewalk mit dem Fahrrad dann und nur dann, wenn die Sonne scheint.
- (2) Wir fahren von Paderborn nach Pasewalk mit dem Pkw dann und nur dann, wenn es regnet.
-
- (3) Wir fahren von Paderborn nach Pasewalk mit dem Fahrrad oder wir fahren von Paderborn nach Pasewalk mit dem Pkw dann und nur dann, wenn die Sonne scheint oder wenn es regnet.



– Neuer Summand für die Äquivalenz

Diese Regel stellt anhand des Gesetzes von der Reflexität der Äquivalenz und der Additionsregel der Äquivalenzen die Gültigkeit folgender Schemata fest:

$$\frac{p \leftrightarrow q}{p \vee r \leftrightarrow q \vee r} \quad \frac{p \leftrightarrow q}{r \vee p \leftrightarrow r \vee q}.$$

Die Schemata beweisen wir wie folgt:

- | | | |
|-----|-------------------------------------|---------------------------------|
| (1) | $p \leftrightarrow q$ | {Annahme} |
| (2) | $r \leftrightarrow r$ | {Reflexivität der Äquivalenz} |
| | $p \vee r \leftrightarrow q \vee r$ | {Addition der Äquivalenz: 1, 2} |

Beispiel 2-39: Neuer Summand für die Äquivalenz

(1) Wir fahren von Paderborn nach Pasewalk mit dem Fahrrad dann und nur dann, wenn die Sonne scheint.

(2) Wir fahren von Paderborn nach Pasewalk oder wir bleiben zu Hause dann und nur dann, wenn die Sonne scheint oder wir bleiben zu Hause.

■

Nach der Negationsregel der Äquivalenzglieder und der Multiplikations- und Additionsregel der Äquivalenzen folgen aus Äquivalenzen, die aus bestimmten Ausdrücken gebildet sind, Äquivalenzen, die aus der Negation, der Konjunktion und der Disjunktion dieser Ausdrücke gebildet sind. Wir zeigen:

- | | | | |
|-----|---|---------------------------------------|------------|
| (1) | $p \leftrightarrow q$ | } | {Annahmen} |
| (2) | $r \leftrightarrow s$ | | |
| (3) | $\neg p \leftrightarrow \neg q$ | {Negation der Äquivalenzglieder} | |
| (4) | $\neg p \vee r \leftrightarrow \neg q \vee s$ | {Addition der Äquivalenz: 1, 3} | |
| (5) | $\neg p \wedge r \leftrightarrow \neg q \wedge s$ | {Multiplikation der Äquivalenz: 1, 3} | |

Regeln, die sich für die Implikation und die Äquivalenz beweisen lassen, stellen analog die Gültigkeit der Schemata mit den Prämissen: $p \leftrightarrow q$, $r \leftrightarrow s$ und der Conclusio, die einer der Ausdrücke: $p \rightarrow r \leftrightarrow q \rightarrow s$, $(p \leftrightarrow r) \leftrightarrow (q \leftrightarrow s)$ ist, fest. Den Beweis für die erste Aussage führen wir wie folgt:

- | | | | |
|-----|------------------------|-------------------|------------|
| (1) | $p \leftrightarrow q$ | } | {Annahmen} |
| (2) | $r \leftrightarrow s$ | | |
| (3) | $p \rightarrow r$ | | |
| (4) | $\neg q \rightarrow s$ | {A. d. indir. B.} | |

Wir verwenden die Äquivalenzen $p \leftrightarrow q$, $r \leftrightarrow s$ und setzen für p q , für r s ein und erhalten

- | | | |
|-----|-------------------|-------|
| (5) | $q \rightarrow s$ | {4,5} |
| | Widerspruch | |

Beispiel 2-40: Addition der Äquivalenzen

- (1) Wenn es regnet, dann und nur dann fliegen wir nach Berlin.
 - (2) Wenn die Sonne scheint, dann und nur dann radeln wir nach Pasewalk.
-
- (3) (Wenn es regnet, dann scheint die Sonne), dann und nur dann (wenn wir nach Berlin fliegen, dann radeln wir nach Pasewalk).¹⁹

– *Extensionalität der Äquivalenz*

Als Resümee folgen aus der Äquivalenz der Glieder zusammengesetzter Ausdrücke, die mit Hilfe der untersuchten Funktoren des Aussagenkalküls gebildet sind, die Äquivalenzen der entsprechenden zusammengesetzten Ausdrücke. Anhand dieser Regeln sowie der Abtrennungsregel für die Äquivalenz können wir die Ersetzungsregel bezüglich der Glieder einer Äquivalenz beweisen. Dazu führen wir folgende Bezeichnung ein: Der Ausdruck $W(F//G)$ ist ein Ausdruck, der aus dem Ausdruck W dadurch entsteht, dass in W der Ausdruck F durch den Ausdruck G ersetzt wird. Wir geben dazu zwei Beispiele: Wenn $W = „\neg p“$, $F = „p“$, $G = „q“$, dann $W(F//G) = „\neg q“$. Wenn $W = „p \rightarrow r“$, $F = „p“$, $G = „q“$, dann $W(F//G) = „q \rightarrow r“$. Kommt F in W an mehreren Stellen vor, dann bezeichnet das Symbol $W(F//G)$ mehrere Ausdrücke: Wenn $W = „p \wedge r \rightarrow p“$, $F = „p“$, $G = „q“$, dann bezeichnet das Symbol $W(F//G)$ jeden der Ausdrücke: $p \wedge r \rightarrow q$, $q \wedge r \rightarrow p$, $q \wedge r \rightarrow q$. Kommt der Ausdruck F nicht im Ausdruck W vor, dann gilt: $W(F//G) = W$.

Die Ersetzungsregel bezüglich der Glieder einer Äquivalenz, also die Regel der *Extensionalität der Äquivalenz*, stellt fest, dass aus der Äquivalenz $F \leftrightarrow G$ und dem Ausdruck W die Ausdrücke $W(F//G)$ und $W(G//F)$ folgen. Wenn der Ausdruck $F \leftrightarrow G$ und der Ausdruck W Theoreme sind, dann sind auch die Ausdrücke $W(F//G)$ und $W(G//F)$ Theoreme. Die Regel der Extensionalität der Äquivalenz erlaubt es daher, in einer beliebigen Aussage ein Glied einer ein Theorem darstellenden Äquivalenz durch das andere Glied dieser Äquivalenz zu ersetzen.²⁰ Wir machen von der Negationsregel der Äquivalenzglieder, der Multiplikations- und Additionsregel der Äquivalenzen usw., Gebrauch: Gegeben sei $F = „p“$, $G = „q“$, $W = „\neg p \wedge r \rightarrow s \leftrightarrow t“$. Wenn wir auf dieses Beispiel die Regel der Extensionalität der Äquivalenz anwenden, stellen wir fest, dass aus den Ausdrücken:

- (1) $p \leftrightarrow q$
- (2) $\neg p \wedge r \rightarrow s \leftrightarrow t$

der Ausdruck: $\neg q \wedge r \rightarrow s \leftrightarrow t$ folgt. Aufgrund der Negationsregel der Äquivalenzglieder

¹⁹ Natürlich ist dieses Beispiel Unsinn. Aber die Aussage wird deutlich: Der Vordersatz und der Hintersatz sind äquivalent.

²⁰ Die Äquivalenz erfüllt also im Aussagenkalkül eine analoge Rolle wie die Identität in der Mathematik, wo man in einer beliebigen Aussage ein Glied einer Gleichung, die ein Theorem ist, durch das andere Glied dieser Gleichung ersetzen kann.

erhalten wir aus (1) :

$$(3) \quad \neg p \leftrightarrow \neg q .$$

Mit der Multiplikation der Äquivalenzen und dem Gesetz der Reflexivität der Äquivalenz erhalten wir aus (3):

$$(4) \quad \neg p \wedge r \leftrightarrow \neg q \wedge r .$$

Anhand einer Regel, die aussagt, dass aus der Äquivalenz der Glieder einer Implikation die Äquivalenz der gesamten Implikation folgt (siehe [BORK76]), erhalten wir mit (4):

$$(5) \quad \neg p \wedge r \rightarrow s \leftrightarrow \neg q \wedge r \rightarrow s .$$

Anhand einer analogen Regel für die Äquivalenz erhalten wir:

$$(6) \quad (\neg p \wedge r \rightarrow s \leftrightarrow t) \leftrightarrow (\neg q \wedge r \rightarrow s \leftrightarrow t)$$

Mit (2) und (6) ergibt sich anhand der Abtrennungsregel der Äquivalenz:

$$(7) \quad \neg q \wedge r \rightarrow s \leftrightarrow t .$$

Analog können wir aus (1) und (7) den Ausdruck (2) ableiten. Auf ähnliche Weise lässt sich jeder einzelne Fall der Anwendung der Extensionalitätsregel der Äquivalenz beweisen. Die Ausdrücke F und G sind dann und nur dann logisch äquivalent, wenn aus F logisch G folgt und aus G logisch F folgt.²¹

So, wie wir die logische Folgerung definiert haben, sind die Ausdrücke F und G dann und nur dann äquivalent, wenn die Äquivalenz $F \leftrightarrow G$ durch Einsetzung aus irgendeinem logischen Gesetz hervorgeht. Für die Äquivalenz von F und G genügt es demnach nicht, wenn die Äquivalenz $F \leftrightarrow G$ wahr ist, sondern diese Äquivalenz muss ein logisches Gesetz oder eine Einsetzung in ein logisches Gesetz sein.

Aus der Extensionalitätsregel der Äquivalenz folgt: Wenn die Ausdrücke F und G äquivalent sind, dann sind auch die Ausdrücke W , $W(F//G)$ und $W(G//F)$ äquivalent. Sind nämlich die Ausdrücke F und G äquivalent, ist also die Äquivalenz $F \leftrightarrow G$ ein logisches Gesetz (bzw. eine Einsetzung in ein logisches Gesetz), dann erhalten wir aufgrund des Gesetzes: $p \leftrightarrow p$, dass $W \leftrightarrow W$. Mit der Extensionalitätsregel der Äquivalenz erhalten wir dann: $W \leftrightarrow W(F//G)$ und $W \leftrightarrow W(G//F)$. Die Ausdrücke W , $W(F//G)$ und $W(G//F)$ sind also äquivalent.

Beispiel 2-41:

Rahmen Nirwana dann und nur dann, wenn Rahmen Hades

Sattel Futur dann und nur dann, wenn Sattel Sputnik

$\neg(\text{Rahmen Nirwana})$ dann und nur dann, wenn $\neg(\text{Rahmen Hades})$

$[\neg(\text{Rahmen Nirwana}) \vee \text{Sattel Futur}]$ dann und nur dann, wenn $[\neg(\text{Rahmen Hades}) \vee \text{Sattel Sputnik}]$



Die obige Folgerung zeigt die wichtige Rolle der logischen Gesetze in Äquivalenz-Form. Einem jeden solchen Gesetz entsprechen zwei logische Regeln mit der Feststellung, dass

²¹ Anstatt zu sagen, dass die Ausdrücke F und G logisch äquivalent sind, werden wir sagen, die Ausdrücke F und G sind äquivalent.

aus einem Glied einer solchen Äquivalenz ihr zweites Glied folgt. Außerdem ist ein beliebiger Ausdruck einem Ausdruck äquivalent, der aus ihm durch Ersetzen eines Gliedes einer solchen Äquivalenz durch ihr zweites Glied entsteht. Falls wir also ein logisches Theorem in Äquivalenzform bewiesen haben, dann können wir in einem beliebigen Ausdruck eine Seite dieser Äquivalenz durch die zweite ersetzen, und erhalten aus dem betreffenden Ausdruck einen mit ihm äquivalenten Ausdruck.

Wir betrachten jetzt Gesetze des Aussagenkalküls mit der Form einer Äquivalenz. Die Beweise solcher Gesetze bestehen aus zwei Teilen, von denen der erste Teil der Beweis der Implikation ist, die der gegebenen Äquivalenz entspricht. Der zweite Teil ist der Beweis der dieser Äquivalenz entsprechenden umgekehrten Implikation.

– *Kommutativgesetz der Konjunktion und der Disjunktion*

Es gilt für die Konjunktion:

$$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$$

Die beiden Implikationen, die dieser Äquivalenz entsprechen, beweisen wir mittels der Beseitigungs- und der Einführungsregel der Konjunktion.

(1)	$p \wedge q$	(1)	$q \wedge p$	{Annahme}
(2)	p	(2)	q	}
(3)	q	(3)	p	
	$q \wedge p$		$p \wedge q$	{BÄ: 1}
				{EK: 3, 2}

Es folgt für die Disjunktion:

$$p \vee q \leftrightarrow q \vee p$$

Den Beweis für die erste Implikation führen wir wie folgt:

(1)	$p \vee q$	{Annahme}
(2)	$\neg(q \vee p)$	{A. d. indir. B.}
(3)	$\neg q$	}
(4)	$\neg p$	
(5)	q	{ND: 2}
	Widerspruch	{BD: 1, 4}
		{3, 5}

Der Beweis der umgekehrten Implikation ist analog.

Beispiel 2-42: Kommutativität der Konjunktion/der Disjunktion

Wir fahren nach Pasewalk mit dem Fahrrad und das Gepäck ist leicht. $\leftrightarrow$ Das Gepäck ist leicht und wir fahren nach Pasewalk mit dem Fahrrad.

(Wir fahren mit dem Auto nach Pasewalk oder wir bleiben zu Hause) $\leftrightarrow$ (Wir bleiben zu Hause oder wir fahren mit dem Auto nach Pasewalk)



Basierend auf den Kommutativgesetzen der Konjunktion und der Disjunktion können wir in jedem Ausdruck die Glieder einer Konjunktion/einer Disjunktion, die ein Teil dieses

Ausdruckes ist, vertauschen, und erhalten aus dem gegebenen einen äquivalenten Ausdruck.

– Assoziativgesetz der Konjunktion und der Disjunktion

Wir betrachten die Konjunktion:

$$(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$$

Den Beweis führen wir anhand der Beseitigungs- und der Einführungsregel der Konjunktion und der Einführungsregel der Äquivalenz wie folgt:

- | | | |
|-----|-------------------------|------------|
| (1) | $(p \wedge q) \wedge r$ | {Annahme} |
| (2) | $p \wedge q$ | {BK: 1} |
| (3) | r | {BK: 1} |
| (4) | p | {BK: 2} |
| (5) | q | {BK: 2} |
| (6) | $(q \wedge r)$ | {EK: 3, 5} |
| (7) | $p \wedge (q \wedge r)$ | {EK: 4, 6} |

Es folgt für die Disjunktion:

$$(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$$

Den Beweis für die erste Implikation führen wir wie folgt:

- | | | |
|-----|---------------------------|-------------------|
| (1) | $(p \vee q) \vee r$ | {Annahmen} |
| (2) | $\neg[p \vee (q \vee r)]$ | {A. d. indir. B.} |
| (3) | $\neg p$ | {} |
| (4) | $\neg(q \vee r)$ | |
| (5) | $\neg q$ | {} |
| (6) | $\neg r$ | |
| (7) | $p \vee q$ | {BD: 1, 6} |
| (8) | q | {BD: 7, 3} |
| | Widerspruch | {5, 8} |

Der Beweis der umgekehrten Implikation ist analog.

In mehrgliedrigen Konjunktionen und Disjunktionen können wir aufgrund der Assoziativgesetze der Konjunktion und der Disjunktion die Klammern weglassen; die eine wie die andere Verteilung dieser Klammern ergibt äquivalente Ausdrücke.

In einer mehrgliedrigen Konjunktion bzw. Disjunktion können wir aufgrund der Kommutativ- und Assoziativgesetze ihre Glieder beliebig umstellen und erhalten einen äquivalenten Ausdruck.

Beispiel 2-43: Assoziativgesetz der Konjunktion/der Disjunktion

(Wir fahren nach Pasewalk und wir fahren mit dem Auto nach Berlin) und wir trinken Kaffee. $\leftrightarrow$ Wir fahren nach Pasewalk und (wir fahren mit dem Auto nach Berlin und wir trinken Kaffee).

(Wir fahren nach Pasewalk oder wir fahren mit dem Auto nach Berlin) oder wir trinken Kaffee. $\leftrightarrow$ Wir fahren nach Pasewalk oder (Wir fahren mit dem Auto nach Berlin oder wir trinken Kaffee).



– *Idempotenzgesetz der Konjunktion und der Disjunktion*

Es gilt für die Konjunktion:

$$p \wedge p \leftrightarrow p$$

Der Beweis erfolgt anhand der Beseitigungs- und der Einführungsregel der Konjunktion wie folgt:

(1)	p	{Annahme}	(1)	$p \wedge p$	{Annahme}
(2)	p	{1}	(2)	p	{DK: 1}
(3)	$p \wedge p$	{EK: 1, 2}	(3)	p	{DK: 1}

Es folgt für die Disjunktion:

$$p \vee p \leftrightarrow p$$

Der Beweis erfolgt anhand der Beseitigungs- und der Einführungsregel der Disjunktion wie folgt:

(1)	$p \vee p$	{Annahme}	(1)	p	{Annahme}
(2)	$\neg p$	{A. d. indir. B.}	(2)	$\neg(p \vee p)$	{A. d. indir. B.}
(3)	p	{BD: 1, 2}	(3)	$p \vee p$	{ED: 1, 1}
	Widerspruch	{2, 3}		Widerspruch	{2, 3}

Beispiel 2-44: Idempotenzgesetz der Konjunktion/Disjunktion

Wir fahren mit dem Fahrrad nach Pasewalk und
wir fahren mit dem Fahrrad nach Pasewalk.

Wir fahren mit dem Fahrrad nach Pasewalk.

Wir fahren mit dem Fahrrad nach Pasewalk

Wir fahren mit dem Fahrrad nach Pasewalk und
Wir fahren mit dem Fahrrad nach Pasewalk.

Wir fahren mit dem Fahrrad nach Pasewalk oder
wir fahren mit dem Fahrrad nach Pasewalk.

Wir fahren mit dem Fahrrad nach Pasewalk.

Wir fahren mit dem Fahrrad nach Pasewalk

Wir fahren mit dem Fahrrad nach Pasewalk oder
Wir fahren mit dem Fahrrad nach Pasewalk.



Wenn wir die sich wiederholenden Glieder einer Konjunktion/einer Disjunktion streichen, dann führt dies nach den Idempotenzgesetzen zu äquivalenten Ausdrücken. Mit der Möglichkeit, die Glieder einer Konjunktion und einer Disjunktion beliebig umzustellen, können wir in einer mehrgliedrigen Konjunktion oder Disjunktion sich wiederholende Glieder streichen, auch wenn sie nicht nebeneinander stehen. Natürlich ist dieses Streichen im Sinne der Idempotenzgesetze so zu verstehen, dass wir in einer gegebenen Konjunktion/Disjunktion lediglich die Redundanzen eliminieren.

– *Kommutativgesetz Disjunktion und Konjunktion*

Für die Konjunktion ist zu zeigen: $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$.

Für die Disjunktion ist zu zeigen: $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$.

(1) $p \wedge q$	{Annahme}	(1) $p \vee q$	{Annahme}
(2) $\neg(q \wedge p)$	{A. d. indir. B.}	(2) $\neg(q \vee p)$	{A. d. indir. B.}
(3) $\neg q \vee \neg p$	{NK: 2}	(3) $\neg q \wedge \neg p$	{ND: 2}
(4) p	{BK: 1}	(4) $\neg p$	{BK: 3}
(5) q	{BK: 1}	(5) $\neg q$	{BK: 3}
(6) $\neg q$	{BD: 3, 4}	(6) q	{BD: 1, 4}
Widerspruch	{5, 6}	Widerspruch	{5, 6}

Beispiel 2-45: Kommutativgesetz Disjunktion und Konjunktion

Nach der Regel der Kommutativität der Disjunktion folgt aus jeder der beiden Aussagen die jeweils andere:

Wir fahren mit dem Fahrrad oder wir fahren mit dem Auto

Wir fahren mit dem Auto oder wir fahren mit dem Fahrrad

Nach der Regel der Kommutativität der Konjunktion folgt aus jeder der beiden folgenden Aussagen die jeweils andere:

Wir fahren mit dem Fahrrad und wir fahren nach Pasewalk

Wir fahren nach Pasewalk und wir fahren mit dem Fahrrad



– *Zusätzlicher Beweis: rule of inference (RoI)*

Zu zeigen ist: $(a \rightarrow b) \leftrightarrow (\neg a \vee b)$

(1) $a \rightarrow b$	{Annahme}	(1) $\neg a \vee b$	{Annahme}
(2) $\neg(\neg a \vee b)$	{A. d. indir. B.}	(2) $\neg(a \rightarrow b)$	{A. d. indir. B.}
(3) $a \wedge \neg b$	{NK: 2}	(3) $\neg(\neg a \vee b)$	{RoI: 2}
(4) a	{BK: 3}	(4) $a \wedge \neg b$	{ND: 3}
(5) $\neg b$	{BK: 3}	(5) a	{BK: 4}

(6) b {AR: 1, 4}
Widerspruch {5, 6}

(6) $\neg b$ {BK: 4}
(7) b {BD: 1, 5}
Widerspruch {6, 7}

In diesem Beweis wird in Zeile 3 der Rückrichtung bereits die Korrektheit der Hinrichtung genutzt.

Beispiel 2-46: RoI-Regel

Nach der RoI-Regel folgt aus jeder der beiden folgenden Aussagen die jeweils andere.
Wenn wir nach Pasewalk fahren, dann fahren wir mit dem Fahrrad

Wir fahren nicht nach Pasewalk oder wir fahren mit dem Fahrrad

■

– *Kommutativgesetz der Prämissen*

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \leftrightarrow q \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Das Kommutativgesetz erlaubt, den Vordersatz einer Implikation mit dem Vordersatz ihres Hintersatzes zu vertauschen. Beim direkten Annahmeweis der beiden Implikationen, die diesem Gesetz entsprechen, verwenden wir nur die Abtrennungsregel. Den Beweis führen wir wie folgt:

(1) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$	{Annahme}	(1) $q \rightarrow (p \rightarrow r)$	{Annahme}
(2) $\neg p \vee (q \rightarrow r)$	{RoI: 1}	(2) $\neg q \vee (p \rightarrow r)$	{RoI: 1}
(3) $\neg p \vee (\neg q \vee r)$	{RoI: 2}	(3) $\neg p \vee (\neg q \vee r)$	{RoI: 2}
(4) $(\neg p \vee \neg q) \vee r$	{AD: 3}	(4) $(\neg q \vee \neg p) \vee r$	{AD: 3}
(5) $(\neg q \vee \neg p) \vee r$	{KD: 4}		

Damit ist gezeigt, dass sich beide Aussagen auf denselben Ausdruck umformen lassen, was gleichbedeutend mit der Äquivalenz ist.

Beispiel 2-47:

Wenn der Reifen platt ist, dann (wenn man radfahren will, dann muss man den Reifen aufpumpen) $\leftrightarrow$ Wenn man radfahren will, dann (wenn der Reifen platt ist, dann muss man den Reifen aufpumpen).

■

– *Export-/Importgesetz der Prämissen*

$$p \wedge q \rightarrow r \leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

Die diesem Gesetz entsprechende Implikation: $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ erlaubt es, ein Glied der Konjunktion, die der Vordersatz der Implikation ist, in ihren Hintersatz als Vordersatz dieses Hintersatzes einzuführen (Exportgesetz). Die umgekehrte Implikation:

$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$ ermöglicht die Einbeziehung des Vordersatzes des Hintersatzes der Implikation in den Vordersatz der Implikation (Importgesetz). Beweise von Implikationen, die diesem Gesetz entsprechen, verwenden die Abtrennungs- sowie die Einführungs- und Beseitigungsregel der Konjunktion.

Den Beweis für die 2. Implikation führen wir beispielhaft wie folgt

- | | | |
|-----|--------------------------------------|-----------|
| (1) | $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ | {Annahme} |
| (2) | $\neg p \vee (q \rightarrow r)$ | {RoI: 1} |
| (3) | $\neg p \vee (\neg q \rightarrow r)$ | {RoI: 2} |
| (4) | $(\neg p \vee \neg q) \vee r$ | {AD: 3} |
| (5) | $\neg((p \wedge q) \vee r)$ | {ND: 4} |
| (6) | $(p \wedge q) \rightarrow r$ | {RoI: 5} |

Beispiel 2-48: Exportgesetz/Importgesetz

(Der Reifen ist platt und wir wollen radfahren), dann müssen wir den Reifen aufpumpen $\rightarrow$ Wenn der Reifen platt ist, dann (wenn wir radfahren wollen, dann müssen wir den Reifen aufpumpen).

Wenn der Reifen platt ist, dann (wenn wir radfahren wollen, dann müssen wir den Reifen aufpumpen) $\rightarrow$ (Der Reifen ist platt und wir wollen radfahren), dann müssen wir den Reifen aufpumpen.

■

– Multiplikationsgesetz für die Hintersätze

$$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \leftrightarrow p \rightarrow q \wedge r$$

Den Beweis der Implikation, die dieser Äquivalenz entspricht, führen wir wie folgt:

- | | | |
|-------|--|-----------------------|
| (1) | $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ | {Annahme} |
| (2) | $p \rightarrow q$ | {BK: 1} |
| (3) | $p \rightarrow r$ | {BK: 1} |
| (3.1) | p | {zusätzliche Annahme} |
| (3.2) | q | {AR: 1, 3.1} |
| (3.3) | r | {AR: 3, 3.1} |
| (4) | $q \wedge r$ | {EK: 3.2, 3.3} |
| | $p \rightarrow q \wedge r$ | {3.1 $\rightarrow$ 5} |

Beispiel 2-49: Multiplikationsgesetz für die Hintersätze

Wenn der Reifen platt ist, dann müssen wir den Reifen flicken $\wedge$ Wenn der Reifen platt ist, dann müssen wir den Reifen aufpumpen $\rightarrow$ Wenn der Reifen platt ist (dann müssen wir den Reifen flicken und müssen wir den Reifen aufpumpen).

■

Den Beweis der umgekehrten Implikation führen wir wie folgt:

(1)	$p \rightarrow q \wedge r$	{Annahme}
(1.1)	p	{zusätzliche Annahme}
(1.2)	$q \wedge r$	{AR: 1, 1.1}
(1.3)	q	{BK: 1.2}
(1.4)	r	
(2)	$p \rightarrow q$	{1.1 $\rightarrow$ 1.3}
(3)	$p \rightarrow r$	{1.1 $\rightarrow$ 1.4}
	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$	{EK: 2, 3}

In diesem Beweis ist die Zeile mit der Doppelnummer (1.1) eine zusätzliche Annahme. Aus den Annahmen des Beweises und der zusätzlichen Annahme leiten wir anhand der gegebenen Regeln weitere Zeilen ab. Auch diese Zeilen haben eine Doppelnummer. Damit zeigen wir an, dass sie aufgrund einer zusätzlichen Annahme gewonnen wurden. Die Nummer vor dem Punkt ist bei der zusätzlichen Annahme und bei allen aufgrund dieser Annahme erhaltenen Zeilen stets dieselbe. Die Nummer nach dem Punkt gibt die Reihenfolge der Zeilen eines Beweises an. Zeilen mit einer Doppelnummer können nicht am Ende des Beweises stehen, weil sie nicht ausschließlich auf Annahmen des Beweises zurückgehen (und als zusätzliche Annahme ist ja jeder beliebige Ausdruck denkbar). Sobald wir aber anhand der Annahmen des Beweises und einer zusätzlichen Annahme einen Ausdruck erhalten, können wir in den Beweis als eine Zeile mit einer einfachen Nummer eine Implikation einführen, deren Vordersatz diese zusätzliche Annahme und deren Hintersatz ein im Beweis aufgrund dieser Annahme erhaltener Ausdruck ist. In den Zeilen (2) und (3) des Beweises treten solche Implikationen auf. Auf der rechten Seite solcher Zeilen geben wir an, auf welche Weise eine solche Implikation gewonnen wurde. Die rechte Seite der Zeile (2) bspw. zeigt an, dass in dieser Zeile eine Implikation vorkommt, deren Vordersatz die zusätzliche Annahme mit der Nummer (1.1) und deren Hintersatz der aufgrund dieser Annahme erhaltene Ausdruck mit der Nummer (1.3) ist. Als Beispiel nehmen wir an, dass wir aufgrund der Prämisse: (Wenn wir ein Fahrrad produzieren, dann werden wir lackieren und werden wir löten) die Conclusio: (Wenn wir ein Fahrrad produzieren, dann werden wir löten, und wenn wir ein Fahrrad produzieren, dann werden wir lackieren.) ableiten sollen. Diesen Beweis führen wir wie folgt:

(1) Voraussetzung ist die Prämisse: Wenn wir ein Fahrrad produzieren, so werden wir lackieren und werden wir löten. Zusätzlich nehmen wir an (1.1): Wir produzieren ein Fahrrad. Dann folgt aufgrund von (1) dass (1.2): Wir werden lackieren und wir werden löten. Daraus wiederum folgt, dass (1.3): Wir werden lackieren und (1.4): Wir werden löten. Aus der Annahme (1.1) folgen demnach aufgrund von (1) die Ausdrücke (1.3) und (1.4). Wenn wir also annehmen, dass die Prämisse (1) wahr ist, dann sind folgende Implikationen wahr: (2) Wenn wir ein Fahrrad produzieren, so werden wir lackieren. (3) Wenn wir ein Fahrrad produzieren, so werden wir löten.

Aus den Sätzen (2) und (3) folgt ihre Konjunktion, und damit die Conclusio, die wir aufgrund der Prämisse (1) erhalten sollen.

Wegen des Multiplikationsgesetzes für die Hintersätze ist die Konjunktion zweier Im-

pplikationen mit dem gleichen Vordersatz einer Implikation mit eben diesem Vordersatz und einem Hintersatz, der die Konjunktion der Hintersätze dieser beiden Implikationen ist, äquivalent. Nach diesem Gesetz ist die Aussage: (Wenn wir ein Fahrrad produzieren, dann werden wir lackieren und wenn wir ein Fahrrad produzieren, dann werden wir löten.) äquivalent der Aussage: (Wenn wir ein Fahrrad produzieren, so werden wir lackieren und werden wir löten.)

Beispiel 2-50: Multiplikationsgesetz für die Hintersätze

Wenn der Fahrradschlauch ein Loch hat, müssen wir dieses flicken und

wenn der Fahrradschlauch ein Loch hat, müssen wir ihn wieder aufpumpen $\leftrightarrow$

Wenn der Fahrradschlauch ein Loch hat, müssen wir das Loch flicken und den Fahrradschlauch wieder aufpumpen.



– *Additionsgesetz für die Vordersätze*

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \leftrightarrow p \vee q \rightarrow r$$

Wir beweisen die Implikation, die diesem Theorem entspricht, über die Additionsregel der Implikationen und das Idempotenzgesetz der Disjunktion. Wir geben den Beweis der umgekehrten Implikation wie folgt:

(1)	$p \vee q \rightarrow r$	{Annahme}
(1.1)	p	{zusätzliche Annahme}
(1.2)	$p \vee q$	{ED: 1.1}
(1.3)	r	{AR: 1, 1.2}
(2)	$p \rightarrow r$	{1.1 $\rightarrow$ 1.3}
(2.1)	q	{zusätzliche Annahme}
(2.2)	$p \vee q$	{ED: 2.1}
(2.3)	r	{AR: 1, 2.2}
(3)	$q \rightarrow r$	{2.1 $\rightarrow$ 2.3}
	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$	{EK: 2, 3}

Im Beweis verwenden wir die beiden zusätzlichen Annahmen (1.1) und (2.1). Aufgrund des Additionsgesetzes der Vordersätze ist die Konjunktion zweier Implikationen mit dem gleichen Hintersatz einer Implikation äquivalent, die genau diesen Hintersatz besitzt und deren Vordersatz die Disjunktion der Vordersätze dieser beiden Implikationen ist. Nach diesem Gesetz sind die beiden Aussagen: „Wenn ich mit dem Herrenrad fahre, so komme ich pünktlich an.“, und „Wenn ich mit dem Damenrad fahre, komme ich pünktlich an.“ und: „Wenn ich mit dem Herrenrad fahre oder mit dem Damenrad fahre, so komme ich pünktlich an.“ äquivalent.

Beispiel 2-51: Additionsgesetz der Vorderglieder

Wenn es neblig ist, dann müssen wir das Licht anmachen und

wenn es dunkel ist, dann müssen wir das Licht anmachen $\leftrightarrow$

Wenn es neblig oder dunkel ist, dann müssen wir das Licht anmachen.



Anhand der Implikation, die diesem Gesetz entspricht, beweisen wir die Regel des *einfachen konstruktiven Dilemmas*.

– *Regel des einfachen konstruktiven Dilemmas*

Aus zwei Implikationen mit dem gleichen Hintersatz und der Disjunktion der Vordersätze dieser Implikationen folgt ihr Hintersatz.

$$p \rightarrow r$$

$$q \rightarrow r$$

$$\frac{p \vee q}{r}.$$

Den Beweis haben wir bereits zum Additionsgesetz für die Vordersätze gegeben.

Beispiel 2-52: Schließen nach dem einfachen konstruktiven Dilemma

Wenn der Reifen platt ist, dann müssen wir den Reifen aufpumpen.

Wenn der Reifen fabrikneu ist, dann müssen wir den Reifen aufpumpen.

Der Reifen ist platt oder fabrikneu.

Wir müssen den Reifen aufpumpen.

Wenn es regnet, dann ist die Straße glatt.

Wenn es schneit, dann ist die Straße glatt.

Im Winter regnet oder schneit es.

Im Winter ist die Straße glatt.



– *Distributivgesetz der Konjunktion bezüglich der Disjunktion*

$$(p \vee q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge r \vee q \wedge r$$

Den Beweis für die linke Seite führen wir wie folgt:

(1)	$p \vee q$	}	{Annahmen}
(2)	r		
(1.1)	p		{zusätzliche Annahme}
(1.2)	$p \wedge r$		{EK: 1.1, 2}
(3)	$p \rightarrow p \wedge r$		{1.1 $\rightarrow$ 1.2}
(2.1)	q		{zusätzliche Annahme}
(2.2)	$q \wedge r$		{EK: 2.1, 2}
(4)	$q \rightarrow q \wedge r$		{2.1 $\rightarrow$ 2.2}
	$p \wedge r \vee q \wedge r$		{Einfaches konstruktives Dilemma: 3, 4, 1}

Diesen Beweis können wir kürzer schreiben:

(1)	$p \vee q$	}	{Annahmen}
(2)	r		
(1.1)	p		{zusätzliche Annahme}
(1.2)	$p \wedge r$		{EK: 1.1, 2}
(2.1)	q		{zusätzliche Annahme}
(2.2)	$q \wedge r$		{EK: 2.1, 2}
	$p \wedge r \vee q \wedge r$		{1.1 $\rightarrow$ 1.2, 2.1 $\rightarrow$ 2.2, 1}

Die zusätzlichen Annahmen dieses *verzweigten Beweises* sind die Glieder einer Disjunktion, die entweder eine Zeile des Beweises ist oder als bewiesenes Theorem in den Beweis eingeführt werden kann. Die letzte Zeile eines solchen Beweises erhalten wir anhand der Regel des zusammengesetzten bzw. einfachen konstruktiven Dilemmas mittels der Disjunktion sowie der Implikationen, deren Bezeichnungen auf der rechten Seite dieser Zeile stehen und die aufgrund der entsprechenden Teile des Beweises mit doppelter Nummerierung abgeleitet werden. Den Beweis für die rechte Seite führen wir wie folgt:

(1)	$p \wedge r \vee q \wedge r$	{Annahme}
(1.1)	$p \wedge r$	{zusätzliche Annahme}
(1.2)	p	}
(1.3)	r	
(1.4)	$p \vee q$	{BK: 1.1}
(1.5)	$(p \vee q) \wedge r$	{ED: 1.2}
(2.1)	$q \wedge r$	{EK: 1.4, 1.3}
(2.2)	q	{zusätzliche Annahme}
(2.3)	r	}
(2.4)	$p \vee q$	
(2.5)	$(p \vee q) \wedge r$	{BK: 2.1}
		{ED: 2.2}
		{EK: 2, 3}
	$(p \vee q) \wedge r$	{1.1 $\rightarrow$ 1.5, 2.1 $\rightarrow$ 2.5, 1}

Ausgehend vom Kommutativgesetz der Konjunktion erhalten wir aus dem oben bewiesenen Gesetz ein zweites Distributivgesetz der Konjunktion bezüglich der Disjunktion:
 $r \wedge (p \vee q) \leftrightarrow r \wedge p \vee r \wedge q$.

Nach dem Distributivgesetz der Konjunktion bezüglich der Disjunktion ist jetzt die Aussage: ((Der Reifen ist platt oder der Reifen ist fabrikneu) und der Reifen ist von Wolber) äquivalent der Aussage: ((Der Reifen ist platt und der Reifen ist von Wolber) oder (Der Reifen ist fabrikneu und der Reifen ist von Wolber)).

Beispiel 2-53: Distributionsgesetz der Konjunktion bzgl. der Disjunktion

(Wir fahren mit dem Fahrrad nach Pasewalk oder wir fahren mit dem Pkw nach Pasewalk) und wir werden pünktlich ankommen $\leftrightarrow$ (Wir fahren mit dem Fahrrad nach Pasewalk und

wir werden pünktlich ankommen) oder (Wir fahren mit dem Pkw nach Pasewalk und wir werden pünktlich ankommen).

■

– *Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten*

$$p \vee \neg p$$

Dieses Gesetz benutzen wir in verzweigten Beweisen, wenn wir zwei sich widersprechende Ausdrücke W und $\neg W$ als zusätzliche Annahmen einführen, um mit der Disjunktion dieser Annahmen ein Einsetzen in das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten ([KLBU85], S. 1088) im Beweis zu ermöglichen. Den Beweis führen wir wie folgt:

(1)	$\neg(p \vee \neg p)$	{A. d. indir. B.}
(2)	$\neg p$	{ND: 1}
(3)	$\neg \neg p$	
	Widerspruch	{2, 3}

Beispiel 2-54: Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten:

Der Reifen ist platt oder der Reifen ist nicht platt.

Fahrrad Nirwana hat einen Sattel Futur oder Fahrrad Nirwana hat keinen Sattel Futur.

■

– *Distributivgesetze der Disjunktion bezüglich der Konjunktion*

$$p \wedge q \vee r \leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r), r \vee p \wedge q \leftrightarrow (r \vee p) \wedge (r \vee q)$$

Den Beweis für die linke Seite des ersten dieser beiden Gesetze führen wir wie folgt:

(1)	$p \wedge q \vee r$	{Annahme}
(1.1)	$p \wedge q$	{zusätzliche Annahme}
(1.2)	p	{BK: 1.1}
(1.3)	q	
(1.4)	$p \vee r$	{ED: 1.2}
(1.5)	$q \vee r$	{ED: 1.3}
(1.6)	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$	{EK: 1.4, 1.5}
(2.1)	r	{zusätzliche Annahme}
(2.2)	$p \vee r$	{ED: 2.1}
(2.3)	$q \vee r$	{ED: 2.1}
(2.4)	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$	{EK: 2.2, 2.3}
	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$	{1.1 $\rightarrow$ 1.6, 2.1 $\rightarrow$ 2.4, 1}

Den Beweis für die rechte Seite des ersten dieser beiden Gesetze, die umgekehrte Implikation, führen wir wie folgt:²²

(1) $p \vee r$	{Annahme}
(2) $q \vee r$	
(1.1) r	{zusätzliche Annahme}
(1.2) $p \wedge q \vee r$	{ED: 1.1}
(2.1) $\neg r$	{zusätzliche Annahme}
(2.2) p	{BD: 1, 2.1}
(2.3) q	{BD: 2, 2.1}
(2.4) $p \wedge q$	{EK: 2.2, 2.3}
(2.5) $p \wedge q \vee r$	{ED: 2.4}
$p \wedge q \vee r$	{1.1 $\rightarrow$ 1.2, 2.1 $\rightarrow$ 2.5}

Die letzte Zeile des Beweises für die umgekehrte Implikation ergibt sich aus der Regel des einfachen konstruktiven Dilemmas als Folge der Implikationen $1.1 \rightarrow 1.2$, $2.1 \rightarrow 2.5$ und der Disjunktion der zusätzlichen Annahmen: $r \vee \neg r$, die wir in den Beweis aufgrund des Gesetzes vom ausgeschlossenen Dritten einführen. Das zweite dieser Gesetze erhalten wir über das Kommutativgesetz der Disjunktion aus dem ersten.²³

Beispiel 2-55: Distributivgesetz der Disjunktion bezüglich der Konjunktion

Nach dem Distributivgesetz der Disjunktion bezüglich der Konjunktion ist die Aussage: (A bekommt einen Drops oder A bekommt ein Fahrrad) und (A bekommt ein Handy oder A bekommt ein Fahrrad) äquivalent der Aussage: (A bekommt einen Drops und A bekommt ein Handy) oder A bekommt ein Fahrrad.



– Gesetz von der doppelten Negation

$$\neg\neg p \leftrightarrow p$$

Den Beweis für den Vordersatz führen wir wie folgt:

(1) $\neg\neg p$	{Annahme}
(2) $\neg p$	{A. d. indir. B.}
Widerspruch	{1, 2}

Der Beweis der umgekehrten Implikation ist analog.

Beispiel 2-56: Doppelte Negation²⁴

(Es gilt nicht: Der Reifen ist nicht platt) $\leftrightarrow$ Der Reifen ist platt.

²² siehe auch Kommutativgesetz der Disjunktion

²³ Wie in diesem nehmen wir auch in anderen verzweigten Beweisen keinen Bezug auf das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten, wenn die Disjunktion der zusätzlichen Annahmen eines gegebenen Beweises eine Einsetzung in dieses Gesetz ist.

(Es gilt nicht: Fahrrad Nirwana hat keinen Sattel Futur) $\leftrightarrow$ Fahrrad Nirwana hat einen Sattel Futur.



Das Gesetz von der doppelten Negation besagt: Wenn wir eine gerade Anzahl von aufeinanderfolgenden Negationszeichen streichen, dann erhalten wir einen zu einem gegebenen Ausdruck äquivalenten Ausdruck. Mit diesem Gesetz können wir die Regel des Beseitigens der Disjunktion verallgemeinern. In dieser allgemeineren Form stellt die Regel des *Beseitigens der Disjunktion* fest, dass aus einer Disjunktion und einem mit einem ihrer Glieder im Widerspruch stehenden Ausdruck das zweite Glied dieser Disjunktion folgt. Nach dieser Regel sind zusätzlich zu den bei der Formulierung der primären Regel BD angegebenen die folgenden Schemata gültig:

$$\begin{array}{cc} \neg p \vee q & p \vee \neg q \\ p & q \\ q & p \end{array} \quad .$$

Das erste Schema beweisen wir wie folgt:

- | | | | |
|-----|-----------------|---|------------------------------|
| (1) | $\neg p \vee q$ | } | |
| (2) | p | | {Annahme} |
| (3) | $\neg \neg p$ | | {Ges. doppelten Negation: 2} |
| | q | | {BD: 1, 3} |

Der Beweis des zweiten Schemas erfolgt analog.

Im folgenden bezeichnen wir mit der Abkürzung BD die Beseitigungsregel der Disjunktion in dieser allgemeinen Form.

– Gesetz der Negation der Disjunktion

$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

Die diesem Gesetz entsprechende Implikation ist ein Gesetz, das dem dritten Schema der Negation der Disjunktion („ND“) entspricht. Den Beweis der umgekehrten Implikation führen wir wie folgt:

- | | | | |
|-----|-------------|---|-------------------|
| (1) | $\neg p$ | } | {Annahmen} |
| (2) | $\neg q$ | | |
| (3) | $p \vee q$ | | {A. d. indir. B.} |
| (4) | q | | {BD: 3, 1} |
| | Widerspruch | | {2, 4} |

²⁴ Dieses Beispiel zeigt das Vorgehen des indirekten Beweises:

- (1) (Es gilt nicht: Der Reifen ist nicht platt) dann und nur dann, wenn (Der Reifen ist platt)
 - (2) (Es gilt nicht: Der Reifen ist nicht platt)
 - (3) (Der Reifen ist nicht platt)
- Deutlicher kann der Widerspruch zwischen (2) und (3) nicht auftreten.

Nach diesem Gesetz (1. De Morgansches Gesetz) ist die Negation einer Disjunktion der Konjunktion ihrer negierten Glieder äquivalent.

Beispiel 2-57: Negation der Disjunktion

Es gilt nicht, dass Fahrrad Nirwana Sattel Futur hat oder dass Fahrrad Nirwana Sattel Komfort hat $\leftrightarrow$ Es gilt nicht, dass Fahrrad Nirwana Sattel Futur hat und es gilt nicht, dass Fahrrad Nirwana Sattel Komfort hat.



Das Gesetz von der doppelten Negation und das eben bewiesene Gesetz der Negation der Disjunktion führen zu weiteren Gesetzen der Negation der Disjunktion:

$$\neg(\neg p \vee \neg q) \leftrightarrow p \wedge q, \neg(\neg p \vee q) \leftrightarrow p \wedge \neg q, \neg(p \vee \neg q) \leftrightarrow \neg p \wedge q.$$

In diesen drei Negationsgesetzen ist die Negation einer Disjunktion äquivalent der Konjunktion von Ausdrücken, die mit den Gliedern dieser Disjunktion im Widerspruch stehen. Nach dem Negationsgesetz der Disjunktion ist die Aussage: „Es ist nicht wahr, dass dieses Fahrrad ist ein Herrenrad oder dieses Fahrrad ist ein Damenrad“ äquivalent mit der Aussage: „Dieses Fahrrad ist kein Herrenrad und dieses Fahrrad ist kein Damenrad“.

Beispiel 2-58: Gesetze der Negation der Disjunktion

- a) Es gilt nicht, dass das Fahrrad Nirwana nicht Sattel Futur hat oder nicht Pedal Trampel hat $\leftrightarrow$ Das Fahrrad Nirwana hat Sattel Futur und hat Pedal Trampel.
- b) Es gilt nicht, dass das Fahrrad Nirwana nicht Sattel Futur hat oder Pedal Trampel hat $\leftrightarrow$ Das Fahrrad Nirwana hat Sattel Futur und hat nicht Pedal Trampel.
- c) Es gilt nicht, dass das Fahrrad Nirwana Sattel Futur hat oder nicht Pedal Trampel hat $\leftrightarrow$ Das Fahrrad Nirwana hat nicht Sattel Futur und hat Pedal Trampel.



– Ersetzen der Konjunktion durch die Disjunktion und die Negation

$$p \wedge q \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$$

Die Konjunktion von zwei Aussagen ist einem Ausdruck äquivalent, der aus diesen Aussagen mit Hilfe der Zeichen der Disjunktion und der Negation gebildet wurde: Dieses Gesetz erhalten wir anhand der Kommutativregel der Äquivalenz aus dem zweiten der Negationsgesetze der Disjunktion.

Beispiel 2-59: Ersetzen der Konjunktion durch die Disjunktion und die Negation

Das Fahrrad Nirwana hat Sattel Futur und hat Pedal Trampel $\leftrightarrow$ Es gilt nicht, dass das Fahrrad Nirwana nicht Sattel Futur hat oder nicht Pedal Trampel hat.



Beispiel 2-60: Beseitigen der Konjunktion (BK)

Dieser Regel liegt die bereits bekannte Tautologie $p \wedge q \rightarrow p$ zugrunde:

$$\frac{p \wedge q}{p} \quad \text{oder} \quad \frac{p \wedge q}{q}$$

Der Vorgesetzte trifft die folgende Aussage: Wenn der Dauertest fehlerfrei durchgeführt

wurde und das Messgerät zuverlässig ist, dann hat das Fahrrad Nirwana ein Problem mit der Dauerfestigkeit. Der Dauertest wurde fehlerfrei durchgeführt, vorausgesetzt, dass Werker Meier sorgfältig arbeitete. Fahrrad Nirwana ist aber völlig dauerhaft und das Messgerät ist absolut zuverlässig. Hat Werker Meier geschlampt?

Wir führen folgende Abkürzungen ein:

p : Der Dauertest wurde fehlerfrei durchgeführt.

q : Das Messgerät ist zuverlässig.

r : Fahrrad Nirwana hat ein Dauerfestigkeitsproblem.

s : Werker Meier hat sorgfältig gearbeitet.

Die Prämissen stellen sich damit wie folgt dar:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad p \wedge q \rightarrow r \\ (2) \quad s \rightarrow p \\ (3) \quad \neg r \wedge q \end{array} \right\} \quad \{\text{Annahmen}\}$$

Daraus folgt:

$$\begin{array}{ll} (4) \quad \neg r & \{\text{BK: 3}\} \\ (5) \quad \neg(p \wedge q) & \{\text{Tol: 1, 4}\} \\ (6) \quad \neg p \vee \neg q & \text{2. Gesetz von de Morgan} \\ (7) \quad q & \{\text{BK: 3}\} \\ (8) \quad \neg p & \{\text{BD: 6, 7}\} \\ (9) \quad \neg s & \{\text{Tol: 2, 8}\} \end{array}$$

Folgerung: Werker Meier hat geschlampt.²⁵



– Gesetze der Negation der Konjunktion

Diese Gesetze postulieren die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} \neg(p \wedge q) &\leftrightarrow \neg p \vee \neg q, \quad \neg(\neg p \wedge \neg q) \leftrightarrow p \vee q, \quad \neg(\neg p \wedge q) \leftrightarrow p \vee \neg q, \\ \neg(p \wedge \neg q) &\leftrightarrow \neg p \vee q. \end{aligned} \quad ^{26}$$

Den Beweis des ersten dieser Gesetze (2. De Morgansches Gesetz) führen wir für die linke Seite wie folgt:

$$\begin{array}{ll} (1) \quad \neg(p \wedge q) & \{\text{Annahme}\} \\ (2) \quad \neg(\neg p \vee \neg q) & \{\text{A. d. indir. B.}\} \\ (3) \quad p \wedge q & \{\text{Neg. d. Disjunktion.: 2}\} \\ \text{Widerspruch} & \{1, 3\} \end{array}$$

²⁵ Annahme (3) sagt ausdrücklich: Es gibt kein Dauerfertigungsproblem und es gibt auch kein Problem mit dem Messgerät. Damit werden die anderen Annahmen (1) und (2) zu „Hypothesen“, weil hier diese expliziten Aussagen fehlen - es ist immer nur „wenn - dann“. Also werden diese Annahmen verworfen.

²⁶ Zu beachten ist, dass die Aussage $\neg(p \wedge q)$ eine andere Bedeutung hat als die Aussage $\neg p \wedge \neg q$. $\neg(p \wedge q)$ heißt: Es stimmt nicht, dass Julius und Siegfried (gemeinsam) schwimmen gehen. Es kann z. B. sein, dass nur einer von beiden schwimmen geht oder dass keiner von beiden schwimmen geht. $\neg(p \wedge q)$ ist also etwas anderes als $\neg p \wedge \neg q$.

Für die rechte Seite folgt:

- | | | |
|-----|----------------------|-------------------|
| (1) | $\neg p \vee \neg q$ | {Annahme} |
| (2) | $p \wedge q$ | {A. d. indir. B.} |
| (3) | p | {BK: 2} |
| (4) | q | |
| (5) | $\neg q$ | {BD: 1, 3} |
| | Widerspruch | {4, 5} |

Nach dem Negationsgesetz der Konjunktion ist die Aussage: „Es ist nicht wahr, dass (A ist ein Herrenrad und A ist ein Damenrad)“, äquivalent der Aussage: „Es ist nicht wahr, dass (A ist ein Herrenrad) oder Es ist nicht wahr, dass (A ist ein Damenrad)“.

Die restlichen drei Negationsgesetze der Konjunktion erhalten wir aus dem oben bewiesenen Gesetz anhand des Gesetzes der doppelten Negation. Die Negation einer Konjunktion ist nach dem ersten Negationsgesetz der Disjunktion ihrer negierten Glieder äquivalent. In einer allgemeineren Formulierung, die allen Negationsgesetzen entspricht, ist die Negation einer Konjunktion äquivalent der Disjunktion von Ausdrücken, die mit den Gliedern dieser Konjunktion im Widerspruch stehen.

Beispiel 2-61: Gesetze der Negation der Konjunktion

Es ist nicht wahr, dass (Nirwana ist ein Herrenrad und Kismet ist ein Damenrad) $\leftrightarrow$ Es ist nicht wahr, dass Nirwana ist ein Herrenrad oder Es ist nicht wahr, dass Kismet ist ein Damenrad.

Es ist nicht wahr, dass (Es ist nicht wahr, dass Nirwana ist ein Herrenrad und Es ist nicht wahr, dass Kismet ist ein Damenrad) $\leftrightarrow$ Nirwana ist ein Herrenrad oder Kismet ist ein Damenrad.

Es ist nicht wahr, dass (Es ist nicht wahr, dass Nirwana ist ein Herrenrad und Kismet ist ein Damenrad) $\leftrightarrow$ Nirwana ist ein Herrenrad oder es ist nicht wahr, dass Kismet ist ein Damenrad.

Es ist nicht wahr, dass (Nirwana ist ein Herrenrad und es ist nicht wahr, dass Kismet ist ein Damenrad) $\leftrightarrow$ Es ist nicht wahr, dass Nirwana ist ein Herrenrad oder Kismet ist ein Damenrad.

Wir können das sprachlich ein wenig gefälliger machen: Julius war gestern nicht (sowohl in Berlin als auch in Pasewalk). Er war gestern in Berlin. Also war er nicht in Pasewalk.



– Ersetzen der Disjunktion durch die Konjunktion und die Negation

Die Disjunktion von zwei Aussagen ist einem Ausdruck äquivalent, den diese Aussagen mittels der Zeichen der Konjunktion und der Negation bilden:

$$p \vee q \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

Dieses Gesetz erhalten wir aus dem zweiten Negationsgesetz der Konjunktion unter Anwendung der Kommutativregel der Äquivalenz.

Beispiel 2-62: Ersetzen der Disjunktion durch die Konjunktion und die Negation

Fahrrad Nirwana hat Sattel Futur oder Fahrrad Kismet hat Sattel Futur $\leftrightarrow$ Es gilt nicht, dass (Fahrrad Nirwana hat keinen Sattel Futur und Fahrrad Kismet hat keinen Sattel Futur).

**Beispiel 2-63:** Konjunktion/Disjunktion

Werker Meier muss Schrott verantworten. Er wird mit zwei Vorwürfen konfrontiert:

p : Werker Meier war unaufmerksam.

q : Werker Meier ist inkompetent.

Es sind vier Fälle möglich:

1. Fall: Unaufmerksamkeit und Inkompetenz ($p \wedge q$)
2. Fall: Aufmerksam, aber inkompetent ($\neg p \wedge q$)
3. Fall: Unaufmerksam, aber nicht inkompetent ($p \wedge \neg q$)
4. Fall: Aufmerksam und nicht inkompetent ($\neg p \wedge \neg q$)

Der Vorwurf eines Vorgesetzten lautet: $p \vee q$; in diesem Fall bleibt an Werker Meier mindestens ein Vorwurf haften. Werker Meier kann zwei Argumentationslinien verfolgen:

1. Er verneint die Vorwürfe: $\neg(p \vee q) =$ „Es stimmt nicht, dass ich unaufmerksam war oder inkompetent bin.“
2. Er bestreitet die einzelnen Vorwürfe: $\neg p \wedge \neg q =$ „Ich war weder unaufmerksam, noch bin ich inkompetent.“

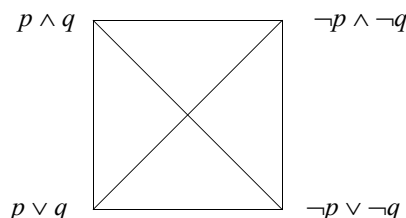
Da beide Formulierungen logisch äquivalent sind, folgt: $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$ (1. De Morgansches Gesetz).

Der Vorgesetzte könnte auch andere Formulierungen wählen:

1. $p \wedge q =$ „Werker Meier war unaufmerksam und Werker Meier ist inkompetent.“
2. $\neg(\neg p \vee \neg q) =$ „Es ist nachweislich falsch, dass Werker Meier nicht unaufmerksam war oder nicht inkompetent ist.“

$\neg p \vee \neg q$ würde bedeuten: Werker Meier war nicht unaufmerksam ($\neg p$) oder Werker Meier ist nicht inkompetent ($\neg q$). $\neg p \vee \neg q$ lässt also 3 Fälle zu: a) $\neg p \vee q$, b) $p \wedge \neg q$ und c) $\neg p \wedge \neg q$. Der Vorgesetzte wird diese drei Möglichkeiten verneinen, so dass nur noch eine Möglichkeit übrigbleibt, nämlich $p \wedge q$. Daraus folgt: $p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$. Dieses Gesetz können wir auch als 2. De Morgansches Gesetz schreiben: $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$.

Wir erhalten das *logische Quadrat der Gegensätze*:²⁷



– Werker Meier ($\neg p \wedge \neg q$) und sein Vorgesetzter ($p \wedge q$) stehen in einem *konträren*

Gegensatz. Beide Aussagen sind unverträglich, aber die eine ist nicht das Gegenteil der anderen. Konträre Aussagen können nicht beide zugleich wahr, aber beide zugleich falsch sein.

- Den Vorwurf $(p \vee q)$ muss Werker Meier widerlegen: $(\neg p \wedge \neg q)$. Die eine Aussage ist die Negation der anderen. Beide Aussagen schließen einander aus und stehen in einem *kontradiktorischen Gegensatz*.
- Ebenso stehen die beiden Aussagen $p \wedge q$ und $\neg p \vee \neg q$ in kontradiktorischem Widerspruch: $\neg p \vee \neg q$ ist die Negation von $p \wedge q$.
- $p \vee q$ und $\neg p \vee \neg q$ stehen in *subkonträrem Gegensatz*. Subkonträre Aussagen können nicht zugleich falsch, aber zugleich wahr sein.
- Die Disjunktion $(p \vee q)$ ist eine Abschwächung der Konjunktion $(p \wedge q)$. Wir sprechen von einem *subalternen Gegensatz*.

Die beiden oberen Ecken des Quadrats stehen zueinander in einem konträren, die unteren Ecken in einem subkonträren Gegensatz. Die Diagonalen drücken einen kontradiktorischen Gegensatz aus.



– Gesetze des Ersetzens der Implikation

Nach den Gesetzen des Ersetzens der Implikation ist eine aus zwei Aussagen gebildete Implikation einem Ausdruck äquivalent, der aus diesen Aussagen mit Hilfe der Zeichen der Konjunktion und der Negation oder mit Hilfe der Zeichen der Disjunktion und der Negation gebildet wurde:

$$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

Den Beweis führen wir wie folgt:

(1)	$p \rightarrow q$	{Annahme}	$\neg(p \wedge \neg q)$	} {Annahmen}
(2)	$p \wedge \neg q$	{A. d. indir. B.}	p	
(3)	p	}	$\neg q$	{A. d. indir. B.}
(4)	$\neg q$		$p \wedge \neg q$	{EK: 2,3}
(5)	q	{AR: 1, 3}	Widerspruch	{1, 4}
	Widerspruch {4, 5}			

Beispiel 2-64: Ersetzen der Implikation durch die Konjunktion und die Negation

Wenn der Fahrradschlauch ein Loch hat, dann suchen wir das Loch $\leftrightarrow$ Es gilt nicht, dass der Fahrradschlauch ein Loch hat und wir das Loch nicht suchen.



$$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q$$

Dieses Gesetz folgt aus dem Gesetz des Ersetzens der Implikation durch die Konjunktion und die Negation anhand des vierten Negationsgesetzes der Konjunktion.

²⁷ siehe bspw. [ZOGL97], S. 91 oder [BORK76], S. 381

Beispiel 2-65: Ersetzen der Implikation durch die Disjunktion und die Negation

Wenn der Fahrradschlauch ein Loch hat, dann suchen wir das Loch $\leftrightarrow$ Der Fahrradschlauch hat kein Loch oder wir suchen das Loch.



– *Gesetz des Ersetzens der Äquivalenz*

Dieses Gesetz macht es möglich, eine Äquivalenz durch die Konjunktion von zwei Implikationen, nämlich der Implikation, die dieser Äquivalenz entspricht, und der umgekehrten Implikation zu ersetzen. Den Beweis dieses Gesetzes führen wir über die Beseitigungs- und die Einführungsregel der Äquivalenz.

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Beispiel 2-66: Ersetzen der Äquivalenz

Wenn der Fahrradschlauch ein Loch hat, dann und nur dann flicken wir den Fahrradschlauch $\leftrightarrow$ Wenn der Fahrradschlauch ein Loch hat, dann flicken wir ihn und wenn wir den Fahrradschlauch flicken, dann hat er ein Loch.



– *Gesetz der Negation der Implikation*

Dieses Gesetz erhalten wir aus dem Gesetz des Ersetzens der Implikation durch die Konjunktion und die Negation anhand der Negationsregel der Äquivalenzglieder und des Gesetzes der doppelten Negation.

$$\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$$

Beispiel 2-67: Negation der Implikation

Es gilt nicht, dass wenn wir ein Rennrad kaufen, dieses im Gelände benutzen $\leftrightarrow$ Wir kaufen ein Rennrad und benutzen dieses nicht im Gelände.



– *Gesetz der Negation der Äquivalenz*

Dieses Gesetz erhalten wir über das Gesetz des Ersetzens der Äquivalenz, das Negationsgesetz der Konjunktion und das Negationsgesetz der Implikation.

$$\neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q \vee q \wedge \neg p$$

Beispiel 2-68: Negation der Äquivalenz

Es gilt nicht, dass wir dann und nur dann, wenn wir einen Sattel montieren, auch einen Lenker montieren $\leftrightarrow$ Wir montieren einen Sattel und keinen Lenker oder wir montieren einen Lenker und keinen Sattel.



– Regel des zusammengesetzten destruktiven Dilemmas

Aus zwei Implikationen und der Disjunktion der Negation ihrer Nachsätze folgt die Disjunktion der Negation ihrer Vordersätze. Nach dieser Regel gilt das folgende Schema:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ \hline \neg q \vee \neg s \\ \hline \neg p \vee \neg r \end{array}$$

Den Beweis führen wir wie folgt:

(1)	$p \rightarrow q$	}	{Annahmen}
(2)	$r \rightarrow s$		
(3)	$\neg q \vee \neg s$		
(4)	$\neg q \rightarrow \neg p$		{Transp.: 1}
(5)	$\neg s \rightarrow \neg r$		{Transp.: 2}
	$\neg p \vee \neg r$		{Zusammeng. konstruktives Dilemma: 4, 5, 3}

Beispiel 2-69: Zusammengesetztes destruktives Dilemma

Wenn wir das Gleichgewicht halten können, dann können wir Fahrrad fahren.

Wenn wir den Führerschein haben, dann können wir Auto fahren.

Wir können nicht Rad fahren oder wir können nicht Auto fahren.

Wir können kein Gleichgewicht halten oder wir haben keinen Führerschein.



– Regel des einfachen destruktiven Dilemmas

Aus zwei Implikationen mit dem gleichen Vordersatz und der Disjunktion der Negation ihrer Nachsätze folgt die Negation ihres Vordersatzes. Nach dieser Regel gilt das folgende Schema:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \rightarrow r \\ \hline \neg q \vee \neg r \\ \hline \neg p \end{array}$$

Der Beweis verwendet die Regel des einfachen destruktiven Dilemmas und das Idempotenzgesetz der Disjunktion.

Beispiel 2-70: Einfaches destruktives Dilemma

Wenn dieses Fahrrad gut rollt, dann ist der Vorderreifen aufgepumpt.

Wenn dieses Fahrrad gut rollt, dann ist der Hinterreifen aufgepumpt.

Der Vorderreifen ist nicht aufgepumpt oder der Hinterreifen ist nicht aufgepumpt.

Dieses Fahrrad rollt nicht gut.



– Gesetz vom ausgeschlossenen Widerspruch

Nach diesem Gesetz kann einer von zwei sich widersprechenden Sachverhalten nicht existieren:

$$\neg(p \wedge \neg p).$$

Dieses Gesetz beweisen wir wie folgt:

(1)	$p \wedge \neg p$	{A. d. indir. B.}
(2)	p	{BK: 1}
(3)	$\neg p$	
	Widerspruch	{2, 3}

Beispiel 2-71: Ausgeschlossener Widerspruch

Es gilt nicht, dass (der Fahrradschlauch hat ein Loch und der Fahrradschlauch hat kein Loch).



– Duns-Scotus-Regel

Aus zwei sich widersprechenden Aussagen folgt eine beliebige Aussage. Nach dieser Regel gilt das folgende Schema:

$$\begin{array}{c} p \\ \neg p \\ \hline q \end{array}.$$

Der Beweis ergibt sich wie folgt:

(1)	p	{Annahmen}
(2)	$\neg p$	
(3)	$p \vee q$	{ED: 1}
	q	{BD: 3, 2}

Diese Regel zeigt: Würde jemand zwei sich widersprechende Aussagen, also irgendeine Aussage und ihre Negation, beweisen (können), könnte er jede Aussage, also auch jede falsche Aussage beweisen.²⁸

Beispiel 2-72: Duns Scotus-Regel/Einführung der Disjunktion

1. Das Paradies existiert und das Paradies existiert nicht: $p \wedge \neg p$ {Annahme}
2. Das Paradies existiert. {BK: 1}
3. Das Paradies existiert oder das Fahrrad steht in der Ecke. {ED}
4. Das Paradies existiert nicht. {BK: 1}
5. Das Fahrrad steht in der Ecke. {BD: 3, 4}

²⁸ Also muss man nur irgendwo versteckt die Duns Scotus-Regel einbauen, um anschließend jeden Unsinn beweisen zu können.

Anstatt dieses Satzes kann jede andere Behauptung aus der Prämisse hergeleitet werden.

■

Beispiel 2-73: Duns Scotus-Regel

Der Fahrradschlauch hat ein Loch und der Fahrradschlauch hat kein Loch. Der Fahrradschlauch hat ein Loch oder Fahrrad Nirwana hat fremdsprachige Klingeln. Ein Fahrrad Nirwana hat fremdsprachige Klingeln.

■

– Regel *Reductio ad absurdum* (Widerspruchsregel)

Diese Regel stellt die Gültigkeit folgender Schemata fest:

$$\frac{p \rightarrow \neg p}{\neg p} \quad \frac{\neg p \rightarrow p}{p} \quad \frac{p \rightarrow \neg q}{\neg p} \quad \frac{\neg p \rightarrow \neg q}{p}.$$

Das erste Schema beweisen wir wie folgt:

- | | | |
|-----|------------------------|-------------------|
| (1) | $p \rightarrow \neg p$ | {Annahme} |
| (2) | p | {A. d. indir. B.} |
| (3) | $\neg p$ | {AR: 1, 2} |
| | Widerspruch | {2, 3} |

Die übrigen Schemata sind analog zu beweisen.

Beispiel 2-74: Reductio ad absurdum

Wenn aus einer Annahme ein Widerspruch ($p \wedge \neg p$) abgeleitet werden kann, dann muss die Annahme falsch sein.

Wenn der Fahrradschlauch ein Loch hat, dann hat der Fahrradschlauch kein Loch.

Der Fahrradschlauch hat kein Loch.

Wenn der Fahrradschlauch ein Loch hat, dann müssen wir ihn flicken.

Wenn der Fahrradschlauch ein Loch hat, dann gilt nicht, dass wir ihn flicken müssen.

(Es gilt nicht, dass wir den Fahrradschlauch flicken müssen.)

Der Fahrradschlauch hat kein Loch.

■

Als Anwendung der Widerspruchsregel beweisen wir den Schluss:

$$\frac{p \vee q}{\frac{q \rightarrow p}{p}}$$

Den Beweis geben wir wie folgt:

- | | | | |
|-----|-------------------|---|------------|
| (1) | $p \vee q$ | } | {Annahmen} |
| (2) | $q \rightarrow p$ | | |

(3) $\neg p$	{A. d. indir. B.}
(4) $\neg q$	{Tol.: 2, 3}
(5) p	{BD: 1, 4}
Widerspruch	{3, 5}

– *Regel der Umkehrung der Implikationen*

Aus zwei Implikationen, der Disjunktion ihrer Vordersätze und der Negation der Konjunktion ihrer Hintersätze folgen die beiden umgekehrten Implikationen. Dementsprechend gilt das folgende Schema:

$$\begin{array}{l}
 p \rightarrow q \\
 r \rightarrow s \\
 p \vee r \\
 \frac{\neg(q \wedge s)}{q \rightarrow p} \\
 s \rightarrow r
 \end{array}$$

Den Beweis führen wir wie folgt:

(1) $p \rightarrow q$	}	{Annahmen}
(2) $r \rightarrow s$		
(3) $p \vee r$		
(4) $\neg(q \wedge s)$		
(5) $\neg q \vee \neg s$		{Negation der Konjunkt.: 4}
(1.1) q		{zusätzliche Annahme}
(1.2) $\neg s$		{BD: 5, 1.1}
(1.3) $\neg r$		{Tol.: 2, 1.2}
(1.4) p		{BD: 3, 1.3}
$q \rightarrow p$		{1.1 $\rightarrow$ 1.4}
(2.1) s		{zusätzliche Annahme}
(2.2) $\neg q$		{BD: 5, 2.1}
(2.3) $\neg p$		{Tol.: 1, 2.2}
(2.4) r		{BD: 3, 2.3}
$s \rightarrow r$		{2.1 $\rightarrow$ 2.4}

Beispiel 2-75: Umkehrung der Implikation

Wenn dies ein Fahrrad Nirwana ist, dann hat es einen Sattel Futur.

Wenn dies ein Fahrrad Kismet ist, dann hat es einen Sattel Sputnik.

Dieses Fahrrad ist ein Fahrrad Nirwana oder ein Fahrrad Kismet.

Es ist nicht wahr, dass (das Fahrrad einen Sattel Futur hat und das Fahrrad einen Sattel Sputnik hat).

Wenn dieses Fahrrad einen Sattel Futur hat, dann ist dies ein Fahrrad Nirwana.

Wenn dieses Fahrrad einen Sattel Sputnik hat, dann ist dies ein Fahrrad Kismet.



Die Regel der Umkehrung der Implikationen können wir auf eine größere Anzahl von Implikationen erweitern. So erhalten wir bspw. das Schema dieser Regel für drei Implikationen:

$$p_1 \rightarrow q_1$$

$$p_2 \rightarrow q_2$$

$$p_3 \rightarrow q_3$$

$$p_1 \vee p_2 \vee p_3$$

$$\neg(q_1 \wedge q_2)$$

$$\neg(q_1 \wedge q_3)$$

$$\neg(q_2 \wedge q_3)$$

$$q_1 \rightarrow p_1$$

$$q_2 \rightarrow p_2$$

$$q_3 \rightarrow p_3$$

Nach diesem Schema folgen aus den Implikationen: Wenn A und B dieselbe Ausstattung haben, dann werden A und B zum selben Preis verkauft. Wenn A eine bessere Ausstattung als B hat, so wird A zu einem höheren Preis als B verkauft. Wenn A eine schlechtere Ausstattung als B hat, so wird A zu einem niedrigeren Preis als B verkauft. Aus der Disjunktion der Vordersätze dieser Implikationen und daraus, dass die Hintersätze der 1. und 2. Implikation, der 1. und 3. Implikation und der 2. und 3. Implikation nicht zugleich wahr sind, folgen die umgekehrten Implikationen zu diesen drei Implikationen.

Beispiel 2-76: Umkehrung der Implikation

Wenn dies ein Fahrrad für Kinder ist, dann sind die Räder klein.

Wenn dies ein Fahrrad für Jugendliche ist, dann sind die Räder mittelgroß.

Wenn dies ein Fahrrad für Erwachsene ist, dann sind die Räder groß.

Dies ist ein Fahrrad für Kinder oder Jugendliche oder Erwachsene.

Es gilt nicht, dass die Räder klein und mittelgroß sind.

Es gilt nicht, dass die Räder klein und groß sind.

Es gilt nicht, dass die Räder mittelgroß und groß sind.

Wenn die Räder klein sind, dann ist dies ein Fahrrad für Kinder.

Wenn die Räder mittelgroß sind, dann ist dies ein Fahrrad für Jugendliche.

Wenn die Räder groß sind, dann ist dies ein Fahrrad für Erwachsene.



• Wahrheitsfunktoren. Null-Eins-Prüfung

– Wahrheitsfunktoren

Wahrheitsfunktoren sind aussagenbildende Funktoren von Aussagenargumenten²⁹; der logische Wert jeder zusammengesetzten Aussage, die mittels eines solchen Funktors gebildet wird, wird durch die logischen Werte seiner Argumente bestimmt.³⁰ Wir bezeichnen die Wahrheit einer Aussage mit dem Symbol „1“ und die Falschheit einer Aussage mit dem Symbol „0“.

Ein derartiger Wahrheitsfunctor ist das Negationszeichen: Der logische Wert einer Aussage bestimmt den logischen Wert der *Negation* dieser Aussage. Ist eine Aussage wahr, dann ist ihre Negation falsch, und wenn eine Aussage falsch ist, dann ist ihre Negation wahr:

p	$\neg p$
1	0
0	1

Wir erhalten nach den Regeln des Einführens und des Beseitigens der Konjunktion aus zwei Aussagen ihre *Konjunktion* und aus der Konjunktion jedes ihrer Glieder. Wir folgern anhand der Definition der logischen Folgerung³¹: Sind beide Glieder einer Konjunktion wahr, ist die Konjunktion wahr. Und: Ist eine Konjunktion wahr, dann ist jedes ihrer Glieder wahr. Ist irgendein Glied einer Konjunktion falsch, dann ist die Konjunktion falsch. Demnach ist die Konjunktion dann und nur dann wahr, wenn ihre beiden Glieder wahr sind. Die Konjunktion ist dann und nur dann falsch, wenn mindestens eines ihrer Glieder falsch ist. Damit ist das Konjunktionszeichen ein Wahrheitsfunctor:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

Beispiel 2-77: Konjunktion

Das Fahrrad hat einen Scheinwerfer.	1	Das Fahrrad hat Reflektoren.	1	Das Fahrrad hat einen Scheinwerfer und Reflektoren.	1
	0		1		0
	1		0		0
	0		0		0



²⁹ siehe Abschnitt Funktoren in Kap. 1, Sprachausdrücke, Logik, Schlüsse, Abschnitt Sprachausdrücke und [LOHN11]

³⁰ In den vorherigen Abschnitten ging es vor allem darum, ob Aussagen, die aus anderen Aussagen gewonnen werden, wahr sind. Dann war unsere Aussage: Wenn die Prämissen wahr sind, dann ist die Conclusio wahr. Jetzt wird nach der Wahrheit einer einzelnen Prämisse und nach den dafür notwendigen formalen Voraussetzungen gefragt.

³¹ siehe Kap 1, Sprachausdrücke, Logik, Schlüsse, Abschnitt Logik: Schluss schemata, logische Gesetze, logische Folgerungen

Ein beliebiges Glied einer *Disjunktion* kann nach der Einführungsregel der Disjunktion für die Wahrheit der Disjunktion entscheidend sein: Die Disjunktion ist wahr, sobald irgendein Glied einer Disjunktion wahr ist. Aus einer Disjunktion und der Negation eines ihrer Glieder folgt nach der Beseitigungsregel der Disjunktion ihr zweites Glied. Ist also eine Disjunktion und die Negation eines ihrer Glieder wahr, wenn demnach eines ihrer Glieder falsch ist, dann ist das zweite Glied dieser Disjunktion wahr. Daraus folgt nach der Regel der zusammengesetzten Transposition: Wenn ein Glied einer Disjunktion falsch und auch das andere Glied falsch ist, dann ist die Disjunktion falsch. Daher gilt: Die Disjunktion ist dann und nur dann wahr, wenn mindestens eines ihrer Glieder wahr ist. Die Disjunktion ist dann und nur dann falsch, wenn ihre beiden Glieder falsch sind. Das Zeichen der Disjunktion ist demnach ein Wahrheitsfunktork:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Beispiel 2-78: Disjunktion

Das Fahrrad hat Stützräder.	1	Der Fahrradfahrer hält das Gleichgewicht.	1	Das Fahrrad hat Stützräder oder der Fahrradfahrer hält das Gleichgewicht.	1
	0		1		1
	1		0		1
	0		0		0

■

Zur Betrachtung des Implikationszeichens als Wahrheitsfunktork verwenden wir die umgekehrte *Implikation*, die dem Gesetz des Ersetzens der Implikation durch die Disjunktion und die Negation entspricht. Aus ihrem Beweis folgt die Gültigkeit des Schemas:

$$\frac{\neg p \vee q}{p \rightarrow q}.$$

Aus der dem Schema zugrunde liegenden Regel leiten wir die Aussagen zur Implikation ab: Wenn eine bestimmte Disjunktion als Prämisse des Schemas wahr ist, dann ist auch die Implikation, die seine Conclusio ist, wahr. Die angesprochene Disjunktion ist wahr, wenn der Vordersatz der Implikation falsch oder der Hintersatz wahr ist. Damit ist die Implikation wahr, wenn der Vordersatz einer Implikation falsch oder ihr Hintersatz wahr ist. Nach der Abtrennungsregel folgt aus einer Implikation und ihrem Vordersatz ihr Hintersatz. Wenn also die Implikation wahr und ihr Vordersatz wahr ist, dann ist auch ihr Hintersatz wahr. Jetzt folgt aufgrund der zusammengesetzten Transposition: Die Implikation ist falsch, wenn der Vordersatz wahr ist und der Hintersatz falsch. Es folgt: Die Implikation ist dann und nur dann wahr, wenn ihr Vordersatz falsch ist oder ihr Hintersatz wahr ist. Die Implikation ist dann und nur dann falsch, wenn ihr Vordersatz wahr und ihr Hintersatz falsch ist.³² Das Zeichen der Implikation gehört daher zu den Wahrheitsfunktoren:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
0	1	1
1	0	0
0	0	1

Beispiel 2-79: Implikation

$\neg p \vee q$: Der Luftdruck ist nicht über 1 bar oder der Reifen rollt.

$p \rightarrow q$: Wenn der Luftdruck ist über 1 bar, dann rollt der Reifen.

Der Luftdruck ist über 1 bar.	1 0 1 0	Der Reifen rollt.	1 1 0 0	Wenn der Luftdruck über 1 bar ist, dann rollt der Reifen.	1 1 0 1
----------------------------------	------------------	-------------------	------------------	---	------------------

Die Implikation trifft offensichtlich zu im ersten und vierten Fall. Im dritten Fall ist die Aussage falsch: Obwohl der Luftdruck über 1 bar liegt, rollt der Reifen nicht. Im zweiten Fall rollt der Reifen, unabhängig vom Luftdruck, der in diesem Fall nicht über 1 bar beträgt. Trotzdem kann ich mich hinstellen: Wenn der Luftdruck ist über 1 bar, dann rollt der Reifen. Diese Beobachtung ist mit Zeile 2 - im Gegensatz zu Zeile 3! - nicht widerlegt.

Das Fahrrad ist 1500 km gefahren.	1 0 1 0	Das Fahrrad ist 1200 km gefahren.	1 1 0 0	Wenn das Fahrrad 1500 km gefahren ist, dann ist es 1200 km gefahren	1 1 0 1
--------------------------------------	------------------	--------------------------------------	------------------	--	------------------



³² Nach der angegebenen Tabelle ist die Implikation wahr, wenn ihr Vordersatz falsch oder ihr Hintersatz wahr ist. Eine so verstandene materiale Implikation kann somit wahr sein, obwohl es zwischen ihrem Vordersatz und ihrem Hintersatz keinen engeren Zusammenhang gibt, als den, dass es ausgeschlossen ist, dass der Vordersatz wahr und der Hintersatz falsch ist. Verwenden wir eine solche Implikation, dann ist der Ausdruck „ $p \rightarrow q$ “ dem Ausdruck „ $\neg p \vee q$ “ („nicht p oder q “) oder auch dem Ausdruck „ $\neg(p \wedge \neg q)$ “ („es ist nicht wahr, dass p und nicht q “) äquivalent. Umgangssprachlich lesen wir aber die Implikation „ $p \rightarrow q$ “ als Bedingungssatz „wenn p , so q “. Dieser Bedingungssatz wird umgangssprachlich mit verschiedenen Sinnensprechungen verwendet:

1. daraus, dass p , folgt, dass q
2. der Sachverhalt, dass p , ist der Grund dafür, dass q
3. es ist nicht möglich, dass p und nicht q
4. es ist nicht wahr, dass p und nicht q .

Die Logik verwendet die materiale Implikation in dem unter 4. genannten Sinn. Wenn wir die Implikation „ $p \rightarrow q$ “ fälschlicherweise im ersten Sinn verwenden, dann ist dies eine Verwechslung mit der (logischen) Folgerung. Die Interpretation der Implikation „ $p \rightarrow q$ “ als eine Aussage, die feststellt, dass q aus p folgt, ermöglicht paradoxe Konsequenzen, indem man behauptet, dass aus einer falschen Aussage eine beliebige Aussage folgt (weil die materiale Implikation mit falschem Vordersatz und beliebigem Hintersatz wahr ist) und dass eine wahre Aussage aus einer beliebigen Aussage folgt (weil die materiale Implikation mit beliebigem Vordersatz und wahren Hintersatz wahr ist). Vergleichbar falsche Konsequenzen entstehen bei der Verwendung der Implikation in einem der beiden anderen genannten Sinne.

Die Äquivalenz ist dann und nur dann wahr, wenn (der Einführungsregel und der Beseitigungsregel der Äquivalenz folgend) die ihr entsprechende Implikation und die umgekehrte Implikation wahr sind: Die Äquivalenz ist dann und nur dann wahr, wenn ihre beiden Glieder den gleichen logischen Wert haben. Dagegen ist die Äquivalenz dann und nur dann falsch, wenn ihre Glieder entgegengesetzte logische Werte haben, weil dann die dieser Äquivalenz entsprechende Implikation bzw. die umgekehrte Implikation falsch ist. Das Zeichen der Äquivalenz gehört daher zu den Wahrheitsfunktoren:

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	1

Beispiel 2-80: Äquivalenz

Das Fahrrad hat regulär genau 1 Rad.	1	Das Fahrrad ist ein Einrad.	1	Dann und nur dann, wenn ein Fahrrad regulär genau ein Rad hat, ist es ein Einrad.	1
	0		1		0
	1		0		0
	0		0		1

Der Luftdruck ist über 1 bar.	1	Der Reifen ist prall.	1	Dann und nur dann, wenn der Luftdruck ist über 1 bar, dann ist der Reifen prall.	1
	0		1		0
	1		0		0
	0		0		1



Die bisher besprochene Disjunktion nennen wir auch einschließende (nichtausschließende) Disjunktion. Die Wahrheit dieser Disjunktion schließt die Wahrheit ihrer beiden Glieder nicht aus. Die *ausschließende Disjunktion*³³ ist dagegen dann und nur dann wahr, wenn genau eines ihrer Glieder wahr ist. Diese Disjunktion ist dann und nur dann falsch, wenn ihre beiden Glieder wahr sind oder beide falsch sind. Wir verwenden „oder“ als Funktor für die einschließende und als Funktor für die ausschließende Disjunktion das „entweder ... oder“:

p	q	entweder p oder q
1	1	0
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Damit sind die ausschließende Disjunktion und die Negation der Äquivalenz äquivalent. Die ausschließende Disjunktion ist dann und nur dann wahr, wenn die Äquivalenz falsch ist.

³³ oder auch Kontravalenz (siehe bspw. [ZÖGL97])

„Entweder ... oder“ verwenden wir als Funktor der ausschließenden Disjunktion bspw. in den Ausdrücken:

- Entweder wir fahren bergab oder wir müssen treten.
- Entweder hat ein Fahrrad eine Kettenschaltung oder es hat eine Nabenschaltung
- Entweder verkaufen die S.-Werke Fahrräder zu einem attraktiven Preis oder sie verschwinden vom Markt.

Beispiel 2-81: Ausschließende Disjunktion

	1		1	Das Fahrrad Nirwana hat	0
Das Fahrrad Nirwana hat	0	Das Fahrrad Nirwana hat	1	entweder den Sattel	1
den Sattel Futur.	1	den Sattel Komfort.	0	Futur oder den Sattel	1
	0		0	Komfort.	0



Das Exklusionszeichen „ $|$ “ bezeichnet die *Exklusion* „ $p|q$ “, die wir wie folgt lesen: höchstens p oder q . Die Exklusion ist dann und nur dann wahr, wenn mindestens eines ihrer Glieder falsch ist. Die Exklusion ist dann und nur dann falsch, wenn die beiden Glieder wahr sind. Exklusion und Negation der Konjunktion sind äquivalent:

p	q	$p q$
1	1	0
0	1	1
1	0	1
0	0	1

Beispiel 2-82: Exklusion

	1		1	Höchstens wir reparieren	0
Wir reparieren das	0	Wir kaufen ein neues	1	das Fahrrad oder wir	1
Fahrrad.	1	Fahrrad.	0	kaufen ein neues Fahr-	1
	0		0	rad.	1



Die *einschließende Negation* bezeichnen wir mit dem Zeichen „ $\downarrow$ “. Den Ausdruck „ $p \downarrow q$ “, lesen wir: weder p noch q . Die einschließende Negation ist dann und nur dann wahr, wenn ihre beiden Glieder falsch sind. Die einschließende Negation ist dann und nur dann falsch, wenn mindestens eines ihrer Glieder wahr ist. Die einschließende Negation zweier Ausdrücke ist der Negation der Disjunktion dieser Ausdrücke äquivalent:

p	q	$p \downarrow q$
1	1	0
0	1	0
1	0	0
0	0	1

Beispiel 2-83: Einschließende Negation

	1		1		0
Der Fahrradrahmen ist blau.	0	Der Fahrradrahmen ist rot.	1	Der Fahrradrahmen ist weder blau noch rot.	0
	1		0		0
	0		0		1



Wir beenden an dieser Stelle die exemplarische Diskussion der Wahrheitsfunktoren und stellen uns die Frage, wie viele Wahrheitsfunktoren von einem, von zwei usw. Argumenten existieren. Dann ist bspw. die Negation nicht der einzige Wahrheitsfunktoren von einem Argument: Die Tabelle des Wahrheitsfunktors von einem Argument enthält trivialerweise so viele verschiedene Wahrheitsfunktoren von einem Argument, wie verschiedene Anordnungen der Symbole 1, 0 in zwei Zeilen einer Spalte eines solchen Funktors möglich sind.

	Assertion	Negation	Funktor verum	Funktor falsum
p	$as(p)$	$\neg p$	$vr(p)$	$fl(p)$
1	1	0	1	0
0	0	1	1	0

Der Funktor verum bildet eine Aussage, die unabhängig vom Argument immer wahr ist. Der Funktor falsum bildet eine Aussage, die unabhängig vom Argument immer falsch ist.

Beispiel 2-84: Wahrheitsfunktoren

	p	as(p)	$\neg p$	vr(p)	fl(p)
Das Rad ist ein Herrenrad.	1	1	0	1	0
	0	0	1	1	0



Wir stellen uns eine Montagelinie vor, auf der unter anderem auch Herrenräder montiert werden. Das Qualitätssicherungssystem erfasst die Eigenschaften und verkündet am 3. Takt: „Dies ist ein Herrenrad“. Zum 4. Takt kommt die Aussage: „Dies ist kein Herrenrad“. Dann stimmt die Assertion diesen Aussagen zu, die Negation „widerspricht immer“. Der Funktor verum sagt: „Auf dieser Linie werden nur Herrenräder montiert.“ Der Funktor falsum sagt: „Auf dieser Linie werden keine Herrenräder montiert.“

Die Tabelle eines Wahrheitsfunktors von n Argumenten besteht aus n Argument-Spalten und 2^n Zeilen. Die Tabelle eines Wahrheitsfunktors mit zwei Argumenten hat demnach $2^2 = 4$ Zeilen. Die Anzahl der Wahrheitsfunktoren mit zwei Argumenten ist 2^{2^2} . Die nachstehende Tabelle zeigt alle 16 Wahrheitsfunktoren mit zwei Argumenten. Die besprochenen Funktoren der Exklusion, der Implikation, der Äquivalenz, der einschließenden Negation, der Disjunktion, der ausschließenden Disjunktion und der Konjunktion sind die Funktoren $F_2, F_5, F_7, F_8, F_9, F_{10}, F_{15}$.

		F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Für die Funktoren $F_1, F_3, F_4, F_6, F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{14}$ und F_{16} gelten die Äquivalenzen:

$$F_1(p, q) \leftrightarrow (p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q) \leftrightarrow p \vee \neg p$$

$$F_3(p, q) \leftrightarrow q \rightarrow p$$

$$F_4(p, q) \leftrightarrow \neg q \wedge (p \vee \neg p) \leftrightarrow \neg q$$

$$F_6(p, q) \leftrightarrow \neg p \wedge (q \vee \neg q) \leftrightarrow \neg p$$

$$F_{11}(p, q) \leftrightarrow p \wedge (q \vee \neg q) \leftrightarrow p$$

$$F_{12}(p, q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$$

$$F_{13}(p, q) \leftrightarrow q \wedge (p \vee \neg p) \leftrightarrow q$$

$$F_{14}(p, q) \leftrightarrow \neg p \wedge q$$

$$F_{16}(p, q) \leftrightarrow (p \wedge \neg p) \wedge (q \wedge \neg q) \leftrightarrow p \wedge \neg p.$$

Der Funktor F_1 ist der Funktor verum von zwei Argumenten. F_3 ist ein Funktor, der die umgekehrte Implikation bildet. Den Ausdruck „ $F_{11}(p, q)$ “ lesen wir: „ p unabhängig davon, ob q oder nicht q “. Analog lesen wir die mit Hilfe der Funktoren F_{13} , F_6 und F_4 gebildeten Ausdrücke. Der Funktor F_{16} ist der Funktor falsum von zwei Argumenten.³⁴

³⁴ Siehe die Zusammenstellung der Junktoren bspw. in [ZÖGL97] (Die Werte der Argumente wie in der Tabelle oben):

Name		Wahrheitstafel	Zeichen	Name		Wahrheitstafel	Zeichen
Tautologie	J_1	w w w w	$\top$	Kontravalenz	J_9	f w w f	$\succ \neg \prec$
Exklusion	J_2	f w w w	$ $	Postpendenz	J_{10}	w f w f	$\perp$
Implikation	J_3	w f w w	$\rightarrow$	Präpendenz	J_{11}	w w f f	$\neg \perp$
Replikation	J_4	w w f w	$\leftarrow$	Rejektion	J_{12}	f f f w	∇
Disjunktion	J_5	w w w f	$\vee$	Präsektion	J_{13}	f f w f	$\neg \prec$
Pränonpendenz	J_6	f f w w	$\neg$	Postsektion	J_{14}	f w f f	$\succ \neg$
Postnonpendenz	J_7	f w f w	$\neg \neg$	Konjunktion	J_{15}	w f f f	$\wedge$
Äquivalenz	J_8	w f f w	$\leftrightarrow$	Antilogie	J_{16}	f f f f	$\perp$

Die Tabelle eines Wahrheitsfunktors von drei Argumenten hat 8 Zeilen und 256 Wahrheitsfunktoren. Beispiele für Wahrheitsfunktoren von drei Argumenten sind Bindewörter, die dreigliedrige Konjunktionen oder Disjunktionen bilden.³⁵

Beispiel 2-85: Dreigliedrige Konjunktion, dreigliedrige Disjunktion

Das Fahrrad Nirwana hat ein Vorderrad Mavic und ein Hinterrad Mavic und einen Lenker Cinelli. Das Fahrrad Nirwana hat einen Sattel Brooks oder einen Sattel Itala oder einen Sattel Selle Royal.



Einen Wahrheitsfunktors F von n Argumenten können wir mit Hilfe der Wahrheitsfunktoren $F_1, \dots, F_k$ nur dann *definieren* (bestimmen), wenn es für den Ausdruck $F(p_1, \dots, p_n)$ einen äquivalenten Ausdruck gibt, der ausschließlich mit Hilfe der Aussagenvariablen: $p_1, \dots, p_n$ und der Wahrheitsfunktoren $F_1, \dots, F_k$ notiert ist. Ein solcher äquivalenter Ausdruck, der ausschließlich mit Hilfe der Aussagenvariablen: $p_1, \dots, p_n$ und der Funktoren $F_1, \dots, F_k$ notiert ist, *definiert* den gegebenen Funktor F oder auch den mit Hilfe des Funktors F gebildeten Ausdruck.³⁶ Bspw. lässt sich die dreigliedrige Konjunktion mit Hilfe der Konjunktion von zwei Argumenten definieren. Der Ausdruck „ $(p \wedge q) \wedge r$ “ und der ihm aufgrund des Assoziativgesetzes äquivalente Ausdruck „ $p \wedge (q \wedge r)$ “ definieren eine solche drei-gliedrige Konjunktion. Genauso können wir mit Hilfe der Konjunktion von zwei Argumenten die Konjunktion von n Argumenten definieren. Sie ist dann und nur dann wahr, wenn alle ihre Glieder wahr sind.

Beispiel 2-86: Dreigliedrige Konjunktion

Ein Fahrrad hat ein Vorderrad und ein Hinterrad und ein Fahrrad hat einen Lenker $\leftrightarrow$ Ein Fahrrad hat ein Vorderrad und ein Fahrrad hat ein Hinterrad und einen Lenker.



In gleicher Weise definiert der Ausdruck „ $(p \vee q) \vee r$ “ oder auch der ihm äquivalente Ausdruck „ $p \vee (q \vee r)$ “ die dreigliedrige übliche Disjunktion. Entsprechend können wir mit Hilfe der üblichen (nichtausschließenden) Disjunktion von zwei Argumenten die übliche (nicht ausschließende) Disjunktion von n Argumenten definieren, die dann und nur dann wahr ist, wenn mindestens eines ihrer Glieder wahr ist.

³⁵ Ein Bindewort mit drei Argumenten existiert in der deutschen Sprache nicht (siehe bspw. [DMSW96], S. 40). „Entweder ... oder ...“ hat nur zwei Argumente. Für so etwas wie „Entweder p_1 , auf jeden Fall p_2 oder p_3 “, haben wir in der Umgangssprache keine Bindewörter (Konjunktionen). Also ist in Beispiel 2-85 darauf hinzuweisen, dass der Funktor „und“ kein Funktor von drei Argumenten ist, sondern jeweils zwei Argumente bindet.

³⁶ zur „Definition“ siehe Kap. 1, Sprachausdrücke, Logik, Schlüsse, Abschnitt Definitionen, insbesondere Nominaldefinition

Beispiel 2-87: Dreigliedrige Disjunktion

Das Fahrrad Nirwana hat Sattel Futur oder Pedal Trampel oder das Fahrrad Nirwana hat Rahmen Atlas $\leftrightarrow$ Das Fahrrad Nirwana hat Sattel Futur oder das Fahrrad hat Pedal Trampel oder Rahmen Atlas.



Die dreigliedrige ausschließende Disjunktion ist dann und nur dann wahr, wenn eines und nur eines ihrer Glieder wahr ist. Diese dreigliedrige ausschließende Disjunktion, der in einer ihrer Bedeutungen die Redewendung „entweder p oder q oder r “ entspricht, wird durch den folgenden Ausdruck definiert:

$$(p \vee q \vee r) \wedge \neg(p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge r) \wedge \neg(q \wedge r).$$

p	q	r	p oder q oder r
1	1	1	0
0	1	1	0
1	0	1	0
0	0	1	1
1	1	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
0	0	0	0

Beispiel 2-88: Exklusive dreigliedrige Disjunktion

Das Fahrrad Nirwana hat Sattel Futur oder Sattel Komfort oder Sattel Retro und es gilt nicht, dass das Fahrrad Nirwana Sattel Futur und Sattel Komfort hat und es gilt nicht, dass das Fahrrad Nirwana Sattel Komfort und Sattel Retro hat und es gilt nicht, dass das Fahrrad Nirwana Sattel Futur und Sattel Retro hat.



Mit den Zeichen der Negation, der Konjunktion und der Disjunktion können wir jeden anderen Wahrheitsfunktoren von n Argumenten definieren. Zum Beweis geben wir für Ausdrücke, die mit Hilfe definierter Funktoren gebildet wurden, mit Hilfe der Zeichen der Negation, der Konjunktion und der Disjunktion äquivalente Ausdrücke an.³⁷ Die einschließende Negation bspw. ist nur in einem Fall wahr, nämlich dann, wenn ihre beiden Glieder falsch und ihre Negationen wahr sind. Die einschließende Negation „weder p noch q “ ist also dann und nur dann wahr, wenn die Konjunktion „ $\neg p \wedge \neg q$ “ wahr ist; somit ist anhand des Zeichens der Negation und der Konjunktion der Funktor der einschließenden Negation definiert. Zu den Beispielen für Wahrheitsfunktoren, die in mehr als nur einem Fall wahre Aussagen bilden, gehört die Äquivalenz. Sie ist in zwei Fällen wahr: Wenn ihre beiden Glieder wahr sind und wenn ihre beiden Glieder falsch sind. Die Äquivalenz „ $p \leftrightarrow q$ “ ist dann wahr, wenn die Konjunktion „ $p \wedge q$ “ oder die Konjunktion „ $\neg p \wedge \neg q$ “ wahr ist. Das ist der Fall dann und nur dann, wenn die Disjunktion „ $p \wedge q \vee \neg p \wedge \neg q$ “

wahr ist. Dieser mittels der Zeichen der Negation, der Konjunktion und der Disjunktion notierte Ausdruck ist dem Ausdruck „ $p \leftrightarrow q$ “ äquivalent; er definiert daher das Äquivalenzzeichen. Vergleichbar ist die Implikation „ $p \rightarrow q$ “ einer mit Hilfe der Zeichen der Negation, der Konjunktion und der Disjunktion notierten Disjunktion äquivalent. Daher können wir das Implikationszeichen mit Hilfe der genannten Funktoren definieren. In der Spalte des Funktor falsum von zwei Argumenten tritt schließlich nie der Wert 1 auf. Der Ausdruck „ $f(p, q)$ “ ist daher dem Ausdruck $\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q)$ äquivalent. Auch der Funktor falsum von zwei Argumenten wird demnach über die Zeichen der Negation und der Konjunktion definiert.

Beispiel 2-89: Funktor falsum

Es gilt nicht, dass das Fahrrad Nirwana Sattel Futur und Pedal Trampel hat und es gilt nicht, dass das Fahrrad Nirwana nicht Sattel Futur und Pedal Trampel hat und es gilt nicht, dass das Fahrrad Nirwana Sattel Futur und nicht Pedal Trampel hat und es gilt nicht, dass das Fahrrad Nirwana nicht Sattel Futur und nicht Pedal Trampel hat.



Einen Ausdruck, der mittels der Zeichen der Negation, der Konjunktion und der Disjunktion notiert ist und einen gegebenen Wahrheitsfunktors von n Argumenten definiert, bilden wir allgemein wie folgt: Den Zeilen der Tabelle, bei denen in der Spalte des Funktors der Wert 1 auftritt, ordnen wir die Konjunktion der Variablen (wenn in einer solchen Zeile unter den gegebenen Variablen der Wert 1 auftritt) oder die Negation der Variablen (wenn in einer solchen Zeile unter der gegebenen Variablen der Wert 0 auftritt) zu. Tritt in der Spalte des Funktors nur einmal der Wert 1 auf, dann ist ein diesen Funktor definierender Ausdruck die Konjunktion. Sie wird auf die angegebene Weise gebildet und der Zeile zugeordnet, in der in der Spalte des Funktors der Wert 1 auftritt. Tritt in der Spalte des Funktors der Wert 1 mehr als einmal auf, dann ist ein diesen Funktor definierender Ausdruck die Disjunktion der Konjunktionen. Diese werden auf die angegebene Weise gebildet und den Zeilen zugeordnet, in denen in der Spalte des Funktors der Wert 1 auftritt. Tritt in der Spalte des Funktors der Wert 1 nicht auf, dann ist ein diesen Funktor definierender Ausdruck die Konjunktion der Negationen aller einzelnen Konjunktionen. Diese werden wie oben angegeben gebildet.

³⁷ Alle Junktoren lassen sich durch eine Kombination aus Negation, Konjunktion und Disjunktion darstellen [ZOGL97]:

$$A \mid B = \neg A \vee \neg B = \text{nicht zugleich } A \text{ und } B$$

$$A \rightarrow B = \neg A \vee B = \text{Wenn } A, \text{ dann } B$$

$$A \leftarrow B = A \vee \neg B = A \text{ nur dann, wenn } B$$

$$A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (A \wedge \neg B) = A \text{ genau dann, wenn } B$$

$$A \succ \neg B = (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) = \text{entweder } A \text{ oder } B$$

$$A \nabla B = \neg A \wedge \neg B = \text{weder } A \text{ noch } B$$

$$A \neg B = \neg A \wedge B = B \text{ ohne } A$$

$$A \neg B = A \wedge \neg B = A \text{ ohne } B$$

Konjunktion der Negationen der Konjunktionen $\neg(p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge r) \wedge \neg(q \wedge r)$					
Disjunktion der Konjunktion $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$					
Konjunktion $p \wedge q \wedge r$					
p	q	r			
1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Mit dem im vorhergehenden Abschnitt angegebenen Gesetz des Ersetzens der Konjunktion durch die Disjunktion und die Negation können wir das Konjunktionszeichen mit Hilfe der Zeichen der Negation und der Disjunktion zu definieren. Für die angeführte Behauptung von der Definierbarkeit der übrigen Wahrheitsfunktoren mit Hilfe der Zeichen der Negation, der Konjunktion und der Disjunktion folgt daraus: Mit den Zeichen der Negation und der Disjunktion lässt sich jeder übrige Wahrheitsfunctor von n Argumenten definieren.³⁸ Analog schließen wir aufgrund des Gesetzes des Ersetzens der Disjunktion durch die Konjunktion und die Negation auf die Definierbarkeit des Zeichens der Disjunktion mit Hilfe der Zeichen der Negation und der Konjunktion: Mittels der Zeichen der Negation und der Konjunktion können wir jeden übrigen Wahrheitsfunctor von n Argumenten definieren.

Eine Aussage, die feststellt, dass der Funktor F auf bestimmte Weise mit Hilfe der Funktoren $F_1, \dots, F_k$ darstellbar ist, also eine Aussage, die feststellt, dass der Ausdruck $F(p_1, \dots, p_n)$ einen bestimmten, mit Hilfe der Variablen $p_1, \dots, p_n$ und der Funktoren $F_1, \dots, F_k$ notierten Ausdruck äquivalent ist, heißt eine *Definition* eines Wahrheitsfunktors F von n Argumenten mit Hilfe der Funktoren $F_1, \dots, F_k$. Eine solche Definition notieren wir mittels des Zeichens der Definitionsgleichheit und schreiben links von $:=$ den zu definierenden Ausdruck $F(p_1, \dots, p_n)$, das *Definiendum*, rechts von $:=$ den definierenden Ausdruck, das *Definiens*, mit Hilfe der Variablen: $p_1, \dots, p_n$ und der Funktoren $F_1, \dots, F_k$.³⁹ Bspw. definieren wir das Zeichen der Disjunktion mittels der Zeichen der

³⁸ Siehe Junktorenbasen in [ZOGL97], S. 54

³⁹ Siehe Nominaldefinition in Kap. 1, Sprachausdrücke, Logik, Schlüsse, Abschnitt Definitionen

Negation und der Implikation: $p \vee q := \neg p \rightarrow q$. Mit dieser Definition stellen wir fest: Der Ausdruck „ $p \vee q$ “ und der Ausdruck „ $\neg p \rightarrow q$ “ sind äquivalent. Eine derartige Definition ist dann und nur dann *richtig*, wenn sie wahr und ihr Definiendum mit ihrem Definiens äquivalent ist. Der Nachweis der Richtigkeit ist somit ein Nachweis dieser Äquivalenz. Eine erste Vorgehensweise für diesen Nachweis besteht darin, die Äquivalenz beider Seiten der Definition mit Hilfe der Regeln des Annahmesystems zu beweisen. Diese Vorgehensweise wenden wir bei den Funktoren an, für die wir die Regeln des Annahmesystems formuliert haben. Für den Nachweis der Richtigkeit der angegebenen Definition des Zeichens der Disjunktion mittels der Zeichen der Negation und der Implikation müssen wir dann das Gesetz $p \vee q \leftrightarrow \neg p \rightarrow q$ beweisen. Die zweite Vorgehensweise weist mit den Tabellen der gegebenen Wahrheitsfunktoren nach, dass die logischen Werte beider Seiten für gleiche Variablenwerte gleich sind. Mit dieser Vorgehensweise prüfen wir die Richtigkeit einer Definition, indem wir mit Hilfe der Tabellen für Disjunktion, Negation und Implikation die logischen Werte immer umfangreicherer Ausdrücke berechnen. Wir erhalten als Ergebnis:

p	$\vee$	q	$:=$	$\neg$	p	$\rightarrow$	q
1	1	1		0	1	1	1
0	1	1		1	0	1	1
1	1	0		0	1	1	0
0	0	0		1	0	0	0

Die linke und die rechte Seite der Definition haben für die gleichen logischen Werte der Variablen den gleichen logischen Wert; damit ist die Definition richtig.⁴⁰

Beispiel 2-90: Beispiel einer Definition

Der Reifen hat unter 1 bar oder der Reifen rollt gut := Es gilt nicht, dass der Reifen nicht unter 1 bar hat und nicht gut rollt.⁴¹

Der Reifen hat unter 1 bar oder der Reifen rollt gut := Wenn nicht gilt (Der Reifen hat unter 1 bar), dann rollt der Reifen gut.



Das Zeichen der Disjunktion lässt sich mit dieser Definition über das Zeichen der Negation und der Implikation definieren. Daraus folgt zusammen mit der Definierbarkeit aller übrigen Wahrheitsfunktoren anhand der Zeichen der Negation und der Disjunktion, dass wir diese Wahrheitsfunktoren alle mit Hilfe der Zeichen der Negation und der Implikation definieren können.

⁴⁰ Die Aussage ist: Gleiche Variable, gleiche Werte. Das sind in diesem Beispiel die Variablen p und q , nicht $\wedge$, $\neg$ und $\rightarrow$!

⁴¹ siehe Ersetzen der Disjunktion durch die Konjunktion und die Negation

Beispiel 2-91: Beispiel einer Definition

Das Fahrrad ist unvollständig oder das Fahrrad ist verkehrstauglich := Es gilt nicht, dass das Fahrrad nicht unvollständig ist und nicht verkehrstauglich ist. Das Fahrrad ist unvollständig oder das Fahrrad ist verkehrstauglich := Wenn nicht gilt (Das Fahrrad ist unvollständig), dann ist das Fahrrad verkehrstauglich.

■

Wir weisen die Richtigkeit der Definitionen der oben angeführten einstelligen Wahrheitsfunktoren über die zweite Vorgehensweise nach:

$vr(p) := p \rightarrow p$	$fl(p) := \neg(p \rightarrow p)$	$as(p) := p$
1 1 1 1 1	0 1 0 1 1 1	1 1 1
1 0 0 1 0	0 0 0 0 1 0	0 0 0

Die letzte Definition zeigt, dass wir den Funktor der Assertion ausschließlich mit Hilfe von Variablen definieren können: Für den Ausdruck „ $as(p)$ “ existiert ein äquivalenter Ausdruck, der nur aus der Aussagenvariablen „ p “ besteht.

Im folgenden überprüfen wir die Richtigkeit der Definition der Zeichen der Negation und der Konjunktion über das Zeichen der Exklusion:

$\neg p := p \mid p$	$p \wedge q := (p \mid q) \mid (p \mid q)$
0 1 1 0 1	1 1 1 1 0 1 1 1 0 1
1 0 0 1 0	0 0 1 0 1 1 0 0 1 1
	1 0 0 1 1 0 0 1 1 0
	0 0 0 0 1 0 0 0 1 0

Mit dem Zeichen der Negation und der Konjunktion lassen sich alle übrigen Wahrheitsfunktoren definieren. Dann folgt aufgrund dieser Definitionen: Das Zeichen der Exklusion reicht allein zur Definition aller übrigen Wahrheitsfunktoren aus.

Beispiel 2-92: Definition der Konjunktion über Exklusion

Das Fahrrad Nirwana hat Sattel Futur und das Fahrrad Nirwana hat Pedal Trampel := Es gilt höchstens, dass höchstens das Fahrrad Nirwana den Sattel Futur hat oder das Fahrrad Nirwana das Pedal Trampel hat, oder dass höchstens das Fahrrad Nirwana den Sattel Futur hat oder das Fahrrad Nirwana das Pedal Trampel hat.

■

Das Zeichen der einschließenden Negation (Rejektion) ist der zweite Wahrheitsfunktor von zwei Argumenten, der allein ausreicht, um alle übrigen Wahrheitsfunktoren zu definieren, weil wir mit ihm die Zeichen die Zeichen der Negation und der Disjunktion definieren können, die ihrerseits zur Definition aller übrigen Wahrheitsfunktoren von n Argumenten ausreichen. Die Prüfung der Richtigkeit der Definition der Zeichen der Negation und der Disjunktion mittels des Zeichens der einschließenden Negation geben wir wie folgt:

$\neg$	p	$:=$	p	$\downarrow$	p	p	$\vee$	q	$:=$	$(p$	$\downarrow$	$q)$	$\downarrow$	$(p$	$\downarrow$	$q)$
0	1		1	0	1	1	1	1		1	0	1	1	1	0	1
1	0		0	1	0	0	1	1		0	0	1	1	0	0	1
						1	1	0		1	0	0	1	1	0	0
						0	0	0		0	1	0	0	0	1	0

Beispiel 2-93: Definition der Disjunktion über einschließende Negation

Das Fahrrad Nirwana hat den Sattel Futur oder das Fahrrad Nirwana hat das Pedal Trampel
 $:=$ Es gilt weder, dass weder das Fahrrad Nirwana den Sattel Futur noch das Fahrrad Nirwana das Pedal Trampel hat noch dass weder das Fahrrad Nirwana den Sattel Futur hat noch das Fahrrad Nirwana das Pedal Trampel hat.



Damit haben wir gezeigt, dass das Zeichen der Exklusion und das Zeichen der einschließenden Negation die beiden Wahrheitsfunktoren von zwei Argumenten sind, von denen jeder zur Definition aller übrigen Wahrheitsfunktoren von n Argumenten ausreicht.

– Null-Eins-Prüfung

Mit den Tabellen der Wahrheitsfunktoren können wir die Ausdrücke und Schemata des klassischen Aussagenkalküls auf ihre Wahrheit überprüfen (*Null-Eins-Prüfung*):

1. Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch (Prinzip der Zweiwertigkeit).
2. Alle Funktoren des Aussagenkalküls sind Wahrheitsfunktoren; die logischen Werte der zusammengesetzten Aussagen sind deshalb durch die logischen Werte der Teilaussagen bestimmt (Extensionalität aller Funktoren des Aussagenkalküls).

Wenn wir feststellen wollen, dass ein gegebener Ausdruck ein *logisches Gesetz*⁴² ist, dann müssen wir seine Wahrheit für alle Werte der Variablen überprüfen. Diese Variablen sind im Aussagenkalkül Aussagenvariablen, die nach dem Prinzip der Zweiwertigkeit wahre oder falsche Aussagen sind. Für den Nachweis, dass ein Ausdruck des Aussagenkalküls ein logisches Gesetz ist, haben wir zu zeigen, dass er immer wahr ist, unabhängig davon, ob die den Variablen zugeordneten Aussagen wahr oder falsch sind. Deshalb beginnt die Prüfung mit der Zuordnung aller möglichen Anordnungen der logischen Werte 1 und 0 zu den Variablen des zu prüfenden Ausdrucks. Danach berechnen wir ausgehend von den einfachsten Teilausdrücken des gegebenen Ausdrucks nacheinander die logischen Werte aller Teilausdrücke bis zur Berechnung des logischen Wertes des zu prüfenden Ausdrucks; dabei verwenden wir die Tabellen der in dem betreffenden Ausdruck auftretenden Wahrheitsfunktoren.

Ein erstes Beispiel für die Null-Eins-Prüfung von Ausdrücken des Aussagenkalküls sei:

p	$\vee$	$\neg$	p
1	1	0	1
0	1	1	0

⁴² siehe Kap. 1, Sprachausdrücke, Logik, Schlüsse, Abschnitt Logische Gesetze

Unter die Aussagenvariable p schreiben wir in der ersten Zeile der Prüfung den Wert 1, in der zweiten Zeile den Wert 0. Dann berechnen wir den logischen Wert des Ausdruckes „ $\neg p$ “, anschließend den logischen Wert des Ausdruckes „ $p \vee \neg p$ “. Hat „ p “ den Wert 1 (erste Zeile), folgt für den Ausdruck „ $\neg p$ “ der Wert 0. Dieser Wert findet in der ersten Zeile seinen Platz unter dem Negationszeichen. Hat „ p “ den Wert 0 (zweite Zeile), dann schreiben wir für „ $\neg p$ “ den Wert 1 unter das Negationszeichen. Das erste Glied „ p “ der Disjunktion „ $p \vee \neg p$ “ hat in der ersten Zeile den Wert 1, das zweite Glied den Wert 0. Aus der Tabelle für die Disjunktion entnehmen wir für eine solche Disjunktion den Wert 1 und schreiben diesen in der ersten Zeile unter das Disjunktionszeichen. In der zweiten Zeile der Prüfung hat das erste Glied „ p “ den Wert 0, während das zweite Glied den Wert 1 hat. Nach der Tabelle für die Disjunktion schreiben wir dann den Wert 1 in die zweite Zeile unter das Disjunktionszeichen. Damit hat der geprüfte Ausdruck den Wert 1 unabhängig davon, ob „ p “ den Wert 1 oder den Wert 0 hat. Er ist ein immer wahrer Ausdruck und daher ein logisches Gesetz. Analog schreiben wir für die Prüfung der Wahrheit des Ausdruckes „ $\neg(p \wedge \neg p)$ “ die Werte 1 und 0 unter die Variable; anschließend berechnen wir die logischen Werte der zusammengesetzten Ausdrücke. Die Werte schreiben wir dabei unter die diese zusammengesetzten Ausdrücke bildenden Funktoren. Das Ergebnis ist:

$\neg$	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$p)$
1	1	0	0	1
1	0	0	1	0

Es ist der Nachweis, dass der geprüfte Ausdruck wahr und somit ein logisches Gesetz ist.

Tritt in einem gegebenen Ausdruck eine größere Anzahl von Variablen auf, müssen wir zu Beginn alle möglichen Anordnungen der logischen Werte unter die Variablen schreiben. Wir betrachten ein Beispiel für die Prüfung eines Ausdruckes mit zwei Variablen:

$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\vee$	$(q$	$\rightarrow$	$p)$
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0

Für diese Prüfung berechnen wir zuerst die logischen Werte der Ausdrücke „ $p \rightarrow q$ “, „ $q \rightarrow p$ “ und dann des Ausdruckes „ $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$ “; wie wir sehen, ein immer wahrer Ausdruck. Der geprüfte Ausdruck ist aufgrund der Äquivalenz: $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q$ dem Ausdruck „ $(\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee p)$ “ äquivalent. Dieser Ausdruck folgt aus dem Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten, wenn wir die Einführung der Disjunktion und das Assoziativgesetz für die Disjunktion nutzen.⁴³ Wir prüfen den Ausdruck $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$:

$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\rightarrow$	$(q$	$\rightarrow$	$p)$
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0

Im Gegensatz zu den ersten Beispielen hat der gesamte Ausdruck in der zweiten Zeile den Wert 0. Deshalb ist dieser Ausdruck kein logisches Gesetz.

Vielfach ist eine verkürzte Prüfung möglich: Wenn wir einen Ausdruck von der Form einer Implikation prüfen, dann untersuchen wir, ob unter der Annahme der Wahrheit ihrer Vordersätze der ihnen entsprechende Hintersatz wahr sein muss. Der geprüfte Ausdruck ist in diesem Fall wahr; wenn seine Vordersätze wahr sind, ist es ausgeschlossen, dass der ihnen entsprechende Hintersatz falsch ist.

Wir geben Beispiele für eine solche verkürzte Prüfung.

$\neg$	p	$\wedge$	$\neg$	q	$\rightarrow$	$\neg$	$(p \vee q)$
1	0	1	1	0		1	0 0 0
						↑	

Wir beginnen mit der Annahme, dass der Ausdruck „ $\neg p \wedge \neg q$ “ als Vordersatz der Implikation wahr ist. Dazu müssen nach der Tabelle für die Konjunktion die Ausdrücke „ $\neg p$ “ und „ $\neg q$ “ wahr sein. Die Ausdrücke „ p “ und „ q “ sind dann falsch. Daher schreiben wir im Hintersatz unter die Variablen „ p “ und „ q “ den Wert 0. In diesem Fall hat der Ausdruck „ $p \vee q$ “ nach der Tabelle für die Disjunktion den Wert 0; diesen Wert schreiben wir unter das Zeichen der Disjunktion. Die Negation dieses Ausdruckes besitzt dann den Wert 1. Wir notieren diesen Wert unter dem Zeichen der Negation, mit der der Hintersatz der Implikation beginnt. Wenn wir jetzt die Wahrheit des Vordersatzes der zu prüfenden Implikation voraussetzen, muss demnach ihr Hintersatz wahr sein. Daraus folgt, dass der Ausdruck immer wahr ist.

Auch im Beispiel

$(p \rightarrow q)$	$\rightarrow$	$[(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
1 1 1		1 1 1 1 1

nehmen wir die Wahrheit der Vordersätze „ $p \rightarrow q$ “, „ $q \rightarrow r$ “, „ p “ an. Wenn die Implikation „ $p \rightarrow q$ “ und ihr Vordersatz „ p “ jeweils den Wert 1 haben, dann folgt auch für ihren Hintersatz „ q “ der Wert 1. Hat die Implikation „ $q \rightarrow r$ “ gemäß Voraussetzung den Wert 1 und ihr Vordersatz „ q “ wie festgestellt ebenfalls den Wert 1, dann kann auch der Hintersatz „ r “ nur den Wert 1 haben. Die Annahme der Wahrheit der Vordersätze bedingt also die Wahrheit des entsprechenden Hintersatzes, woraus unmittelbar die Wahrheit des geprüften Ausdrucks folgt. Die oben angegebene Prüfung des Gesetzes des bedingten Syllogismus entspricht dem direkten Annahmeweis dieses Gesetzes. Die unverkürzte Prüfung dieses Gesetzes erfordert acht Zeilen.⁴⁴

Ggf. ist die Annahme der Falschheit des Hintersatzes einer Implikation zweckmäßiger. Stellt sich heraus, dass in diesem Fall der Vordersatz bzw. einer ihrer Vordersätze falsch sein muss, ist die Implikation wahr. Es ist dann ausgeschlossen, dass der Vordersatz wahr

⁴³ Dieses Gesetz ist ein weiteres Beispiel dafür, dass wir die materiale Implikation nicht mit der logischen Folgerung gleichsetzen dürfen. Verstehen wir nämlich den Ausdruck „ $p \rightarrow q$ “ als einen Ausdruck, der feststellt, dass q aus p folgt, so führt dies zu der falschen Schlussfolgerung, dass es für zwei beliebige Aussagen wahr ist, dass entweder aus der ersten die zweite oder aus der zweiten die erste folgt.

ist bzw. alle Vordersätze wahr sind und der Hintersatz der Implikation falsch ist. Im Beispiel

$\neg$	p	$\vee$	$\neg$	q	$\rightarrow$	$\neg$	$(p \wedge q)$
0	1	0	0	1		0	1 1 1
					↑	↓	

nehmen wir daher an, dass der Ausdruck „ $\neg(p \wedge q)$ “ falsch ist. Dann haben der Ausdruck „ $p \wedge q$ “ sowie die Ausdrücke „ p “ und „ q “ den Wert 1. Dann folgt für die Ausdrücke „ $\neg p$ “ und „ $\neg q$ “ der Wert 0; ihre Disjunktion „ $\neg p \vee \neg q$ “ hat ebenfalls den Wert 0. Wenn wir die Falschheit des Hintersatzes der zu prüfenden Implikation annehmen, dann muss auch ihr Vordersatz falsch sein, die geprüfte Implikation ist also immer wahr. Zeigt die verkürzte Prüfung einer Implikation, dass bei wahren Vordersatz der Hintersatz für mindestens eine Anordnung der Variablenwerte falsch ist, ist der gesamte Ausdruck falsch. Genauso ist der geprüfte Ausdruck falsch, sobald bei falschem Hintersatz der Vordersatz in einem einzigen Fall wahr ist.

Beispiel 2-94: Verkürzte Prüfung/Falschheit der Ausdrücke

$\neg$	$(p \wedge q)$	$\rightarrow$	$\neg$	p	$\wedge$	$\neg$	q
1	0 0 1		1	0 0 0		0	1

⁴⁴ Überprüfen der Wahrheit

$\neg$	p	$\wedge$	$\neg$	q	$\rightarrow$	$\neg$	$(p \vee q)$
1	0	1	1	0	1	1	0 0 0
0	1	0	1	0	1	0	1 1 0
1	0	0	0	1	1	0	0 1 1
0	1	0	0	1	1	0	1 1 1

$(p \rightarrow q)$	$\rightarrow$	$[(q \rightarrow r)$	$\rightarrow$	$(p \rightarrow r)$
1	1	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	1	1	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0

$\neg$	p	$\vee$	$\neg$	q	$\rightarrow$	$\neg$	$(p \wedge q)$
0	1	1	0	1	1	0	1 1 1
1	0	0	0	1	1	1	0 0 1
0	1	1	1	0	1	1	1 0 0
0	0	1	1	0	1	1	0 0 0

Angenommen der Vordersatz der Implikation ist wahr. Die Konjunktion „ $p \wedge q$ “ hat dann den Wert 0. Dazu muss mindestens eines ihrer Glieder den Wert 0 haben. Wenn wir annehmen, dass „ q “ den Wert 1 hat, dann hat der Hintersatz den Wert 0. Der Ausdruck ist falsch.

$\neg$	p	$\vee$	$\neg$	q	$\rightarrow$	$\neg$	$(p \vee q)$
0	1	1	1	0		0	1

Angenommen, der Hintersatz der Implikation ist falsch. Die Disjunktion „ $p \vee q$ “ hat den Wert 1. Dafür nehmen wir an, dass das Glied „ p “ den Wert 1 hat. Außerdem nehmen wir noch zulässig an, dass ihr zweites Glied „ q “ den Wert 0 hat. Dann hat „ $\neg q$ “ und der Vordersatz der Implikation den Wert 1. Der Ausdruck ist falsch.

■

Wir prüfen die Wahrheit eines Ausdruckes von der Form einer Äquivalenz. Für die verkürzte Prüfung müssen wir entweder zeigen, dass ausgehend von der Wahrheit einer Seite der Äquivalenz auch ihre zweite Seite wahr ist, oder, dass ausgehend von der Falschheit einer Seite der Äquivalenz auch die zweite falsch ist. Im Beispiel

$\neg$	$(p \vee q)$	$\leftrightarrow$	$\neg$	p	$\wedge$	$\neg$	q
1	0	0	0	1	0	1	0

geben die Pfeile an, dass wir unter Voraussetzung der Wahrheit des Vordersatzes zur Wahrheit des Hintersatzes gelangen, und umgekehrt. Der Ausdruck ist wahr. Im Beispiel

$\neg$	$(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	$\neg$	$(p \wedge \neg q)$
0	1	1	1	0

führt die Annahme der Falschheit des Vordersatzes zur Falschheit des Hintersatzes und umgekehrt. Der Ausdruck ist wahr.

Um mittels der verkürzten Null-Eins-Prüfung die Gültigkeit eines Schemas des Aussagenkalküls nachzuweisen, reicht es aus, zu zeigen, dass es ausgeschlossen ist, dass alle seine Prämissen wahr sind und die Conclusio falsch ist. Auch für diese Prüfung sind zwei Vorgehensweisen möglich:

1. Angenommen, alle Prämissen und Vordersätze der Conclusio sind wahr. Muss dann der Hintersatz der Conclusio wahr sein, dann ist das Schema gültig. Das Schema ist ungültig, wenn bei wahren Prämissen und wahren Vordersätzen der Conclusio der Hintersatz der Conclusio für mindestens eine Anordnung der Variablenwerte falsch sein kann.
2. Angenommen, die Conclusio ist falsch. Muss dafür mindestens eine der Prämissen falsch sein, dann ist das Schema gültig. Das Schema ist ungültig, wenn bei falscher Conclusio alle Prämissen wenigstens für eine Anordnung der Variablenwerte wahr sein können.

Beispiel 2-95: Verkürzte Prüfung/Gültigkeit von Schemata des Aussagenkalküls.

p	$\rightarrow$	q
0	1	0
$\neg$		q
1		0
$\neg$		p
1		0

Angenommen, beide Prämissen sind wahr. Hat „ $\neg q$ “ den Wert 1, dann hat „ q “ den Wert 0. Weil die Implikation „ $p \rightarrow q$ “ den Wert 1 hat und ihr Nachsatz „ q “ den Wert 0, folgt auch für ihren Vordersatz „ p “ der Wert 0. Daraus folgt für „ $\neg p$ “ der Wert 1. Da beide Prämissen wahr sind, muss die Conclusio wahr sein. Das Schema ist gültig.

p	$\rightarrow$	q		
0	1	1		
$\neg$	p	$\rightarrow$	$\neg$	q
1	0	0	0	1

Angenommen, die Conclusio ist falsch. Dann hat „ $\neg p$ “ den Wert 1 und „ $\neg q$ “ den Wert 0. Demnach hat „ p “ den Wert 0 und „ q “ den Wert 1. Für die Prämisse folgt dann der Wert 1. Das Schema ist ungültig.

p	$\rightarrow$	q				
1	1	1				
r	$\rightarrow$	s				
0	1	1				
p	$\wedge$	r	$\rightarrow$	q	$\wedge$	s
1	1	1		1	1	1

Angenommen, beide Prämissen und der Vordersatz der Conclusio sind wahr. Damit haben sowohl „ p “ und „ r “ als auch „ q “ und „ s “ den Wert 1, weil beide Implikationen wahr sind, in denen sie als Vordersätze auftreten. Demnach hat auch ihre Konjunktion, die der Hintersatz der Conclusio ist, den Wert 1. Unter der Voraussetzung der Wahrheit der Prämissen und des Vordersatzes der Conclusio muss der Hintersatz der Conclusio wahr sein. Das Schema ist gültig.

p	$\rightarrow$	q
0	1	0
r	$\rightarrow$	s
0	1	0
p	$\vee$	r
0	0	0
q	$\vee$	s
0	0	0

Angenommen die Conclusio ist falsch. Dann haben „ q “ und „ s “ den Wert 0. Zu prüfen ist dann, ob in diesem Fall alle Prämissen wahr sein können. Wenn die erste Prämisse

„ $p \rightarrow q$ “ den Wert 1 hat, dann ist die Konsequenz dessen, dass ihr Hintersatz „ q “ den Wert 0 hat, dass auch ihr Vordersatz „ p “ den Wert 0 hat. Wenn die zweite Prämisse „ $r \rightarrow s$ “ den Wert 1, „ s “ dagegen den Wert 0 besitzt, hat auch „ r “ den Wert 0. Dann besitzt aber auch die Disjunktion „ $p \vee r$ “ den Wert 0. Wenn wir also annehmen, dass die Conclusio falsch ist und die beiden ersten Prämissen wahr sind, dann muss die dritte Prämisse falsch sein. Deshalb ist ausgeschlossen, dass die Conclusio dieses Schemas falsch ist und alle ihre Prämissen wahr sind. Das Schema ist gültig.



Beispiel 2-96: Verkürzte 0 - 1 -Prüfung

Der Reifendruck beträgt > 1 bar	$\rightarrow$	Der Reifen rollt gut
1	1	1
Der Dynamo ist intakt	$\rightarrow$	Die Lampe hat Strom
1	1	1
Der Reifendruck beträgt > 1 bar	$\wedge$	Der Dynamo ist intakt $\rightarrow$
1	1	1
Der Reifen rollt gut	$\wedge$	Die Lampe hat Strom
1	1	1

Prämissen und Vordersatz der Conclusio sind wahr, also muss der Hintersatz auch wahr sein.



• Normalformen

Jeder Ausdruck des Aussagenkalküls ist Ausdrücken mit bestimmter Normalform äquivalent. Dabei sind *Normalformen* der Ausdrücke des Aussagenkalküls gewisse Ausdrücke mit einem bestimmten Aufbau. Wir verwenden sie, um die Wahrheit, insbesondere aber die Äquivalenz von Ausdrücken des Aussagenkalküls effizient zu prüfen.

– Konjunktive Normalform

Ein Ausdruck des Aussagenkalküls ist eine *konjunktive Normalform* genau dann, wenn er

1. eine Aussagenvariable oder die Negation einer Aussagenvariablen oder
2. eine zwei- oder mehrgliedrige Disjunktion, die aus Aussagenvariablen oder ihren Negationen besteht, oder
3. eine zwei- oder mehrgliedrige Konjunktion der Ausdrücke der Form nach Ziffer 1. oder 2.

ist.

Neben Aussagenvariablen kommen in einer konjunktiven Normalform demnach nur die Zeichen der Negation, der Disjunktion und der Konjunktion vor. Jeder Ausdruck des Aussagenkalküls ist einer konjunktiven Normalform äquivalent. Die Äquivalenz lässt sich mit Hilfe der Theoreme und Regeln des Annahmesystems beweisen; jeden Ausdruck des Aussagenkalküls können wir mittels der Theoreme und Regeln des Annahmesystems auf eine konjunktive Normalform zurückführen.⁴⁵ Aufgrund der Reflexivität der Äquivalenz ist jeder Ausdruck sich selbst äquivalent. Also ist jede konjunktive Normalform, da sie sich selbst äquivalent ist, einer bestimmten konjunktiven Normalform äquivalent. Wenn ein Ausdruck des Aussagenkalküls keine konjunktive Normalform ist, bringen wir ihn in

eine solche Form. Zweckmäßig ist die folgende Vorgehensweise:

1. Das Zeichen der Äquivalenz beseitigen wir aufgrund des Gesetzes des Ersetzens der Äquivalenz durch die Konjunktion und die Implikation und die Implikation aufgrund des Gesetzes des Ersetzens der Implikation durch die Disjunktion und die Negation bzw. durch die Konjunktion und die Negation. Wir erhalten einen zum gegebenen Ausdruck äquivalenten Ausdruck, in dem als Funktoren nur die Zeichen der Negation, der Konjunktion und der Disjunktion auftreten.
2. Mittels der Gesetze der Negation der Konjunktion und der Negation der Disjunktion transformieren wir den erhaltenen Ausdruck in einen äquivalenten, in dem die Negationszeichen nur vor Variablen, Negationen von Variablen, Negationen solcher Negationen usw., aber nicht vor einer Konjunktion und nicht vor einer Disjunktion auftreten.
3. In diesem Ausdruck streichen wir aufgrund des Gesetzes der doppelten Negation jede gerade Anzahl von aufeinanderfolgenden Negationszeichen. Es ergibt sich ein Ausdruck, der neben Variablen oder ihren Negationen höchstens die Zeichen der Disjunktion und der Konjunktion enthält.
4. Wir formen den bisher erhaltenen Ausdruck anhand des Distributivgesetzes der Konjunktion bezüglich der Disjunktion und des Distributivgesetzes der Disjunktion bezüglich der Konjunktion in einen äquivalenten Ausdruck um. Dieser Ausdruck ist eine konjunktive Normalform.

Wir vereinfachen den erhaltenen Ausdruck bei jedem Umformungsschritt des gegebenen Ausdruckes mittels der Idempotenzgesetze für die Konjunktion und die Disjunktion und streichen alle sich wiederholenden Glieder einer Konjunktion oder einer Disjunktion bis auf ein Glied.⁴⁶

Für diese Vorgehensweise geben wir drei Beispiele an. Als Beispiel 1 sei gegeben:

- (1) $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p \leftrightarrow$
- (2) $\leftrightarrow [(\neg p \vee q) \rightarrow p] \rightarrow p \leftrightarrow$
- (3) $\leftrightarrow [\neg((\neg p \vee q) \vee p)] \rightarrow p \leftrightarrow$
- (4) $\leftrightarrow \neg[\neg(\neg p \vee q) \vee p] \vee p \leftrightarrow$
- (5) $\leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg p \vee p \leftrightarrow$
- (6) $\leftrightarrow (\neg p \vee q \vee p) \wedge (\neg p \vee p)$

Wir verwenden mehrfach das Gesetz des Ersetzens der Implikation durch die Disjunktion und die Negation und erhalten den in der vierten Zeile angegebenen äquivalenten Ausdruck, der kein Zeichen der Implikation enthält. Anhand eines der Gesetze der Negation

⁴⁵ In den vorherigen Abschnitten haben wir mehrfach darauf abgehoben, dass wir mittels der Zeichen der Negation, der Konjunktion und der Disjunktion jeden anderen Wahrheitsfunktoren von n Argumenten definieren können. Mit einer Normalform suchen wir jetzt eine Darstellung, die mit einer gegebenen Menge von Funktoren auskommt und die gut geeignet ist, Redundanzen zu eliminieren. Damit wird auch der Vergleich von Ausdrücken möglich.

⁴⁶ Das ist genau der Punkt: Neben Aussagenvariablen verwenden wir nur Negations-, Konjunktions- und Disjunktionszeichen. Und dafür haben wir jetzt über die Beseitigung aller Redundanzen die einfachste Form gefunden.

der Disjunktion erhalten wir den in der fünften Zeile angegebenen Ausdruck. Über die Anwendung des Distributivgesetzes der Disjunktion bezüglich der Konjunktion kommen wir zur konjunktiven Normalform des umgeformten Ausdruckes.

Beispiel 2-97:

- (1) Wenn es gilt, dass wenn es gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Pasewalk kommt, dann stammt das Fahrrad aus den S.-Werken, dann stammt das Fahrrad aus den S.-Werken $\leftrightarrow$
- (2) $\leftrightarrow$ Wenn es gilt, dass wenn es gilt, dass das Fahrrad nicht aus den S.-Werken stammt oder das Fahrrad aus Pasewalk kommt, dann stammt das Fahrrad aus den S.-Werken dann stammt das Fahrrad aus den S.-Werken $\leftrightarrow$
- (3) $\leftrightarrow$ Wenn es gilt, dass es nicht gilt, dass gilt, das Fahrrad stammt nicht aus den S.-Werken oder es kommt aus Pasewalk, oder das Fahrrad stammt aus den S.-Werken, dann stammt das Fahrrad aus den S.-Werken $\leftrightarrow$
- (4) $\leftrightarrow$ Es gilt nicht, dass es nicht gilt, dass gilt, das Fahrrad stammt nicht aus den S.-Werken oder das Fahrrad kommt aus Pasewalk, oder das Fahrrad stammt aus den S.-Werken, oder das Fahrrad stammt aus den S.-Werken $\leftrightarrow$
- (5) $\leftrightarrow$ Es gilt, das Fahrrad stammt nicht aus den S.-Werken oder es kommt aus Pasewalk, und das Fahrrad stammt nicht aus den S.-Werken oder das Fahrrad stammt aus den S.-Werken $\leftrightarrow$
- (6) Es gilt, das Fahrrad stammt nicht aus den S.-Werken oder das Fahrrad kommt aus Pasewalk oder das Fahrrad stammt aus den S.-Werken und es gilt, das Fahrrad stammt nicht aus den S.-Werken oder das Fahrrad stammt aus den S.-Werken.



Als Beispiel 2 wählen wir:

- (1) $p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow$
- (2) $\leftrightarrow p \wedge q \rightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \leftrightarrow$
- (3) $\leftrightarrow p \wedge q \rightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \leftrightarrow$
- (4) $\leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \wedge p) \leftrightarrow$
- (5) $\leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \leftrightarrow$
- (6) $\leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee \neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg q \vee p) \leftrightarrow$
- (7) $\leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee p)$

Das Äquivalenzzeichen beseitigen wir über das Gesetz des Ersetzens der Äquivalenz. Anschließend formen wir den erhaltenen Ausdruck mit Hilfe des Gesetzes des Ersetzens der Implikation durch die Disjunktion und die Negation in den in der vierten Zeile angegebenen Ausdruck um, der kein Zeichen der Implikation enthält. Das Gesetz der Negation der Konjunktion führt zum Ausdruck der fünften Zeile. Daraus erhalten wir anhand des Distributivgesetzes der Disjunktion bezüglich der Konjunktion eine konjunktive Normalform. Diese vereinfachen wir, indem wir in beiden Disjunktionen eines der sich wiederholenden Glieder streichen.

Beispiel 2-98:

- (1) Wenn der Reifendruck 1 bar beträgt und der Reifen gut rollt, dann gilt dann und nur dann wenn der Reifendruck 1 bar beträgt der Reifen gut rollt $\leftrightarrow$
- (2) $\leftrightarrow$ Wenn der Reifendruck 1 bar beträgt und der Reifen gut rollt, dann gilt, dass wenn der Reifendruck 1 bar beträgt der Reifen gut rollt und wenn der Reifen gut rollt der Reifendruck 1 bar beträgt $\leftrightarrow$
- (3) $\leftrightarrow$ Wenn der Reifendruck 1 bar beträgt und der Reifen gut rollt, dann gilt, dass der Reifendruck nicht 1 bar beträgt oder der Reifen gut rollt, und dass der Reifen nicht gut rollt oder der Reifendruck 1 bar beträgt $\leftrightarrow$
- (4) $\leftrightarrow$ Es gilt nicht, dass der Reifendruck 1 bar beträgt und der Reifen gut rollt oder es gilt, dass der Reifendruck nicht 1 bar beträgt oder der Reifen gut rollt und es gilt, dass der Reifen nicht gut rollt oder der Reifendruck 1 bar beträgt $\leftrightarrow$
- (5) $\leftrightarrow$ Es gilt, dass der Reifendruck nicht 1 bar beträgt oder der Reifen nicht gut rollt oder es gilt, dass der Reifendruck nicht 1 bar beträgt oder der Reifen gut rollt, und es gilt, dass der Reifen nicht gut rollt oder der Reifendruck 1 bar beträgt $\leftrightarrow$
- (6) $\leftrightarrow$ Es gilt, dass der Reifendruck nicht 1 bar beträgt oder der Reifen nicht gut rollt oder der Reifendruck nicht 1 bar beträgt oder der Reifen gut rollt, und es gilt, dass der Reifendruck nicht 1 bar beträgt oder der Reifen nicht gut rollt oder der Reifen nicht gut rollt oder der Reifendruck 1 bar beträgt $\leftrightarrow$
- (7) $\leftrightarrow$ Es gilt, wenn der Reifendruck nicht 1 bar beträgt oder der Reifen nicht gut rollt oder der Reifen gut rollt und es gilt, dass der Reifendruck nicht 1 bar beträgt oder der Reifen nicht gut rollt oder der Reifendruck 1 bar beträgt.



Ggf. ist es zweckmäßig, die Gesetze der Multiplikation der Disjunktionen und der Addition der Konjunktionen anzuwenden. Diese Gesetze beweisen wir aufgrund der Distributivgesetze der Konjunktion bezüglich der Disjunktion und der Disjunktion bezüglich der Konjunktion.

Multiplikationsgesetz der Disjunktionen:

$$(p \vee q) \wedge (r \vee s) \leftrightarrow p \wedge r \vee p \wedge s \vee q \wedge r \vee q \wedge s.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} & (p \vee q) \wedge (r \vee s) \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow p \wedge (r \vee s) \vee q \wedge (r \vee s) \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow p \wedge r \vee p \wedge s \vee q \wedge r \vee q \wedge s \end{aligned}$$

Der Ausdruck, der in der zweiten Zeile des Beweises angegeben wird, ergibt sich aufgrund des Distributivgesetzes der Konjunktion bezüglich der Disjunktion. Daraus erhalten wir anhand desselben Gesetzes den in der dritten Zeile angegebenen Ausdruck. Alle drei Ausdrücke sind einander äquivalent.

Beispiel 2-99:

Es gilt, dass das Fahrrad Sattel Futur hat oder das Fahrrad Sattel Komfort hat, und es gilt, dass das Fahrrad Pedal Trampel hat oder das Fahrrad Pedal Rollo hat $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow$ Das Fahrrad hat Sattel Futur und es gilt, dass das Fahrrad Pedal Trampel hat oder das

Fahrrad Pedal Rollo hat, oder das Fahrrad hat Sattel Komfort und es gilt, dass das Fahrrad Pedal Trampel hat oder das Fahrrad Pedal Rollo hat. $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow$ Das Fahrrad hat Sattel Futur und das Fahrrad hat Pedal Trampel oder das Fahrrad hat Sattel Futur und das Fahrrad hat Pedal Rollo oder das Fahrrad hat Sattel Komfort und das Fahrrad hat Pedal Trampel oder das Fahrrad hat Sattel Komfort und das Fahrrad hat Pedal Rollo.

■

Additionsgesetz der Konjunktionen:

$$p \wedge q \vee r \wedge s \leftrightarrow (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} p \wedge q \vee r \wedge s &\leftrightarrow \\ \leftrightarrow [p \vee (r \wedge s)] \wedge [q \vee (r \wedge s)] &\leftrightarrow \\ \leftrightarrow (p \vee r) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee s) \end{aligned}$$

Wir formen wir die linke Seite des zu beweisenden Gesetzes mittels des Distributivgesetzes der Disjunktion bezüglich der Konjunktion um und erhalten in der letzten Zeile des Beweises die rechte Seite des zu beweisenden Gesetzes.

Beispiel 2-100:

Das Fahrrad stammt aus den S.-Werken und das Fahrrad kommt aus Pasewalk oder das Fahrrad stammt aus den W.-Werken und das Fahrrad kommt aus Dortmund $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow$ Es gilt, dass das Fahrrad aus den S.-Werken stammt oder es gilt, dass das Fahrrad aus den W.-Werken stammt und aus Dortmund kommt, oder es gilt, dass das Fahrrad aus Pasewalk kommt oder es gilt, dass das Fahrrad aus den W.-Werken stammt und aus Dortmund kommt $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow$ Es gilt, dass das Fahrrad aus den S.-Werken stammt oder das Fahrrad aus den W.-Werken stammt, und es gilt, dass das Fahrrad aus den S.-Werken stammt oder das Fahrrad aus Dortmund kommt, und es gilt, dass das Fahrrad aus Pasewalk kommt oder das Fahrrad aus den W.-Werken stammt, und es gilt, dass das Fahrrad aus Pasewalk kommt oder das Fahrrad aus Dortmund kommt.

■

Bei der als Beispiel 3 untersuchten Umformung in eine konjunktive Normalform verwenden wir das Additionsgesetz der Konjunktionen.

$$\begin{aligned} (p \leftrightarrow q) \rightarrow p &\leftrightarrow \\ \leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q) \vee p &\leftrightarrow \\ \leftrightarrow (p \wedge \neg q \vee q \wedge \neg p) \vee p &\leftrightarrow \\ \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \vee p &\leftrightarrow \\ \leftrightarrow (p \vee q \vee p) \wedge (p \vee \neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee p) &\leftrightarrow \\ \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg p \vee p) \end{aligned}$$

Wir verwenden das Gesetz des Ersetzens der Implikation durch die Disjunktion und die Negation sowie das Gesetz der Negation der Äquivalenz und erhalten den Ausdruck in der dritten Zeile. Das führt aufgrund der Addition der Konjunktionen zum Ausdruck in der

vierten Zeile. Hier wenden wir das Distributivgesetz der Disjunktion bezüglich der Konjunktion an. Wir erhalten eine konjunktive Normalform des gegebenen Ausdruckes (fünfte Zeile) und streichen in der ersten und zweiten Disjunktion eines der sich wiederholenden Glieder.

Beispiel 2-101:

Wenn es gilt, dass dann und nur dann wenn der Reifendruck 1 bar beträgt, der Reifen gut rollt, dann beträgt der Reifendruck 1 bar. $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow$ Es gilt nicht, dass dann und nur dann, wenn der Reifendruck 1 bar beträgt, der Reifen gut rollt, oder der Reifendruck beträgt 1 bar. $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow$ Es gilt, dass der Reifendruck 1 bar beträgt und der Reifen gut rollt und der Reifendruck nicht 1 bar beträgt, oder der Reifendruck beträgt 1 bar. $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow$ Es gilt, dass der Reifendruck 1 bar beträgt oder der Reifen gut rollt und es gilt, dass der Reifendruck 1 bar beträgt oder der Reifendruck nicht 1 bar beträgt, und es gilt, dass der Reifen nicht gut rollt oder der Reifen gut rollt und es gilt, dass der Reifendruck nicht 1 bar beträgt oder der Reifen nicht gut rollt oder der Reifendruck beträgt 1 bar. $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow$ Es gilt, dass der Reifendruck 1 bar beträgt oder der Reifen gut rollt oder der Reifendruck 1 bar beträgt, und es gilt, dass der Reifendruck 1 bar beträgt oder der Reifendruck nicht 1 bar beträgt oder der Reifendruck 1 bar beträgt und es gilt, dass der Reifen nicht gut rollt oder der Reifen gut rollt oder der Reifendruck 1 bar beträgt, und es gilt, dass der Reifen nicht gut rollt oder der Reifendruck nicht 1 bar beträgt oder der Reifendruck 1 bar beträgt. $\leftrightarrow$

$\leftrightarrow$ Es gilt, dass der Reifendruck 1 bar beträgt oder der Reifen gut rollt und es gilt, dass der Reifendruck 1 bar beträgt oder der Reifendruck nicht 1 bar beträgt und es gilt, dass der Reifen nicht gut rollt oder der Reifen gut rollt oder der Reifendruck 1 bar beträgt und es gilt, dass der Reifen nicht gut rollt oder der Reifendruck nicht 1 bar beträgt oder der Reifendruck 1 bar beträgt. $\leftrightarrow$



Die Wahrheit einer konjunktiven Normalform können wir mit einem einfachen Kriterium feststellen: *Eine konjunktive Normalform ist dann und nur dann ein wahrer Ausdruck, wenn in jeder Disjunktion, die ein Glied dieser Konjunktion ist, mindestens eine Variable als Glied dieser Disjunktion einmal mit dem Negationszeichen und einmal ohne Negationszeichen vorkommt* [BORK76]. Ist diese Bedingung erfüllt, dann ist jede solche Disjunktion und auch die Konjunktion aller dieser Disjunktionen ein wahrer Ausdruck; was wir mit Hilfe der Null-Eins-Prüfung nachweisen. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, dann kann die Disjunktion, in der keine Variable als Glied einmal mit dem Negationszeichen und einmal ohne Negationszeichen vorkommt, ein falscher Ausdruck sein (wenn wir den nichtnegierten Variablen den Wert 0 und den negierten Variablen den Wert 1 zuordnen). Dann ist auch die gesamte Konjunktion ein falscher Ausdruck. Diese Art der Prüfung ist vor allem dann zweckmäßig, wenn es sich um Ausdrücke mit einer größeren Anzahl von Aussagenvariablen handelt. In bestimmten Fällen ist diese Prüfmethode kürzer als die unverkürzte Null-Eins-Prüfung.

Die konjunktiven Normalformen der Ausdrücke „ $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p$ “ und „ $p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q)$ “ erfüllen die oben angeführte Bedingung. Daher schließen wir, dass

sie wahre Ausdrücke sind. Dagegen erfüllt die konjunktive Normalform des Ausdruckes „ $(p \leftrightarrow q) \rightarrow p$ “ (siehe oben) die angeführte Bedingung nicht. Weil in ihrem ersten Glied, dem Ausdruck „ $p \vee q$ “, keine Variable einmal mit Negationszeichen und einmal ohne Negationszeichen vorkommt, handelt es sich um einen falschen Ausdruck.

Für einen gegebenen Ausdruck des Aussagenkalküls können mehrere verschiedene, aber äquivalente konjunktive Normalformen existieren (siehe oben).

Die *ausgezeichnete konjunktive Normalform* (kanonische konjunktive Normalform) eines gegebenen Ausdruckes ist eine konjunktive Normalform, bei der jede Variable des gegebenen Ausdruckes in jeder Disjunktion dieser konjunktiven Normalform mit oder ohne Negationszeichen auftritt. Jeden Ausdruck des Aussagenkalküls können wir mit Hilfe der Theoreme und Regeln des Annahmesystems in die ausgezeichnete konjunktive Normalform umformen. Zum Beweis wenden wir das folgende Theorem des Annahmesystems an:

$$p \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q).$$

Beweis:

(a)

(1)	p	{Annahme}
(2)	$p \vee q$	{ED: 1}
(3)	$p \vee \neg q$	{ED: 1}
	$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$	{EK: 2, 3}

(b)

(1)	$p \vee q$	}	{Annahmen}
(2)	$p \vee \neg q$		
(3)	$\neg p$		{A. d. i. B.}
(4)	q		{BD: 1, 3}
(5)	$\neg q$		{BD: 2, 3}
	Widerspruch		{4, 5}

Von den Beispielen $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p$, $p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q)$, $(p \leftrightarrow q) \rightarrow p$ ist die konjunktive Normalform des Ausdruckes „ $p \wedge q \rightarrow (p \leftrightarrow q)$ “ eine ausgezeichnete Form, während die konjunktive Normalform des Ausdruckes „ $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p$ “, der Ausdruck „ $(\neg p \vee q \vee p) \wedge (\neg p \vee p)$ “, keine ausgezeichnete Normalform ist. Aufgrund des oben angeführten Theorems formen wir diese konjunktive Normalform in eine ausgezeichnete konjunktive Normalform um. Wir ersetzen den Ausdruck „ $\neg p \vee p$ “ in ihr durch den Ausdruck „ $(\neg p \vee p \vee q) \wedge (\neg p \vee p \vee \neg q)$ “ und erhalten den Ausdruck $(\neg p \vee q \vee p) \wedge (\neg p \vee p \vee q) \wedge (\neg p \vee p \vee \neg q)$. Jetzt stellen wir in der ersten Disjunktion ihr zweites und drittes Glied um. Dadurch erhalten wir einen mit der zweiten Disjunktion identischen Ausdruck. Das Streichen eines der sich wiederholenden Glieder der Konjunktion ergibt schließlich als ausgezeichnete konjunktive Normalform des Ausdruckes

„ $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p$ “ den Ausdruck „ $(\neg p \vee p \vee q) \wedge (\neg p \vee p \vee \neg q)$ “. Wir bringen eine ausgezeichnete konjunktive Normalform durch Streichen der sich wiederholenden Glieder der Disjunktion und der Konjunktion, ggf. nach vorheriger Umstellung der Glieder der Disjunktionen, in die einfachste Form und legen eine bestimmte Ordnung der Glieder der Disjunktion und der Glieder der gesamten Konjunktion fest. Dann erhalten wir für jeden Ausdruck des Aussagenkalküls genau eine solche ausgezeichnete konjunktive Normalform; eine solche Form ist für jeden Ausdruck eindeutig bestimmt.

Beispiel 2-102: Ausgezeichnete konjunktive Normalform $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p$

Ausdruck:

Wenn gilt, dass wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Pasewalk kommt, dann stammt das Fahrrad aus den S.-Werken, dann stammt das Fahrrad aus den S.-Werken.

Konjunktive Normalform:

Es gilt, dass das Fahrrad nicht aus den S.-Werken stammt oder es aus Pasewalk kommt oder es aus den S.-Werken stammt, und es gilt, dass das Fahrrad nicht aus den S.-Werken stammt oder das Fahrrad aus den S.-Werken stammt.

Ausgezeichnete Normalform:

Es gilt, dass das Fahrrad nicht aus den S.-Werken stammt oder das Fahrrad aus den S.-Werken stammt oder das Fahrrad aus Pasewalk kommt, und es gilt, dass das Fahrrad nicht aus den S.-Werken stammt oder das Fahrrad aus den S.-Werken stammt oder das Fahrrad nicht aus Pasewalk kommt.



Wir haben bereits nachgewiesen, dass sich jeder Ausdruck des Aussagenkalküls mit Hilfe der Theoreme und Regeln des Annahmesystems in eine konjunktive Normalform umformen lässt. Demnach ist eine Äquivalenz des Annahmesystems ein Theorem, dessen eine Seite ein gegebener beliebiger Ausdruck des Aussagenkalküls, die andere dagegen irgendeine konjunktive Normalform dieses Ausdruckes ist. Der gegebene Ausdruck ist dann und nur dann wahr, wenn eine äquivalente konjunktive Normalform wahr ist. Um nachzuweisen, dass sich jeder wahre Ausdruck des Aussagenkalküls im Annahmesystem beweisen lässt, reicht daher der Nachweis, dass dies für jede wahre konjunktive Normalform gilt. Das können wir folgendermaßen zeigen: Jede Disjunktion, die ein Glied einer immer wahren konjunktiven Normalform ist, lässt sich aufgrund des Gesetzes vom ausgeschlossenen Dritten, der Regel der Einführung der Disjunktion sowie des Kommutativgesetzes und des Assoziativgesetzes der Disjunktion beweisen. Auf der Grundlage aller dieser Disjunktionen erhalten wir dann mit der (ggf. mehrmals angewandten) Einführungsregel der Konjunktion die gegebene wahre konjunktive Normalform. Damit ist bewiesen: *Jeder wahre Ausdruck des Aussagenkalküls ist ein Theorem des Annahmesystems.*

– Disjunktive Normalform

Ein Ausdruck des Aussagenkalküls ist eine *disjunktive Normalform* genau dann, wenn er

1. eine Aussagenvariable oder die Negation einer Aussagenvariablen oder
2. eine Konjunktion von Aussagenvariablen oder ihrer Negationen oder
3. eine Disjunktion der Ausdrücke in Form 1. oder 2. ist.

Wir können jeden Ausdruck des Aussagenkalküls in eine äquivalente disjunktive Normalform überführen, weil es für die Umformung eines Ausdruckes W in eine disjunktive Normalform ausreicht, wenn wir den Ausdruck $\neg W$ in eine konjunktive Normalform überführen und diese konjunktive Form dann negieren. Diese Negation ist nach den Gesetzen der Negation der Konjunktion und der Disjunktion eine disjunktive Normalform des Ausdrucks $\neg\neg W$, und damit auch des Ausdruckes W . Aus der generellen Umformbarkeit in eine konjunktive Normalform folgt daher die Umformbarkeit jedes Ausdrucks des Aussagenkalküls in eine disjunktive Normalform. *Ausgezeichnete disjunktive Normalform* eines gegebenen Ausdrucks des Aussagenkalküls heißt eine disjunktive Normalform, bei der jede Variable des gegebenen Ausdrucks bzw. ihre Negation als Glied in jeder Konjunktion auftritt, die ein Glied dieser disjunktiven Normalform ist. Zur Überführung einer disjunktiven Normalform in die ausgezeichnete disjunktive Normalform verwenden wir das folgende Theorem des Annahmesystems: $p \leftrightarrow p \wedge q \vee p \wedge \neg q$.

Den Beweis führen wir wie folgt: $p \leftrightarrow p \wedge (q \vee \neg q) \leftrightarrow p \wedge q \vee p \wedge \neg q$.

Die erste Äquivalenz folgt aufgrund des Gesetzes vom ausgeschlossenen Dritten, die zweite aufgrund des Distributivgesetzes der Konjunktion bezüglich der Disjunktion.

Derartige ausgezeichnete disjunktive Normalformen, die aus n Variablen gebildet sind und Wahrheitsfunktoren von n Argumenten definieren, haben wir im Beweis der Aussage verwendet, dass sich jeder Wahrheitsfunctor von n Argumenten mit Hilfe der Zeichen der Negation, der Konjunktion und der Disjunktion definieren lässt, den wir im vorausgegangenen Abschnitt angeführt haben.

Beispiel 2-103: Ausgezeichnete disjunktive Normalform

Ausdruck

$$\begin{aligned}
 & \neg([(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p) \leftrightarrow \\
 & \leftrightarrow \neg([(\neg p \vee q) \rightarrow p] \rightarrow p) \leftrightarrow \\
 & \leftrightarrow \neg([(p \wedge \neg q) \vee p] \rightarrow p) \leftrightarrow \\
 & \leftrightarrow \neg([\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg p] \vee p) \leftrightarrow \\
 & \leftrightarrow \neg([(\neg p \vee q) \wedge \neg p] \vee p) \leftrightarrow \\
 & \leftrightarrow \neg[(\neg p \vee q) \wedge \neg p] \wedge \neg p \leftrightarrow \\
 & \leftrightarrow [\neg(\neg p \vee q) \vee p] \wedge \neg p \leftrightarrow \\
 & \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee p] \wedge \neg p \leftrightarrow \\
 & \leftrightarrow [p \wedge \neg q \vee p] \wedge \neg p \leftrightarrow \\
 & \leftrightarrow [(p \vee p) \wedge (\neg q \vee p)] \wedge \neg p \leftrightarrow
 \end{aligned}$$

Konjunktive Normalform

$$\leftrightarrow p \wedge (\neg q \vee p) \wedge \neg p$$

Disjunktive Normalform

$$\begin{aligned}
 & \leftrightarrow p \vee \neg p \vee (q \wedge \neg p) \leftrightarrow \\
 & \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \leftrightarrow
 \end{aligned}$$

Ausgezeichnete disjunktive Normalform

$$\leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

Ausdruck:

Es gilt nicht, dass wenn gilt, dass wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Pasewalk kommt, dann stammt das Fahrrad aus den S.-Werken, dann stammt das Fahrrad aus den S.-Werken.

Konjunktive Normalform:

Das Fahrrad stammt aus den S.-Werken und es gilt, dass das Fahrrad nicht aus Pasewalk kommt oder das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, und das Fahrrad stammt nicht aus den S.-Werken.

Disjunktive Normalform:

Das Fahrrad stammt aus den S.-Werken oder das Fahrrad stammt nicht aus den S.-Werken oder es gilt, dass das Fahrrad aus Pasewalk kommt und nicht aus den S.-Werken stammt.

Ausgezeichnete disjunktive Normalform:

Es gilt, dass das Fahrrad aus den S.-Werken stammt und das Fahrrad aus Pasewalk kommt, oder es gilt, dass das Fahrrad aus den S.-Werken stammt und das Fahrrad nicht aus Pasewalk kommt, oder es gilt, dass das Fahrrad nicht aus den S.-Werken stammt und das Fahrrad aus Pasewalk kommt, oder es gilt, dass das Fahrrad nicht aus den S.-Werken stammt und das Fahrrad nicht aus Pasewalk kommt.



– Implikative Normalform

Ein Ausdruck des Aussagenkalküls ist eine *implikative Normalform* genau dann, wenn er

1. eine Aussagenvariable oder ihre Negation oder
2. eine Implikation ist, deren sämtlichen Vorderglieder und das Hinterglied Aussagenvariablen oder ihre Negationen sind.

Eine implikative Normalform ist dann und nur dann ein wahrer Ausdruck, wenn ihr Hinterglied mit irgendeinem ihrer Vorderglieder identisch ist oder wenn eines ihrer Vorderglieder die Negation eines anderen Vordergliedes ist.

Beispiel 2-104: Implikative Normalform

Ausdruck:

Wenn gilt, dass wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt das Fahrrad aus Pasewalk kommt, dann kommt das Fahrrad aus Pasewalk, dann kommt das Fahrrad aus Pasewalk.

Implikative Normalform:

Wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, dann stammt das Fahrrad aus den S.-Werken.



• Axiomatische Systeme des Aussagenkalküls

Ein axiomatisches System des Aussagenkalküls bauen wir auf, indem wir bestimmte (immer) wahre Ausdrücke dieses Kalküls als Axiome annehmen. Die im jeweiligen axiomatischen System verwendeten primären Beweisregeln (Schlussregeln) bestimmen wir so, dass wir stets von wahren Ausdrücken wieder zu wahren Ausdrücken gelangen. Anhand der Axiome und mittels der primären Regeln beweisen wir andere Ausdrücke des Aussagenkalküls.⁴⁷ Die Axiome und die aus ihnen anhand der primären Regeln herleitbaren

Ausdrücke heißen die Theoreme des Systems. Die Axiome und die primären Regeln bestimmen wir so, dass wir auf dieser Basis alle wahren Ausdrücke des Aussagenkalküls beweisen können, die mit Hilfe der im gegebenen axiomatischen System vorkommenden Termini notiert werden.⁴⁷ Wir unterscheiden unter diesen Termini Grundtermini und definierte Termini. Während die Grundtermini in den Axiomen auftreten, werden die definierten Termini des Systems mit Hilfe der Grundtermini vereinbart.⁴⁹

Von den verschiedenen axiomatischen Systemen des klassischen Aussagenkalküls, die sich in der Wahl der Grundtermini und der Wahl der Axiome unterscheiden, wollen wir die wichtigsten diskutieren. Wir beginnen mit axiomatischen Systemen, in denen alle Termini des Annahmesystems Grundtermini sind.

– *Alle Termini des Annahmesystems Grundtermini*

+ Beispiel: Hilbert-Kalkül [HiBE34], S. 66

++ Axiome

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
2. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
3. $[p \rightarrow (p \rightarrow q)] \rightarrow (p \rightarrow q)$
4. $p \rightarrow \neg\neg p$
5. $\neg\neg p \rightarrow p$
6. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
7. $p \wedge q \rightarrow p$
8. $p \wedge q \rightarrow q$
9. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r)]$
10. $p \rightarrow p \vee q$
11. $q \rightarrow p \vee q$
12. $(p \rightarrow r) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)]$
13. $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
14. $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
15. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow q)]$.

Beispiel 2-105: Hilbert-Kalkül/Fahrradinhalt

1. Wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Pase-

⁴⁷ Das ist der Sinn des ganzen: Während wir bisher immer auf den einzelnen Ausdrücken und den Junktoren aufgebaut haben, bilden die Axiome gewissermaßen Schablonen für Sätze mit Haupt-, Neben-, Konditional- und Kausalsatz, also Satzkombinationen, die wir unseren Konstrukten als Muster gegenüberstellen. Können wir unsere Sätze durch Einsetzen erzeugen, ist die Wahrheit der Aussage bspw. über einen Produkt- oder Produktionsbereich gewährleistet.

⁴⁸ Wir verlangen Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit (siehe [ZOGL97], S. 105).

⁴⁹ Unabhängigkeit des Axiomensystems (siehe [ZOGL97], S. 106).

- walk kommt, dann gilt, dass wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus Pasewalk kommt, das Fahrrad aus Deutschland kommt, dann gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Deutschland kommt (bed. Syll).
2. Wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, dann gilt, dass wenn das Fahrrad aus Deutschland kommt, dann stammt das Fahrrad aus den S.-Werken.
 3. Wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Pasewalk kommt, dann gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Pasewalk kommt (bed. Syll).
 4. Wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, dann stammt das Fahrrad nicht nicht aus den S.-Werken.
 5. Wenn das Fahrrad nicht nicht aus den S.-Werken stammt, dann stammt das Fahrrad aus den S.-Werken (Transp.).
 6. Wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Pasewalk kommt, dann gilt, dass wenn das Fahrrad nicht aus Pasewalk kommt, das Fahrrad nicht aus den S.-Werken stammt.
 7. Wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt und das Fahrrad aus Pasewalk kommt, dann stammt das Fahrrad aus den S.-Werken (Elem.).
 8. Wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt und das Fahrrad aus Pasewalk kommt, dann kommt das Fahrrad aus Pasewalk (Elem.).
 9. Wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt das Fahrrad aus Pasewalk kommt, dann gilt, dass wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Deutschland kommt, dann gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Pasewalk kommt und das Fahrrad aus Deutschland kommt.
 10. Wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, dann stammt das Fahrrad aus den S.-Werken oder das Fahrrad kommt aus Pasewalk.
 11. Wenn das Fahrrad aus Pasewalk kommt, dann stammt das Fahrrad aus den S.-Werken oder das Fahrrad kommt aus Pasewalk (Einf. Disj.).
 12. Wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Deutschland kommt, dann gilt, dass wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus Pasewalk kommt, das Fahrrad aus Deutschland kommt, dann gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt oder das Fahrrad aus Pasewalk kommt, das Fahrrad aus Deutschland kommt.
 13. Wenn gilt, dass dann und nur dann, wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Pasewalk kommt, dann gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Pasewalk kommt (Bes. Äqui.).
 14. Wenn gilt, dass dann und nur dann wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Pasewalk kommt, dann gilt, dass wenn das Fahrrad aus Pasewalk kommt, das Fahrrad aus den S.-Werken stammt.
 15. Wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Pasewalk kommt, dann gilt, dass wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus Pasewalk kommt, das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, dann gilt, dass dann und nur dann, wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Pasewalk kommt.



++ Primäre Regeln

Als primäre Regeln verwendet dieses System die Einsetzungs- und die Abtrennungsregel (modus ponens). Mit der Einsetzungsregel stellen wir fest, dass ein Ausdruck, der aus einem Theorem des gegebenen Systems durch Einsetzen hervorgegangen ist, ebenfalls ein Theorem dieses Systems ist. Ein Ausdruck des Aussagenkalküls entsteht durch Einsetzen aus einem Ausdruck des Aussagenkalküls, wenn man in letzterem für eine seiner Aussagenvariablen an allen Stellen ihres Vorkommens in ihm denselben Ausdruck des Aussagenkalküls einsetzt. Ersetzen wir im Axiom 1 die Variable „ q “ bspw. durch den Ausdruck „ $q \rightarrow p$ “, dann erhalten wir als Ergebnis den Ausdruck:

$$[p \rightarrow (q \rightarrow p)] \rightarrow \{[(q \rightarrow p) \rightarrow r] \rightarrow (p \rightarrow r)\}.$$

In den Beweisen der Theoreme ist jede Zeile eines Beweises ein Theorem des gegebenen Systems. Solche Beweise sind endliche Folgen von Ausdrücken, deren jedes Folgenglied ein Axiom ist oder aus früheren Gliedern der Folge mit Hilfe primärer Regeln des Systems erhalten wurde, während das letzte Glied der Folge das zu beweisende Theorem ist (siehe oben).

Beispiel 2-106: Widerspruchsbeweis für Axiom 2

Es gelte

$$p \rightarrow (q \rightarrow p) = 0$$

Dann muss gelten $p = 1$ und $(q \rightarrow p) = 0$, d. h. $q = 1$ und $p = 0$

Widerspruch

**Beispiel 2-107:** Wahrheitstafel für Axiom 6

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	Axiom 6
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1



– Nicht alle Termini des Annahmesystems Grundtermini

Die Axiomensysteme des klassischen Aussagenkalküls, die nicht alle Grundtermini des Annahmesystems als Grundtermini verwenden, unterscheiden wir in Systeme, deren Grundtermini ausreichen, um alle Wahrheitsfunktoren zu definieren, sowie in fragmentarische Systeme, die diese Bedingung nicht erfüllen.

+ Implikation - Negation - System von Frege [FREG79]

Dieses System verwendet als Grundtermini nur die Zeichen der Implikation und der Negation. Die Axiome sind:

1. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
2. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

3. $p \rightarrow \neg\neg p$
4. $\neg\neg p \rightarrow p$
5. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

Primäre Regeln dieses Systems sind - wie auch in anderen axiomatischen Implikation-Negations-Systemen -, die Einsetzungs- und Abtrennungsregel.

Beispiel 2-108: Frege-Kalkül/Fahrradinhalt

1. Wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, es gilt, dass wenn das Fahrrad aus Pasewalk kommt, das Fahrrad aus Deutschland kommt, dann gilt, dass wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Pasewalk kommt, es gilt, dass wenn das Fahrrad aus Pasewalk kommt, das Fahrrad aus Deutschland kommt.
2. Wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, dann gilt, dass wenn das Fahrrad aus Pasewalk kommt, das Fahrrad aus den S.-Werken stammt.
3. Wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, dann stammt das Fahrrad nicht nicht aus den S.-Werken.
4. Wenn das Fahrrad nicht nicht aus den S.-Werken stammt, dann stammt das Fahrrad aus den S.-Werken.
5. Wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt das Fahrrad aus Pasewalk kommt, dann gilt, dass wenn das Fahrrad nicht aus Pasewalk kommt, das Fahrrad nicht aus den S.-Werken stammt.



+ Implikation-Negation-System von Lukasiewicz [LUT30]

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
2. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
3. $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

Im Kalkül von Lukasiewicz sind die Beweise und Beweisfolgen wie im Hilbert-Kalkül definiert. Gemessen an seinen Axiomenformen ist der Kalkül nach Lukasiewicz zwar einfach aufgebaut, aber er erlaubt trotzdem die Ableitung äquivalenter Ausdrücke zu allen Ausdrücken, die im Hilbert-Kalkül ableitbar sind. Wegen der Beschränkung auf die Junktormenge $\{\neg, \rightarrow\}$ können aber einige wichtige Sätze, wie die kommutativen, assoziativen und distributiven Gesetze, nicht so dargestellt werden, dass die Bedeutung des Satzes sichtbar wird.

Mit diesen Grundlagen leiten wir aus den gegebenen drei Axiomen Gesetze ab; das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten als erstes. Mit der Junktorenbasis $\{\neg, \rightarrow\}$ erhält dieses Gesetz die Form: $p \rightarrow p$.

Den Beweis führen wir wie folgt:

- (1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ Axiom 1
- (2) $p \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)$ Einsetzen von q durch $q \rightarrow p$
- (3) $(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p))$ Axiom 2

- (4) $(p \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$
Ersetzen von q durch $q \rightarrow p$ und r durch p
- (5) $(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$ {AR: 2, 4}
- (6) $p \rightarrow p$ {AR: 5}, Abtrennen des Vordersatzes

Als zweites beweisen wir die Paradoxie der Implikation: $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$

Den Beweis führen wir wie folgt:

- (1) $\neg p$ Annahme/Vordersatz
- (2) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ Axiom 1
- (3) $\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ Ersetzen von p durch $\neg p$
- (4) $\neg q \rightarrow \neg p$ {AR: 1, 3}
- (5) $\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ Axiom 3
- (6) $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$ Ersetzen von p durch q , q durch p
- (7) $p \rightarrow q$ {AR: 4, 6}

Prämissenvertauschung: $p \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow q \rightarrow (p \rightarrow r)$

Den Beweis führen wir wie folgt:

- (1) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ Annahme/Vordersatz
- (2) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ Axiom 2
- (3) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ {AR: 1, 2}
- (4) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ Axiom 1
- (5) $q \rightarrow (p \rightarrow q)$ Ersetzen von p durch q , q durch p
- (6) $(q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$ Einfügen von q
- (7) $q \rightarrow (p \rightarrow r)$

Prämissenverschmelzung: $p \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow q$

Den Beweis führen wir wie folgt:

- (1) $p \rightarrow (p \rightarrow q)$ Annahme/Vordersatz
- (2) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ Axiom 2
- (3) $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow q))$
Ersetzen von $q \rightarrow r$ durch $p \rightarrow q$
- (4) $(p \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow q)$ {AR: 1, 3}
- (5) $p \rightarrow p$ Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten
- (6) $p \rightarrow q$ {AR: 4, 5}

Doppelte Negation: $\neg\neg p \rightarrow p$

Den Beweis führen wir wie folgt:

- (1) $\neg\neg p$ Annahme/Vordersatz

- | | | |
|-----|--|--|
| (2) | $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ | Paradoxie der Implikation |
| (3) | $\neg\neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg\neg p)$ | Ersetzen von p durch $\neg p$ in 2 |
| (4) | $\neg p \rightarrow \neg\neg p$ | {AR: 1, 3} |
| (5) | $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ | Axiom 3 |
| (6) | $(\neg p \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow p)$ | Ersetzen von q durch $\neg\neg p$ in 5 |
| (7) | $\neg\neg p \rightarrow p$ | {AR: 4, 6} |
| (8) | p | {AR: 1, 7} |

Doppelte Negation: $p \rightarrow \neg\neg p$

Den Beweis führen wir wie folgt:

- | | | |
|-----|--|--|
| (1) | $\neg\neg p \rightarrow p$ | Doppelte Negation oben |
| (2) | $\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p$ | Ersetzen von p durch $\neg p$ |
| (3) | $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ | Axiom 3 |
| (4) | $(\neg\neg\neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg\neg p)$ | Ersetzen von p durch $\neg\neg p$ in 3 |
| (5) | $p \rightarrow \neg\neg p$ | {AR: 2, 4} |

+ Implikation-Negation-System von Lukasiewicz [LUTA30]

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
2. $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$
3. $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

Beispiel 2-109: Implikation-Negation-System von Lukasiewicz/Fahrradinhalt

- (1) Wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Pasewalk kommt, dann gilt, dass wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus Pasewalk kommt, das Fahrrad aus Deutschland kommt, es gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Deutschland kommt.
- (2) Wenn gilt, dass wenn das Fahrrad nicht aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, dann stammt das Fahrrad aus den S.-Werken.
- (3) Wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, dann gilt, dass wenn das Fahrrad nicht aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Pasewalk kommt.



+ Implikation-Negation-System von Lukasiewicz [LUTA30]

1. $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow (\neg p \rightarrow r)$
2. $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow (q \rightarrow r)$
3. $(\neg p \rightarrow r) \rightarrow \{(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow r]\}$.

Gemäß dieser drei Axiome ist der Ausdruck „ $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ “ der Klasse von Ausdrücken „ $\neg p \rightarrow r, q \rightarrow r$ “ äquivalent.

Beispiel 2-110: Implikation-Negation-System von Lukasiewicz/Fahrradinhalt

- (1) Wenn gilt, dass wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Pasewalk kommt, das Fahrrad aus Deutschland kommt, dann gilt, dass wenn das Fahrrad nicht aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Pasewalk kommt.
- (2) Wenn gilt, dass wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Pasewalk kommt, das Fahrrad aus Deutschland kommt, dann gilt, dass wenn das Fahrrad aus Pasewalk kommt, das Fahrrad aus Deutschland kommt.
- (3) Wenn gilt, dass wenn das Fahrrad nicht aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Deutschland kommt, dann gilt, dass wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus Pasewalk kommt, das Fahrrad aus Deutschland kommt, es gilt, dass wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Pasewalk kommt, das Fahrrad aus Deutschland kommt.

■

+ Implikation-Negation-System von Meredith ([BORK76], S. 121)

Dieses System besteht aus dem folgenden Ausdruck:

$$\{[(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg s)) \rightarrow r] \rightarrow t\} \rightarrow [(t \rightarrow p) \rightarrow (s \rightarrow p)].$$

Beispiel 2-111: Implikation-Negation-System von Meredith/Fahrradinhalt

Wenn gilt, dass wenn gilt, dass wenn gilt, dass wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, das Fahrrad aus Pasewalk kommt, es gilt, wenn das Fahrrad nicht aus Mecklenburg-Vorpommern kommt, das Fahrrad nicht aus Deutschland kommt, das Fahrrad aus Mecklenburg-Vorpommern kommt, das Fahrrad aus Europa kommt, dann gilt, dass wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus Europa kommt, das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, es gilt, dass wenn das Fahrrad aus Deutschland kommt, das Fahrrad aus den S.-Werken stammt.

■

+ Disjunktion-Negation-System von Russell-Whitehead ([BORK76], S. 122)

Russell-Whitehead formulieren vier Axiome mittels der Zeichen der Disjunktion und der Negation. Nach Einführen der Definition

$$p \rightarrow q := \neg p \vee q$$

sind diese Axiome den folgenden Theoremen äquivalent:

1. $p \vee p \rightarrow p$ (Idempotenz der Disjunktion)
2. $q \rightarrow p \vee q$ (Einführung der Disjunktion)
3. $p \vee q \rightarrow q \vee p$ (Kommutativität der Disjunktion)
4. $(q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow p \vee r)$ (Neuer Summand).

Primäre Regeln sind die Einsetzungsregel und die Regel mit dem Schema:

$$\neg p \vee q$$

$$\frac{p}{q}.$$

Mit Blick auf die Definition des Implikationszeichens ist dies eine Entsprechung der Abtrennungsregel.

Beispiel 2-112: Disjunktion-Negation-System von Russell-Whitehead/Fahrradinhalt

- (1) Wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt oder das Fahrrad aus den S.-Werken stammt, dann stammt das Fahrrad aus den S.-Werken.
- (2) Wenn das Fahrrad aus Pasewalk kommt, dann stammt das Fahrrad aus den S.-Werken oder das Fahrrad kommt aus Pasewalk.
- (3) Wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt oder das Fahrrad aus Pasewalk kommt, dann kommt das Fahrrad aus Pasewalk oder das Fahrrad stammt aus den S.-Werken.
- (4) Wenn gilt, dass wenn das Fahrrad aus Pasewalk kommt, das Fahrrad aus Deutschland kommt, dann gilt, dass wenn das Fahrrad aus den S.-Werken stammt oder das Fahrrad aus Pasewalk kommt, das Fahrrad aus den S.-Werken stammt oder das Fahrrad aus Deutschland kommt.



+ Disjunktion-Negation-System von Lukasiewicz ([BORK76], S. 123)

Die drei Axiome dieses Systems haben mit Hilfe der Definition des Implikationszeichens folgende Form:

1. $(p \vee q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
2. $(p \vee q \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r)$
3. $(p \rightarrow r) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)]$.

Nach diesen drei Axiomen ist der Ausdruck „ $p \vee q \rightarrow r$ “ der Klasse von Ausdrücken „ $p \rightarrow r, q \rightarrow r$ “ äquivalent.

+ Konjunktion-Negation-System von Rosser/Borkowski ([BORK76], S. 124)

Wir schreiben die Axiome mit Hilfe des definierten Implikationszeichens.

1. $p \rightarrow p \wedge p$
2. $p \wedge q \rightarrow p$
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow [\neg(q \wedge r) \rightarrow \neg(r \wedge p)]$

+ Exklusivsystem von Nicod/Lukasiewicz ([BORK76], S. 124)

Das einzige Axiom für dieses System hat die Form:

$$(p|(q|r))|\{(p|(r|p))|[(s|q)|((p|s)|(p|s))]\}.$$

In diesem System werden folgende Definitionen eingeführt:

$$\neg p := p|p$$

$$p \wedge q := \neg(p|q)$$

$$p \rightarrow q := p|(q|q).$$

Da der Ausdruck „ $p|(q|r)$ “ dem Ausdruck „ $p \rightarrow q \wedge r$ “ äquivalent ist, ist das Axiom von Nicod/Lukasiewicz dem Ausdruck „ $(p \rightarrow q \wedge r) \rightarrow \{(p \rightarrow r \wedge p) \wedge [\neg(s \wedge q) \rightarrow \neg(p \wedge s)]\}$ “ äquivalent.

Als primäre Regeln des Aussagenkalküls nur mit Exklusion werden angenommen die

Einsetzungsregel und die Abtrennungsregel mit dem Schema:

$$\frac{p|(q|r)}{\frac{p}{r}},$$

die der Regel mit dem Schema:

$$\frac{p \rightarrow q \wedge r}{\frac{p}{r}}$$

entspricht.

+ Implikation-Konstante falsum-System von Peirce ([BORK76], S. 125)

Im Aussagenkalkül bezeichnet die Konstante falsum eine falsche Aussage. Für sie verwenden wir das Symbol „0“. Der Ausdruck „0“ ist allen falschen Ausdrücken des Aussagenkalküls, wie bspw. „ $p \wedge \neg p$ “ oder „ $\neg(p \rightarrow p)$ “ äquivalent. Bei der Null-Eins-Prüfung besitzt die Konstante falsum immer den Wert 0. Mit Hilfe des Zeichens der Implikation und der Konstanten falsum definieren wir das Negationszeichen wie folgt:

$$\neg p := p \rightarrow 0.$$

Ein Axiomensystem des klassischen Aussagenkalküls, das als Grundtermini das Implikationszeichen und die Konstante falsum verwendet, stammt von Peirce (siehe [ZOGL97]). Ein Axiomensystem für einen solchen Kalkül entsteht, wenn wir den Axiomen eines Aussagenkalküls nur mit Implikation das Axiom

$$0 \rightarrow p$$

hinzufügen.

Die Menge der Theoreme des Aussagenkalküls nur mit Implikation setzt sich aus allen und nur den wahren Ausdrücken des Aussagenkalküls zusammen, die ausschließlich mit Hilfe der Variablen und des Implikationszeichens geschrieben sind. Das Axiomensystem von Tarski/Bernays ([BORK76], S. 118) besteht aus den folgenden Axiomen:

- (1) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
- (2) $q \rightarrow (p \rightarrow q)$
- (3) $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p.$

Wenn wir diesen drei Axiomen das Axiom „ $0 \rightarrow p$ “ sowie die Definition des Negationszeichens mit Hilfe des Implikationszeichens und der Konstante falsum hinzufügen, können wir alle Axiome des Implikation-Negation-Aussagenkalküls beweisen. Als primäre Regeln sowohl des Systems nur mit Implikation als auch des Systems mit den Konstanten „ $\rightarrow$, 0“ werden die Einsetzungsregel und die Abtrennungsregel angenommen.

- **Aufgaben**

- *Fragen*

Aufgabe 2-1: Definieren Sie Konjunktion, Disjunktion, Implikation und Äquivalenz.

Aufgabe 2-2: Geben Sie die Definition der Negation einer Aussage an.

Aufgabe 2-3: Die folgende Aussagen sind mit einer möglichst einfachen Formulierung zu verneinen:

- a) Der Farbeimer ist voll.
- b) Alle Materialien sind verfügbar.
- c) Die Bestellung ist vor dem 27. August eingegangen.

Aufgabe 2-4: Sind die Aussagen $p \wedge q$, $p \vee q$ und $p \wedge \neg q$ wahr?

- a) p : Pasewalk liegt in Deutschland; q : Pasewalk liegt in Italien
- b) p : $3 < 7$; q : $2 + 2 = 4$

Aufgabe 2-5: Aussagenausdruck

Die Aussagenausdrücke $a(x):x^3 < 17$ und $b(x):x^2 - 1 = 3$ seien gegeben.

- a) Verneinen Sie $a(x)$.
- b) Verneinen Sie $b(x)$.
- c) Geben Sie Beispiele für Werte von x , für die $a(x) \wedge b(x)$ eine wahre bzw. eine falsche Aussage wird.

Aufgabe 2-6: Formulieren Sie umgangssprachlich die Negation folgender Aussagen:

- a) Die Erde dreht sich um die Sonne; b) Alle Raben sind schwarz; c) Es gibt Menschen, die unehrlich sind; d) Alles ist käuflich; e) Nichts ist vollkommen; f) Sonntags scheint immer die Sonne.

Aufgabe 2-7: Bestimmen Sie die Negation der folgenden Sätze:

- a) Alle Menschen sind töricht; b) Alle Menschen sind sterblich; c) Kein Mensch hat Flügel; d) Alle neuen Bücher sind nicht schlecht.

Aufgabe 2-8: Implikation

- a) Es gilt: „Niederer Reifendruck $\rightarrow$ schlechtes Rollen“. Gilt auch „kein schlechtes Rollen $\rightarrow$ kein niederer Reifendruck“?
- b) Es gilt: „Niederer Reifendruck $\rightarrow$ schlechtes Rollen“. Gilt auch „schlechtes Rollen $\rightarrow$ niederer Reifendruck“?
- c) Es gilt (für jedes x): „ $x > 2 \rightarrow x > 0$ “. Gilt auch „ $x \leq 2 \rightarrow x \leq 0$ “?
- d) Es gilt (für jedes x): „ $x > 2 \rightarrow x > 0$ “. Gilt auch „ $x > 0 \rightarrow x > 2$ “?

Aufgabe 2-9: Formalisieren Sie die folgenden Aussagen:

- a) Räder von den S.-Werken werden in Mecklenburg und in Pommern gefahren.
- b) Julius fährt Rennräder oder Mountainbikes.
- c) Es ist nicht der Fall, dass Julius an der Tour de France und am Giro de Italia teilgenommen hat.
- d) Es regnet, aber es ist nicht kalt.
- e) Julius fährt nicht Fahrrad Nirwana oder Fahrrad Sausebraus, sondern Fahrrad Hades.

- f) Wenn wir fleißig sind, werden wir einen Gewinn erzielen, wenn wir aber nicht fleißig sind, werden wir keinen Gewinn erzielen. (Wie könnte man diese Aussage kürzer formulieren?)
- g) Wenn das Buch langweilig ist, dann lese ich es nicht, und wenn ich es nicht lese, liegt es bloß herum; deshalb liegt das Buch, wenn es langweilig ist, bloß herum.
- h) Dieser Verein wird absteigen, es sei denn, er gewinnt noch alle ausstehenden Spiele.

Aufgabe 2-10: Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch?

- a) Auf dem Jupiter gibt es Leben oder Sokrates war ein griechischer Philosoph.
- b) Die Frau von Sokrates hieß Xanthippe und Sokrates war der Lehrer von Platon.
- c) Wenn Strauße Vögel sind, dann können Strauße fliegen.
- d) Wenn 152 durch 16 teilbar ist, dann ist 152 auch durch 4 teilbar.

Aufgabe 2-11: Schreiben Sie die folgenden zusammengesetzten Sätze in symbolischer Form unter Benutzung der Variablen „ p “, „ q “, und geeigneter Verknüpfungssymbole. Bestimmen Sie die wahren und die falschen zusammengesetzten Sätze unter ihnen.

- a) Der Mond ist ein Planet und er besteht aus Zitroneneis.
- b) Der Mond ist ein Planet und er ist kleiner als die Erde.
- c) Der Mond ist ein Planet oder er ist kleiner als die Erde.
- d) Der Mond ist ein Satellit oder er besteht aus Zitroneneis.
- e) Der Mond ist ein Satellit und er ist kleiner als die Erde.
- f) Wenn der Mond aus Zitroneneis besteht, so ist er kleiner als die Erde.
- g) Wenn der Mond aus Zitroneneis besteht, so ist er dicker als die Erde.
- h) Der Mond besteht aus Zitroneneis dann und nur dann, wenn er ein Satellit ist.

Aufgabe 2-12: Beseitigen der Disjunktion

Die Maschine ist defekt oder die Stromversorgung ist ausgefallen. Der Werker sagt: Die Maschine ist nicht defekt. Welchen Schluss zieht der Wartungstechniker?

Aufgabe 2-13: Syllogismus

Was für einen Syllogismus stellt der folgende Schluss dar?

Alle Werkzeugmacher sind gute Monteure.

Manche Pasewalker sind Werkzeugmacher.

Also sind einige Pasewalker gute Monteure.

Aufgabe 2-14: Schlüsse

- a) Beweisen Sie die Schlussregel:

$$\frac{p \rightarrow (q \rightarrow r)}{(p \wedge q) \rightarrow r}$$

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

- b) Beweisen Sie die Umkehrung des obigen Schlusses:

$$\frac{(p \wedge q) \rightarrow r}{p \rightarrow (q \rightarrow r)}$$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

Aufgabe 2-15:

Definieren Sie das exklusive oder.

Aufgabe 2-16:

Fassen Sie für die Aussagen p und q die Wahrheitsfunktionen der Verknüpfungen $\wedge$, $\vee$,

$\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ in einer Wahrheitstabelle zusammen.

Aufgabe 2-17: Beweisen Sie mit Hilfe der Widerspruchsregel folgenden Schluss:

$A \rightarrow B$	Wenn der Reifen platt ist, dann flicken wir den Reifen.
$B \rightarrow D$	Wenn wir den Reifen flicken, dann nutzen wir Klebstoff.
$(C \vee D) \rightarrow \neg E$	Wenn wir einen neuen Reifen kaufen oder Klebstoff nutzen, dann kaufen wir kein neues Fahrrad.
$(E \vee F) \rightarrow (A \vee B)$	Wenn wir ein neues Fahrrad kaufen oder ein Fahrrad instandsetzen, dann ist der Reifen platt oder wir flicken den Reifen.

$\neg E$ Wir kaufen kein neues Fahrrad.

Aufgabe 2-18: Welchen Wahrheitswert haben die folgenden Aussagen, wenn für a und b wahre, für p und q falsche Aussagen eingesetzt werden?

- a) $a \wedge p$; b) $\neg a \vee p$; c) $\neg(\neg a \wedge \neg q)$; d) $a \succ \neg p$;
 e) $(a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$; f) $\neg a \rightarrow p$; g) $a \rightarrow (\neg b \vee q)$.

Aufgabe 2-19: Die beiden folgenden Aussagen werden als wahr angenommen: Siegfried wirft die Kugel 15 m weit. Julius ist der Verlierer. Welche der folgenden Aussagen sind unter dieser Annahme wahr?

- a) Siegfried wirft die Kugel 15 m weit oder Julius ist der Sieger.
 b) Siegfried wirft die Kugel mindestens 15 m weit oder Julius ist der Verlierer.
 c) Wenn Siegfried die Kugel weiter als 15 m wirft, so ist Julius der Verlierer.
 d) Wenn Siegfried die Kugel mindestens 15 m weit wirft, so ist Julius der Verlierer.
 e) Dann und nur dann, wenn Siegfried die Kugel mindestens 15 m weit wirft, ist Julius der Sieger.

Aufgabe 2-20: Beweisen Sie, dass folgende Ausdrücke allgemeingültig (tautologisch) sind:

- a) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$; b) $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$; c) $\neg p \vee ((q \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg q)$; d) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \vee p) \rightarrow (r \vee q)]$; e) $(\neg p \vee q) \rightarrow [(r \rightarrow q) \vee \neg(r \rightarrow p)]$.

Aufgabe 2-21: Beweisen Sie, dass folgende Ausdrücke logisch äquivalent sind:

- a) $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ (De Morgan); b) $p \rightarrow q = \neg q \rightarrow \neg p$ (Kontraposition); c) $p \vee (p \wedge q) = p$ (Verschmelzungsgesetz); d) $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (Distributivgesetz).

Aufgabe 2-22: Die Peirce-Funktion $\Downarrow$ (Rejektion) besitzt die folgende Wahrheitstafel:

p	q	$p \Downarrow q$
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	w

- a) Stellen Sie die Verknüpfung $p \Downarrow q$ in der Junktorenbasis $\{\neg, \rightarrow\}$ dar.

b) Zeigen Sie, dass die Peirce-Funktion selbst eine Junktorenbasis darstellt und sich alle anderen Junktoren durch den Peirce-Junktor ausdrücken lassen. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

1. Zeigen Sie, dass $\neg p = p \Downarrow q$ gilt (Wahrheitstafel!). Anschließend beweisen Sie durch rekursive Definition
2. $p \wedge q = (p \Downarrow p) \Downarrow (q \Downarrow q)$
3. $p \vee q = (p \Downarrow q) \Downarrow (p \Downarrow q)$
4. $p \rightarrow q = ((p \Downarrow p) \Downarrow q) \Downarrow ((p \Downarrow p) \Downarrow q)$

Aufgabe 2-23: Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

- a) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)$; b) $q \vee r \vee (p \wedge q) \vee (q \wedge r)$;
 c) $[p \wedge (\neg p \vee q)] \vee [q \wedge (q \vee r)] \vee q$.

Aufgabe 2-24: Konstruieren Sie für jede der folgenden zusammengesetzten Aussagen die Wertetafel. Entscheiden Sie in jedem Fall, ob die zusammengesetzte Aussage oder ihre Negation (oder beide) allgemeingültige Aussagen sind.

- a) $p \rightarrow p$; b) $p \rightarrow \neg p$; c) $(\neg p) \rightarrow p$; d) $(\neg p) \leftrightarrow p$; e) $(p \wedge q) \rightarrow p$; f) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$; g) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$; h) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$; i) $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$;
 j) $p \rightarrow (q \wedge r) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$.

Aufgabe 2-25: Bestimmen Sie für jede der folgenden zusammengesetzten Aussagen die logische Negation, bei der „ $\neg$ “ nur auf elementare Aussagen p, q, r angewandt wird.

- a) $p \wedge (\neg q)$; b) $(\neg p) \vee (\neg q)$; c) $(\neg p) \rightarrow q$; d) $p \rightarrow (\neg q)$; e) $(p \vee q) \wedge q$; f) $(p \rightarrow q) \wedge r$; g) $p \rightarrow (q \wedge r)$.

Aufgabe 2-26: Im folgenden sind die Aussagen unter a), b) und c) als wahr zu betrachten. Führen Sie mit Hilfe der Abtrennungsregel und einem geeigneten Gesetz den verlangten Beweis.

- a) p , b) $p \rightarrow q$, c) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r)$.

Zeigen Sie, dass r wahr ist.

- a) p , b) $p \rightarrow p \rightarrow q$

Zeigen Sie, dass q wahr ist.

- a) $p \rightarrow q$, b) $\neg q$

Zeigen Sie, dass p falsch ist.

Aufgabe 2-27:

a) Formen Sie den Ausdruck $p \vee (p \wedge q)$ in eine KNF um.

b) Formen Sie den Ausdruck $((q \rightarrow p) \vee r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge r)$ in eine DNF um.

Aufgabe 2-28:

$f(p, q, r)$ sei eine dreistellige Aussagenverknüpfung. Gegeben sei die Wahrheitstafel von :

p	q	r	$f(p, q, r)$
w	w	w	f
w	w	f	f
w	f	w	f
w	f	f	w

f	w	w	f
f	w	f	w
f	f	w	w
f	f	f	f

- a) Stellen Sie $f(p, q, r)$ als DNF dar.
b) Wie kann man $f(p, q, r)$ umgangssprachlich ausdrücken?

Aufgabe 2-29: Transformieren Sie die folgende Aussageform auf DNF:
 $g(p, q, r) = (p \wedge \neg r) \vee (p \wedge (q \vee r))$.

Aufgabe 2-30: Ein Kunde stellt an die S.-Werke die folgenden Forderungen: Ich kaufe Fahrrad Nirwana oder Hades, aber nicht beide zusammen; wenn ich Nirwana bestelle, dann will ich kein Walhall; wenn ich Walhall oder kein Fahrrad Nirwana bestelle, dann bestelle ich kein Fahrrad Hades. Was sollen die S.-Werke dem Kunden sinnvollerweise liefern?

Aufgabe 2-31: Die Menschen teilen sich in die Ehrlichen und die Lügner (Nichtehrlichen). Mitarbeiter Meier sagt, er sei ehrlich. Wir bitten Mitarbeiter Meier Werker Müller zu fragen, ob er ehrlich sei. Mitarbeiter Meier berichtet, dass Werker Müller von sich sage, er sei ehrlich. Ist Mitarbeiter Meier ehrlich?

– Antworten

Aufgabe 2-1: Die *Konjunktion* zweier Aussagen p und q ist eine Aussage, die genau dann wahr ist, wenn beide Aussagen wahr sind. Die *Disjunktion* zweier Aussagen a und q ist eine Aussage, die genau dann wahr ist, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist. Ist die verknüpfte Aussage $p \rightarrow q$ wahr, so liegt ein logischer Schluss (oder eine Implikation) vor und man schreibt $p \rightarrow q$ („aus p folgt q “). Satz $\neg p \rightarrow \neg q$ bedeutet dasselbe wie $p \rightarrow q$ bzw. „ p impliziert q “, „wenn p , dann q “ oder „ p ist hinreichend für q “ oder „ q ist notwendig für p “. Wenn $p \rightarrow q$ und $q \rightarrow p$ wahr ist, dann liegt eine Äquivalenz vor und man schreibt $p \leftrightarrow q$. Wir sagen: „ p genau dann, wenn q “ bzw. „ p dann und nur dann, wenn q “ oder „ p ist notwendig und hinreichend für q “.

Aufgabe 2-2: Die Negation einer Aussage p ist genau dann wahr, wenn p falsch ist.

Aufgabe 2-3:

- a) Der Farbeimer ist nicht voll (nicht „Der Farbeimer ist leer“).
b) Mindestens ein Material fehlt.
c) Die Bestellung ist am 27. August oder später eingegangen.

Aufgabe 2-4:

- a) $p \wedge q$ ist falsch, weil q falsch ist. $p \vee q$ ist wahr, $p \wedge \neg q$ ist wahr.
b) Da p und q wahr sind, folgt: $p \wedge q$ ist wahr, $p \vee q$ ist wahr, $p \wedge \neg q$ ist falsch.

Aufgabe 2-5:

- a) Verneinung $\neg a(x): x^3 \geq 17$.
 b) Verneinung $\neg b(x): x^2 - 1 \neq 3$.
 c) Für $x = 2$ ist $a(2): 2^3 < 17$ und $b(2): 2^2 - 1 = 3$ wahr. Daher ist $a(2) \wedge b(2)$ wahr.
 Wenn wir in $a(x) \wedge b(x)$ für x den Wert 2,5 einsetzen, wird die Aussage falsch.

Aufgabe 2-6:

- a) Die Erde dreht sich nicht um die Sonne; b) Nicht alle Raben sind schwarz; c) Es gibt keine Menschen, die unehrlich sind; d) Nicht alles ist käuflich; e) Manches ist vollkommen; f) Sonntags scheint nicht immer die Sonne.

Aufgabe 2-7:

- a) Manche Menschen sind nicht töricht.
 b) Manche Menschen sind nicht sterblich.
 c) Manche Menschen haben Flügel.
 d) Manche neuen Bücher sind schlecht.

Aufgabe 2-8: a) ja; b) nein; c) nein; d) nein.

Aufgabe 2-9:

- a) $p \wedge q$; b) $p \vee q$; c) $\neg(p \wedge q)$; d) $p \wedge \neg q$; e) $\neg(p \vee q) \wedge r$;
 f) $p \rightarrow q \wedge \neg p \rightarrow \neg q$; $p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p$ (Transposition); $p \leftrightarrow q$ (Einführen der Äquivalenz); g) $(p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$;
 h) modus tollens:

$p \rightarrow q$ Dieser Verein gewinnt nicht alle Spiele. Deshalb wird er absteigen.

$\neg q$ Dieser Verein wird nicht absteigen.

$\neg p$ Dieser Verein gewinnt alle Spiele.

– Beseitigen der Disjunktion (Disjunktiver Syllogismus):

$p \vee q$ Dieser Verein steigt ab oder er gewinnt alle Spiele.

$\neg p$ Dieser Verein steigt nicht ab.

q Dieser Verein gewinnt alle Spiele.

Aufgabe 2-10: a), b) und d) sind wahr.

Aufgabe 2-11:

- p Der Mond ist ein Planet.
 q Der Mond besteht aus Zitroneneis.
 r Der Mond ist ein Satellit.
 s Der Mond ist kleiner als die Erde.
 a) $p \wedge q$: falsch, da p falsch und q falsch
 b) $p \wedge s$: falsch, da p falsch
 c) $p \vee s$: richtig, da s richtig
 d) $r \vee q$: richtig, da r richtig

e) $r \wedge s$: richtig, da r richtig und s richtig

f) $q \rightarrow s$: richtig, da s richtig

g) $q \rightarrow \neg s$: falsch, da $\neg s$ falsch

h) $q \leftrightarrow r$: falsch, da q falsch.

Aufgabe 2-12: Die Stromversorgung ist ausgefallen.

Aufgabe 2-13: Bedingter Syllogismus (Kettenschluss)

Aufgabe 2-14: siehe Export-/Importgesetz der Prämissen

Aufgabe 2-15: Das ausschließende „oder“ (symbolisch $a|b$) bezeichnet eine Aussage, die genau dann wahr ist, wenn entweder a oder b wahr sind.

Aufgabe 2-16:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1

Aufgabe 2-17:

- | | | |
|-------------------------------------|---|----------|
| (1) $B \rightarrow D$ | } | Annahmen |
| (2) $(C \vee D) \rightarrow \neg E$ | | |
| (3) $D \rightarrow \neg E$ | | |
| (4) E | | |
| (5) $\neg D$ | | |
| (6) D | | |
- Widerspruch (5, 6)

Aufgabe 2-18:

a) falsch; b) falsch; c) wahr; d) falsch; e) wahr; f) wahr; g) falsch.

Aufgabe 2-19:

a) wahr; b) wahr; c) wahr; d) wahr; e) falsch.

Aufgabe 2-20:

a)

p	$\rightarrow$	$(q$	$\rightarrow$	$p)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0

b)

$((p$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$\neg$	$q)$	$\rightarrow$	$\neg$	p
1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1

0	1	1	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0

c)

$\neg$	p	$\vee$	$((q \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg q)$
0	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0

d)

$(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \vee p) \rightarrow (p \vee q)]$
1
1
0
0

e)

$(\neg p \vee q) \rightarrow ((r \rightarrow q) \vee \neg(r \rightarrow p))$
0
1
0
1

Aufgabe 2-21:

a) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Negation der Konjunktion/Negation der Disjunktion

- | | | |
|-----|----------------------------------|----------------------|
| (1) | $\neg(p \wedge q)$ | $\neg p \vee \neg q$ |
| (2) | $\neg(\neg(\neg p \vee \neg q))$ | ND |
| (3) | $\neg p \vee \neg q$ | $\neg(p \wedge q)$ |

b) $p \rightarrow q = \neg q \rightarrow \neg p$

Kontraposition/Transposition einer Implikation

- | | | | |
|-----|-------------------|-----------------------------------|------------|
| (1) | $p \rightarrow q$ | } | {Annahmen} |
| (2) | $\neg q$ | | |
| (3) | p | {Annahme des indirekten Beweises} | |
| (4) | q | | |

Widerspruch

c) $p \vee (p \wedge q) = p$

Verschmelzungsgesetz

1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0

Wenn p auf der linken Seite wahr ist, dann ist p auch auf der rechten Seite wahr.

$$d) p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Beweis siehe Distributionsgesetz der Konjunktion bezüglich der Disjunktion.

Aufgabe 2-22:

$$a) \begin{array}{ccccccc} p & q & p & \downarrow & q & & \\ w & w & & f & & \neg & p \wedge \neg q \rightarrow p \downarrow q \\ w & f & & f & & & p \wedge \neg q \rightarrow \neg(p \downarrow q) \\ f & w & & f & & \neg & p \wedge q \rightarrow \neg(p \downarrow q) \\ f & f & & w & & & p \wedge q \rightarrow \neg(p \downarrow q) \end{array}$$

$$b) \begin{array}{ccccccc} p & \wedge & q & = & \neg & p & \downarrow & q & = & (p & \downarrow & p) & \downarrow & (q & \downarrow & q) \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & f & 1 & w & 1 & f & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & 1 & f & 1 & f & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & w & 0 & f & 1 & f & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & w & 0 & f & 0 & w & 0 \end{array}$$

$$p \vee q = (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & w & 1 & 1 & f & 1 & w & 1 & f & 1 \\ 1 & w & 0 & 1 & f & 0 & w & 1 & f & 0 \\ 0 & w & 1 & 0 & f & 1 & w & 0 & f & 1 \\ 0 & f & 0 & 0 & w & 0 & f & 0 & w & 0 \end{array}$$

$$p \rightarrow q ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & w & 1 & 1 & f & 1 & f & 1 & w & 1 & f & 1 & f & 1 \\ 1 & f & 0 & 1 & f & 1 & w & 0 & f & 1 & f & 1 & w & 0 \\ 0 & w & 1 & 0 & w & 0 & f & 1 & w & 0 & w & 0 & f & 1 \\ 0 & w & 0 & 0 & w & 0 & f & 0 & w & 0 & w & 0 & f & 0 \end{array}$$

Aufgabe 2-23:

$$a) (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)$$

$$(p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)$$

$$p$$

$$(p \wedge q) \vee p$$

Verschmelzungsgesetz

$$p$$

$$b) q \vee r \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$q \vee (p \wedge q) \vee r \vee (r \wedge q)$$

$$q \vee r$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } & [p \wedge (\neg p \vee q)] \vee [q \wedge (q \vee r)] \vee q \\
 & (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q) \vee q \vee q \\
 & (p \wedge \neg p) \vee q \\
 & q
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2-24:

a) $p \rightarrow$

1	1	1
1	1	1
0	1	0
0	1	0

b) $p \rightarrow$

1	0	0
1	0	0
0	1	1
0	1	1

c) $(\neg p) \rightarrow p$

0	1	1
0	1	1
1	0	0
1	0	0

d) $(\neg p) \leftrightarrow p$

0	0	1
0	0	1
1	0	0
1	0	0

e) $(p \wedge q) \rightarrow p$

1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	0	1	1	0
0	0	0	1	0

f) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0

g) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0

h) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0

i) $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0

j) $p \rightarrow (q \wedge r) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0

Aufgabe 2-25:

a) $p \wedge (\neg q)$ $\neg(p \wedge (\neg q))$ $\neg p \vee q$

b) $(\neg p) \vee (\neg q)$ $\neg(\neg p) \wedge \neg(\neg q)$ $p \wedge q$

c) $(\neg p) \rightarrow q$ $\neg((\neg p) \rightarrow q)$ $\neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \vee q)$

d) $p \rightarrow (\neg q)$ $\neg(p \rightarrow (\neg q))$ $p \wedge \neg(\neg q)$ $p \wedge q$

e) $(p \vee q) \wedge q$ $\neg((p \vee q) \wedge q)$ $\neg(p \vee q) \vee \neg q$ $\neg p \wedge \neg q \vee \neg q$

f) $(p \rightarrow q) \wedge r$ $\neg((p \rightarrow q) \wedge r)$ $\neg((p \vee q) \wedge r)$

$\neg(p \vee q) \vee \neg r$ $\neg p \wedge \neg q \vee \neg r$

g) $p \rightarrow (q \wedge r)$ $\neg(p \rightarrow (q \wedge r))$ $(p \wedge \neg(q \wedge r))$ $p \wedge \neg q \vee \neg r$

Aufgabe 2-26:

$(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow p \rightarrow q$	$p \rightarrow q$
1 1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1	1 1 1
1 0 0 1 0 1 1	1 1 1 0 0	1 0 0
0 1 1 0 1 0 0	0 1 0 1 1	0 1 1
0 1 0 1 0 1 0	0 1 0 0 0	0 1 0

Aufgabe 2-27:

a) KNF: $p \vee (p \wedge q)$

$(p \vee p) \wedge (p \vee r)$

b) DNF: $((q \rightarrow p) \vee r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge r)$

$((\neg q \vee p) \vee r) \rightarrow ((\neg p \vee q) \wedge r)$

$\neg((\neg q \vee p) \vee r) \vee ((\neg p \vee q) \wedge r)$

$\neg(\neg(\neg q \vee p) \wedge \neg r) \vee ((\neg \neg p \wedge \neg q) \wedge r)$

$\neg(\neg(q \wedge \neg p) \wedge \neg r) \vee ((p \wedge \neg q) \wedge r)$

$\neg(\neg q \wedge p \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$

Aufgabe 2-28:

a) $f(p, q, r)$ ist genau dann wahr, wenn einer der drei Fälle erfüllt ist:

1. Fall: $I(p) = w \wedge I(q) = f \wedge I(r) = f \leftrightarrow I(p \wedge \neg q \wedge \neg r) = w$

2. Fall: $I(p) = f \wedge I(q) = w \wedge I(r) = f \leftrightarrow I(\neg p \wedge q \wedge \neg r) = w$

3. Fall: $I(p) = f \wedge I(q) = f \wedge I(r) = w \leftrightarrow I(\neg p \wedge \neg q \wedge r) = w$

$f(p, q, r)$ ist genau dann wahr, wenn der Ausdruck

$(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$ wahr ist. Daraus folgt:

$f(p, q, r) = (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$.

b) Umgangssprachlich heißt dies: „entweder p oder q oder r “.

Aufgabe 2-29:

$g(p, q, r) = (p \wedge \neg r) \vee (p \wedge (q \vee r))$

$= (p \wedge \neg r) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$= (p \wedge \neg r \wedge (q \vee \neg q)) \vee (p \wedge q \wedge (r \vee \neg r)) \vee (p \wedge r \wedge (q \vee \neg q))$

$= (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \vee \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$

$\vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$

$= (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$

Aufgabe 2-30:

Wir verwenden bei der Formulierung der Forderungen folgende Abkürzungen: b = Der Kunde bestellt Fahrrad Walhall, k = Der Kunde bestellt Fahrrad Nirwana, n = Der Kunde bestellt Fahrrad Hades. Die Prämissen lauten dann:

1. $k \supset \neg n$, 2. $k \rightarrow \neg b$, 3. $(b \vee \neg k) \rightarrow \neg n$

Als nächstes formen wir die Prämissen so um, dass nur noch die Negation, Konjunktion und Disjunktion vorkommen:

$$1. \quad k \supset \neg n = (\neg k \wedge n) \vee (k \wedge \neg n) = (k \vee n) \wedge (\neg k \vee \neg n)$$

$$2. \quad k \rightarrow \neg b = \neg k \vee \neg b$$

$$3. \quad (b \vee \neg k) \rightarrow n = (\neg b \wedge k) \vee \neg n = (\neg b \wedge \neg n) \wedge (k \vee \neg n)$$

Nun verbinden wir die drei Prämissen durch Konjunktion und reduzieren die gesamte Aussage auf eine möglichst einfache Form.

$$= f(b, k, n) = (k \vee n) \wedge (\neg k \vee \neg n) \wedge (\neg k \vee \neg b) \wedge (\neg b \vee \neg n) \wedge (k \vee \neg n)$$

$$= (k \vee (n \wedge \neg n)) \wedge (\neg k \vee \neg n) \wedge (\neg k \vee \neg b) \wedge (\neg b \vee \neg n)$$

$$= k \wedge (\neg k \vee (\neg b \wedge \neg n)) \wedge (\neg b \vee \neg n)$$

$$= ((k \wedge \neg k) \vee (k \wedge \neg b \wedge \neg n)) \wedge (\neg b \vee \neg n)$$

$$= (k \wedge \neg b \wedge \neg n) \wedge (\neg b \vee \neg n) = (k \wedge \neg b \wedge \neg n \wedge \neg b) \vee (k \wedge \neg b \wedge \neg n \wedge \neg n)$$

$$= (k \wedge \neg b \wedge \neg n)$$

Die Aussage ist genau dann wahr, wenn k wahr, b falsch und n falsch ist. Die S.-Werke werden also nur Fahrrad Nirwana liefern.

Aufgabe 2-31: Werker Müller sagt auf die ihm gestellte Frage in jedem Fall, er sei ehrlich, auch wenn er ein Lügner ist. Wenn Mitarbeiter Meier jetzt sagt, dass Werker Müller sich als ehrlich bezeichnet, dann ist er ehrlich.

• **Literatur**

- [BORK76] BORKOWSKI, L.: Formale Logik. Logische Systeme. Einführung in die Metalogik. Berlin: Akademie-Verlag 1976.
- [BUCH87] BUCHER, TH. G.: Einführung in die angewandte Logik. Lehrbuch für Geisteswissenschaftler ohne Vorkenntnisse in Logik. Berlin: de Gruyter 1987.
- [DMSW96] DROSDOWSKI, G.; MÜLLER, W.; SCHOLZE-STUBENRECHT, W.; WERMKE, M. (Hrsg.): Duden Deutsches Universalwörterbuch. 3. Auflage. Mannheim: DUDEN Verlag 1996.
- [FREG79] FREGE, G.: Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. Halle: 1879, S. 25-50. In: Berka, K.; Kreiser, L. [Hrsg.]: Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik, 2. Auflage. Berlin: Akademie Verlag 1973, S. 72-99.
- [HiBE34] HILBERT, D.; BERNAYS, P.: Grundlagen der Mathematik, Bd. I. Berlin: Springer 1934, S. 66.
- [KLBU85] KLAUS, G., BUHR, M. (Hrsg.): Philosophisches Wörterbuch. Bd. 1 A bis Kybernetik - 13. Aufl. als fotomechan. Nachdr. d. 12. durchges. Aufl. Berlin: Verlag Das Europ. Buch 1985.
- [LOHN11] LOHNSTEIN, H.: Formale Semantik und natürliche Sprachen. Berlin: de Gruyter 2011.
- [LUTA30] LUKASIEWICZ, J.; TARSKI, A.: Untersuchungen über den Aussagenkalkül, Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie (Warszawa), Cl. III, 23, 1930, S. 1-21.
- [MONJ63] MONJALLON, A.: Introduction aux mathématiques modernes. Paris: Librairie Vuibert 1963.
- [ZOGL97] ZOGLAUER, TH.: Einführung in die formale Logik für Philosophen. Unitaschenbücher 1999. Göttingen: Vandenhoeck + Rupprecht 1997.

Produktionstheorie 1

Methodische Grundlagen

Dangelmaier, W.

2017, XI, 858 S. 7 Abb., Hardcover

ISBN: 978-3-662-54922-3