Aufgaben zu Kapitel 1
Der Zahlenraum $\mathbb{R}^n$ und der Begriff des reellen Vektorraums

1.1 Lineare Gleichungssysteme

Inhalt von Abschnitt 1.1 ist die Entwicklung des Gaussschen Eliminationsverfahrens *(Hauptsatz 1.5) zur Umformung eines $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ (eines LGS in n Unbekannten und m Gleichungen) in* (reduzierte) Zeilenstufenform, *woraus sich dann die Lösbarkeit (liegt nicht vor bei widersprüchlichen Gleichungen $0 = b$ für $b \neq 0$) und bei Lösbarkeit die* Parameter *und davon abhängig die* allgemeine Lösung *ableiten lassen. Dieser Schritt ist unabhängig von der Umformung auf Zeilenstufenform und heißt* Rückwärtssubstitution.

Aufgabe 1.1 (K) Wenn fünf Ochsen und zwei Schafe acht Taels Gold kosten, sowie zwei Ochsen und acht Schafe auch acht Taels, was ist dann der Preis eines Tieres? (Chiu-Chang Suan-Chu, ~300 n.Chr.)

Aufgabe 1.2 (T) Für ein LGS in zwei Variablen der Form

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 = b_1 \ , \tag{1}$$
$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 = 0 \tag{2}$$

ist seit mindestens 3650 Jahren die *Methode der falschen Annahme* bekannt:
Sei $a_{2,2} \neq 0$ und (1), (2) eindeutig lösbar.

Sei $x_1^{(1)} \neq 0$ eine beliebige „Schätzung" für x_1. Aus (2) berechne man $x_2^{(1)}$, so dass $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)$ die Gleichung (2) erfüllen. Die Gleichung (1) wird i. Allg. nicht richtig sein, d. h.

$$a_{1,1}x_1^{(1)} + a_{1,2}x_2^{(1)} =: \tilde{b_1} \neq b_1 \ .$$

Korrigiere $x_1^{(1)}$ durch $x_1^{(2)} := x_1^{(1)} b_1 / \tilde{b_1}$. Bestimme wieder $x_2^{(2)}$, so dass $\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)$ die Gleichung (2) erfüllen. Zeigen Sie: $(x_1, x_2) = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right)$.

Aufgabe 1.3 (K) Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit Hilfe des Gaussschen Eliminationsverfahrens:

P. Knabner und W. Barth, *Lineare Algebra*, Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-662-54991-9_1

a)

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= -12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 &= -21 \\ - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= -2 \\ -6x_1 + 6x_2 + 13x_3 + 10x_4 &= -22 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -4 \\ 5x_1 + 5x_2 + 11x_3 &= 6 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n &= 0 \\ x_n + x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 1.4 (K)

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge aller $\boldsymbol{x} = (x_\nu)_{\nu=1,\dots,4}$ mit $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & \alpha & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ \beta \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie weiterhin die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Aufgabe 1.5 (T) Ein 9-Tupel $(x_1, \dots, x_9)$ heiße *magisches Quadrat* der Ordnung 3, wenn

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6 = x_7 + x_8 + x_9 = x_1 + x_4 + x_7 \\ & = x_2 + x_5 + x_8 = x_3 + x_6 + x_9 = x_1 + x_5 + x_9 = x_3 + x_5 + x_7 \end{aligned}$$

gilt. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf, das zu diesen sieben Bedingungen äquivalent ist, und bestimmen Sie den Lösungsraum (mit reellen Komponenten). Wie sieht der Lösungsraum mit rationalen Komponenten aus? Was lässt sich über ganzzahlige Lösungen sagen? Gibt es auch eine Lösung, für die $x_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, 9$? (siehe J. W. von Goethe [1]: Faust. Der Tragödie erster Teil, Hexenküche).

---

[1] Johann Wolfgang von Goethe ∗28. August 1749 in Frankfurt am Main †22. März 1832 in Weimar

Aufgabe 1.6 (K) Bringen Sie die folgenden Matrizen durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform:

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.7 (T) Zeigen Sie, dass die Elementarumformung (II) die Lösungsmenge eines LGS nicht verändert.

Aufgabe 1.8 (T) Zeigen Sie (durch vollständige Induktion) die Behauptungen (MM.13) und (MM.14).

1.2 Vektorrechnung im $\mathbb{R}^n$ und der Begriff des $\mathbb{R}$-Vektorraums

*Der n-*Tupel- *oder* Skalarenvektorraum $\mathbb{R}^n$ *ist der grundlegende* $\mathbb{R}$-Vektorraum, *dessen Eigenschaften axiomatisch verallgemeinert werden. Für* Geraden *im* $\mathbb{R}^n$ *oder einem* $\mathbb{R}$*-Vektorraum V gilt allgemein die* explizite Darstellung, *für $n = 2$ gibt es auch die* implizite Darstellung *als Lösung einer linearen Gleichung, was zum Begriff* der Hyperebene *verallgemeinert wird. Über* $\mathbb{R}^n$ *hinaus ergeben sich weitere* $\mathbb{R}$*-Vektorräume, die einem* $\mathbb{R}^k$ *„entsprechen" wie* $\mathbb{R}^{(m,n)}$, $S_0(\Delta)$, $S_1(\Delta)$, $\mathbb{R}_l(x)$ *oder aber „andersartig" sind wie* $\mathbb{R}(x)$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathrm{Abb}(M, \mathbb{R})$.

Aufgabe 1.9 (K) Zeigen Sie:

a) Die drei Geraden im $\mathbb{R}^2$

$$L_1 := \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

schneiden sich in einem Punkt.

b) Die drei Punkte $(10, -4)^t$, $(4, 0)^t$ und $(-5, 6)^t$ liegen auf einer Geraden.

Aufgabe 1.10 (K) Es sei $L \subset \mathbb{R}^2$ die Gerade durch die Punkte $(-1, 3)^t$ und $(5, -2)^t$, sowie $M \subset \mathbb{R}^2$ die Gerade durch die Punkte $(-2, -2)^t$ und $(1, 6)^t$. Berechnen Sie den Schnittpunkt von L und M.

Aufgabe 1.11 (K) Zeigen Sie, dass die drei Geraden im $\mathbb{R}^2$ mit den Gleichungen

$$x + 2y - 1 = 0, \quad 3x + y + 2 = 0, \quad -x + 3y - 4 = 0$$

durch einen Punkt verlaufen und berechnen Sie diesen Punkt.

Aufgabe 1.12 (G) Es seien L_1, L_2, L_3 und L_4 vier verschiedene Geraden in der Ebene $\mathbb{R}^2$ derart, dass sich je zwei dieser Geraden in einem Punkt treffen. $S_{i,j}$ bezeichne den Schnittpunkt der Geraden L_i und L_j, $(1 \le i < j \le 4)$. Die sechs Schnittpunkte $S_{i,j}$, $1 \le i < j \le 4$ seien alle verschieden. Dann liegen die Mittelpunkte der drei Strecken $\overline{S_{1,2}S_{3,4}}$, $\overline{S_{1,3}S_{2,4}}$ und $\overline{S_{1,4}S_{2,3}}$ auf einer Geraden. Beweisen Sie diese Aussage für den Spezialfall, dass die Geraden durch die Gleichungen

$$y = 0, \quad x = 0, \quad x + y = 1, \quad \frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\mu} = 1 \quad (\lambda \neq \mu)$$

gegeben sind, wobei $\lambda, \mu \neq 0, \lambda \neq \mu$. Der allgemeine Fall folgt dann durch Koordinatentransformation (siehe Aufgabe 4.4').

Aufgabe 1.13 (T) Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge, $(W, +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Zeigen Sie: Auf $\mathrm{Abb}(M, W)$ wird durch $+$ und $\cdot$ wie in Definition 1.31 eine $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur eingeführt.

1.3 Lineare Unterräume und das Matrix-Vektor-Produkt

Auf dem Begriff der Linearkombination *aufbauend werden* lineare Hülle span(A) *und allgemeiner* linearer Unterraum *eingeführt. Mit dem* Matrix-Vektor-Produkt *ergibt sich sowohl eine Darstellung der Lösungsmenge von LGS als auch von linearen Unterräumen, die von endlich vielen n-Tupeln* erzeugten *sind. Die Lösungsmenge eines homogenen LGS ist ein linearer Unterraum, die eines inhomogenen LGS gibt Anlass zum Begriff des* affinen Unterraums.

Aufgabe 1.14 (K) Betrachten Sie die acht Mengen von Vektoren $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$ definiert durch die Bedingungen

a) $x_1 + x_2 = 0$,
b) $(x_1)^2 + (x_2)^2 = 0$,
c) $(x_1)^2 - (x_2)^2 = 0$,
d) $x_1 - x_2 = 1$,
e) $(x_1)^2 + (x_2)^2 = 1$,
f) Es gibt ein $t \in \mathbb{R}$ mit $x_1 = t$ und $x_2 = t^2$,
g) Es gibt ein $t \in \mathbb{R}$ mit $x_1 = t^3$ und $x_2 = t^3$,
h) $x_1 \in \mathbb{Z}$.

Welche dieser Mengen sind lineare Unterräume?

Aufgabe 1.15 (K) Liegt der Vektor $(3, -1, 0, -1)^t \in \mathbb{R}^4$ im Unterraum, der von den Vektoren $(2, -1, 3, 2)^t$, $(-1, 1, 1, -3)^t$ und $(1, 1, 9, -5)^t$ aufgespannt wird?

Aufgabe 1.16 (T) Es seien $U_1, U_2 \subset V$ lineare Unterräume eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V. Zeigen Sie: $U_1 \cup U_2$ ist genau dann ein linearer Unterraum, wenn $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$.

Aufgabe 1.17 (K) Beweisen Sie Bemerkungen 1.51, indem Sie jeweils die genaue Anzahl von Additionen und Multiplikationen bestimmen.

Aufgabe 1.18 (T) Beweisen Sie Korollar 1.55.

Aufgabe 1.19 (T) Beweisen Sie Lemma 1.56.

1.4 Lineare (Un-)Abhängigkeit und Dimension

Lineare Unabhängigkeit *von Vektoren wird durch den Test nach Hauptsatz 1.62 überprüft.* Voller Spaltenrang, *d. h. lineare Unabhängigkeit der Spalten der Koeffizientenmatrix, ist äquivalent mit Eindeutigkeit bei linearen Gleichungssystemen. Ein endlich erzeugter Vektorraum hat nach dem Basis-Auswahl-Satz (Satz 1.71) eine endliche Basis invarianter Länge.* Zeilenrang *und* Spaltenrang *sind immer gleich (Hauptsatz 1.80), dieser* Rang *hängt über die* Dimensionsformel I *mit der Dimension des homogenen Lösungsraums zusammen (Theorem 1.82). Jeder Unterraum des* $\mathbb{R}^n$ *läßt sich als Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems schreiben. Der (Zeilen-)Rang der Koeffizientenmatrix ist seine* Kodimension.

Aufgabe 1.20 (T) Es sei $U \subset V$ ein k-dimensionaler Untervektorraum. Zeigen Sie, dass für jede Teilmenge $M \subset U$ die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(i) M ist eine Basis von U,

(ii) M ist linear unabhängig und besteht aus k Vektoren,

(iii) M spannt U auf und besteht aus k Vektoren.

Aufgabe 1.21 (K) Berechnen Sie den Zeilenrang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & 10 & 15 \\ 6 & 10 & 15 & 21 \\ 10 & 15 & 21 & 28 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.22 (K) Es seien

$$U := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 = x_3 + 2x_4\}, \quad V := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 + x_3 + x_4\}.$$

Bestimmen Sie Basen von $U, V, U \cap V$ und $U + V$.

Aufgabe 1.23 (T) Seien $n, k \in \mathbb{N}$, seien $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^k$ Vektoren, und sei $\boldsymbol{w}_i := \sum_{j=1}^{i} \boldsymbol{v}_j$ für $i = 1, \ldots, n$. Man zeige, dass das System $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ genau dann linear unabhängig ist, wenn das System $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n)$ linear unabhängig ist.

http://www.springer.com/978-3-662-54990-2

Lineare Algebra
Aufgaben und Lösungen
Knabner, P.; Barth, W.
2017, X, 265 S. 7 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-54990-2