

# 3 Reihen

Im vorangegangenen Kapitel wurden TAYLOR-Polynome, d.h. Summen aus endlich vielen Potenzfunktionen, als Mittel zur Approximation von hinreichend oft differenzierbaren Funktionen behandelt. Im folgenden Kapitel sollen nun Summen mit "unendlich" vielen Summanden betrachtet werden. Solche Summen werden auch Reihen genannt. Mit Hilfe des mathematischen Grenzwertbegriffs lässt sich für derartige Summen aus unendlich vielen Summanden entscheiden, wann man ihnen vernünftigerweise einen Sinn geben, d.h. eine konkrete Summe zuordnen kann, und wann nicht. Reihen werden bei der Approximation von Funktionen verwendet. Ein weiteres Anwendungsgebiet von Reihen ist die näherungsweise Berechnung von Integralen und die Bestimmung von Näherungslösungen für Differentialgleichungen. Bei der Beschreibung von periodischen Prozessen spielen spezielle Funktionenreihen im Rahmen der FOURIER-Analyse eine zentrale Rolle. Reihen finden auch Anwendung bei der Berechnung von Funktionswerten der Exponentialfunktion oder trigonometrischer Funktionen auf Rechnern.

Bevor man allerdings Reihen anwenden kann, ist es erforderlich, Konvergenzverhalten und Konvergenzbereiche sowie Methoden zur Konstruktion von Reihen zu einem bestimmten Zweck zu untersuchen.

## Übersicht

3.1	Zahlenreihen . . . . .	192
3.2	Funktionenfolgen . . . . .	201
3.3	Gleichmäßig konvergente Reihen . . . . .	207
3.4	Potenzreihen . . . . .	209
3.5	Operationen mit Potenzreihen . . . . .	212
3.6	Komplexe Potenzreihen, Reihen von $\exp x$ , $\sin x$ und $\cos x$ . . . . .	213
3.7	Numerische Integralberechnung mit Potenzreihen . . . . .	226
3.8	Konstruktion von Reihen . . . . .	228
3.9	FOURIER-Reihen . . . . .	231
3.10	Aufgaben . . . . .	263

## 3.1 Zahlenreihen

### 3.1.1 Konvergenz unendlicher Reihen

Wir betrachten hier reelle Zahlenreihen, weisen jedoch darauf hin, dass sämtliche Betrachtungen auch auf den Fall von Reihen mit komplexen Gliedern problemlos übertragbar sind.

**Definition 3.1.** (unendliche Reihe)

Wir betrachten die Zahlenfolge

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$$

aus  $\mathbb{R}$ . Wenn man die Elemente nacheinander aufaddiert, entsteht mit

$$s_0 = a_0, s_1 = a_0 + a_1, s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \dots$$

eine neue Zahlenfolge  $(s_n)$ , die man **unendliche Reihe** nennt. Man beschreibt die unendliche Reihe symbolisch durch

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k .$$

Statt unendlicher Reihe sagt man auch kurz **Reihe**. Die Glieder  $a_n$  der Zahlenfolge  $(a_n)$  nennt man auch Glieder der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ . Für den hier mit  $k$  bezeichneten Summationsindex kann natürlich auch jeder andere Buchstabe stehen. Die Summen

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k \tag{3.1}$$

heißen **Teil- oder Partialsummen** der Reihe. Der kleinste Wert des Summationsindex muss nicht 0 sein: Ist  $p \in \mathbb{Z}$ , so versteht man unter

$$\sum_{k=p}^{\infty} a_k$$

die Teilsummenfolge  $(s'_n)$  mit

$$s'_0 = a_p, s'_1 = a_p + a_{p+1}, s'_2 = a_p + a_{p+1} + a_{p+2}, \dots$$

Setzt man  $b_k = a_{k+p}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), so gilt

$$\sum_{k=p}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k ,$$

und man hat die Reihe mit Anfangsindex  $p$  auf eine Reihe mit Anfangsindex 0 zurückgeführt. Aus einer unendlichen Reihe kann man eine beliebige (endliche) Teilsumme "herausziehen", d.h. für  $p \in \mathbb{N}$  gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_{p-1} + \sum_{k=p}^{\infty} a_k .$$

Als Beispiel einer Reihe sei die spezielle geometrische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

genannt.

**Definition 3.2.** (Konvergenz einer Reihe)

Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  heißt genau dann **konvergent**, wenn die Folge  $(s_n)$  ihrer Partialsummen konvergiert. Ist  $s$  der Grenzwert dieser Folge, also  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ , so schreibt man dafür auch

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k .$$

$s$  heißt Grenzwert oder **Summe** der Reihe. Eine Reihe, die nicht konvergent ist, heißt **divergent**.

Man kann also sagen: Mit dem Begriff "unendliche Reihe" ist nichts anderes gemeint als die Folge der aus den Gliedern der Reihe gebildeten Partialsummen.

**Beispiele:**

1) Da die allgemeine geometrische Reihe

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

oft benutzt wird, soll diese Reihe kurz diskutiert werden. Wir setzen zunächst  $q \neq 1$  voraus. Wenn man die Partialsumme

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

und das Produkt  $qs_n$

$$qs_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$$

voneinander subtrahiert, erhält man

$$s_n - qs_n = 1 - q^{n+1} \quad \text{bzw.} \quad s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} .$$

Für  $|q| < 1$  ist die Folge  $(s_n)$  (und damit die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ) konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - q} .$$

Für  $|q| \geq 1$  wachsen die  $s_n$  mit  $n \rightarrow \infty$  betragsmäßig über jede endliche Grenze,  $(s_n)$  ist also divergent. Das gilt auch für  $q = 1$ , was man sofort sieht, wenn man

auf die ursprüngliche Definition  $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = n + 1$  zurückgeht. Für  $q = -1$  gilt  $s_n = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]$ , also ebenfalls keine Konvergenz. Zusammenfassend stellen wir fest: Die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  ist für  $|q| < 1$  konvergent mit der Summe  $\frac{1}{1-q}$ , und für  $|q| \geq 1$  divergent.

2) Eine weitere bekannte Reihe ist die harmonische Reihe.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Die Glieder  $a_k = \frac{1}{k}$  dieser Reihe werden für  $k \rightarrow \infty$  beliebig klein. Man könnte daher vermuten, dass sich verschiedene Partialsummen  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  und  $s_p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}$  bei hinreichend großen Werten  $n, p$  nur wenig unterscheiden und  $(s_n)$  (z.B. nach dem CAUCHYschen Konvergenzkriterium) konvergent sein müsste. Diese Vermutung ist falsch: Die harmonische Reihe ist divergent. Wir zeigen dies durch einen indirekten Beweis. Wäre  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  konvergent, so wäre das gleichbedeutend mit der Konvergenz der Folge  $(s_n)$  ihrer Partialsummen und so müsste auch jede Teilfolge  $(s'_m) = (s_{n_m})$  ( $1 \leq n_1 < n_2 < \dots$ ) von  $(s_n)$  konvergent sein (vgl. Abschnitt 2.4). Wenn wir zeigen, dass es eine divergente Teilfolge gibt, kann  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  nicht konvergent sein. Eine solche divergente Teilfolge erhält man für  $n_m = 2^m$ , d.h. mit der Folge

$$(s'_m) = (s_{2^m}) = \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k},$$

es gilt nämlich

$$\begin{aligned} s'_m = s_{2^m} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ Glieder}} + \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ Glieder}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^m}\right)}_{2^{m-1} \text{ Glieder}} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{4 \text{ Glieder}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ Glieder}} + \\ &\quad + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ Glieder}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^m}\right)}_{2^{m-1} \text{ Glieder}} \\ &= 1 + m \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \infty \quad \text{für } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Mit  $(s_{2^m})$  ist eine divergente Teilfolge der Partialsummenfolge  $(s_n)$  gefunden. Es ist  $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2^m} = \infty$  und die Divergenz der harmonischen Reihe damit bewiesen. Die gesamte Partialsummenfolge  $(s_n)$  ist streng monoton steigend, so dass man symbolisch  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$  oder auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

schreiben kann.

**Satz 3.1.** (Operationen mit konvergenten Reihen)

Konvergente Reihen dürfen gliedweise addiert, subtrahiert und mit einem konstanten Faktor multipliziert werden. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k .$$

Das heißt: Die durch gliedweise Addition, gliedweise Subtraktion, gliedweises Multiplizieren mit einem konstanten Faktor aus konvergenten Reihen hervorgehenden Reihen sind wieder konvergent und haben die angegebenen Summen.

Man überlegt sich schnell, dass Reihen **nicht** konvergieren können, wenn die Glieder gegen eine endliche Zahl  $c \neq 0$  streben. Es gilt das folgende Kriterium.

**Notwendiges Konvergenzkriterium für Reihen:**

Bei einer konvergenten Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  bilden die Glieder eine Nullfolge: es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 .$$

Denn: Die Teilsummenfolge  $(s_n)$  einer konvergenten Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  erfüllt das CAUCHYsche Konvergenzkriterium. Also gibt es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ , so dass

$$|s_{n+1} - s_n| < \epsilon \quad \text{für} \quad n \geq n_0(\epsilon)$$

gilt. Wegen  $s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$  ist dies gleichwertig mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .

Am Beispiel der harmonischen Reihe sieht man, dass die Umkehrung des Kriteriums **nicht** gilt, d.h. die Konvergenz der Folge  $(a_k)$  mit dem Grenzwert Null ist **nicht hinreichend** für die Konvergenz der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .

**3.1.2 Allgemeine Konvergenzkriterien**

Mit dem eben formulierten notwendigen Konvergenzkriterium kann man nur Negativnachweise führen und entscheiden, ob sich eine Konvergenzuntersuchung einer Reihe überhaupt lohnt. Wir brauchen hinreichende Konvergenzkriterien, die im Folgenden diskutiert werden sollen.

**Satz 3.2.** (Monotoniekriterium für Reihen)

Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  mit nichtnegativen Gliedern  $a_k$  konvergiert genau dann, wenn die Folge ihrer Partialsummen beschränkt ist.

Dies folgt sofort aus dem Satz über die Konvergenz beschränkter und monotoner Folgen (Satz 2.4), da  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$  monoton steigt. Aus der Tatsache, dass CAUCHY-Folgen in  $\mathbb{R}$  konvergieren, folgt der

**Satz 3.3.** (CAUCHY-Kriterium für Reihen)

Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergiert genau dann, wenn Folgendes gilt:

Zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $m > n > n_0(\epsilon)$  stets

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \epsilon \quad (3.2)$$

gilt.

Die Ungleichung (3.2) ist ja nichts anderes als  $|s_m - s_n| < \epsilon$ , also die CAUCHY-Folgenbedingung für die Partialsummenfolge  $(s_n)$ . Das CAUCHY-Kriterium bedeutet in Worten: Jedes aus einer konvergenten unendlichen Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  herausgeschnittene endliche Teilstück  $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m$  wird betragsmäßig beliebig klein, wenn es nur mit einem Glied  $a_{n+1}$  mit hinreichend großem Index  $n + 1$  beginnt. Erfüllt umgekehrt eine Reihe diese Bedingung, so ist sie konvergent.

**Satz 3.4.** (LEIBNIZ-Kriterium)

Eine alternierende Reihe

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$$

mit  $a_k > 0$  konvergiert, wenn die Folge  $(a_k)$  monoton fallend ist und gegen Null strebt, also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0.$$

**Beweis:** Der Nachweis dieses Kriteriums basiert auf einer geeigneten Klammerung der Partialsummen, nämlich

$$s_{2n} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \dots - (a_{2n-1} - a_{2n}) \quad (3.3)$$

$$s_{2n-1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}). \quad (3.4)$$

Da aufgrund der fallenden Monotonie von  $(a_n)$  alle Klammerausdrücke in (3.3) und (3.4) größer oder gleich 0 sind, ist die Folge  $(s_{2n})$  monoton fallend und  $(s_{2n-1})$  monoton wachsend. Damit gilt für  $n \geq 1$  die Ungleichungskette

$$s_1 \leq s_{2n-1} \leq s_{2n-1} + a_{2n} = s_{2n} \leq s_0,$$

und  $(s_{2n})$  und  $(s_{2n-1})$  konvergieren aufgrund der Monotonie und Beschränktheit nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS. Wegen  $s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n}$  und der Voraussetzung, dass  $(a_n)$  Nullfolge ist, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k.$$

□

**Beispiel:** Im Gegensatz zur harmonischen Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty}$  konvergiert die alternierende Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

nach dem LEIBNIZ-Kriterium.

Für alternierende, nach dem LEIBNIZ-Kriterium konvergente Reihen kann man eine einfache Abschätzung des Restgliedes vornehmen. Sei  $s$  der Wert der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$  mit  $a_k > 0$ ,  $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ , dann liegt das Restglied

$$R_m = s - s_m = s - \sum_{k=0}^m (-1)^k a_k$$

zwischen 0 und  $(-1)^{m+1} a_{m+1}$ . Es gilt also

$$|R_m| \leq a_{m+1}.$$

Kennt man den Wert einer solchen Reihe, z.B. ist

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \dots = \frac{1}{e},$$

dann kann man mit den durchgeführten Restgliedüberlegungen den Wert von  $\frac{1}{e}$  mit einer Genauigkeit von  $10^{-6}$  durch  $\sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{1}{k!}$  berechnen, wenn man  $m$  so wählt, dass

$$\frac{1}{(m+1)!} < 10^{-6} \quad (3.5)$$

gilt. Die Ungleichung (3.5) ist für  $m = 9$  als kleinste mögliche natürliche Zahl erfüllt.

### 3.1.3 Absolut konvergente Reihen

**Definition 3.3.** (Absolute Konvergenz einer Reihe)

Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe der Absolutbeträge ihrer Glieder konvergiert, d.h. wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergent ist.

Ist eine Reihe absolut konvergent, so ist sie auch konvergent. Diese Folgerung ergibt sich wegen der Dreiecksungleichung

$$|a_{n+1} + \dots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_m|, \quad m, n \text{ beliebig,}$$

aus dem CAUCHY-Kriterium. Offenbar ist

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

Absolut konvergente Reihen stellen den Normalfall konvergenter Reihen dar. D.h. konvergente Reihen, die nicht absolut konvergieren, sind relativ selten. Jede konvergente Reihe mit positiven Gliedern ist absolut konvergent. Wir werden uns etwas intensiver mit Konvergenzkriterien und den Eigenschaften absolut konvergenter Reihen befassen.

Reihen, die konvergent, aber nicht absolut konvergent sind, heißen **bedingt konvergente** Reihen. Wie in 3.1.1 und 3.1.2 gezeigt, ist  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$  eine bedingt konvergente Reihe. Absolut konvergente Reihen haben einige angenehme Eigenschaften, die den Umgang mit ihnen erleichtern. Wie bei Summen aus endlich vielen Summanden gilt hier das Kommutativgesetz, wie es im folgenden Satz formuliert wird:

**Satz 3.5.** (Umordnung absolut konvergenter Reihen)

Absolut konvergente Reihen dürfen beliebig umgeordnet werden: Ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  eine absolut konvergente Reihe mit dem Grenzwert  $s$ , so konvergiert jede durch Umordnung ihrer Glieder daraus entstehende Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k}$  ebenfalls gegen  $s$ .

In der Folge  $(n_k)$  muss jeder Index  $0, 1, 2, \dots$  genau einmal vorkommen. Im Gegensatz zu den absolut konvergenten Reihen hängt bei den nicht absolut konvergenten der Grenzwert von der Reihenfolge der Glieder ab. Man kann aus einer konvergenten, aber nicht absolut konvergenten Reihe durch passende Umordnung sogar eine divergente Reihe erzeugen. Damit werden die Bezeichnungen "unbedingt konvergent" für absolut konvergente Reihen und "bedingt konvergent" für konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihen verständlich.

Auch der folgende Multiplikationssatz zeigt eine weitgehende Analogie zwischen Summen mit endlich vielen Summanden und absolut konvergenten Reihen:

**Satz 3.6.** (Multiplikationssatz)

Sind

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

absolut konvergente Reihen, so folgt

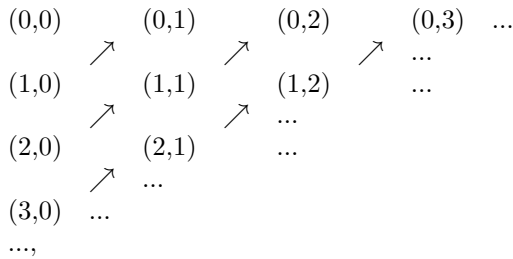
$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{k=0, j=0}^{\infty} a_k b_j, \quad (3.6)$$

wobei das Indexpaar  $(k, j)$  in der rechten Summe alle Paare

$$\begin{array}{cccc} (0,0) & (0,1) & (0,2) & \dots \\ (1,0) & (1,1) & (1,2) & \dots \\ (2,0) & (2,1) & (2,2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$



in irgendeiner Weise durchläuft. Wählt man die Reihenfolge in der nachfolgend skizzierten Weise



so folgt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \quad \text{mit} \quad c_j = \sum_{k=0}^j a_{j-k} b_k. \quad (3.7)$$

Das Produkt (3.7) nennt man auch CAUCHY-Produkt.

### 3.1.4 Kriterien für absolute Konvergenz

Im Folgenden werden die wichtigsten Konvergenzkriterien für absolut konvergente Reihen bzw. Reihen mit positiven Gliedern dargestellt.

**Satz 3.7.** (Majorantenkriterium)

Ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent und gilt

$$|b_k| \leq |a_k|$$

für alle  $k$  von einem Index  $k_0$  an, so ist auch  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  absolut konvergent.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \quad \text{heißt eine Majorante von} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

**Beweis:** Aus

$$\sum_{k=k_0}^n |b_k| \leq \sum_{k=k_0}^n |a_k| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|$$

folgt mit dem Monotoniekriterium Satz 3.2 die Behauptung. □

**Satz 3.8.** (Vergleichskriterien)

Seien die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{mit} \quad a_k > 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad \text{mit} \quad b_k > 0$$

gegeben.

- a) Es gebe eine ganze Zahl  $k_0 \geq 0$ , so dass  $a_k \leq b_k$  für alle  $k \geq k_0$  gilt. Dann folgt
- aa) Ist  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergent, dann ist auch  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergent ( $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  ist konvergente Majorante, es ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ).
- ab) Ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  divergent, dann ist auch  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  divergent ( $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist divergente Minorante).
- b) Existiert ein endlicher Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} =: c \neq 0,$$

dann sind die Reihen entweder beide konvergent oder beide divergent.

**Satz 3.9.** (Quotientenkriterium)

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist absolut konvergent, wenn es einen Index  $k_0$  und eine positive Zahl  $c < 1$  gibt, so dass für alle  $k \geq k_0$

$$a_k \neq 0 \quad \text{und} \quad \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq c \quad (3.8)$$

gilt. Ist andererseits von einem Index  $k_0$  an (d.h. für alle  $k \geq k_0$ )

$$a_k \neq 0 \quad \text{und} \quad \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1,$$

so ist die Reihe divergent.

**Beweis:** Aus (3.8) folgt

$$\left| \frac{a_k}{a_{k_0}} \right| = \left| \frac{a_{k_0+1}}{a_{k_0}} \right| \cdot \left| \frac{a_{k_0+2}}{a_{k_0+1}} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{a_k}{a_{k-1}} \right| \leq c \cdot c \cdot \dots \cdot c = c^{k-k_0},$$

also

$$\left| \frac{a_k}{a_{k_0}} \right| \leq c^{k-k_0} \quad \text{bzw.} \quad |a_k| \leq Bc^k, \quad \text{mit } B = c^{-k_0} |a_{k_0}|.$$

Aus der Konvergenz der geometrischen Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} Bc^k$  bei  $0 < c < 1$  gegen  $\frac{B}{1-c}$  folgt die absolute Konvergenz von  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  nach Satz 3.8.  $\square$

**Satz 3.10.** (Wurzelkriterium)

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist absolut konvergent, wenn es eine positive Zahl  $c < 1$  gibt, mit

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq c, \quad (3.9)$$

für alle  $k$  von einem Index  $k_0$  an. Gilt andererseits von einem Index  $k_0$  an  $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ , so ist die Reihe divergent.

**Beweis:** Aus (3.9) folgt  $|a_k| \leq c^k$ . Damit ist die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c^k$  eine konvergente Majorante der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ .  $\square$

Aus dem Quotientenkriterium und dem Wurzelkriterium kann man nun direkt die etwas "griffigeren" Kriterien folgern.

**Satz 3.11.** (Quotienten- und Wurzelkriterium)

Für eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  gelte

a)  $a_k \neq 0$  für alle  $k$  ab einem Index  $k_0$  und es existiert  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = d$  oder

b) es existiert  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = d$ ;

dann konvergiert die Reihe absolut, falls  $d < 1$  ist, und sie divergiert, falls  $d > 1$  ist.

### 3.1.5 Integralkriterium für Reihen

Mit dem Majorantenkriterium und den Vergleichskriterien wurde schon deutlich, dass es Ähnlichkeiten zwischen Reihen und uneigentlichen Integralen (solche mit einer Integrationsgrenze gleich  $\infty$ ) gibt. Es sei nun  $f$  eine Funktion, die auf jedem abgeschlossenen Intervall  $[m, p] \subset [m, \infty[$  integrierbar ist.

**Satz 3.12.** (Integralkriterium für Reihen)

Ist  $f(x)$  auf  $[m, \infty[$  ( $m$  ganzzahlig) positiv und monoton fallend, so haben

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) \quad \text{und} \quad \int_m^{\infty} f(x) dx$$

gleiches Konvergenzverhalten.

**Beweis:** Es gilt  $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$  für alle  $x \in [k, k+1]$  und jede ganze Zahl  $k \geq m$ . Nach Integration über  $[k, k+1]$  folgt

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1).$$

Die Summation über  $k$  von  $m$  bis  $n$  ergibt

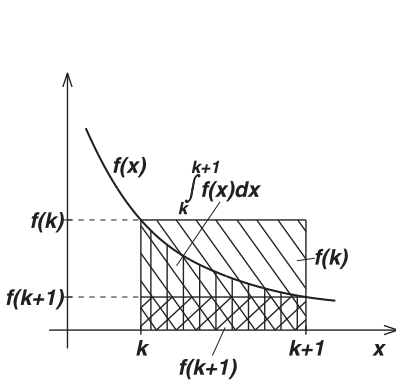
$$\sum_{k=m}^n f(k) \geq \int_m^{n+1} f(x) dx \geq \sum_{k=m+1}^{n+1} f(k).$$

Aus dem Monotoniekriterium für Reihen (Satz 3.2) und dem Monotoniekriterium für uneigentliche Integrale folgt die Behauptung des Satzes.  $\square$

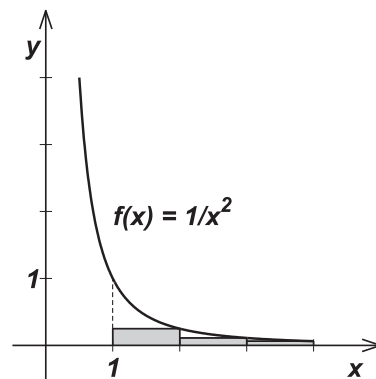
Die Abb. 3.2 zeigt die Begrenzung des Wertes der Reihe  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  durch das uneigentliche Integral  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$ .

## 3.2 Funktionenfolgen

Bevor wir Funktionenreihen behandeln wollen, soll der Begriff der Funktionenfolge erklärt werden.



**Abb. 3.1.** Zum Integralkriterium für Reihen



**Abb. 3.2.**  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$  als Majorante von  $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k^2}$

**Definition 3.4.** (Funktionsfolge)  
Die unendliche Folge

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots \quad (3.10)$$

der Funktionen  $f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , nennen wir **Funktionsfolge** auf  $D$  und schreiben dafür wie im Falle von Zahlenfolgen auch kurz  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder  $(f_n)$ .

**Definition 3.5.** (punktweise Konvergenz)

Eine Funktionenfolge  $(f_n)$  auf  $D$  heißt **punktweise konvergent**, wenn für jedes  $x \in D$  die Zahlenfolge  $(f_n(x))$  konvergiert. Statt von punktweiser Konvergenz spricht man auch abkürzend von Konvergenz. Die Grenzfunktion  $f$  ist dabei für jedes  $x \in D$  durch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x)$$

erklärt.

Nach diesem Konvergenzbegriff strebt die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + x^{2n}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

in  $D = ] - \infty, \infty[$  punktweise gegen die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } |x| = 1 \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}.$$

Damit haben wir die Situation, dass eine Folge stetiger Funktionen punktweise gegen eine offensichtlich unstetige Grenzfunktion konvergiert (Abb. 3.7). Um zu sichern, dass sich im Ergebnis eines solchen Grenzprozesses eine stetige Grenzfunktion ergibt, muss ein "schärferer" Konvergenzbegriff gefunden werden.

Bevor mit der gleichmäßigen Konvergenz dieser schärfere Konvergenzbegriff formuliert wird, muss ein "Abstand" zweier Funktionen definiert werden. Mit dem Begriff des Supremums als kleinster obere Schranke einer Funktion können wir folgenden Abstands-begriff einführen:

**Definition 3.6.** (Abstand und Supremumsnorm)

Sind  $f$  und  $g$  beschränkte Funktionen auf  $D$ , so nennt man

$$\|f - g\|_{\infty} := \sup_{x \in D} |f(x) - g(x)|$$

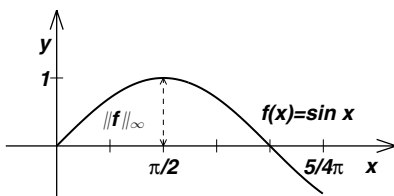
den **Abstand** beider Funktionen voneinander. Die **Supremumsnorm**  $\|f\|_{\infty}$  ist das Supremum von  $|f(x)|$  auf  $D$

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in D} |f(x)|$$

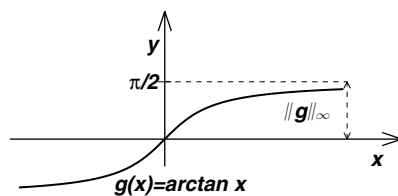
oder der Abstand der Funktion  $f$  von der Funktion  $g \equiv 0$ . Handelt es sich bei den Funktionen um stetige Funktionen und ist  $D$  eine kompakte Menge, z.B. ein abgeschlossenes Intervall, dann gilt

$$\|f - g\|_{\infty} := \max_{x \in D} |f(x) - g(x)| \quad \text{bzw.} \quad \|f\|_{\infty} = \max_{x \in D} |f(x)|.$$

Es gibt dann ein  $x_0 \in D$  mit  $\|f - g\|_{\infty} = |f(x_0) - g(x_0)|$  und ein  $x_1 \in D$  mit  $\|f\|_{\infty} = |f(x_1)|$ . In den Abbildungen 3.3 und 3.4 sind die Normen zweier Funktionen graphisch dargestellt.



**Abb. 3.3.**  $\|f\|_{\infty}$ , Supremumsnorm von  $f: [0, \frac{5}{4}\pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$



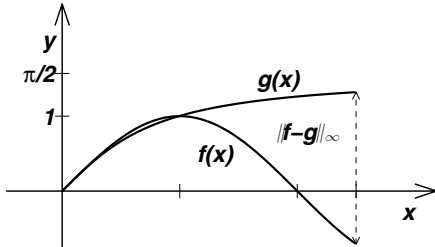
**Abb. 3.4.**  $\|g\|_{\infty}$ , Supremumsnorm von  $g: \mathbb{R} \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ , g(x) = \arctan x$

Betrachten wir die Funktionen  $f(x) = \sin x$  und  $g(x) = \arctan x$  auf dem Definitionsbereich  $[0, \frac{5}{4}\pi]$ , so ergibt sich für den Abstand  $\|f - g\|_{\infty} = \arctan \frac{5}{4}\pi - \sin \frac{5}{4}\pi = \arctan \frac{5}{4}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2}$  (s. auch Abb. 3.5).

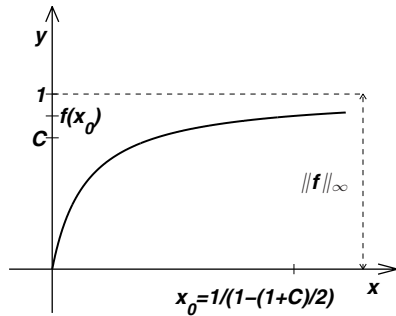
Betrachten wir z.B. die Funktion  $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$  auf  $D = [1, \infty[$ . Wir wissen, dass  $0 \leq f(x) < 1$  für alle  $x \in D$  gilt. Andererseits finden wir keine Schranke  $c < 1$  mit  $f(x) \leq c$  für alle  $x \in D$ , denn zu jedem  $c$  mit  $0 < c < 1$  gibt es z.B. mit  $x_0 = 1/(1 - \frac{1+c}{2})$  ein Element aus  $D$  mit

$$1 > f(x_0) > c,$$

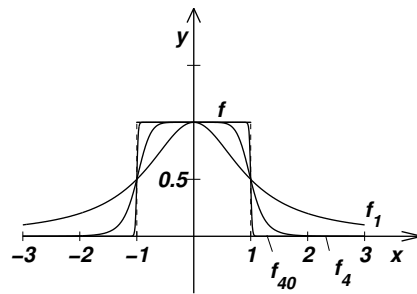
so dass 1 die kleinste obere Schranke ist (s. auch Abb. 3.6).



**Abb. 3.5.** Abstand  $\|f - g\|_\infty$  der Funktionen  $\sin x$  und  $\arctan x$  über dem Intervall  $[0, \frac{5}{4}\pi]$



**Abb. 3.6.** Supremumsnorm von  $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$



**Abb. 3.7.** Funktionenfolge  $f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$  und Grenzfunktion  $f$

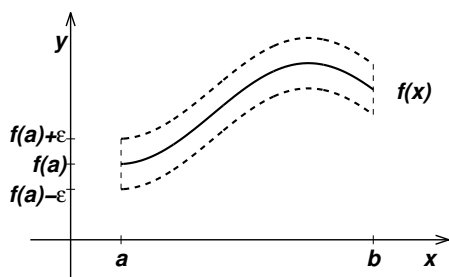
Es gibt allerdings kein Element  $x_0 \in D$  mit  $f(x_0) = 1$ , so dass auf  $D = [1, \infty[$  die Funktion  $f$  kein Maximum annimmt. Die Menge  $D = [1, \infty[$  ist eben nicht kompakt. Es gilt

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [1, \infty[} |f(x)| = 1.$$

**Definition 3.7.** (gleichmäßige Konvergenz)

Eine Folge  $(f_n)$  von auf einem Intervall  $D$  definierten Funktionen  $f_n$  konvergiert genau dann **gleichmäßig** gegen die auf  $D$  definierte Funktion  $f$ , wenn von einem Index  $n_0$  an die Funktionen  $f_n - f$  auf  $D$  beschränkt sind und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

Abb. 3.8.  $\epsilon$ -Schlauch um die Funktion  $f$ 

gilt. In diesem Falle schreibt man auch kürzer

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \text{oder} \quad f_n \rightarrow f \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Es folgt unmittelbar, dass jede gleichmäßig konvergente Funktionenfolge auch punktweise konvergiert. Die Umkehrung gilt nicht, denn bei dem Beispiel der Funktionenfolge  $f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$  erkennt man, dass die Bedingung  $\|f_n - f\|_\infty < \epsilon$  für alle  $n = 1, 2, 3, \dots$  für jede positive Zahl  $\epsilon$ , die kleiner als  $\frac{1}{2}$  ist, verletzt ist, denn man findet  $\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{2}$  (s. dazu Abb. 3.7). Die gleichmäßige Konvergenz bedeutet graphisch, dass ab einem Index  $n_0$  alle Funktionen  $f_n$  in einem " $\epsilon$ -Schlauch" um  $f$  liegen wie in Abb. 3.8 dargestellt. Gleichmäßige Konvergenz ist eine Aussage über das Verhalten von Funktionen als Ganzes, d.h. für alle  $x \in D$  gleichermaßen, eben **gleichmäßig**.

Die Untersuchung einer Funktionenfolge auf gleichmäßige Konvergenz ist mit dem folgenden Kriterium möglich.

**Satz 3.13.** (CAUCHY-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz bei Folgen)

Eine Folge  $(f_n)$  von auf  $D$  beschränkten Funktionen  $f_n$  ist genau dann gleichmäßig konvergent, wenn gilt:

Zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es einen Index  $n_0$ , so dass für alle  $n, m \geq n_0$  gilt

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon.$$

Der nachfolgende Satz liefert die eigentliche Motivation für die Befassung mit gleichmäßig konvergenten Funktionenfolgen.

**Satz 3.14.** (Stetigkeit der Grenzfunktion)

Jede auf  $D$  gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen  $(f_n)$  hat eine auf  $D$  stetige Grenzfunktion  $f$ . Anders ausgedrückt gilt für  $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in D$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_k)).$$

**Beweis:**  $(f_n)$  konvergiere gleichmäßig auf  $D \subset \mathbb{R}$  gegen  $f$ . Zum Nachweis der Stetigkeit von  $f$  ist die Differenz  $|f(x) - f(x_0)|$  für  $x, x_0 \in D$  abzuschätzen. Es gilt

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \quad (3.11)$$

für  $x, x_0 \in D$ . Es sei  $\epsilon > 0$  beliebig. Jeder der drei Summanden der rechten Seite von (3.11) soll kleiner als  $\epsilon/3$  gemacht werden, damit die linke Seite kleiner als  $\epsilon$  wird. Da  $(f_n)$  gleichmäßig gegen  $f$  strebt, gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n > n_0$   $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon/3$ ,  $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon/3$  für beliebige  $x, x_0 \in D$  gilt. Wir betrachten nun das zu einem beliebig gewählten  $n > n_0$  gehörende Element  $f_n$  der Folge  $(f_n)$  und wählen ein beliebiges  $x_0 \in D$ . Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der  $f_n$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon/3 \quad \text{für alle } x \in D \quad \text{mit} \quad |x - x_0| \leq \delta$$

gilt. Aus (3.11) ergibt sich damit

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon, \quad \text{falls} \quad |x - x_0| \leq \delta,$$

d.h. die Stetigkeit der Grenzfunktion  $f$  im beliebig gewählten Punkt  $x_0 \in D$ . Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

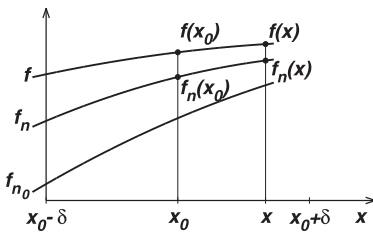


Abb. 3.9. Zum Beweis von Satz 3.14

Die Aussagen der folgenden Sätze sind grundlegend für den praktischen Umgang mit Funktionenfolgen und deren Grenzfunktion. Es geht dabei um die gliedweisen Grenzübergänge, d.h. um die Frage, unter welchen Bedingungen die Folge der differenzierten bzw. integrierten Glieder  $f'_n$  bzw.  $\int_a^b f_n(x) dx$  einer gegebenen Folge  $(f_n)$  gegen die Ableitung  $f'(x)$  bzw. das Integral  $\int_a^b f(x) dx$  der Grenzfunktion  $f$  der Folge  $(f_n)$  konvergieren.

**Satz 3.15.** (gliedweise Differentiation)

Sind  $(f_n)$  und  $(f'_n)$  auf  $[a, b]$  gleichmäßig konvergent und ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ , so ist  $f$  auf  $[a, b]$  differenzierbar und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = f'$ .

Man kann die Voraussetzung des Satzes 3.15, dass  $(f_n)$  auf  $[a, b]$  gleichmäßig konvergiert, abschwächen. Es genügt zu fordern, dass  $(f_n)$  für einen einzigen Wert  $x \in [a, b]$  konvergiert.

**Satz 3.16.** (gliedweise Integration)

Ist  $(f_n)$  eine auf  $[a, b]$  gleichmäßig konvergente Folge integrierbarer Funktionen, so ist ihre Grenzfunktion  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  integrierbar und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$



Wir bemerken, dass man bei der gliedweisen Differentiation einer Folge  $(f_n)$  die gleichmäßige Konvergenz der aus den Ableitungen gebildeten Folge  $(f'_n)$  voraussetzen muss. Während im Ergebnis der gliedweisen Differentiation einer Folge  $(f_n)$  wieder eine Funktionenfolge  $(f'_n)$  entsteht, ist das Ergebnis der gliedweisen Integration von  $(f_n)$  eine Zahlenfolge  $(\int_a^b f_n(x) dx)$ .

### 3.3 Gleichmäßig konvergente Reihen

Dieses Kapitel dient hauptsächlich der Darstellung der mathematischen Grundlagen für das Operieren mit Funktionenreihen. Es soll geklärt werden, was beim Rechnen mit Potenzreihen und FOURIER-Reihen erlaubt ist, ohne die wichtige Eigenschaft der Konvergenz einzubüßen. Die praktische Bedeutung dieses Abschnittes wird daher erst in den nachfolgenden Kapiteln über Potenz- und FOURIER-Reihen deutlich.

Nach den Begriffen **Funktionenfolge** und **gleichmäßige Konvergenz** von Funktionenfolgen soll nun der Begriff der Funktionenreihe eingeführt werden.

**Definition 3.8.** (Funktionenreihe)

Sei  $(f_k)$  eine Funktionenfolge auf  $D$ , dann definieren wir durch

$$s_n = \sum_{k=0}^n f_k, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

eine neue Funktionenfolge  $(s_n)$ , und nennen diese Folge **unendliche Reihe** oder kurz **Reihe der Funktionen**  $f_k$ . Die  $f_k$  heißen **Glieder** der Reihe und die  $s_n$  Teil- oder Partialsummen. Man beschreibt die Reihe auch durch

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{oder} \quad \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad \text{mit } x \in D.$$

**Definition 3.9.** (punktweise und gleichmäßige Konvergenz)

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  ist **punktweise** bzw. **gleichmäßig konvergent**, je nachdem, ob die Folge  $(s_n)$  der Teilsummen punktweise oder gleichmäßig konvergent ist. Die Grenzfunktion  $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  wird auch **Summe** der Reihe oder Summenfunktion genannt und durch

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \quad \text{oder} \quad s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad (\text{mit } x \in D)$$

bezeichnet.

Die Aussage des Satzes 3.13 für Partialsummenfolgen bzw. unendliche Funktionenreihen ergibt das folgende Kriterium für gleichmäßig konvergente Reihen.

**Satz 3.17.** (CAUCHYSches Kriterium für gleichmäßige Konvergenz bei Reihen)

Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  mit auf  $D$  beschränkten Funktionen  $f_k$  konvergiert auf  $D$  genau

dann gleichmäßig, wenn Folgendes erfüllt ist: Zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es einen Index  $n_0$ , so dass für alle  $n, m$  mit  $m > n \geq n_0$  gilt

$$\left\| \sum_{k=n+1}^m f_k \right\|_{\infty} < \epsilon.$$

Bezüglich der Supremumsnorm  $\|\cdot\|_{\infty}$  erinnern wir an die Definition 3.6.

**Definition 3.10.** (gleichmäßige absolute Konvergenz)

Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  von auf  $D$  beschränkten Funktionen heißt genau dann **gleichmäßig absolut konvergent**, wenn  $\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{\infty}$  konvergiert.

In diesem Fall ist  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  tatsächlich gleichmäßig konvergent, denn wegen  $\sup_{x \in D} (f + g) \leq \sup_{x \in D} f + \sup_{x \in D} g$  gilt

$$\left\| \sum_{k=n+1}^m f_k \right\|_{\infty} \leq \sum_{k=n+1}^m \|f_k\|_{\infty}.$$

Eine einfache Möglichkeit zur Entscheidung, ob eine Funktionenreihe gleichmäßig konvergent ist, bietet das folgende Kriterium.

**Satz 3.18.** (Majorantenkriterium von WEIERSTRASS)

Gilt für die Glieder der Funktionenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  von einem Index  $k_0$  an

$$\|f_k\|_{\infty} \leq \alpha_k \quad (k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots)$$

und ist die Zahlenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$  konvergent, so ist die Funktionenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  gleichmäßig absolut konvergent. Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$  heißt eine Majorante für  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ .

Im Falle der Konvergenz für  $x \in D$  kann man durch den Grenzwert  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$  auf  $D$  eine Funktion erklären. Die folgenden Sätze liefern wichtige Aussagen über die Summenfunktion. Sie basieren auf den Sätzen 3.14, 3.15 und 3.16.

**Satz 3.19.** (Stetigkeit der Reihensumme)

Sind die Glieder einer in  $D = [a, b]$  gleichmäßig konvergenten Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  in  $[a, b]$  stetig, so ist die Summe  $s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$  ebenfalls stetig in  $[a, b]$ . In den Randpunkten ist einseitige Stetigkeit von  $f_k$  bzw.  $s$  gemeint.

**Satz 3.20.** (gliedweises Differenzieren gleichmäßig konvergenter Reihen)

Es sei  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  eine Reihe auf  $[a, b]$  differenzierbarer Funktionen. Existiert der Grenzwert  $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$  für wenigstens ein  $x \in [a, b]$ , und ist die Ableitungsreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k$  gleichmäßig konvergent in  $[a, b]$ , so ist auch die Funktionenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  gleichmäßig konvergent in  $[a, b]$ , die Summe  $s(x)$  ist differenzierbar und  $s'(x)$  kann durch gliedweises Differenzieren gewonnen werden:

$$s'(x) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k.$$

**Satz 3.21.** (gliedweises Integrieren gleichmäßig konvergenter Reihen)

Jede gleichmäßig konvergente Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  auf  $[a, b]$  integrierbarer Funktionen besitzt auf  $[a, b]$  eine integrierbare Summenfunktion  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$  und es gilt:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx .$$

**3.4 Potenzreihen**

Eine sehr wichtige Rolle in der Analysis und angewandten Mathematik spielen Funktionenreihen, bei denen die Summanden die Form  $f_k(x) = a_k(x - x_0)^k$  haben, also Potenzfunktionen sind. Diese Reihen nennt man Potenzreihen.

**Definition 3.11.** (Potenzreihe)

Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k, \quad x, x_0 \in \mathbb{R}, a_k \in \mathbb{R} \quad (3.12)$$

mit den Polynomen  $s_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x - x_0)^k$  als Partialsummen heißt **Potenzreihe**.  $x_0$  heißt **Entwicklungspunkt** der Potenzreihe, die Zahlen  $a_k$  heißen **Koeffizienten** der Potenzreihe.

Aus dem Koeffizientenvergleich für Polynome, d.h. aus der Äquivalenz

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n b_k x^k \iff a_k = b_k, \quad (0 \leq k \leq n),$$

folgt der Identitätssatz für Potenzreihen.

**Satz 3.22.** (Identitätssatz)

Es seien  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  und  $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k$  zwei Potenzreihen, die beide in einem offenen Intervall  $I$  um  $x_0$  konvergieren. Stimmen dann  $f$  und  $g$  auf einer Folge  $x_1, x_2, x_3, \dots$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  ( $x_n \neq x_0$ ) überein, d.h.  $f(x_k) = g(x_k)$  für  $k = 1, 2, 3, \dots$ , so sind beide Potenzreihen identisch, also gilt

$$a_k = b_k \quad \text{für } k = 0, 1, \dots \quad \text{und} \quad f(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in I .$$

Diesen Satz nennt man auch Unitätssatz oder Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen, weil danach eine Funktion  $f(x)$ , wenn überhaupt, dann nur auf eine einzige Weise durch eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt  $x_0$  dargestellt werden kann. Er bildet auch die Grundlage für den Koeffizientenvergleich bei Potenzreihen: Aus

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_0)^k$$

für  $x \in ]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$  mit  $\rho > 0$  folgt  $a_k = b_k$  für  $k = 0, 1, \dots$ . Im Folgenden sollen die allgemeinen Konvergenzeigenschaften von Potenzreihen untersucht werden.

**Satz 3.23.** (Satz von CAUCHY und HADAMARD)

Zu jeder Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  mit den Koeffizienten  $a_k$  und dem Entwicklungspunkt  $x_0$  gibt es ein Konvergenzintervall  $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$  mit folgenden Eigenschaften:

- a) Die Potenzreihe konvergiert für  $x \in ]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$  punktweise (sogar absolut). Sie konvergiert außerdem gleichmäßig absolut in jedem abgeschlossenen Teilintervall von  $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ .
- b) Außerhalb von  $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$  divergiert die Potenzreihe.

Die Fälle  $\rho = 0$  und  $\rho = \infty$  sind zugelassen. Im Fall  $\rho = 0$  ist  $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$  leer; dabei ist allerdings zu bedenken, dass für  $x = x_0$  jede Potenzreihe (3.12) trivialerweise konvergent ist. Trotz dieses selbstverständlichen Konvergenzpunktes sagt man im Fall  $\rho = 0$ , die Potenzreihe sei **nirgends konvergent**. Für  $\rho = \infty$  ist  $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[ = \mathbb{R}$ , die Reihe heißt dann **beständig konvergent**.  $\rho$  heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe. Der Nachweis dieses Satzes erfolgt durch die konstruktive Berechnung des Konvergenzradius'  $\rho$ .

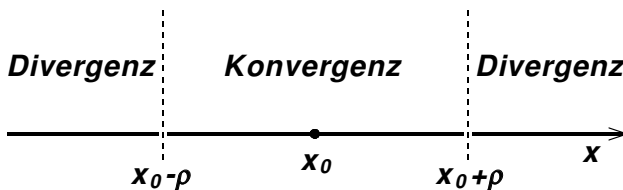


Abb. 3.10. Zum Konvergenzradius von Potenzreihen

**Satz 3.24.** (Konvergenzradius)

Es sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  eine Potenzreihe mit  $a_k \neq 0$  für alle  $k \geq k_0$ . Gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = c > 0, \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = c > 0, \quad (3.13)$$

so ist

$$\rho = \frac{1}{c} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \quad \text{bzw.} \quad \rho = \frac{1}{c} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

der Konvergenzradius der Reihe.

**Beweis:** Wir beschränken uns auf den Nachweis der Formel

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|.$$

Wir wenden auf die Potenzreihe das Quotientenkriterium für Zahlenreihen (Satz 3.11) an. Für aufeinanderfolgende Glieder erhält man bei  $k \geq k_0$

$$\left| \frac{a_{k+1}(x-x_0)^{k+1}}{a_k(x-x_0)^k} \right| = \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \cdot |x-x_0| \rightarrow c|x-x_0| \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Nach dem Quotientenkriterium liegt Konvergenz für  $c|x-x_0| < 1$ , also für

$$|x-x_0| < \frac{1}{c} = \rho \quad \text{bzw.} \quad x \in ]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$$

vor. Nach dem Quotientenkriterium liegt weiter Divergenz für  $c|x-x_0| > 1$  vor. Also ist  $\rho$  der Konvergenzradius, wie in Satz 3.24 behauptet.  $\square$

Die Anwendung der Berechnungsformeln (3.13) für Potenzreihen, bei denen Glieder mit bestimmten  $x$ -Potenzen fehlen, wie z.B. bei der Reihe

$$x + \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{3}x^5 + \frac{27}{4}x^7 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} x^{2k+1},$$

ist i. Allg. nicht möglich.

Sind die "Lücken" gleichabständig wie im vorliegenden Fall, kann man die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} x^{2k+1} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} x^{2k} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} u^k$$

mit  $u = x^2$  zur Konvergenzuntersuchung nutzen. Für die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} u^k$  findet man den Konvergenzradius

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^k}{k+1}}{\frac{3^{k+1}}{k+2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3^k}{3^{k+1}} \frac{k+2}{k+1} = \frac{1}{3}.$$

D.h. die Reihe ist für  $|u| < \frac{1}{3}$  konvergent. Mit  $u = x^2$  folgt daraus die Konvergenz der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k+1} x^{2k+1}$  für

$$x^2 < \frac{1}{3} \quad \text{bzw.} \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Bezeichnet man mit

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

den **größten** Häufungspunkt der Folge  $\sqrt[k]{|a_k|}$  oder **Limes-superior**, so kann man den Konvergenzradius **immer** mit der Formel

$$\rho = \frac{1}{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \quad (3.14)$$

berechnen. Ist die Folge  $\sqrt[k]{|a_k|}$  unbeschränkt, also  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty$ , so ist die Potenzreihe nirgends konvergent; wir setzen dann  $\rho = 0$ . Ist  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$ , so ist die Reihe beständig konvergent und es gilt  $\rho = \infty$ . Hat die Folge  $\sqrt[k]{|a_k|}$  nur einen Häufungspunkt, dann gilt

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

und die Formel (3.14) stimmt mit der obigen Formel überein.

Hat man den Konvergenzradius einer Potenzreihe berechnet, weiß man was innerhalb und außerhalb des Konvergenzintervalls passiert. Offen ist das Konvergenzverhalten der Reihe an den Randpunkten des Konvergenzintervalls. Dazu ist für den rechten Randpunkt das Verhalten der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x_0 + \rho - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k$  und für den linken Randpunkt das Verhalten der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x_0 - \rho - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(-\rho)^k$  gesondert zu untersuchen. Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k+1} x^k$  hat nach Satz 3.24 den Konvergenzradius  $\rho = \frac{1}{5}$ . Für den rechten Randpunkt des Konvergenzintervalls  $] -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}[$  ergibt sich die Zahlenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k+1} \frac{1}{5}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ . Das ist eine harmonische Reihe, deren Divergenz wir nachgewiesen haben. Für den linken Randpunkt  $-\frac{1}{5}$  erhält man die Zahlenreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k+1} \left(-\frac{1}{5}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}.$$

Diese alternierende Reihe konvergiert nach dem LEIBNIZ-Kriterium. Damit weiß man, dass die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k+1} x^k$  im Intervall  $[-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}[$  konvergiert, und außerhalb dieses Intervalls divergiert. Außerdem wissen wir aus Satz 3.23, dass die Potenzreihe in jedem abgeschlossenen Teilintervall von  $] -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}[$  gleichmäßig absolut konvergiert.

### 3.5 Operationen mit Potenzreihen

Aus den Sätzen 3.1 und 3.6 über die gliedweise Addition und das CAUCHY-Produkt folgt unmittelbar für Potenzreihen

**Satz 3.25.** (Konvergenz von Summe und Produkt)

Für Summe und Produkt zweier Potenzreihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k$  gilt im gemeinsamen Konvergenzbereich

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)(x-x_0)^k \quad (3.15)$$

bzw.

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k \quad (3.16)$$

mit  $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0$ .

Das heißt: Die durch (3.15), (3.16) definierten Potenzreihen sind im gemeinsamen Konvergenzbereich der Ausgangsreihen konvergent und haben dort die linksstehenden Werte. Aus dem Satz von CAUCHY und HADAMARD 3.23 folgt die gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen in jedem abgeschlossenen Teilintervall des Konvergenzintervalls und damit nach Satz 3.19 die Stetigkeit der durch die Potenzreihe definierten Funktion in jedem Teilintervall. Da die Summanden einer Potenzreihe Polynome und damit stetige, integrierbare und differenzierbare Funktionen sind, kann man Potenzreihen gliedweise differenzieren und integrieren.

**Satz 3.26.** (*gliedweises Differenzieren und Integrieren*)

Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius  $\rho > 0$  und der Summe  $f(x)$ .

a) Die Funktion  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  ist auf dem Konvergenzintervall  $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$  beliebig oft differenzierbar. Die Ableitungen erhält man durch **gliedweises Differenzieren** der Potenzreihe: z.B. ist

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x - x_0)^{k-1}. \quad (3.17)$$

b)  $f(x)$  ist weiter über jedes abgeschlossene Teilintervall  $[a, b]$  des Konvergenzintervalls integrierbar (da stetig). Das Integral darf durch gliedweise Integration der Potenzreihe gebildet werden:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} [(b - x_0)^{k+1} - (a - x_0)^{k+1}]. \quad (3.18)$$

Man kann leicht zeigen, dass die Reihen (3.17) und (3.18) denselben Konvergenzradius haben wie die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ : Es ist z.B.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|k a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|},$$

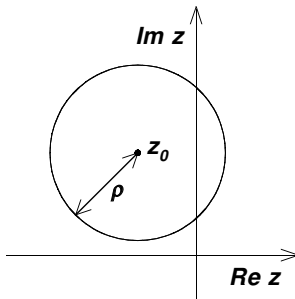
weil  $\sqrt[k]{|k a_k|} = \sqrt[k]{k} \sqrt[k]{|a_k|}$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = 1$ . Nach (3.14) sind somit die Konvergenzradien für  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k(x - x_0)^k$  gleich.

### 3.6 Komplexe Potenzreihen, Reihen von $\exp x$ , $\sin x$ und $\cos x$

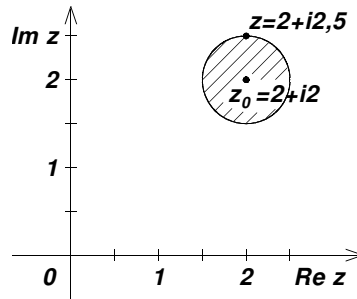
Bei den bisherigen Betrachtungen über Potenzreihen haben wir den Begriff des Konvergenzradius verwendet, um das Konvergenzintervall zu charakterisieren. Betrachtet man komplexe Potenzreihen, also Reihen der Form

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k \quad a_k, z, z_0 \in \mathbb{C}, \quad (3.19)$$

so charakterisiert der **Konvergenzradius** kein Intervall, sondern einen **Konvergenzkreis** um die komplexe Zahl  $z_0$  als Mittelpunkt. Der im Reellen (Satz 3.23)



**Abb. 3.11.** Konvergenzkreis in der GAUSSschen Zahlenebene



**Abb. 3.12.** Konvergenzkreis der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2i)^k}{k+1} (z - (2 + 2i))^k$

eingeführte Begriff des Konvergenzradius erhält damit bei der Erweiterung ins Komplexe erst seinen eigentlichen Sinn. Für die Potenzreihe (3.19) gelten alle Kriterien, in denen Beträge benutzt wurden, also das Quotientenkriterium und das Wurzelkriterium. Damit gelten auch die Formeln zur Berechnung des Konvergenzradius  $\rho$

$$\rho = \frac{1}{c} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \quad \text{bzw.} \quad \rho = \frac{1}{c} = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

und der Satz von CAUCHY und HADAMARD 3.23. Im Unterschied zum reellen Fall konvergiert die Potenzreihe (3.19) aber nicht in einem Intervall, sondern für alle  $z = x + iy$ , die innerhalb des Konvergenzkreises mit dem Radius  $\rho$  um den Mittelpunkt  $z_0 = x_0 + iy_0$  liegen, d.h.

$$K_{z_0, \rho} = \{z = x + iy \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \rho^2\}.$$

Im Satz von CAUCHY und HADAMARD für komplexe Potenzreihen wird das Konvergenzintervall um den reellen Entwicklungspunkt  $x_0$  durch den Konvergenzkreis  $K_{z_0, \rho}$  ersetzt (vgl. Abb. 3.11). Auf dem Rand des Konvergenzkreises kann man keine Aussage zur Konvergenz oder Divergenz treffen. Hier sind Einzeluntersuchungen erforderlich. Allerdings hat man hier im Unterschied zum reellen Fall unendlich viele Randpunkte zu untersuchen.

**Beispiel:** Für die komplexe Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2i)^k}{k+1} (z - (2 + 2i))^k$  errechnet man für den Konvergenzradius (Abb. 3.12)

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(2i)^k}{k+1} \right|}{\left| \frac{(2i)^{k+1}}{k+2} \right|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|2i|} \frac{k+2}{k+1} = \frac{1}{2}.$$

Für den Randpunkt  $z = 2 + 2,5i$  ist die Zahlenreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2i)^k}{k+1} (0,5i)^k$  zu untersuchen. Man findet

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2i)^k}{k+1} (0,5i)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} i^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} (-1)^k,$$

also eine alternierende Reihe, die aufgrund des LEIBNIZ-Kriteriums konvergiert.



### 3.6.1 Die Exponentialfunktion als Potenzreihe

Wir haben im Kapitel 2 die Exponentialfunktion  $f(x) = a^x$  durch Grenzwertbetrachtungen von rationalen Potenzen der Basis  $a > 0$  erklärt. Damit ist die Berechnung des Wertes der Funktion  $f(x) = 2^x$  an der Stelle  $x = \sqrt{3}$  zwar möglich, aber praktisch nur schwer durchführbar. Deshalb wollen wir hier eine Definition der Exponentialfunktion behandeln, die auf einer Potenzreihe basiert.

**Definition 3.12.** (Exponentialfunktion)

Die Funktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\exp x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

heißt **Exponentialfunktion**.

Die Definition 3.12 ist gerechtfertigt, weil man für die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  den Konvergenzradius  $\rho = \infty$  findet und damit ist  $\exp x$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert.

Im Folgenden sollen die wichtigsten Eigenschaften der Exponentialfunktion kurz besprochen werden. Für Argumente  $x \geq 0$  gilt offensichtlich

$$\exp 0 = 1, \exp x \geq 1 + x, \quad (3.20)$$

woraus  $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp x = \infty$  folgt.  $\exp x$  ist nach der Definition 3.12 auf dem Intervall  $[0, \infty[$  streng monoton wachsend.

**Satz 3.27.** (Additionstheorem)

Für die in Def. 3.12 erklärte Exponentialfunktion gilt das Additionstheorem

$$(\exp x)(\exp y) = \exp(x + y).$$

**Beweis:** Potenzreihen sind absolut konvergent, so dass man die Reihen für  $\exp x$  und  $\exp y$  miteinander multiplizieren kann. Unter Nutzung des Satzes 3.25 (CAUCHY-Produkt) und des binomischen Satzes erhält man

$$\begin{aligned} (\exp x)(\exp y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \stackrel{\text{CAUCHY-Produkt}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{x^{k-j}}{(k-j)!} \frac{y^j}{j!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!j!} x^{k-j} y^j \\ &\stackrel{\text{binomischer Satz}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x + y)^k = \exp(x + y). \end{aligned}$$

□

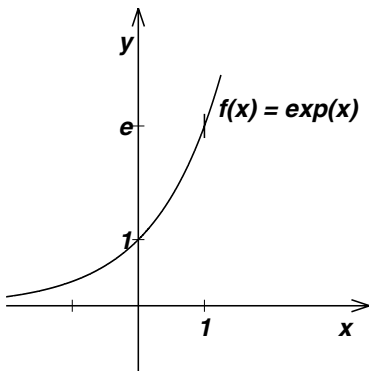
Mit dem eben bewiesenen Additionstheorem kann man nun alle anderen wichtigen Eigenschaften der Exponentialfunktion herleiten. Man findet

$$(\exp x)(\exp(-x)) = \exp(x + (-x)) = \exp 0 = 1. \quad (3.21)$$

Wegen (3.20) ist  $\exp x > 0$  für  $x \geq 0$  und damit folgt aus (3.21)  $\exp x > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x} . \quad (3.22)$$

Aus (3.22) folgt, dass die Exponentialfunktion auf ganz  $\mathbb{R}$  streng monoton wachsend ist und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$  gilt. Aus der strengen Monotonie folgt, dass die Funktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, \infty[$  injektiv ist.



**Abb. 3.13.** Graph der Exponentialfunktion

Da die Exponentialfunktion als konvergente Potenzreihe stetig auf ganz  $\mathbb{R}$  ist und da

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \exp x = \infty$$

gilt, folgt aus dem Zwischenwertsatz die Surjektivität. Damit ist die Exponentialfunktion bijektiv. In der Abb. 3.13 ist der Graph der Exponentialfunktion skizziert. Die Exponentialfunktion findet in vielen Gebieten praktische Anwendung. Überall wo Wachstumsprozesse beschrieben werden, spielt die Exponentialfunktion eine wichtige Rolle. Nehmen wir als Beispiel das Wachstum des Kapitals  $K$  bei einem jährlichen Zinssatz von  $p$  %. Setzt man  $x = \frac{p}{100}$ , so hat sich das Kapital nach einem Jahr auf  $K + xK = K(1 + x)$  vermehrt. Bei einer wöchentlichen Verzinsung hätte man nach einem Jahr einen Betrag von  $K(1 + \frac{x}{52})^{52}$  und bei einer kontinuierlichen Verzinsung eine Vermehrung auf  $\lim_{n \rightarrow \infty} K(1 + \frac{x}{n})^n$ . JACOB BERNOULLI hat diesen Grenzwert 1690 ausgerechnet, indem er  $(1 + \frac{x}{n})^n$  mit dem binomischen Satz ausgeschrieben hat, und er hat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp x$$

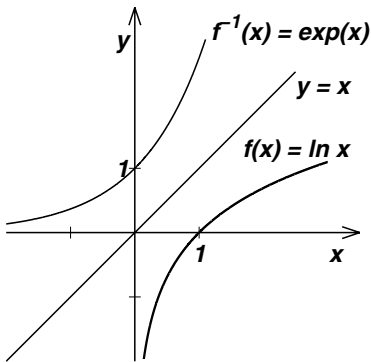
erhalten.

### 3.6.2 Die Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion von $\exp x$

Aus der Bijektivität der Exponentialfunktion folgt die Existenz der inversen Funktion.

**Definition 3.13.** (natürlicher Logarithmus)

Die inverse Funktion der Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow ]0, \infty[$  bezeichnen wir mit  $\ln : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \ln x$ . Die Funktion  $\ln$  heißt **natürlicher Logarithmus**.



**Abb. 3.14.** Graph der Logarithmusfunktion

Es gilt aufgrund der Definition  $\exp(\ln x) = x$ . Damit kann man unter Nutzung des Additionstheorems der Exponentialfunktion für positive  $a, b$  durch

$$\exp(\ln(ab)) = a \cdot b = \exp(\ln a) \exp(\ln b) = \exp(\ln a + \ln b)$$

über die Bijektivität von  $\exp$  die Gültigkeit des Logarithmengesetzes

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

nachweisen. Völlig analog zeigt man für  $b, c > 0$

$$\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln b - \ln c \quad \text{und mit } b = c \quad \ln 1 = 0.$$

Mit Hilfe der Exponentialfunktion und der Logarithmusfunktion kann man nun die allgemeine Potenzfunktion, die wir im Kapitel 2 diskutiert haben, wie folgt erklären.

**Definition 3.14.** (allgemeine Potenzfunktion, Logarithmus zur Basis  $a$ )

Sei  $a > 0$  und  $x \in \mathbb{R}$ . Dann heißt die Funktion

$$f(x) = a^x = \exp(x \ln a)$$

**Potenzfunktion** zur Basis  $a$ . Die aufgrund der Bijektivität der Exponentialfunktion und damit auch der Potenzfunktion zur Basis  $a$  existierende Umkehrfunktion  $g(x)$  von  $a^x$  nennt man Logarithmusfunktion zur Basis  $a$  und bezeichnet sie mit  $g(x) = \log_a x$ .

Aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion und der natürlichen Logarithmusfunktion ergeben sich die Rechenregeln für die allgemeinen Potenzen

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad a^0 = 1.$$

Für Exponenten  $n \in \mathbb{N}$  ergibt sich aus der ersten Rechenregel durch vollständige Induktion

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_n,$$

d.h. die Definition 3.14 stimmt mit der bisherigen Vorstellung von Potenzen überein. Außerdem ergibt die Anwendung der Definition 3.14 mit der Rechnung

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = \exp(n \ln(a^{\frac{1}{n}})) = \exp(n \ln(\exp(\frac{1}{n} \ln a))) = \exp(\ln a) = a,$$

dass  $a^{\frac{1}{n}}$  gleich der  $n$ -ten Wurzel aus  $a$ , also gleich  $\sqrt[n]{a}$  ist. Wenn wir  $\exp 1$  berechnen, erhalten wir mit

$$\exp 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \approx 2,71828,$$

die EULERSche Zahl  $e$  (vgl. Abschnitt 2.4.4), woraus wir durch

$$e^x = \exp(x \ln e) = \exp(x \ln(\exp 1)) = \exp x$$

die Gleichheit der Potenzfunktion mit der Basis  $e$  und der Exponentialfunktion, also

$$e^x = \exp x$$

feststellen. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  kann man die Reihe gliedweise differenzieren und man erhält

$$(\exp x)' = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp x.$$

D.h. die Ableitung der Exponentialfunktion ist gleich der Exponentialfunktion, und die Exponentialfunktion ist (wie jede andere durch eine Potenzreihe dargestellte Funktion) beliebig oft differenzierbar. Damit kann man mit dem Satz von TAYLOR für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  die Beziehung

$$\exp x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x),$$

mit  $R_n(x) = \frac{\exp \xi}{(n+1)!} x^{n+1}$  aufschreiben, wobei  $\xi$  ein Wert zwischen 0 und  $x$  ist. Möchte man nun den Wert der Exponentialfunktion  $e^x$  mit einer Genauigkeit

von  $10^{-8}$  (etwa die Genauigkeit auf einem Taschenrechner) ausrechnen, so muss man nur die Zahl  $n$  ermitteln, die

$$|R_n(x)| \leq 10^{-8}$$

sichert. Zum Beispiel ergibt sich für  $x = \sqrt{3}$  aufgrund der Monotonie der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left| \frac{\exp \xi}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{\exp 2}{(n+1)!} |x^{n+1}| \\ &= \frac{e^2}{(n+1)!} \sqrt{3}^{n+1} < \frac{3^2}{(n+1)!} 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Für  $n = 17$  findet man  $(n+1)! = 18! = 6402373705728000$ , also eine Zahl, die größer als  $6 \cdot 10^{15}$  ist. Wegen  $2^{n+1} = 2^{18} = 262144$  ist

$$\frac{3^2}{(n+1)!} 2^{n+1} < \frac{9}{6 \cdot 10^{15}} 3 \cdot 10^5 = 4,5 \cdot 10^{-10},$$

also gilt

$$|R_{17}| < 4,5 \cdot 10^{-10}.$$

Damit kann man  $\exp \sqrt{3} = e^{\sqrt{3}}$  durch die Berechnung von

$$\sum_{k=0}^{17} \frac{(\sqrt{3})^k}{k!},$$

mit einer Genauigkeit von  $4,5 \cdot 10^{-10}$  berechnen. Man überprüft auf die gleiche Weise, dass man  $\exp \sqrt{3} = e^{\sqrt{3}}$  durch das TAYLOR-Polynom

$$T_{16}(x) = \sum_{k=0}^{16} \frac{(\sqrt{3})^k}{k!}$$

mit einer Genauigkeit von  $10^{-8}$  berechnen kann.

Abschließend soll noch einmal kurz auf die Logarithmusfunktion eingegangen werden. Wir hatten den Logarithmus zur Basis  $a > 0$ , also  $\log_a x$ , als Umkehrfunktion der allgemeinen Potenzfunktion  $a^x$  eingeführt. Für  $a = e$  gilt  $\log_a x = \ln x$  und man spricht vom natürlichen Logarithmus, und für  $a = 10$  verwendet man auch das Symbol  $\lg x$  statt  $\log_{10} x$  und spricht vom **dekadischen Logarithmus**. Da das Rechnen mit Logarithmen oft als schwierig angesehen wird, sollte man sich den folgenden Satz einprägen.

Der Logarithmus  $\log_a x$  ist nichts weiter als der **Exponent**  $\gamma$ , für den  $a^\gamma = x$  ist. Ist z.B.  $a = 4$ , so ist  $\log_4 64$  der Exponent  $\gamma$ , für den  $4^\gamma = 64$  ist. In diesem Fall ist  $\gamma = \log_4 64 = 3$ . Es wird auch sofort deutlich, dass  $\log_a 1 = 0$  für alle  $a > 0$  gilt, denn der einzige Exponent  $\gamma$  mit  $a^\gamma = 1$  ist  $\gamma = 0$ .

### 3.6.3 Sinus, Kosinus und die EULERSche Formel

Beim Rechnen mit komplexen Zahlen haben wir die EULERSche Formel

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

zur Wurzelberechnung bzw. Nullstellenbestimmung von Polynomen und zur Umrechnung der Darstellung von komplexen Zahlen benutzt. Wir sind dabei davon ausgegangen, dass die aus der Schule bekannten Potenzgesetze auch für komplexe Exponenten gelten. Im vorangegangenen Abschnitt haben wir die Gleichheit  $e^x = \exp x$  für reelle  $x$  gezeigt. Durch

$$\exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (3.23)$$

können wir die **komplexe Exponentialfunktion** definieren. Die Reihe in (3.23) ist für alle  $z \in \mathbb{C}$  konvergent und damit ist durch (3.23) eine Funktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definiert. Es gelten wie bei der reellen Exponentialfunktion die Beziehungen

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \exp z_2, \quad \exp z \neq 0 \quad \text{und} \quad \exp(-z) = \frac{1}{\exp z}$$

für alle  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Damit ist

$$a^z := \exp(z \ln a)$$

für positive reelle Zahlen  $a$  definiert und wir stellen die Gleichheit

$$e^z = \exp z$$

fest. Speziell für  $z = ix$  mit  $x \in \mathbb{R}$  erhalten wir die Reihe

$$\begin{aligned} \exp(ix) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Die Beziehung (3.24) ist die Grundlage für die folgende Definition der Sinus- und Kosinus-Funktion.

**Definition 3.15.** (Sinus und Kosinus)

Die durch die auf ganz  $\mathbb{R}$  konvergenten Reihen

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (3.25)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (3.26)$$

erklärten Funktionen heißen **Sinus- und Kosinus-Funktion**.

Wir werden im Folgenden rechtfertigen, dass diese Definitionen von Sinus und Kosinus tatsächlich das gleiche Ergebnis liefern, wie die Definition durch die Quotienten aus Gegenkathete bzw. Ankathete und Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck. Der Vorteil der Definition 3.15 besteht u.a. darin, dass man zur Berechnung eines Funktionswertes keine Winkel abtragen muss, um die Länge von An- und Gegenkathete abmessen zu können. Des Weiteren folgt die Stetigkeit und Differenzierbarkeit aus den oben besprochenen Aussagen über konvergente Potenzreihen (z.B. Satz 3.26). Die EULERSche Formel ist mit (3.24) und der Definition 3.15 verifiziert. Es gelten die Beziehungen

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad (3.27)$$

und daraus erhält man durch Kombinationen die beiden Formeln

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} .$$

Aus der Reihendefinition 3.15 folgt

$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0 \quad \text{und} \quad (3.28)$$

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x . \quad (3.29)$$

Die so definierten Funktionen sind gerade ( $\cos x$ ) bzw. ungerade ( $\sin x$ ) Funktionen. Die Additionstheoreme hatten wir schon im Abschnitt über komplexe Zahlen nachgewiesen. Aus  $e^{i(x \pm y)} = e^{ix} e^{\pm iy}$  folgt mittels (3.27)

$$\cos(x \pm y) + i \sin(x \pm y) = (\cos x + i \sin x)(\cos y \pm i \sin y) ,$$

und durch Trennung von Real- und Imaginärteil erhält man schließlich

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad (3.30)$$

$$\sin(x \pm y) = \cos x \sin y \pm \sin x \cos y . \quad (3.31)$$

Aus (3.30) folgt

$$\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2 \sin x \sin y , \quad (3.32)$$

und mit  $x_2 := x + y$ ,  $x_1 := x - y$  und damit  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ,  $y = \frac{x_2 - x_1}{2}$  ergibt sich

$$\cos x_2 - \cos x_1 = -2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2} . \quad (3.33)$$

Aus (3.28) und (3.30) folgt mit  $x = y$  der trigonometrische Pythagoras

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 . \quad (3.34)$$

Aus den Additionstheoremen (3.30), (3.31) und (3.32) folgen die Beziehungen für das doppelte Argument

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 \quad (3.35)$$

$$\sin 2x = 2 \cos x \sin x . \quad (3.36)$$

Die eben durchgeführten Rechnungen bestätigen, dass die hier vorgenommene Definition 3.15 der Kosinus- und Sinusfunktion mit den Erfahrungen aus der Schule am Einheitskreis im Einklang sind.

Die weiteren Betrachtungen haben den Nachweis der Periodizität der Kosinus- und Sinusfunktion und die Bestimmung der Periode, also auch der Zahl  $\pi$  zum Ziel. Wenn wir die Sinusreihe (3.26) etwas umordnen (ist bei absolut konvergenten Reihen nach Satz 3.5 erlaubt), etwa in der Weise

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) + \frac{x^5}{120}\left(1 - \frac{x^2}{42}\right) + \cdots + \frac{x^{4m+1}}{(4m+1)!}\left[1 - \frac{x^2}{(4m+2)(4m+3)}\right] + \cdots,$$

dann erkennen wir, dass

$$\sin x > 0 \quad \text{für } x \in ]0, 2[ \quad (3.37)$$

ist. Nach Definition ist

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} \pm \dots$$

und weil  $\frac{2^2}{2!} > \frac{2^4}{4!} > \frac{2^6}{6!} > \dots$  gilt, ist die  $\cos 2$ -Reihe vom zweiten Glied an eine alternierende Reihe mit monoton fallenden Gliedern und damit ergibt sich

$$\cos 2 < 1 - 2 + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3} < 0. \quad (3.38)$$

Diese Abschätzungen ergeben mit den oben hergeleiteten Formeln (3.33) und (3.37) für  $0 \leq x_1 < x_2 < 2$

$$\cos x_2 - \cos x_1 = -2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2} < 0,$$

weil die Argumente der Sinusfunktion auf der rechten Seite zwischen 0 und 2 liegen. Damit ist der Nachweis erbracht, dass die Kosinusfunktion auf dem Intervall  $[0, 2[$  streng monoton fallend ist. Da die Kosinusfunktion stetig ist (sie ist durch eine beständig konvergente Potenzreihe definiert), hat sie zwischen 0 ( $\cos 0 > 0$ ) und 2 ( $\cos 2 < 0$ ) aufgrund des Zwischenwertsatzes wegen der Monotonie genau eine Nullstelle. Den doppelten Wert dieser Nullstelle bezeichnen wir mit  $\pi$ .

**Definition 3.16.** (die Zahl  $\pi$ )

Die Zahl  $\pi$  ist die eindeutig bestimmte reelle Zahl mit

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{und} \quad 0 < \frac{\pi}{2} < 2.$$

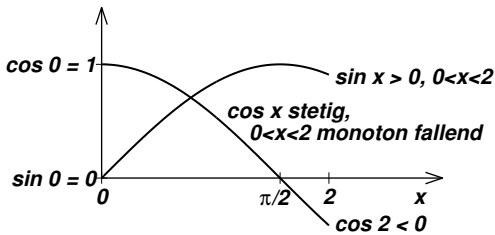
Mit der Zahl  $\pi$ , von der wir in diesem Kontext nur wissen, dass sie zwischen 0 und 4 liegt, kann nun die Periodizität der Kosinus- und Sinusfunktion nachgewiesen werden.

**Satz 3.28.** (Periodizität der trigonometrischen Funktionen)

Die durch (3.25) und (3.26) definierten Kosinus- und Sinusfunktionen sind periodisch und es gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{und} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$



Abb. 3.15. Zur Definition von  $\pi$ 

**Beweis:** Wegen (3.37) und der Positivität der Kosinusfunktion im Intervall  $]0, \frac{\pi}{2}[$  folgt aus der Beziehung (3.36)

$$\sin x > 0 \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi \quad (3.39)$$

$$\sin \pi = 0. \quad (3.40)$$

$\pi$  ist damit die kleinste positive Nullstelle der Sinusfunktion. Aus der Beziehung (3.35) ergibt sich

$$\cos \pi = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 = -1.$$

Aus dem Additionstheorem (3.31) ergibt sich

$$\sin(x + \pi) = \sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi = -\sin x$$

und damit

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin(x + \pi + \pi) = \sin(x + \pi) \cos \pi + \cos(x + \pi) \sin \pi \\ &= -\sin x \cdot (-1) = \sin x. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ebenso zeigt man unter Nutzung des Additionstheorems (3.30) die Beziehung

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

Damit ist die  $2\pi$ -Periodizität der Kosinus- und Sinusfunktion nachgewiesen, ohne auf die anschauliche Definition der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis zurückzugreifen.  $\square$

### 3.6.4 Berechnung von Funktionswerten der Sinus- und Kosinusfunktion

Aus Beziehungen für das doppelte und dreifache Argument kann man nun spezielle Werte der Kosinus- und Sinusfunktion ausrechnen. Aus der Beziehung für das doppelte Argument (3.35) folgt

$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos^2 \frac{\pi}{4} - 1,$$

und damit (wegen  $\cos x > 0$  für  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ )

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Aus der Beziehung für das dreifache Argument (siehe Übungsaufgabe aus dem Kapitel 1)

$$\cos 3x = \cos x(1 - 4 \sin^2 x)$$

erhält man mit  $x = \frac{\pi}{6}$

$$0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(3\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}(1 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{6}).$$

Da  $\cos \frac{\pi}{6} \neq 0$  gilt, erhält man aus  $1 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{6} = 0$  (wegen  $\sin x > 0$  für  $0 < x < \pi$ , vgl. (3.39), und  $\cos x > 0$  für  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ ),

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aus dem Additionstheorem (3.32) erhält man die Beziehung

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad (3.42)$$

aus der man die Wertetabelle für einige oft vorkommende Argumente der trigonometrischen Funktionen ausrechnen kann.

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Wir hatten zu Beginn dieses Abschnittes darauf hingewiesen, dass man mit den Definitionen 3.15 Werte trigonometrischer Funktionen berechnen kann, ohne Winkel messen zu müssen. Das ist natürlich praktisch nur näherungsweise möglich, aber beliebig genau. Es soll exemplarisch der Wert  $\sin 5$  auf 8 Stellen genau berechnet werden. Wir erinnern daran, dass die Argumente  $x$  der trigonometrischen Funktionen hier sämtlich dimensionslose Zahlen sind. Deutet man sie als Winkel, so bedeutet  $x$  das Bogenmaß dieses Winkels, also entspräche  $x = 5$  einem Winkel von  $5 \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = 286,5^\circ$ . Man überlegt sich nun, dass  $\sin 5 = \sin(5 - 2\pi) = \sin(-1,2831853)$  ist. Das setzt allerdings die Kenntnis von  $\frac{\pi}{2}$  bzw.  $\pi$  voraus, was durch eine genaue Berechnung der Werte von Sinus- und Kosinusfunktion im Intervall  $]0,2[$  z.B. mit einem Intervallhalbierungsverfahren oder NEWTON-Verfahren erreicht werden kann. Wir verwenden nun die gleiche Methode wie im Falle der Berechnung von  $e^{\sqrt{3}}$ . Zuerst halten wir fest, dass aus der gliedweisen Differentiation der Sinus- und Kosinusreihen

$$(\sin x)' = \cos x \quad \text{und} \quad (\cos x)' = -\sin x$$

folgt. Man beweist durch vollständige Induktion

$$\begin{aligned} (\sin x)^{(2k)} &= (-1)^k \sin x, & (\sin x)^{(2k+1)} &= (-1)^k \cos x, \\ (\cos x)^{(2k)} &= (-1)^k \cos x, & (\cos x)^{(2k+1)} &= (-1)^{k+1} \sin x \quad (k = 0, 1, \dots). \end{aligned}$$

Des Weiteren überlegt man sich, dass aus (3.34) die Beziehungen

$$|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  folgen. Aus dem Satz von TAYLOR folgt

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{2n+2}(x) \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x) \end{aligned} \quad (3.43)$$

mit  $R_{2n+2}(x) = \frac{\sin^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+3)!} x^{2n+3}$  und einem Wert  $\xi$ , der zwischen 0 und  $x$  liegt. Für  $x = -1,2831853$  ist nun ein  $n$  zu wählen, das die Abschätzung

$$|R_{2n+2}(-1,2831853)| < 10^{-8}$$

absichert. Aufgrund der Beschränktheit der trigonometrischen Funktionen kann man die Abschätzung

$$|R_{2n+2}(-1,2831853)| \leq \frac{1,2831853^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

machen und findet für  $n = 6$

$$\frac{1,2831853^{2n+3}}{(2n+3)!} \approx 3,22 \cdot 10^{-11},$$

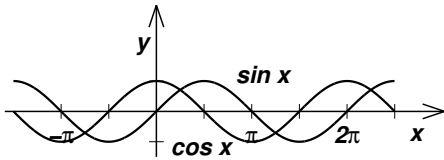
so dass man den Wert der Sinusfunktion  $\sin 5 = \sin(-1,2831853)$  durch das TAYLOR-Polynom  $T_{14}$  vom Grad 13 an der Stelle  $-1,2831853$ , also durch

$$T_{14}(-1,2831853) = \sum_{k=0}^6 (-1)^n \frac{(-1,2831853)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

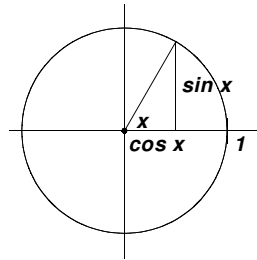
mit einer Genauigkeit von  $3,22 \cdot 10^{-11}$  berechnen kann (zeigen Sie, dass  $n = 5$ , d.h.  $T_{12}$ , auch schon für eine Genauigkeit von  $10^{-8}$  gereicht hätte).

Entscheidend für die Genauigkeit der Berechnung ist die Größe des Restgliedes und wir haben deshalb die Berechnung von  $\sin 5$  durch die Berechnung von  $\sin(5 - 2\pi) = \sin(-1,2831853)$  ersetzt, weil die Potenz  $(-1,2831853)^{2n+3}$  offensichtlich kleiner als  $5^{2n+3}$  ist. Aufgrund der Periodizität, der Nutzung der Beziehungen  $\sin x = -\sin(-x)$  bzw.  $\cos x = \cos(-x)$  sowie  $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$  reicht es bei Kenntnis von  $\pi$  aus, die Werte der Sinusfunktion im Intervall  $[0, \frac{\pi}{4}]$  zu berechnen, um daraus sämtliche Werte von Sinus- und Kosinusfunktion herleiten zu können.

In der folgenden Abb. 3.16 sind die Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion, die wir durch ein Computeralgebraprogramm berechnet haben, dargestellt. Grundlage für die Berechnung von trigonometrischen Funktionswerten in Computeralgebraprogrammen sind die hier besprochenen Potenzreihen.



**Abb. 3.16.** Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion



**Abb. 3.17.** Sinus und Kosinus am Einheitskreis

Die Tangens- und Cotangensfunktion berechnet man in der bekannten Weise als Quotienten der Sinus- und Kosinusfunktion.

Zum Schluss dieses Abschnittes wollen wir noch kurz auf die Bezeichnung **Kreisfunktionen** bzw. **trigonometrische Funktionen** oder Dreiecksfunktionen, die für die Sinus- und Kosinusfunktion verwendet werden, eingehen. Kreis- und Dreiecksfunktion deshalb, weil man Sinus und Kosinus mit den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks im Einheitskreis bestimmen kann. Misst man die Länge des Umfangs des Einheitskreises, findet man als Ergebnis  $2\pi$ . Das überprüfen wir, indem wir die Länge des Graphen der Funktion  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ,  $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , berechnen (Halbkreisbogen). Für die Bogenlänge ist das Integral

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

zu berechnen. Es ergibt sich mit der Substitution  $x = \sin u$

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left[\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right]^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} dx \\ &= \int_{\arcsin(-1)}^{\arcsin 1} \frac{1}{\cos u} \cos u du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du = \pi. \end{aligned}$$

Alle für die Substitution  $x = \sin u$  erforderlichen Eigenschaften der Funktion  $\sin u$  (z.B.  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ,  $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ , monotonen Wachsen für  $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ ) hatten wir oben aus den Potenzreihen hergeleitet. Damit haben wir gezeigt, dass der Umfang des Einheitskreises genau 4 mal so groß ist wie die Entfernung der zwischen 0 und 2 liegenden Nullstelle der  $\cos$ -Funktion vom Nullpunkt der Abszissenachse (Def. 3.16).

### 3.7 Numerische Integralberechnung mit Potenzreihen

Die über ein Integral definierte Fehlerfunktion

$$\Psi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

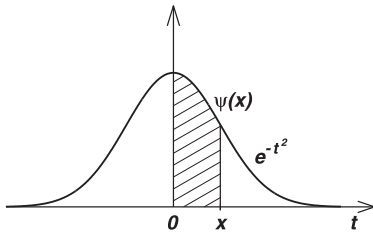
die eng mit der Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion der Normalverteilung (s. auch Kapitel 14) zusammenhängt, lässt sich nicht geschlossen analytisch integrieren, d.h. es lässt sich keine geschlossen angebbare Stammfunktion finden. Es ist allerdings möglich, unter Nutzung der Reihe

$$e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!}, \quad t \in \mathbb{R}$$

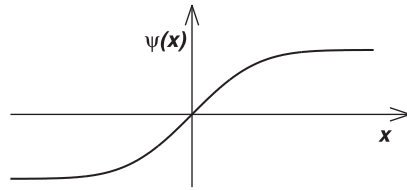
eine gliedweise Integration vorzunehmen. Man erhält dann

$$\Psi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Damit hat man eine Darstellung, die die Berechnung der Funktionswerte bis zu



**Abb. 3.18.** Glockenkurve  $f(t) = e^{-t^2}$



**Abb. 3.19.** Fehlerfunktion  $\Psi(x)$

einer beliebigen Genauigkeit ermöglicht. Es ist klar, dass für "große"  $x$  entsprechend mehr Glieder zur Erreichung einer vorgegebenen Genauigkeit erforderlich sind als bei  $x$ -Werten in der Nähe des Nullpunktes.

Es lässt sich beweisen, dass die elliptischen Integrale (erster Gattung)

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} \quad (0 < k^2 < 1)$$

nicht analytisch auswertbar sind. Die Entwicklung des Integranden in eine Reihe ergibt

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 t + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}k^4 \sin^4 t + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}k^6 \sin^6 t + \dots,$$

so dass man nach der gliedweisen Integration

$$F(\phi, k) = \phi + \frac{1}{2}k^2 \int_0^\phi \sin^2 t dt + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}k^4 \int_0^\phi \sin^4 t dt + \dots$$

erhält. Das **vollständige elliptische** Integral für  $\phi = \frac{\pi}{2}$  ergibt sich zu

$$K(k) := F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right)^2 k^6 + \dots \right].$$

Für den Integralsinus

$$\operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

ergibt sich unter Nutzung der Reihe

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Si} x &= \int_0^x \left[ 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \dots \right] dt = \left[ t - \frac{t^3}{3! \cdot 3} + \frac{t^5}{5! \cdot 5} - \dots \right]_0^x \\ &= x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)! (2k+1)} . \end{aligned}$$

Für das FRESNEL-Integral  $\int_0^x \cos(t^2) dt$  erhält man unter Nutzung der  $\cos(t^2)$ -Reihe

$$\begin{aligned} \int_0^x \cos(t^2) dt &= \int_0^x \left[ 1 - \frac{(t^2)^2}{2!} + \frac{(t^2)^4}{4!} - \frac{(t^2)^6}{6!} + \dots \right] dt \\ &= \left[ t - \frac{t^5}{2! \cdot 5} + \frac{t^9}{4! \cdot 9} - \frac{t^{13}}{6! \cdot 13} + \dots \right]_0^x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k+1}}{(2k)! (4k+1)} . \end{aligned}$$

Wir haben uns hier auf einige Beispiele beschränkt, um das Prinzip der Integralberechnung mit Hilfe von Potenzreihen darzustellen. Bei den praktischen numerischen Rechnungen sind darüberhinaus Abschätzungen für die Fehler erforderlich, die man begeht, wenn man die Potenzreihen nach einer bestimmten Anzahl von Gliedern abbricht.

### 3.8 Konstruktion von Reihen

Im Kapitel 2 haben wir mit dem Satz von TAYLOR eine Grundlage zur Konstruktion von Potenzreihen behandelt. Oben haben wir festgestellt, dass man konvergente Potenzreihen addieren und multiplizieren bzw. gliedweise differenzieren und integrieren kann. Im Folgenden sollen diese Prinzipien genutzt werden, um schnell und effizient Reihen herzuleiten oder zu konstruieren.

Die gliedweise Addition von Reihen kann man nutzen, um z.B. für die Funktion  $\cosh x$  unter Nutzung der Exponentialreihe eine Reihe aufzustellen. Es gilt per definitionem

$$\cosh x := \frac{1}{2} [e^x + e^{-x}]$$

und mit den Reihen für  $e^x$  bzw.  $e^{-x}$  erhält man

$$\begin{aligned}\cosh x &= \frac{1}{2}\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right] \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.\end{aligned}$$

Wie die  $e^x$ -Reihe ist diese Reihe beständig konvergent. Die Multiplikation von Potenzreihen unter Nutzung des CAUCHY-Produktes kann man z.B. zur Konstruktion einer Produktreihe für  $e^{-x} \sin x$  anwenden. Man erhält

$$\begin{aligned}e^{-x} \sin x &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) \\ &= \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) \\ &= x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \dots.\end{aligned}$$

Eine andere Methode zur Reihenkonstruktion ergibt sich mit der Nutzung der Eigenschaft, dass Potenzreihen gliedweise differenziert und integriert werden können. Durch gliedweises Differenzieren erhält man zum Beispiel ausgehend von der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (3.44)$$

die Reihe

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (x^k)' = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots.$$

Man muss natürlich berücksichtigen, dass diese Reihe nur für  $|x| < 1$  konvergiert, da die geometrische Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  nur für  $|x| < 1$  konvergent ist.

Auf die gleiche Weise kann man durch die Substitution  $u = -x^2$  ausgehend von der geometrischen die Reihe  $\frac{1}{1+u} = \sum_{k=0}^{\infty} u^k$ , ( $|u| < 1$ ) die Reihe

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

erhalten, die für  $|x| < 1$  konvergiert. Gliedweise Integration ergibt bei Beachtung von  $\arctan 0 = 0$  mit

$$\arctan x = \int_0^x \frac{d\xi}{1+\xi^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

eine Reihe für die Funktion  $\arctan x$ , die allerdings nur für  $-1 < x < 1$  konvergent ist. Will man eine Reihe für den  $\arcsin x$  haben und hat die TAYLOR-Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots$$

zur Verfügung, erhält man durch Integration

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \dots$$

Damit wird  $\arcsin 0 = 0$  erfüllt. Da die TAYLOR-Reihenentwicklung eine recht wichtige Methode zur Konstruktion von Potenzreihen ist, soll die Aussage des Satzes von TAYLOR hier noch einmal angegeben werden, wobei die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen gegenüber Satz 2.21 der kompakteren Formulierung wegen leicht verschärft werden.

Für jede auf dem offenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$   $(n+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion  $f$  und für beliebige  $x, x_0 \in I$  gilt

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x, x_0) \quad (3.45)$$

mit dem Restglied nach LAGRANGE

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad (3.46)$$

wobei  $\xi$  eine zwischen  $x$  und  $x_0$  liegende Zahl ist. Die Koeffizienten  $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$  heißen TAYLOR-Koeffizienten und  $x_0$  heißt Entwicklungspunkt oder Mittelpunkt der TAYLOR-Reihe.

Aus dem Satz von TAYLOR kann man unmittelbar schlussfolgern, dass sich jede auf dem offenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  beliebig oft stetig differenzierbare Funktion  $f$  für  $x, x_0 \in I$  in eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad (3.47)$$

entwickeln lässt, wenn für das Restglied

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, x_0) = 0 \quad (3.48)$$

gilt. Die Reihe in der Formel (3.47) nennt man auch **TAYLOR-Reihe**. Ist  $x_0 = 0$ , spricht man statt von der TAYLOR-Reihe von der MCLAURIN-Reihe. Die Bedingung  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, x_0) = 0$  ist für elementare Funktionen mit dem Definitionsbereich  $D$  und  $x, x_0 \in I \subset D$  immer erfüllt. Außerdem überlegt man sich, dass



die Bedingung immer dann erfüllt ist, wenn  $x$  aus dem Konvergenzintervall der Reihe ist (siehe Beispiel  $(1+x)^\alpha$  unten).

Wenn man  $f^{(k)}(x_0)$  in der Grenzwertbildung nicht berücksichtigen muss oder wenn  $|f^{(k)}(x_0)| \leq M$  mit einer von  $k$  unabhängigen Konstanten  $M > 0$  gilt, ergibt sich die Bedingung (3.48) sofort. Betrachten wir z.B. die weiter oben diskutierte Funktion  $f(x) = (1+x)^\alpha$  für reelle Potenzen  $\alpha$ . Nach dem Satz von TAYLOR erhält man am Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$  die Beziehung

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + R_n(x)$$

mit

$$R_n(x,0) =: R_n(x) = \binom{\alpha}{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1} x^{n+1}.$$

Dabei haben wir den Binomialkoeffizienten  $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$  für reelle  $\alpha$  genutzt, wobei  $\binom{\alpha}{0} = 1$  gilt und  $\binom{\alpha}{n} = 0$  für ganzzahlige  $\alpha$  mit  $n > \alpha$  ist. Für  $0 \leq x < 1$  kann man zeigen, dass

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

gilt. Dass die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$  für  $|x| < 1$ , also insbesondere für  $0 \leq x < 1$  konvergent ist, sieht man mit der Berechnung des Konvergenzradius  $\rho$ . Man erhält (Satz 3.24)

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\binom{\alpha}{k}}{\binom{\alpha}{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{k+1}{\alpha - k} \right| = 1.$$

Damit erkennt man zum einen, dass die Reihe für  $0 \leq x < 1$  konvergent ist, und zweitens, dass die Folge der Summanden  $\binom{\alpha}{k} x^k$  eine Nullfolge sein muss, denn das ist **notwendig** für die Konvergenz. Für die Folge  $(R_n(x))$  bedeutet das

$$|R_n(x)| = \left| \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \right| \cdot |(1+\xi)^{\alpha-n-1}| = \left| \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \right| \frac{1}{|(1+\xi)^{n+1-\alpha}|}$$

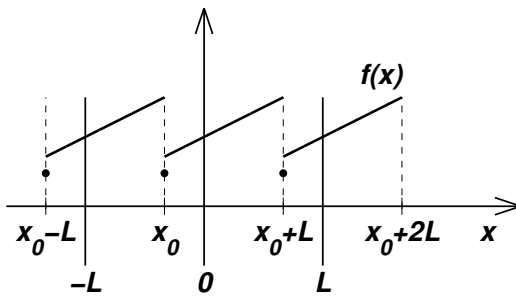
bzw.

$$|R_n(x)| < \left| \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \right| \quad \text{für } n \geq \alpha,$$

da  $(1+\xi)^{n+1-\alpha} > 1$  wegen  $0 < \xi < x$  bei  $n \geq \alpha$  ist. Weil, wie oben gezeigt,  $\left| \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} \right|$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null strebt, gilt dies auch für  $|R_n(x)|$  und damit auch für die Restgliedfolge  $(R_n(x))$ . Damit ist gezeigt, dass die Funktion  $f(x) = (1+x)^\alpha$  für  $0 \leq x < 1$  gleich der Summe ihrer TAYLOR-Reihe ist.

### 3.9 FOURIER-Reihen

In der Physik und im Ingenieurwesen spielen periodische Vorgänge eine große Rolle. Sie treten in Form von mechanischen oder elektrischen Schwingungen,



**Abb. 3.20.**  $L$ -periodische Funktion mit Periodizitätsintervallen  $[x_0 + kL, x_0 + (k+1)L[, x_0 \in \mathbb{R}$

Wellen, Drehbewegungen vielfach auf. In der jüngsten Vergangenheit wurden auch zahlreiche periodische Phänomene in Sozial- und Wirtschaftswissenschaften entdeckt. Das Darstellen beliebiger periodischer funktionaler Zusammenhänge durch Reihen von Kosinus- und Sinusfunktionen ist dabei die mathematische Grundaufgabe.

### 3.9.1 Periodische Funktionen

**Definition 3.17.** (periodische Funktion)

Unter einer **periodischen Funktion** verstehen wir eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die die Gleichung

$$f(x + L) = f(x) \quad (3.48)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  erfüllt. Dabei ist  $L$  eine positive Konstante. Das kleinste  $L > 0$ , dass (3.48) erfüllt, heißt die **Minimalperiode** oder auch primitive Periode von  $f$ . Jedes  $n$ -fache ( $n \in \mathbb{N}$ ) der Minimalperiode ist wieder Periode. Man nennt  $f$  auch  **$L$ -periodische Funktion**. Z.B. hat  $f(x) = \sin x$  die Minimalperiode  $2\pi$  und ist eine  $2\pi$ -periodische Funktion, aber auch eine  $4\pi$ -,  $6\pi$ -, ... periodische Funktion. Ist von einer  $L$ -periodischen Funktion die Rede, so bedeutet  $L$  in der Regel die Minimalperiode.

Teilt man die reelle Achse in Intervalle der Länge  $L$  ein, z.B. in Intervalle  $[kL, (k+1)L]$  ( $k$  ganzzahlig), so ist der Graph von  $f$  auf allen diesen Intervallen gleich. Die Funktionen  $\cos x$  und  $\sin x$  sind wichtige Beispiele periodischer Funktionen mit der Periode  $2\pi$ . Die Funktionen

$$\sin(nx) \quad \cos(nx) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

haben die Minimalperioden  $\frac{2\pi}{n}$  und damit auch die Periode  $2\pi$ .

**Definition 3.18.** (trigonometrisches Funktionensystem)

Die Funktionen  $1, \sin(nx), \cos(nx)$  für  $n \in \mathbb{N}$  bilden das **trigonometrische Funktionensystem**  $\{1, \sin nx, \cos nx\}$ .

Im Weiteren wird es darum gehen, periodische Funktionen durch Linearkombinationen von Elementen des trigonometrischen Funktionensystems zu approximieren.

Durch eine einfache Transformation bzw. Substitution kann man jede  $L$ -periodische Funktion  $f(x)$  in eine Funktion mit der Periode  $2\pi$  verwandeln. Wir substituieren  $x = t \frac{L}{2\pi}$  und bilden die  $L$ -periodische Funktion  $f(x)$  umkehrbar eindeutig auf die  $2\pi$ -periodische Funktion

$$\hat{f}(t) := f\left(t \frac{L}{2\pi}\right)$$

ab. Aus  $\hat{f}(t)$  gewinnt man durch  $f(x) = \hat{f}\left(2\pi \frac{x}{L}\right)$  die  $L$ -periodische Funktion  $f(x)$  wieder zurück. Dieser Fakt rechtfertigt im Weiteren die vorzugsweise Betrachtung von  $2\pi$ -periodischen Funktionen.

### 3.9.2 Trigonometrische Reihen, FOURIER-Koeffizienten

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige  $2\pi$ -periodische Funktion. Unser Ziel besteht im Folgenden darin, diese Funktion mit geeigneten reellen Konstanten  $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$  durch eine Reihe der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (3.49)$$

darzustellen. Die Reihe (3.49) heißt trigonometrische Reihe und ist definiert durch die Partialsummenfolge  $(s_m)$  der **trigonometrischen Polynome**

$$s_m = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Setzt man für  $a_n^2 + b_n^2 > 0$

$$\cos \phi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \quad \sin \phi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}},$$

so erhält man unter Nutzung des Additionstheorems für die Sinusfunktion

$$s_m = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin(nx + \phi_n).$$

Es gilt die Frage zu beantworten, ob

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right] \end{aligned} \quad (3.50)$$

tatsächlich gelten kann, wenn man die Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots$  und  $b_1, b_2, \dots$  geeignet wählt. Zur Klärung dieser Fragen nehmen wir an, dass  $f(x)$  durch eine solche Reihe (3.49) wirklich dargestellt werden kann und setzen des Weiteren die gleichmäßige Konvergenz dieser Reihe voraus. Wir fragen dann nach den Koeffizienten  $a_n, b_n$ , d.h. wir leiten Bedingungen her, die die Koeffizienten notwendig erfüllen müssen, wenn  $f(x)$  durch eine gleichmäßig konvergente Reihe (3.49) dargestellt wird.

Zur Bestimmung der Koeffizienten:

Beide Seiten der Gleichung (3.50) werden mit  $\sin(kx)$  multipliziert ( $k \in \mathbb{N}$ , fest) und anschließend über das Intervall  $[-\pi, \pi]$  integriert. Durch die Annahme der gleichmäßigen Konvergenz kann man die Reihe gliedweise integrieren. Man erhält also

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(kx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx \right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen (3.30), (3.31) kann man die Produkte  $\cos(nx) \sin(kx)$  und  $\sin(nx) \sin(kx)$  in Summen umwandeln, die leicht zu integrieren sind:

$$\begin{aligned} \cos(nx) \sin(kx) &= \frac{1}{2} \{ \sin[(n+k)x] - \sin[(n-k)x] \}, \\ \sin(nx) \sin(kx) &= \frac{1}{2} \{ \cos[(n+k)x] - \cos[(n-k)x] \}, \\ \cos(nx) \cos(kx) &= \frac{1}{2} \{ \cos[(n+k)x] + \cos[(n-k)x] \}. \end{aligned}$$

Man erhält dann die

**Orthogonalitätsrelationen für das trigonometrische Funktionensystem ( $k, n \in \mathbb{N}$ ):**

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(kx) dx &= 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx &= \delta_{nk} \pi, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx &= \delta_{nk} \pi. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Wir erinnern dabei an das KRONECKER-Symbol  $\delta_{nk}$ , das durch  $\delta_{nk} = 0$  für  $n \neq k$  und  $\delta_{nk} = 1$  für  $n = k$  definiert ist. Aufgrund der Orthogonalitätsrelationen verschwinden auf der rechten Seite von (3.51) alle Integrale bis auf das Integral

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx) dx$ , so dass aus (3.51) die Gleichung

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx) dx = b_k \pi \quad (3.53)$$

folgt. Multipliziert man (3.49) für  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  mit  $\cos(kx)$  und integriert über das Intervall  $[-\pi, \pi]$ , so erhält man für  $k \in \mathbb{N}$  mittels (3.52) und für  $k = 0$  durch gliedweise Integration der Reihe (3.49) selbst die Gleichung

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \begin{cases} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) dx = a_k \pi & \text{für } k \in \mathbb{N}, \\ \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = a_0 \pi & \text{für } k = 0. \end{cases} \quad (3.54)$$

Die Auflösung nach den Koeffizienten liefert die Berechnungsformeln

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.55)$$

Diese Methode zur Berechnung aller Koeffizienten ist von FOURIER entdeckt worden, weshalb die Approximation periodischer Vorgänge mit Sinus-Kosinus-Polynomen auch **FOURIER-Analyse** genannt wird. Die in (3.55) definierten Zahlen  $a_n, b_n$  heißen **FOURIER-Koeffizienten** der Funktion  $f$ .

An dieser Stelle weisen wir darauf hin, dass Orthogonalität bisher durch die Auswertung von geeigneten Skalarprodukten erklärt wurde und wird (siehe dazu auch Kapitel 4). Durch

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx \quad (3.56)$$

ist offensichtlich ein Skalarprodukt auf dem Raum der reell-wertigen  $2\pi$ -periodischen Funktionen definiert. Dieses Skalarprodukt induziert durch

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (3.57)$$

auch eine Norm auf dem Funktionenraum, die auch als  $L_2$ -Norm bezeichnet wird. Wenn wir die Elemente des trigonometrischen Funktionensystems mit

$$\{\phi_j(x), j = 1, 2, \dots\}, \quad (3.58)$$

wie folgt erklären:  $\phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \phi_2(x) = \sin x, \phi_3(x) = \cos x, \phi_4(x) = \sin(2x), \dots$ , dann stellt man unter Berücksichtigung der Beziehungen (3.52) fest, dass

$$\langle \phi_j, \phi_k \rangle = \delta_{jk}$$

gilt, also sind die Elemente von (3.58) bezüglich des Skalarproduktes (3.56) orthogonal und haben jeweils die Norm eins, d.h. sie sind orthonormal.

Das Problem besteht nun darin, dass man nicht a-priori weiß, ob die Reihe gleichmäßig konvergiert. Immerhin kann man aber die Formeln (3.55) für jede integrierbare Funktion  $f$  anwenden und damit formal die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (3.59)$$

bilden. Sie heißt **FOURIER-Reihe** von  $f$ .

Diese Reihe (3.59) kann man mit den Koeffizienten

$$f_k = \langle f(x), \phi_k(x) \rangle, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.60)$$

auch in der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \phi_k(x) \quad (3.61)$$

darstellen. Die Äquivalenz der Darstellungen (3.59) und (3.61) ist offensichtlich. Um anzudeuten, dass die Reihe über die FOURIER-Koeffizienten (3.55) mit einer  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f(x)$  in Verbindung steht, verwendet man die Bezeichnung

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Es bleibt die Frage zu beantworten: Für welche Funktionen  $f$  konvergiert deren FOURIER-Reihe gegen  $f$ , d.h. wann kann man  $\sim$  durch ein Gleichheitszeichen ersetzen? Glücklicherweise kann man diese Frage für die meisten im Ingenieurwesen vorkommenden periodischen Funktionen positiv beantworten, nämlich für stückweise glatte Funktionen.

**Definition 3.19.** (stückweise glatte Funktion)

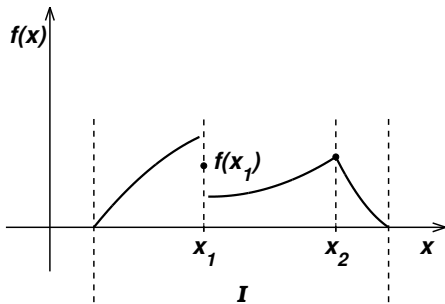
Eine auf einem Intervall  $I$  definierte Funktion  $f$  heißt **stückweise glatt** (s. auch Abb. 3.21), wenn gilt:

- $f$  ist stetig differenzierbar, ausgenommen auf einer Menge von Punkten, die sich in  $I$  nirgends häufen.
- In diesen Ausnahmepunkten  $x_i$  existieren die rechts- und linksseitigen Grenzwerte  $f(x_i + 0)$  und  $f(x_i - 0)$  sowie  $f'(x_i + 0)$  und  $f'(x_i - 0)$ . Gemäß den Definitionen der einseitigen Ableitungen bedeutet das die Existenz der Grenzwerte

$$\begin{aligned} f'(x_i + 0) &= \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{f(x_i + h) - f(x_i + 0)}{h}, \\ f'(x_i - 0) &= \lim_{h \rightarrow 0-0} \frac{f(x_i + h) - f(x_i - 0)}{h}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

c) In allen Punkten  $x_i$  ist der Funktionswert  $f(x_i)$  das arithmetische Mittel der einseitigen Grenzwerte

$$f(x_i) = \frac{1}{2}(f(x_i + 0) + f(x_i - 0)) . \quad (3.63)$$



**Abb. 3.21.** Stückweise glatte Funktion

Die Forderung c) ist stark auf FOURIER-Reihen zugeschnitten, wie man im Folgenden sehen wird. Schließlich gilt der folgende Satz, dessen Nachweis den Rahmen dieses Buches sprengen würde.

**Satz 3.29.** (Konvergenz von FOURIER-Reihen)

Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $2\pi$ -periodische, stückweise glatte Funktion, so konvergiert ihre FOURIER-Reihe punktweise gegen  $f$ . In jedem abgeschlossenen Intervall ohne Unstetigkeitsstellen von  $f$  ist die Konvergenz darüberhinaus gleichmäßig.

An Unstetigkeitsstellen konvergiert die FOURIER-Reihe damit gegen das arithmetische Mittel  $f(x_i) = \frac{1}{2}(f(x_i + 0) + f(x_i - 0))$  von links- und rechtsseitigem Grenzwert.

Eine wichtige Ungleichung für die FOURIER-Koeffizienten liefert der folgende Satz.

**Satz 3.30.** (BESSELSche Ungleichung)

Für jede auf  $[-\pi, \pi]$  quadratisch integrierbare Funktion  $f(x)$  gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  die BESSELSche Ungleichung

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx . \quad (3.64)$$

Dabei sind  $a_k, b_k$  die FOURIER-Koeffizienten (3.55) von  $f$ .

**Beweis:** In der folgenden Herleitung wird die quadratische Klammer im Integral ausmul-

tipliziert. Die Verwendung der Orthogonalitätsrelationen (3.52) ergibt dann:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - [\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))])^2 dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} (f^2(x) - 2f(x)[...] + [...]^2) dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left( \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right) .
 \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe bestimmter Eigenschaften des trigonometrischen Funktionensystems ("Vollständigkeit") erhält man aus der BESSELSchen Ungleichung (3.64) für  $n \rightarrow \infty$  die

PARSEVALSche Gleichung:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx . \quad (3.65)$$

Aus (3.65) (aber auch schon aus (3.64)) folgt, dass die Reihe auf der linken Seite konvergent ist, woraus man erkennt, dass die FOURIER-Koeffizienten einer integrierbaren Funktion Nullfolgen sind:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 , \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0 . \quad (3.66)$$

Mit den oben eingeführten Koeffizienten (3.60) erhält man die etwas "kompaktere" Form der BESSELSchen Ungleichung bzw. der PARSEVALSchen Gleichung, und zwar

BESSELSche Ungleichung

$$\sum_{k=1}^n f_k^2 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \pi \|f\|_2^2 ,$$

bzw.

PARSEVALSche Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \pi \|f\|_2^2 .$$

Hier gilt für die Koeffizientenfolge  $f_k$  analog zu den  $a_k$  und  $b_k$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = 0 .$$

Der folgende Satz ergänzt die Aussage des Satzes 3.29 und bildet unter gewissen Voraussetzungen an die periodische Funktion die Grundlage für das gliedweise Differenzieren und Integrieren von FOURIER-Reihen.



**Satz 3.31.** (punktweise und gleichmäßige Konvergenz)

Ist  $f$  eine stetige, stückweise glatte Funktion der Periode  $2\pi$ , so konvergiert ihre FOURIER-Reihe gleichmäßig und absolut gegen  $f$ . Für ihre FOURIER-Koeffizienten  $a_k, b_k$  folgt außerdem die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|.$$

**Beweis:** Aus  $(|A| - |B|)^2 \geq 0$  folgt  $2|AB| \leq A^2 + B^2$ . Damit gilt mit  $A = \frac{1}{k}$  und  $B = ka_k$  die Ungleichungskette

$$2|a_k \cos(kx)| \leq 2|a_k| = \frac{2}{k} |ka_k| \leq \frac{1}{k^2} + (ka_k)^2 \quad (3.67)$$

und analog

$$2|b_k \sin(kx)| \leq 2|b_k| \leq \frac{1}{k^2} + (kb_k)^2 \quad (3.68)$$

für  $k \in \mathbb{N}$ . Die Ableitung  $f'$  wird an ihren Sprungstellen durch das arithmetische Mittel ihrer einseitigen Grenzwerte erklärt. Die FOURIER-Koeffizienten von  $f'$  sind  $kb_k$  und  $-ka_k$ , wie man durch partielle Integration der Integraldarstellungen der FOURIER-Koeffizienten von  $f'$  herausfindet. Die BESSELSche Ungleichung für  $f'$  ergibt damit die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2).$$

Die obigen Ungleichungen (3.67) und (3.68) ergeben

$$|a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)| \leq |a_k| + |b_k| \leq \frac{1}{k^2} + \frac{k^2}{2} (a_k^2 + b_k^2). \quad (3.69)$$

Da  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k^2}{2} (a_k^2 + b_k^2) + \frac{1}{k^2} \right)$  konvergiert, ist diese Reihe eine Majorante für  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)|$ , wie auch für die Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ . Daraus folgt die Behauptung des Satzes.  $\square$

Bisher wurde bei den Konvergenzuntersuchungen der Abstand zwischen der Funktion und der FOURIER-Reihe als maximaler Betrag der Differenz zwischen Funktion und Reihe auf dem Periodizitätsintervall  $[-\pi, \pi]$  betrachtet und in den Sätzen 3.29 und 3.31 die gleichmäßige Konvergenz für stetige, stückweise glatte Funktionen festgestellt. Misst man den Abstand zweier Funktionen  $f, g$  nicht am Maximum der Differenzen aller Funktionswerte auf  $[-\pi, \pi]$ , sondern mit der  $L_2$ -Norm der Funktionsdifferenz, also

$$\|f - g\|_2 := \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

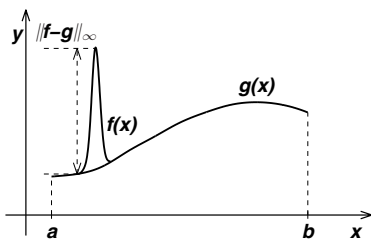
kann man auf die Voraussetzung der stückweisen Glattheit verzichten. Es genügt dann die stückweise Stetigkeit:

**Satz 3.32.** (Konvergenz im quadratischen Mittel)

Die FOURIER-Reihe einer auf  $[-\pi, \pi]$  stückweise stetigen Funktion  $f$  konvergiert auf  $[-\pi, \pi]$  stets im quadratischen Mittel gegen  $f$ , d.h. für die Partialsummen  $s_m$  der FOURIER-Reihe von  $f$  gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - s_m\|_2 = 0.$$

Die Konvergenz im quadratischen Mittel ist dann bei Approximationen ausreichend, wenn "Ausreißer", d.h. irgendwelche Spitzen, Zacken in Funktionsgraphen unbedeutend für den zu untersuchenden periodischen Vorgang sind. Es ist  $\|f - g\|_2 = 0$  insbesondere dann, wenn sich  $f$  und  $g$  nur an endlich vielen Stellen in  $[-\pi, \pi]$  voneinander unterscheiden. Haben Ausreißer im Funktionsverlauf eine entscheidende Bedeutung oder sind unbedingt zu vermeiden, muss man punktweise oder gleichmäßige Konvergenz benutzen. Die Abb. 3.22 zeigt die unterschiedlichen "Abstände" zweier Funktionen. Entscheidend für die Größe  $\|f - g\|_2$  ist nicht der Ausreißer, sondern der Inhalt der Fläche, die zwischen den Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$  entsteht. Und dieser Flächeninhalt kann trotz einer sehr großen maximalen Funktionsdifferenz sehr klein sein.



**Abb. 3.22.** Normen der Funktionsdifferenz  $f - g$

Soll die  $2\pi$ -periodische Funktion  $f$  durch ein trigonometrisches Polynom  $s_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$  approximiert werden, so gilt der folgende Satz, der eine eindrucksvolle Rechtfertigung für die Befassung mit FOURIER-Reihen liefert.

**Satz 3.33.** (Approximation im quadratischen Mittel)

Sei  $m \in \mathbb{N}$  beliebig vorgegeben. Der quadratische Fehler der Approximation einer beschränkten,  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f$  durch ein trigonometrisches Polynom der Form  $s_m$  in der  $L_2$ -Norm, d.h.

$$\|f - s_m\|_2^2 = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_m(x))^2 dx,$$

wird genau dann minimal, wenn die Koeffizienten  $a_0$  und  $a_k, b_k, k = 1, 2, \dots$  gerade die FOURIER-Koeffizienten der Funktion  $f$  sind. Für den Fehler gilt

$$\|f - s_m\|_2^2 = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{1}{\pi} \left[ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^m (a_k^2 + b_k^2) \right]. \quad (3.70)$$

**Beweis:** Der Nachweis dieser wichtigen Aussage ist nicht kompliziert aber etwas mühselig. Deshalb beschränken wir uns auf eine gerade  $2\pi$ -periodische Funktion  $f$  mit  $f(0) = 0$  und suchen unter allen trigonometrischen Polynomen  $g_m(x) = \sum_{k=1}^m A_k \cos(kx)$  das Polynom mit

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g_m(x))^2 dx = \min! .$$

Es ergibt sich unter Nutzung der Definition der FOURIER-Koeffizienten und der Orthogonalitätsrelationen (3.52)

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g_m(x))^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) - \sum_{k=1}^m A_k \cos(kx) \right)^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{k=1}^m A_k \cos(kx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=1}^m A_k \cos(kx) \right)^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \sum_{k=1}^m A_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=1}^m A_k \cos(kx) \right)^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2\pi \sum_{k=1}^m A_k a_k + \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k,j=1}^m A_k A_j \cos(kx) \cos(jx) \right) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2\pi \sum_{k=1}^m A_k a_k + \pi \sum_{k=1}^m A_k^2 . \end{aligned}$$

Die Division durch  $\pi^2$  und eine quadratische Ergänzung ergeben

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - g_m(x))^2 dx = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \frac{1}{\pi} \left[ \sum_{k,j=1}^m (A_k - a_k)^2 - \sum_{k=1}^m a_k^2 \right] .$$

Man erkennt sofort, dass die rechte Seite am kleinsten wird, wenn die  $A_k$  gerade gleich den FOURIER-Koeffizienten  $a_k$  sind.  $\square$

Die Beziehung (3.70) gibt Auskunft über einen integralen Fehler. Eine quantitative Abschätzung des Fehlers  $r(x) = f(x) - s_m(x)$  für einen bestimmten  $x$ -Wert ist bei der FOURIER-Approximation im Unterschied zur Approximation von Funktionen durch TAYLOR-Polynome, wo man den Fehler z.B. durch das LAGRANGESche Restglied (3.46) für einen beliebigen  $x$ -Wert aus dem Definitionsintervall quantitativ beschreiben kann, nicht möglich.

Nach den vielen Sätzen und den Beweisen soll nun auf einige Beispiele und praktische Aspekte der Berechnung von FOURIER-Reihen eingegangen werden. Wenn man die Berechnungsformeln für die FOURIER-Koeffizienten ansieht und an die Integration gerader oder ungerader Funktionen über das Intervall  $[-\pi, \pi]$  denkt, dann kommt man schnell zu der Folgerung, dass die FOURIER-Reihe einer ungeraden Funktion eine reine Sinusreihe, und die einer geraden Funktion eine reine Kosinusreihe (einschließlich einem konstanten Glied) ist. Wir haben dies beim Beweis von Satz 3.33 bereits benutzt. Für die FOURIER-Koeffizienten einer geraden Funktion  $f$  gilt

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad \text{und} \quad b_k = 0 . \quad (3.71)$$

Im Fall einer ungeraden Funktion  $f$  erhält man für die FOURIER-Koeffizienten

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad \text{und} \quad a_k = 0, \quad (3.72)$$

denn das Produkt einer ungeraden Funktion  $f$  mit der ungeraden Sinusfunktion ist eine gerade Funktion  $g$  und für gerade Funktionen gilt

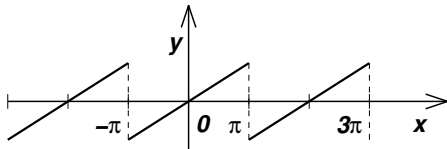
$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx &= \int_{-\pi}^0 g(x) dx + \int_0^{\pi} g(x) dx \\ &= - \int_0^{-\pi} g(x) dx + \int_0^{\pi} g(x) dx \\ &\stackrel{[u=-x]}{=} \int_0^{\pi} g(u) du + \int_0^{\pi} g(x) dx = 2 \int_0^{\pi} g(x) dx. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Da das Produkt einer geraden Funktion  $f$  mit der geraden Kosinusfunktion wieder eine gerade Funktion ist, beweist (3.73) auch die Formel (3.71). Dass bei geraden Funktionen die Koeffizienten  $b_k$  und bei einer ungeraden Funktion die Koeffizienten  $a_k$  verschwinden, folgt daraus, dass in beiden Fällen Integrale von  $-\pi$  bis  $\pi$  über ungerade Funktionen zu bilden sind.

**Beispiel** (Sägezahnkurve): Wir betrachten bei  $a > 0$  die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{für } -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{für } x = \pi \end{cases}$$

und denken uns die Funktion zu einer  $2\pi$ -periodischen Funktion auf  $\mathbb{R}$  fortgesetzt.



**Abb. 3.23.** Sägezahnkurve

$f$  ist eine ungerade Funktion und damit gilt  $a_n = 0$  für alle  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Die  $b_n$  berechnet man mit der Formel (3.72) zu

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2a}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = \\ &= \frac{2a}{\pi} \left( \left[ -x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right) = \frac{2a(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Damit folgt die Reihendarstellung der Sägezahnkurve

$$f(x) = 2a \left( \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - + \dots \right).$$

Setzt man  $a = 1$  und betrachtet nur  $x$ -Werte aus  $] - \pi, \pi[$ , so erhält man für  $-\pi < x < \pi$  die Formel

$$x = 2 \left( \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - + \dots \right),$$

und damit die erstaunliche Darstellung einer sehr einfachen Funktion durch die Kombination sich wild bewegender Sinusfunktionen. Nach Satz 3.29 konvergiert die FOURIER-Reihe punktweise gegen  $f$ , da  $f$  stückweise glatt im Sinne der Definition 3.19 ist. In jedem abgeschlossenen Intervall, das die Sprungstellen  $k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) nicht enthält, ist die Konvergenz sogar gleichmäßig.

### 3.9.3 Fortsetzung zu periodischen Funktionen

Hat man eine Funktion  $f : [0, L[ \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben und interessiert sich für eine Approximation dieser Funktion durch eine trigonometrische Reihe, dann hat man dazu mehrere Möglichkeiten. Man muss  $f$  periodisch fortsetzen, d.h. man muss eine periodische Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  finden mit  $F(t) = f(t)$  auf  $[0, L[$ . Es bieten sich für die Fortsetzung drei Möglichkeiten an.  $k$  sei eine beliebige ganze Zahl.

a) Direkte Fortsetzung der auf  $[0, L[$  gegebenen Funktion zu einer  $L$ -periodischen Funktion  $F(t)$ :

$$F(t) = f(t - kL) \quad \text{für} \quad kL \leq t < (k+1)L.$$

b) Ungerade Fortsetzung zu einer  $2L$ -periodischen Funktion  $F(t)$ :

$$F(t) = \begin{cases} f(t) & \text{für } 0 \leq t < L \\ f(0) & \text{für } t = L \\ -f(-t) & \text{für } -L < t < 0 \end{cases}.$$

Die hiermit für  $-L < t \leq L$  definierte Funktion  $F(t)$  wird durch  $F(t + 2kL) = F(t)$  ( $-L < t \leq L$ ) zu einer  $2L$ -periodischen ungeraden Funktion.

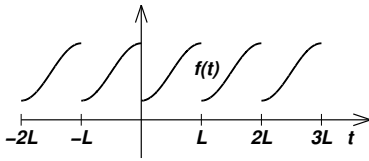
c) Gerade Fortsetzung zu einer  $2L$ -periodischen Funktion  $F(t)$ :

$$F(t) = \begin{cases} f(t) & \text{für } 0 \leq t < L \\ f(0) & \text{für } t = L \\ f(-t) & \text{für } -L < t < 0 \end{cases}.$$

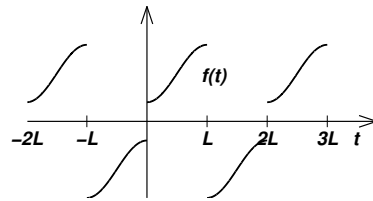
Die so für  $-L < t \leq L$  definierte Funktion wird durch  $F(t + 2kL) = F(t)$  ( $-L < t \leq L$ ) zu einer  $2L$ -periodischen geraden Funktion.

In den Abbildungen 3.24, 3.25 und 3.26 sind die Fortsetzungen graphisch dargestellt.

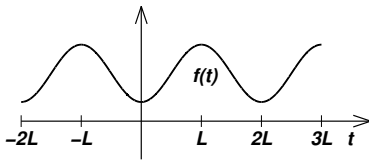
Mit einer geraden Fortsetzung ist es möglich, die Funktion  $f : [0, L[ \rightarrow \mathbb{R}$  durch eine reine Kosinusreihe zu approximieren, und mit einer ungeraden Fortsetzung erhält man als FOURIER-Reihe eine reine Sinusreihe.



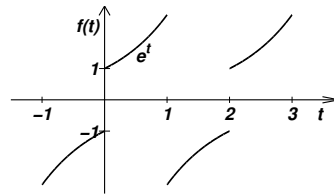
**Abb. 3.24.** Fortsetzung zu einer  $L$ -periodischen Funktion



**Abb. 3.25.** Ungerade Fortsetzung zu einer  $2L$ -periodischen Funktion



**Abb. 3.26.** Gerade Fortsetzung zu einer  $2L$ -periodischen Funktion



**Abb. 3.27.** Ungerade Fortsetzung von  $e^t$  für  $0 \leq t < 1$

**Beispiel:** Betrachten wir die Funktion  $f(t) = e^t$  auf dem Definitionsintervall  $[0, 1[$ . Durch

$$F(t) = \begin{cases} f(t) = e^t & 0 \leq t < 1 \\ -f(-t) = -e^{-t} & -1 \leq t < 0 \end{cases}$$

und  $F(t) = F(t - 2k)$ ,  $2k - 1 \leq t \leq 2k + 1$ , haben wir  $f$  zu einer 2-periodischen ungeraden Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fortgesetzt. Für die FOURIER-Koeffizienten  $b_k$  ergibt sich mit den im folgenden Abschnitt allgemein hergeleiteten Formeln (3.75)

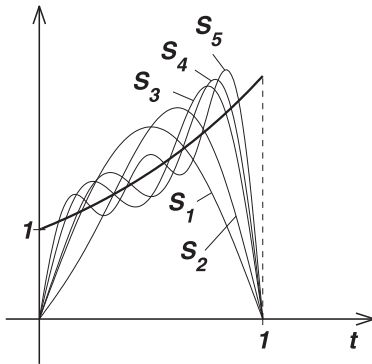
$$\begin{aligned} b_k &= 2 \int_0^1 e^t \sin(kt\pi) dt = \underbrace{[2e^t \sin(kt\pi)]_0^1}_{=0} - 2 \int_0^1 e^t \cos(kt\pi) k\pi dt \\ &= -[2e^t \cos(kt\pi) k\pi]_0^1 - k\pi 2 \int_0^1 e^t \sin(kt\pi) k\pi dt \\ &= 2(-e(-1)^k + 1)k\pi - (k\pi)^2 b_k, \end{aligned}$$

und damit erhält man

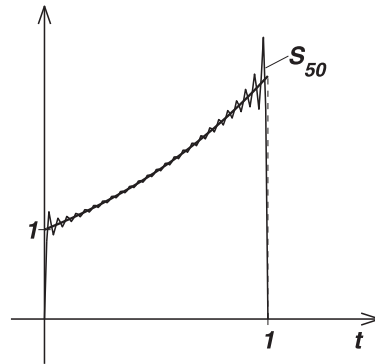
$$b_k = \frac{2k\pi(1 - e(-1)^k)}{1 + (k\pi)^2} \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

und die FOURIER-Reihe von  $F(t)$  hat die Form

$$2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(1 - e(-1)^k)}{1 + (k\pi)^2} \sin(kt\pi).$$



**Abb. 3.28.** Approximation von  $e^t$  auf  $[0, 1]$  durch trigonometrische Polynome bis zum Grad 5



**Abb. 3.29.** Approximation von  $e^t$  auf  $[0, 1]$  durch ein trigonometrisches Polynom mit dem Grad 50

Das Überspringen der trigonometrischen Polynome am Rand des Intervalls  $[0, 1]$ , also an der Sprungstelle (s. Abb. 3.29), ist keine Einzelercheinung im konkreten Beispiel der trigonometrischen Approximation der Funktion  $f(t) = e^t$ . Man nennt es GIBBSsches Phänomen und es ist eine allgemeine Erscheinung. Dabei wird an der Sprungstelle die Funktion  $f(t)$  durch das Polynom  $s_m(t)$  ( $m$ -te Partialsumme der FOURIER-Reihe) für große  $m$  um 17,89% überschungen.

### 3.9.4 Formeln für den Fall einer $L$ -periodischen Funktion

Da die periodischen Vorgänge i. Allg. eine Periode  $L \neq 2\pi$  haben, sollen für diesen Fall die Konsequenzen für die wichtigsten Formeln und Ungleichungen bzw. Gleichungen der FOURIER-Analyse hergeleitet werden. Das geht recht einfach und zwar im Wesentlichen durch die Nutzung der Substitutionsregel bei der Integration. Wenn  $f$   $L$ -periodisch ist, ist die Funktion  $\hat{f}(t) = f(t \frac{L}{2\pi})$  eine Funktion mit der Periode  $2\pi$ , denn es gilt, wie in Abschnitt 3.9.1 bereits bemerkt,

$$\hat{f}(t + 2\pi) = f((t + 2\pi) \frac{L}{2\pi}) = f(t \frac{L}{2\pi} + L) = f(t \frac{L}{2\pi}) = \hat{f}(t).$$

Wenn wir z.B. die FOURIER-Koeffizienten  $a_k$  für die  $2\pi$ -periodische Funktion  $\hat{f}$  betrachten, ergibt sich

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(t) \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t \frac{L}{2\pi}) \cos(kt) dt.$$

Mit der Substitution  $\tau = t \frac{L}{2\pi}$  erhält man

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) \cos(k\tau \frac{2\pi}{L}) \frac{2\pi}{L} d\tau = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) \cos(k\tau \frac{2\pi}{L}) d\tau.$$

Berücksichtigt man, dass man das Integrationsintervall der Länge  $L$  einer  $L$ -periodischen Funktion verschieben kann, und führt man mit  $\omega = \frac{2\pi}{L}$  die so genannte Kreisfrequenz ein, so erhält man

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(\tau) \cos(k\omega\tau) d\tau \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.74)$$

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(\tau) \sin(k\omega\tau) d\tau \quad \text{für } k = 1, 2, \dots \quad (3.75)$$

Es ist also

$$\hat{f}(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)] .$$

Wegen  $f(t) = \hat{f}(\frac{2\pi}{L}t) = \hat{f}(\omega t)$  folgt als FOURIER-Reihe für die  $L$ -periodische Funktion  $f$

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

mit den Koeffizienten (3.74) und (3.75). Die BESSELSche Ungleichung (3.64) und die PARSEVALSche Gleichung (3.65) haben für  $L$ -periodische integrierbare Funktionen die Form

$$\frac{2}{L} \int_0^L [f(t)]^2 dt \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

bzw.

$$\frac{2}{L} \int_0^L [f(t)]^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) .$$

**Beispiel:** Es soll die FOURIER-Reihe der 2-periodischen Funktion

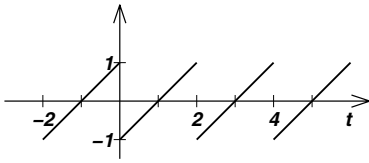
$$f(t) = \begin{cases} t-1 & \text{für } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

bestimmt werden.

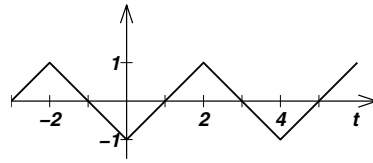
Als Kreisfrequenz erhalten wir  $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$ . Wir betrachten die direkte (ungerade) Fortsetzung (Abb. 3.30), wobei alle Koeffizienten  $a_k$  verschwinden. Dass bei geraden Funktionen alle  $b_k$  gleich Null sind und bei ungeraden Funktionen alle  $a_k$  gleich Null sind, gilt natürlich auch für  $L$ -periodische Funktionen. Für die  $b_k$  erhält man

$$b_k = \frac{2}{2} \int_0^2 (t-1) \sin(kt\pi) dt = \int_0^2 t \sin(kt\pi) dt - \int_0^2 \sin(kt\pi) dt .$$





**Abb. 3.30.** Ungerade fortgesetzte 2-periodische Funktion  $f(t)$



**Abb. 3.31.** Gerade Fortsetzung von  $f(t) = t - 1$  zu einer stetigen Funktion

Die Auswertung der Integrale ergibt

$$b_k = t \frac{-\cos(kt\pi)}{k\pi} \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{-\cos(kt\pi)}{k\pi} dt + \frac{\cos(kt\pi)}{k\pi} \Big|_0^2,$$

und damit  $b_k = -t \frac{\cos(kt\pi)}{k\pi} \Big|_0^2 = -\frac{2}{k\pi}$  für  $k = 1, 2, \dots$ . Damit hat die FOURIER-Reihe der Funktion die Gestalt

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin(k\pi t) = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi t)}{k}. \quad (3.76)$$

### 3.9.5 Gliedweise Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit von FOURIER-Reihen

Die Sätze 3.20 und 3.21 ergeben zusammen mit dem Satz 3.31, dass die FOURIER-Reihe einer stetigen und stückweise glatten periodischen Funktion  $f$  gliedweise integrierbar ist. Ist die Ableitungsreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k$  gleichmäßig konvergent, so kann man die FOURIER-Reihe von  $f$  auch gliedweise differenzieren.

Die Voraussetzungen an  $f$  sind oft nicht erfüllt, speziell die Anforderungen an die Ableitungsreihe. In vielen praktischen Fällen hat man periodische, unstetige, nicht differenzierbare Vorgänge zu analysieren. Deshalb wollen wir die Frage beantworten, ob eine punktweise konvergente FOURIER-Reihe gliedweise integrierbar bzw. differenzierbar ist. Wir betrachten dazu mit

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

eine in einem Intervall  $I$ , das den Punkt  $x = 0$  enthält, konvergente FOURIER-Reihe. Die formale gliedweise Integration der rechten Seite von 0 bis  $x$  ergibt

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} \int_0^x d\xi + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \int_0^x \cos(k\xi) d\xi + b_k \int_0^x \sin(k\xi) d\xi] \\ = \frac{a_0}{2} x + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{a_k}{k} \sin(kx) - \frac{b_k}{k} (\cos(kx) - 1) \right]. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung (1.8) gilt für endliche Summen

$$\sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}}.$$

Da aber  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  und aufgrund der PARSEVALSchen Gleichung (3.65) auch  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$  konvergieren, ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k}$  und analog die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{k}$  konvergent. Aus dem Majorantenkriterium folgt damit die absolute Konvergenz der Reihe (3.77). Da sich die naheliegende Vermutung

$$\int_0^x f(\xi) d\xi = \frac{a_0}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{a_k}{k} \sin(kx) - \frac{b_k}{k} \cos(kx) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$$

nachweisen lässt, gilt der folgende Satz.

**Satz 3.34.** (Integration einer FOURIER-Reihe)

Eine punktweise konvergente FOURIER-Reihe kann man gliedweise integrieren und es gilt

$$F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi - \frac{a_0}{2}x = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{a_k}{k} \sin(kx) - \frac{b_k}{k} \cos(kx) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k},$$

wobei die Reihe für alle  $x \in \mathbb{R}$  gleichmäßig gegen  $F(x)$  konvergiert.

Etwas komplizierter ist die Frage nach dem gliedweisen Differenzieren einer FOURIER-Reihe. Natürlich gilt der allgemeine Satz 3.20. Man sieht aber an einem ganz einfachen instruktiven Beispiel, dass man FOURIER-Reihen im Allgemeinen nicht gliedweise differenzieren darf. Die FOURIER-Reihe (3.76) konvergiert an allen Stetigkeitsstellen, also auch im Intervall  $]0,2[$  punktweise gegen die Funktion  $f(t) = t - 1$ . Die Ableitungsreihe von (3.76) hat die Form

$$-2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kt\pi). \quad (3.78)$$

Während die FOURIER-Reihe für den Stetigkeitspunkt  $t = 1$  exakt den Funktionswert 0 hat, erhält man für die Ableitungsreihe mit

$$-2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\pi) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$$

eine divergente Reihe, obwohl die zu approximierende Funktion an der Stelle  $t = 1$  keinen Sprung hat und überdies auch differenzierbar ist.

Die im Beispiel gewählte direkte Fortsetzung ergab eine unstetige periodische Funktion. Setzt man nun  $f(t) = t - 1$  gerade fort zu einer 4-periodischen Funktion, die stetig auf ganz  $\mathbb{R}$  ist (Abb. 3.31), erhält man eine reine Kosinusreihe mit

den Koeffizienten

$$a_k = \int_0^2 (t-1) \cos\left(kt \frac{\pi}{2}\right) dt = \frac{(-1)^k - 1}{\left(k \frac{\pi}{2}\right)^2},$$

und damit die FOURIER-Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{\left(k \frac{\pi}{2}\right)^2} \cos\left(kt \frac{\pi}{2}\right)$$

mit der Ableitungsreihe

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k \frac{\pi}{2}} \sin\left(kt \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)t \frac{\pi}{2})}{2k-1}.$$

Für  $t = 1$  erhalten wir aus der Ableitungsreihe mit

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) = 1$$

eine alternierende und nach LEIBNIZ konvergente Reihe. Entscheidend für diese positive Wandlung im Vergleich zur unstetigen direkten ungeraden Fortsetzung ist die Tatsache, dass die gerade fortgesetzte Funktion stetig ist.

Im Unterschied zu einer Potenzreihe kann man eine punktweise konvergente FOURIER-Reihe, die die Funktion  $f(x)$  darstellt, im Allgemeinen nicht gliedweise differenzieren.

**Satz 3.35.** (Differentiation einer FOURIER-Reihe)

Eine punktweise konvergente FOURIER-Reihe, die die Funktion  $f(x)$  darstellt, kann man nur dann gliedweise an einer Stelle  $x$  differenzieren, wenn die Ableitungsreihe im Punkt  $x$  konvergent ist. Im Fall der Konvergenz stellt die Ableitungsreihe  $f'(x)$  dar. Hinreichend für die Konvergenz der Ableitungsreihe ist die Stetigkeit und die stückweise stetige Differenzierbarkeit von  $f'$ .

### 3.9.6 Komplexe Schreibweise von FOURIER-Reihen

Obwohl wir bisher nur reell-wertige periodische Funktionen betrachtet haben, erweist sich in vielen Bereichen der Technik die komplexe Schreibweise von FOURIER-Reihen oft als sehr brauchbar. Deshalb wollen wir ausgehend von den reellen FOURIER-Koeffizienten die komplexe Schreibweise herleiten.

Wir wissen, dass jede stückweise glatte,  $2\pi$ -periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  in eine FOURIER-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (3.79)$$

entwickelt werden kann. Die Reihendarstellung wird noch übersichtlicher, wenn wir die aus den EULERSchen Formeln (vgl. Abschnitt 3.6.3) folgenden Beziehungen

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \quad (3.80)$$

berücksichtigen. Damit können wir die FOURIER-Reihe von  $f$  umformen in

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right). \end{aligned}$$

Mit dem Ziel einer recht kompakten Darstellung verabreden wir  $b_0 := 0$  und

$$a_{-n} := a_n \quad \text{und} \quad b_{-n} := -b_n \quad (3.81)$$

für  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Damit und mit der Abkürzung

$$\alpha_n := \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad n \text{ ganzzahlig}, \quad (3.82)$$

erhält  $f$  die Reihendarstellung

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n e^{inx} + \alpha_{-n} e^{-inx}). \quad (3.83)$$

Die  $m$ -te Partialsumme der rechten Seite hat die Form

$$s_m(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^m (\alpha_n e^{inx} + \alpha_{-n} e^{-inx}) = \sum_{n=-m}^m \alpha_n e^{inx}. \quad (3.84)$$

Da sie für  $m \rightarrow \infty$  gegen  $f(x)$  strebt, schreiben wir

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx}. \quad (3.85)$$

Die rechte Seite wird dabei als Grenzwert

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=-m}^m \alpha_n e^{inx} \quad (3.86)$$

im Sinne einer "symmetrischen" Grenzwertbildung verstanden. Üblicherweise wird dagegen unter  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n$  die Summe  $\sum_{n=-\infty}^0 c_n + \sum_0^{\infty} c_n$  verstanden, d.h. es müssen zwei Grenzwerte gebildet werden und unabhängig voneinander existieren. Die Koeffizienten  $\alpha_n$  in (3.85) lassen sich ebenso wie die reellen Koeffizienten  $a_n, b_n$  direkt durch eine Integralformel angeben. Wenn wir annehmen, dass die Reihe (3.85) gleichmäßig konvergiert, erhält man nach Multiplikation der Reihe mit  $e^{-ikx}$ ,  $k$  ganzzahlig, der Integration über  $[-\pi, \pi]$  und der Vertauschung von  $\int_{-\pi}^{\pi}$  und  $\sum$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x} dx. \quad (3.87)$$

Das rechts stehende Integral ist dabei so zu verstehen, dass über Real- und Imaginärteil einzeln integriert wird und danach summiert wird. Man errechnet somit

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n-k)x) + i \sin((n-k)x)) dx \quad (3.88) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-k)x) dx + i \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin((n-k)x) dx}_0 = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } n = k, \\ 0 & \text{falls } n \neq k. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Summe in (3.87) reduziert sich damit nur auf das eine Glied mit  $n = k$ , und es ergibt sich durch Umstellen für beliebiges ganzzahliges  $n$

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \quad (3.89)$$

Die Integralformel (3.89) gilt allgemein, also auch wenn die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (3.85) nicht gegeben ist; denn aus der Beziehung (3.82) kann man die Beziehung (3.89) einfach durch Einsetzen der Integralformeln (3.55) für  $a_n$  und  $b_n$  herleiten, wenn man  $e^{-inx} = \cos(nx) - i \sin(nx)$  beachtet.

Für die Rückberechnung von  $a_n, b_n$  aus  $\alpha_n$  ergibt sich  $a_n = 2 \operatorname{Re} \alpha_n$ ,  $b_n = -2 \operatorname{Im} \alpha_n$  oder

$$a_n = \alpha_n + \alpha_{-n}, \quad b_n = i(\alpha_n - \alpha_{-n}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Dabei ist (für reell-wertige Funktionen  $f$ )  $\alpha_n = \overline{\alpha_{-n}}$ , wie man anhand von (3.81), (3.82) sieht.

Die Konvergenzsätze 3.29 und 3.31 gelten für die komplex geschriebene Reihe (3.85) entsprechend.

In der Reihe (3.85) werden die Funktionen des Systems

$$\{\psi_k(x) = e^{ikx}, k = 0, -1, 1, -2, 2, \dots\} \quad (3.90)$$

linear kombiniert. Mit

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (3.91)$$

wird auf dem Raum der im Allg. komplex-wertigen  $2\pi$ -periodischen Funktionen ein Skalarprodukt definiert, und durch

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (3.92)$$

auch eine Norm induziert, was als Übung nachgewiesen werden sollte. Analog zur Rechnung (3.88) findet man mit

$$\langle \psi_k, \psi_j \rangle = \delta_{kj},$$

dass die Funktionen des Systems (3.90) orthogonal und orthonormal (Norm ist gleich eins) sind. Außerdem ergibt sich unter Nutzung des Skalarproduktes (3.91) mit

$$\alpha_n = \langle f, \psi_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{\psi_n(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{e^{inx}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

die Berechnungsformel für die komplexen FOURIER-Koeffizienten. Damit kann man die Reihe (3.85) auch in der Form

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_n \rangle \psi_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx} \quad (3.93)$$

darstellen. Am Ende stellen wir fest, dass die "komplexe Schreibweise" von FOURIER-Reihen nicht nur für reell-wertige periodische Funktionen sinnvoll ist, sondern auch den Fall von komplex-wertigen periodischen Funktionen abdeckt. Auf die benötigte Integration komplex-wertiger Funktionen gehen wir im Abschnitt 3.9.7 ein.

Mit der Darstellung (3.93) und der Orthonormalität der Funktionen  $\psi_k$  findet man durch Skalarproduktbildung

$$\langle f, f \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \alpha_{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \overline{\alpha_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2$$

bzw.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \overline{\alpha_n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2$$

die PARSEVALsche Gleichung, aus der mit

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \geq \sum_{k=-n}^n \alpha_k \overline{\alpha_k} = \sum_{k=-n}^n |\alpha_k|^2$$

die BESSELSche Ungleichung folgt.

Zur Beschreibung von Schwingungen wird im Ingenieurwesen und in der Physik häufig unmittelbar der Reihenansatz über die komplexe Exponentialfunktion verwendet, also

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega t}. \quad (3.94)$$

$\omega = \frac{2\pi}{L} > 0$  ist dabei die Kreisfrequenz der Schwingung. Mit dieser Reihe arbeitet man oft einfacher als mit Sinus- und Kosinusreihen, da die Exponentialfunktion die Gleichung  $e^{x+y} = e^x e^y$  erfüllt. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass man ausgehend von der Formel (3.89) analog zur Herleitung der Formeln (3.74),(3.75) für  $L$ -periodische Funktionen die Koeffizienten-Berechnungsformel

$$\alpha_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(\tau) e^{-ik\omega\tau} d\tau \quad (3.95)$$

für eine  $L$ -periodische Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  findet.

Will man z.B. die phasenverschobene Schwingung  $g(t) := f(t - t_0)$  durch eine

FOURIER-Reihe beschreiben, dann ergibt sich aus (3.94) sofort

$$g(t) = f(t - t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega(t-t_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{(\alpha_n e^{-in\omega t_0})}_{=: \beta_n} e^{in\omega t}, \quad (3.96)$$

und somit ist die FOURIER-Reihe von  $g$  schnell ermittelt. Der Weg über die reelle FOURIER-Reihe von  $f$  ist dagegen wesentlich umständlicher.

### 3.9.7 FOURIER-Reihen komplex-wertiger Funktionen

In den bisherigen Abschnitten haben wir zwar Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , also reellwertige Funktionen betrachtet, jedoch (abgesehen von der Begründung der Beziehung  $\alpha_n = \overline{\alpha_{-n}}$ ) an keiner Stelle benutzt, dass die Funktionen nur reelle Werte haben dürfen. Deshalb können viele Aussagen und Herleitungen der vorangegangenen Abschnitte auf komplexwertige Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  übertragen werden.

Bei den Integralformeln zur Berechnung der Koeffizienten  $a_n, b_n$  bzw.  $\alpha_n$  nach (3.89) ist lediglich darauf zu achten, dass Real- und Imaginärteil des Integranden einzeln zu integrieren und dann zu summieren sind, also

$$\int f(t) dt = \int \operatorname{Re} f(t) dt + i \int \operatorname{Im} f(t) dt.$$

Im Folgenden werden nun einige Rechenregeln zur vereinfachten Berechnung von FOURIER-Reihen notiert.

#### Satz 3.36. (Rechenregeln)

Im Folgenden sind  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $L$ -periodische, stückweise glatte Funktionen mit den FOURIER-Reihen  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega t}$  und  $g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{in\omega t}$  mit  $\omega = \frac{2\pi}{L}$ , wobei  $L$  als Schwingungsdauer und  $\omega$  als Kreisfrequenz interpretiert werden können. Es gelten die folgenden Regeln:

(i) Linearität

$$af + bg = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a\alpha_n + b\beta_n) e^{in\omega t}, \quad a, b \in \mathbb{C}. \quad (3.97)$$

(ii) Konjugation, Zeitumkehr

$$\overline{f(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\alpha_{-n}} e^{in\omega t}, \quad f(-t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n} e^{in\omega t}. \quad (3.98)$$

(iii) Streckung, Ähnlichkeit

$$f(ct) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inc\omega t}. \quad (3.99)$$

(iv) Verschiebung im Zeitbereich (Phasenverschiebung)

$$f(t+a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{in\omega a} \alpha_n) e^{in\omega t} . \quad (3.100)$$

(v) Verschiebung im Frequenzbereich

$$e^{ik\omega t} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{n-k} e^{in\omega t} , \quad k \in \mathbb{Z} . \quad (3.101)$$

Die Nachweise von (i)-(v) lassen sich durch richtige Anwendung der Potenzgesetze gut durchrechnen und können als Übung durchgeführt werden.

Die Verbindung zu  $2\pi$ -periodischen Funktionen wird durch die Substitution  $t := \frac{x}{\omega}$  hergestellt:  $F(x) := f(\frac{x}{\omega})$  ist dann eine  $2\pi$ -periodische Funktion im bisher betrachteten Sinn. Im folgenden Satz wird die PARSEVALSche Gleichung bei komplexer Schreibweise der FOURIER-Reihen formuliert.

**Satz 3.37.** (PARSEVALSche Gleichung)

Sind  $f$  und  $g$   $L$ -periodische, in  $[0, L]$  stückweise stetige Funktionen mit den FOURIER-Reihen  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\omega t}$  und  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{in\omega t}$ , so gelten

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \overline{\beta_n} = \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \overline{g(t)} dt , \quad (3.102)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \frac{1}{L} \int_0^L |f(t)|^2 dt \quad (\text{PARSEVALSche Gleichung}) . \quad (3.103)$$

Im Fall reell-wertiger Funktionen  $f$  folgt aus (3.103) für die Koeffizienten  $a_n, b_n$  der entsprechenden sin-cos-Reihe die schon behandelte PARSEVALSche Gleichung in der Form

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{2}{L} \int_0^L |f(t)|^2 dt . \quad (3.104)$$

Die Verbindung zwischen der Gleichung (3.103) und der Gleichung (3.104) ergibt sich durch Einsetzen der Beziehung  $\alpha_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$  und das Zusammenfassen der Summanden mit den Indizes  $n$  und  $-n$ .

Anwendung finden die PARSEVALSchen Relationen z.B. bei der Aufstellung von Summenformeln und der Berechnung bestimmter Integrale.

### 3.9.8 Diskrete FOURIER-Analyse

In der Ingenieurpraxis sind die zeitabhängigen periodischen Vorgänge oftmals nicht als Funktionen in Form von analytischen Ausdrücken, sondern in der Regel nur in Form von Tabellen oder diskreten Messreihen bekannt. Deshalb sind die weiter oben hergeleiteten Integralformeln zur Berechnung der FOURIER-Koeffizienten oft nicht direkt anwendbar. Als Beispiel soll weiter unten das periodische



Verhalten der Tangentialkräfte (an der Kurbelwelle) für eine Dampfmaschine diskutiert werden.

### Prinzip der diskreten FOURIER-Analyse

Wir gehen von dem typischen Fall der Vorgabe von äquidistanten Ordinaten, d.h. Werten einer periodischen Funktion in äquidistanten Argumentwerten  $x$ , aus. Ziel ist nun die möglichst einfache Berechnung von FOURIER-Koeffizienten auf der Basis der vorgegebenen diskreten Werte einer Funktion  $y = f(x)$ . Das mit diesen FOURIER-Koeffizienten gebildete trigonometrische Polynom sollte dann den durch die diskreten Funktionswerte näherungsweise gegebenen periodischen Funktionsverlauf approximieren. Sei beispielsweise das Intervall  $[0, 2\pi]$  in  $k$  gleiche Teile geteilt und es seien die Ordinaten bzw. Funktionswerte

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k = y_0 \quad (3.105)$$

in den Teilpunkten  $x_j = j \frac{2\pi}{k}$

$$0, \frac{2\pi}{k}, 2\frac{2\pi}{k}, \dots, (k-1)\frac{2\pi}{k}, 2\pi \quad (3.106)$$

bekannt. Dabei ist es egal, ob nur die diskreten Werte  $y_j$  gegeben sind, oder ob die  $y_j$  durch  $y_j = f(x_j)$  ausgehend von einer Funktion berechnet wurden. Mittels Anwendung der Trapezformel (Abschnitt 2.17.1) auf die Integraldarstellung (3.55) ergibt sich für den FOURIER-Koeffizienten  $a_0$  näherungsweise

$$a_0 \approx a_0^* = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{k} \left[ \frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{k-1} + \frac{1}{2} y_k \right].$$

Aufgrund der Periodizität ist  $y_k = y_0$  und damit

$$\frac{k}{2} a_0^* = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{k-1}. \quad (3.107)$$

Analog ergibt sich mit Hilfe der Trapezregel für die übrigen Integrale (3.55)

$$a_m^* = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{k} \left[ y_0 + y_1 \cos\left(m \frac{2\pi}{k}\right) + y_2 \cos\left(m \frac{2 \cdot 2\pi}{k}\right) + \dots + y_{k-1} \cos\left(m \frac{(k-1)2\pi}{k}\right) \right]$$

oder

$$a'_m = \frac{k}{2} a_m^* = \sum_{j=0}^{k-1} y_j \cos\left(m \frac{j2\pi}{k}\right) \quad (3.108)$$

sowie

$$b'_m = \frac{k}{2} b_m^* = \sum_{j=1}^{k-1} y_j \sin\left(m \frac{j2\pi}{k}\right). \quad (3.109)$$

Die entscheidenden mathematischen Grundlagen für die diskrete FOURIER-Analyse liefern die folgenden zwei Sätze.

**Satz 3.38.** (interpolierendes FOURIER-Polynom)

Es seien  $k = 2n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , Werte (3.105) einer  $2\pi$ -periodischen Funktion an den äquidistant verteilten Stützstellen  $x_0, x_1, \dots, x_k = x_0 + 2\pi$  gegeben. Das spezielle FOURIER-Polynom vom Grad  $n$

$$g_n^*(x) := \frac{a_0^*}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \{a_j^* \cos(jx) + b_j^* \sin(jx)\} + \frac{a_n^*}{2} \cos(nx) \quad (3.110)$$

mit den Koeffizienten  $a_j^*, b_j^*$  aus (3.108) bzw. (3.109) ist das eindeutig bestimmte interpolierende FOURIER-Polynom zu den Stützstellen (3.106), d.h. es gilt  $g_n^*(x_j) = y_j$ ,  $j = 0, \dots, k$ .

Der Satz 3.38 besagt damit, dass man mit den  $k = 2n$  Koeffizienten  $a_j^*, j = 0, \dots, n$ , und  $b_j^*, j = 1, \dots, n$ , die vorgegebenen Werte  $y_j, j = 0, \dots, 2n$ , einer periodischen Funktion **exakt** durch das spezielle FOURIER-Polynom (3.110) wiedergeben kann. Im Normalfall ist die Zahl  $k$  sehr groß und man möchte die Funktionswerte durch ein FOURIER-Polynom mit einem Grad  $m < n$  approximieren. Der folgende Satz sagt etwas über die Qualität der Approximation der  $j = 2n$  Funktionswerte  $y_j$  durch ein FOURIER-Polynom vom Grad  $m < n$  aus.

**Satz 3.39.** (beste Approximation durch ein FOURIER-Polynom)

Es seien  $k = 2n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , Werte (3.105) einer  $2\pi$ -periodischen Funktion an den äquidistant verteilten Stützstellen  $x_0, x_1, \dots, x_k = x_0 + 2\pi$  gegeben.

Das FOURIER-Polynom

$$g_m^*(x) := \frac{a_0^*}{2} + \sum_{j=1}^m \{a_j^* \cos(jx) + b_j^* \sin(jx)\} \quad (3.111)$$

vom Grad  $m < n$  mit den Koeffizienten (3.108) bzw. (3.109) approximiert die durch  $y_j = f(x_j)$ ,  $j = 0, \dots, k$  gegebene Funktion im diskreten quadratischen Mittel der  $k$  Stützstellen  $x_j$  (3.106) derart, dass die Summe der Quadrate der Abweichungen

$$F = \sum_{j=1}^k [g_m^*(x_j) - y_j]^2 \quad (3.112)$$

minimal ist, wobei zum Vergleich sämtliche trigonometrischen Polynome  $m$ -ten Grades herangezogen werden.

Die Beweise der Sätze 3.38 und 3.39 basieren auf diskreten Orthogonalitätsrelationen für die trigonometrischen Funktionen, die vergleichbar mit den Relationen (3.52) sind. Im Folgenden soll eine möglichst effiziente Berechnung der FOURIER-Koeffizienten (3.108) bzw. (3.109) anhand eines konkreten Beispiels be-

handelt werden. Wir setzen zunächst  $k = 12$  und gehen von den zwölf Ordinaten

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{11}$$

aus, die den 12 äquidistanten Argumentwerten

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6},$$

d.h. den Winkeln

$$0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 330^\circ$$

entsprechen.

Durch die Eigenschaften von Sinus- und Kosinusfunktion (vgl. Abschnitt 3.6.4) reduzieren sich alle Faktoren der Ordinaten in den Formeln (3.107) - (3.109) auf

$$+1, \quad \pm \sin 30^\circ = \pm 0,5, \quad \pm \sin 60^\circ = \pm 0,866 (= \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}).$$

Man prüft nämlich leicht nach, dass

$$\begin{aligned} 6a_0^* &= y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11}, \\ 6a_1^* &= (y_2 + y_{10} - y_4 - y_3) \sin 30^\circ \\ &\quad + (y_1 + y_{11} - y_5 - y_7) \sin 60^\circ + (y_0 - y_6), \\ 6a_2^* &= (y_1 + y_5 + y_7 + y_{11} - y_2 - y_4 - y_3 - y_{10}) \sin 30^\circ \\ &\quad + (y_0 + y_6 - y_2 - y_9), \\ 6a_3^* &= y_0 + y_4 + y_8 - y_2 - y_6 - y_{10}, \\ 6b_1^* &= (y_1 + y_5 - y_7 - y_{11}) \sin 30^\circ \\ &\quad + (y_2 + y_4 - y_8 - y_{10}) \sin 60^\circ + (y_3 - y_9), \\ 6b_2^* &= (y_1 + y_2 + y_7 + y_8 - y_4 - y_5 - y_{10} - y_{11}) \sin 60^\circ, \\ 6b_3^* &= y_1 + y_5 + y_9 - y_3 - y_7 - y_{11}, \text{ usw. für } a_4, b_4, \dots \end{aligned} \tag{3.113}$$

ist. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} 6a_1^* &= y_0 + y_1 \cos 30^\circ + y_2 \cos 60^\circ + y_3 \cos 90^\circ + y_4 \cos 120^\circ \\ &\quad + y_5 \cos 150^\circ + y_6 \cos 180^\circ + y_7 \cos 210^\circ + y_8 \cos 240^\circ \\ &\quad + y_9 \cos 270^\circ + y_{10} \cos 300^\circ + y_{11} \cos 330^\circ \\ &= y_0 + y_1 \sin 60^\circ + y_2 \sin 30^\circ - y_4 \sin 30^\circ - y_5 \sin 60^\circ - y_6 \\ &\quad - y_7 \sin 60^\circ - y_8 \sin 30^\circ + y_{10} \sin 30^\circ + y_{11} \sin 60^\circ, \end{aligned}$$

was dem oben angegebenen Ausdruck entspricht. Um die Berechnungen (hauptsächlich die "teuren" Multiplikationen) auf ein Minimum zu reduzieren, führt man sie nach einem bestimmten Schema aus, das von dem deutschen Mathematiker RUNGE stammt. Zuerst schreibt man die Ordinaten in der nachstehend angegebenen Anordnung, darunter die Summe und die Differenz je zweier übereinander stehender Ordinaten:

	Ordinaten						
	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$
		$y_{11}$	$y_{10}$	$y_9$	$y_8$	$y_7$	
Summen	$u_0$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$
Differenzen		$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	

Danach verfhrt man mit den erhaltenen Summen und Differenzen ähnlich:

	Summen					Differenzen		
	$u_0$	$u_1$	$u_2$	$u_3$		$v_1$	$v_2$	$v_3$
	$u_6$	$u_5$	$u_4$			$v_5$	$v_4$	
Summen	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	Summen	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
Differenzen	$d_0$	$d_1$	$d_2$		Differenzen	$\delta_1$	$\delta_2$	

Mit Hilfe dieser Gren  $s, d, \sigma, \delta$  knnen wir die gesuchten Koeffizienten folgendermaen ausdrcken:

$$\begin{aligned} 6a_0^* &= s_0 + s_1 + s_2 + s_3, \\ 6a_1^* &= d_0 + 0,866d_1 + 0,5d_2, \\ 6a_2^* &= (s_0 - s_3) + 0,5(s_1 - s_2), \\ 6a_3^* &= d_0 - d_2, \\ 6b_1^* &= 0,5\sigma_1 + 0,866\sigma_2 + \sigma_3, \\ 6b_2^* &= 0,866(\delta_1 + \delta_2), \\ 6b_3^* &= \sigma_1 - \sigma_3, \text{ usw. fr } a_4, b_4, \dots \end{aligned}$$

(3.114)

Man prft leicht nach, dass die Formeln genau die Werte (3.113) liefern.

**Beispiel:** Harmonische Analyse der Tangentialkräfte einer Dampfmaschine  
Die nachfolgende Rechnung hat hauptsächlich Demonstrationscharakter, zumal man in der Regel wesentlich mehr als 12 Messwerte analysieren muss, was per Hand nicht mehr in berschaubarer Zeit beherrschbar ist.  
Im Zusammenhang mit dem Problem der kleinen Schwingungen der Welle ist es interessant, die harmonischen Komponenten der Tangentialkraft  $T$  als Funktion des Drehwinkels  $\varphi$  der Kurbelwelle zu bestimmen. In Abb. 3.32 ist das Diagramm dargestellt, dem 12 äquidistante Ordinaten entnommen werden. Damit wird nach dem obigen Schema die FOURIER-Analyse durchgefhrt.

	Ordinaten von $T$						
$T_0 \dots T_6$	-7200	-300	7000	4300	0	-5200	-7400
$T_{11} \dots T_7$		250	4500	7600	3850	-2250	
Summen	-7200	-50	11500	11900	3800	-7450	-7400
Differenzen		-550	2500	-3300	-3850	-2950	

	Summen			
$u$	-7200	-50	11500	11900
$u$	-7400	-7450	3850	
$s$	-14600	-7500	15350	11900
$d$	200	7400	7650	

	Differenzen		
$v$	-550	2500	-3300
$v$	-2950	-3850	
$\sigma$	-3500	-1350	-3300
$\delta$	2400	6350	

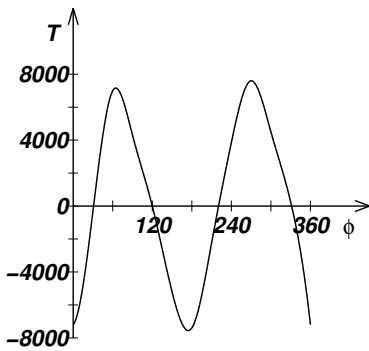


Abb. 3.32. Diagramm der Tangentialkräfte

Nach den Formeln (3.114) ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
 6a_0^* &= -14600 - 7500 + 15350 + 11900 = 5150, & a_0^* &= 858, \\
 6a_1^* &= 200 + 7400 \cdot 0,866 + 7650 \cdot 0,5 = 10433, & a_1^* &= 1739, \\
 6a_2^* &= (-14600 - 11900) + (-7500 - 15350) \cdot 0,5 = -37925, & a_2^* &= -6321, \\
 6a_3^* &= 200 - 7650 = -7450, & a_3^* &= -1242, \\
 6b_1^* &= -3500 \cdot 0,5 - 1350 \cdot 0,866 - 3300 = -6219, & b_1^* &= -1037, \\
 6b_2^* &= (2400 + 6350) \cdot 0,866 = 7578, & b_2^* &= 1263, \\
 6b_3^* &= -3500 + 3300 = -200, & b_3^* &= -33,
 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
 T(\varphi) = & 429 + 1739 \cos \varphi - 1037 \sin \varphi - 6321 \cos(2\varphi) + 1263 \sin(2\varphi) \\
 & - 1242 \cos(3\varphi) - 33 \sin(3\varphi) + \dots
 \end{aligned} \quad (3.115)$$

Wenn man Kosinus und Sinus des gleichen Winkels gemäß

$$\begin{aligned}
 A \sin \varphi + B \cos \varphi &= \sqrt{A^2 + B^2} \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \varphi + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \varphi \right) \\
 &= \sqrt{A^2 + B^2} (\sin \varphi_0 \cos \varphi + \cos \varphi_0 \sin \varphi) \\
 &= \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\varphi + \varphi_0)
 \end{aligned}$$

zusammenfasst ( $\varphi_0 = \arctan \frac{A}{B}$  bzw.  $\varphi_0 = \arcsin \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ), erhält man

$$\begin{aligned}
 T = & 429 + 2020 \sin(\varphi + 121^\circ) + 6440 \sin(2\varphi + 281^\circ) \\
 & + 1240 \sin(3\varphi + 268^\circ) + \dots
 \end{aligned}$$

Aus der Reihendarstellung sieht man, dass das zweite Glied oder die "zweite Harmonische" den größten Einfluss hat.

Einen Überblick über die Genauigkeit der beschriebenen diskreten FOURIER-Analyse kann man sich durch die diskrete FOURIER-Analyse einer analytisch gegebenen Funktion verschaffen. Wenn man z.B. die Funktion

$$y = f(x) = \frac{1}{2\pi^2}(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x), \quad x \in [0, 2\pi], \quad f(x + 2\pi) = f(x),$$

mit dem in Abb. 3.33 dargestellten Graphen betrachtet und an den 12 äquidistanten  $x$ -Positionen des Intervalls  $[0, 2\pi]$  die Funktionswerte berechnet,

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
y	0	0,4	0,582	0,589	0,465	0,255	0	-0,255	-0,465	-0,589	-0,582	-0,4	0

erhält man nach dem RUNGESchen Schema

$$b_1^* = 0,608, \quad b_2^* = 0,076, \quad b_3^* = 0,022.$$

Alle  $a_n^*$  verschwinden, da auch alle  $u_k$  im Schema gleich Null sind. Mit der Formel für die FOURIER-Koeffizienten  $b_n$  erhält man nach dreimaliger partieller Integration

$$b_n = \frac{1}{2\pi^3} \int_0^{2\pi} (x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x) \sin(nx) dx = \frac{6}{n^3\pi^2}.$$

Danach ergibt sich für die  $b_n$

$$b_1 = \frac{6}{\pi^2} = 0,6079, \quad b_2 = \frac{6}{4\pi^2} = 0,0760, \quad b_3 = \frac{6}{9\pi^2} = 0,0225.$$

Sie stimmen also mit den Ergebnissen der diskreten FOURIER-Analyse recht gut überein.

Die eben skizzierte diskrete FOURIER-Analyse ist nach dem Vorbild des diskutierten Schemas von RUNGE für große Ordinatenzahlen in Computerprogrammen realisiert, wobei diese Methodik besonders schnell und effektiv wird, wenn die Zahl der diskreten Ordinaten pro Periode gleich einer Zweierpotenz  $k = 2^n$  oder zumindest gerade ist. In diesen Fällen spricht man auch von der **schnellen FOURIER-Analyse**, die hauptsächlich unter dem Kürzel **FFT** (fast fourier transform) bekannt ist. Die Aufgabe besteht in der effizienten Bestimmung der Koeffizienten  $a'_j = \frac{k}{2} a_j^*, j = 0, \dots, n$ , und  $b'_j = \frac{k}{2} b_j^*, j = 1, \dots, n - 1$ . Die Grundlage

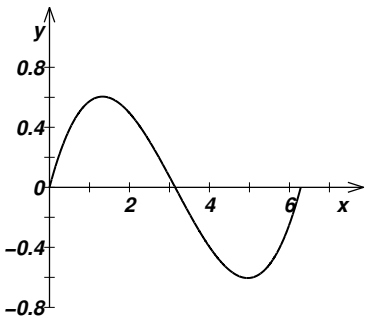


Abb. 3.33.  $f(x) = \frac{1}{2\pi^2}(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)$  für  $0 \leq x \leq 2\pi$

für die FFT bildet die komplexe diskrete FOURIER-Analyse. Und zwar bildet man ausgehend von den reellen Funktionswerten  $y_j = f(x_j)$  die  $n = \frac{k}{2}$  komplexen Zahlenwerte

$$z_j := y_{2j} + iy_{2j+1} = f(x_{2j}) + if(x_{2j+1}) \quad (j = 0, 1, \dots, n-1). \quad (3.116)$$

Für diese komplexen Daten wird die diskrete komplexe FOURIER-Analyse der Ordnung  $n$  wie folgt definiert.

**Definition 3.20.** (diskrete komplexe FOURIER-Transformation)

Durch

$$c_p := \sum_{j=0}^{n-1} z_j e^{-ijp \frac{2\pi}{n}} = \sum_{j=0}^{n-1} z_j w_n^{jp} \quad (p = 0, 1, \dots, n-1) \quad (3.117)$$

werden die **komplexen FOURIER-Transformierten** (komplexe FOURIER-Koeffizienten) erklärt, wobei  $w_n := e^{-i \frac{2\pi}{n}}$  gesetzt wurde.

Für die Rekonstruktion der Werte  $z_j$  gilt die Beziehung

$$z_p = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} c_j e^{ijp \frac{2\pi}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} c_j w_n^{-jp} \quad (p = 0, 1, \dots, n-1). \quad (3.118)$$

Die Beziehung (3.118) weist man ausgehend von (3.117) nach, indem man benutzt, dass die Summe der  $n$ -ten Einheitswurzeln  $w_n^{-j} = e^{ij \frac{2\pi}{n}}$  gleich 0 ist. Für den Fall  $n = 4$  hat die Beziehung (3.117) die Form

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & 1 & w^2 \\ 1 & w^3 & w^2 & w^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} =: \mathbf{c} = \mathbf{W}_4 \mathbf{z}$$

mit  $w = w_4$ . Dabei wurde berücksichtigt, dass  $w^{j+4} = w^j$  für alle  $j \in \mathbb{Z}$  gilt. Zeilenvertauschungen und geeignete Faktorisierungen der Koeffizientenmatrix der Art

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_2 \\ c_1 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^2 & 1 & w^2 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^3 & w^2 & w^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & w^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & w^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ w^2 & 0 & w^2 & 0 \\ 0 & w^1 & 0 & w^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

(hier für  $n = 4$ ) ermöglichen letztendlich im allgemeinen Fall eine drastische Reduzierung der Zahl der "teuren" Multiplikationen bei der Berechnung der FOURIER-Transformierten  $c_j$  ausgehend von den  $z_j$ -Werten und erklären die Begriffswahl FFT. Mit der FFT ist es möglich die Zahl der komplexen Multiplikationen von der Ordnung  $O(n^2)$  auf  $O(n \log_2 n)$  zu reduzieren. Für  $n = 10^6$  komplexe Funktionswerte ergibt sich z.B.  $n^2 = 10^{12}$  bzw.  $n \log_2 n \equiv 2 \cdot 10^7$ . Mitte der 1960er Jahre entstand so ein Unterschied von Rechenzeiten von mehreren Tagen für die "normale" diskrete FOURIER-Transformation zu einer Rechenzeit im Minuten-Bereich mit der FFT.

Mit Blick auf die oben definierte reelle diskrete FOURIER-Transformation wird die Def. 3.20 gerechtfertigt durch den folgenden

**Satz 3.40.** (Beziehung zwischen komplexen und reellen FOURIER-Koeffizienten)

Für die reellen FOURIER-Koeffizienten  $a'_j$  und  $b'_j$  und die komplexen Koeffizienten  $c_j$  gelten die Beziehungen

$$a'_j - ib'_j = \frac{1}{2}(c_j + \bar{c}_{n-j}) + \frac{1}{2i}(c_j - \bar{c}_{n-j})e^{-i\frac{j\pi}{n}} \quad (3.119)$$

$$a'_{n-j} - ib'_{n-j} = \frac{1}{2}(\bar{c}_j + c_{n-j}) + \frac{1}{2i}(\bar{c}_j - c_{n-j})e^{i\frac{j\pi}{n}}, \quad (3.120)$$

für  $j = 0, 1, \dots, n$ , falls  $b'_0 = b'_n = 0$  und  $c_n = c_0$  gesetzt wird.

Mit diesem Satz ist es möglich, aus dem Ergebnis der komplexen FOURIER-Transformation das (spezielle) reelle FOURIER-Polynom (3.110) mit den Koeffizienten  $a_j^* = \frac{2}{k}a'_j$  ( $j = 0, \dots, n$ ) und  $b_j^* = \frac{2}{k}b'_j$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ) zu bestimmen, was ja ursprünglich beabsichtigt war. Wir wollen zur Übung die diskrete komplexe FOURIER-Transformation mit dem obigen Beispiel der harmonischen Analyse der Tangentialkräfte einer Dampfmaschine mit den gegebenen 12 reellen Funktionswerte  $y_0, \dots, y_{11}$  durchführen. Mit  $z_j = y_{2j} + iy_{2j+1}$  ( $j = 0, \dots, 5$ ) und  $w = w_6 = e^{-i\frac{2\pi}{6}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  erhalten wir

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7200 - i300 \\ 7000 + i4300 \\ -i5200 \\ -7400 - i2250 \\ 3850 + i7600 \\ 4500 + i250 \end{pmatrix}$$

und

$$W_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 & w^8 & w^{10} \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 & w^{12} & w^{15} \\ 1 & w^4 & w^8 & w^{12} & w^{16} & w^{20} \\ 1 & w^5 & w^{10} & w^{15} & w^{20} & w^{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & w^3 & w^4 & w^5 \\ 1 & w^2 & w^4 & 1 & w^2 & w^4 \\ 1 & w^3 & 1 & w^3 & 1 & w^3 \\ 1 & w^4 & w^2 & 1 & w^4 & w^2 \\ 1 & w^5 & w^4 & w^3 & w^2 & w^1 \end{pmatrix},$$

wobei  $w^{j+6} = w^j$  berücksichtigt wurde. Für  $\mathbf{c} = W_6 \mathbf{z}$  erhält man nach der Matrixmultiplikation

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 750 + 4400i \\ -3552,7 + 4194,1i \\ -7682,5 - 11524i \\ -7450 - 200i \\ -36868 - 525,7i \\ 11603 + 1855,9i \end{pmatrix}.$$



Setzt man nun noch  $c_6 = c_0$ , dann ergibt die Formel (3.119) für die reellen Koeffizienten  $a'_j$  und  $b'_j$

$$\begin{pmatrix} a'_0 - i b'_0 \\ a'_1 - i b'_1 \\ a'_2 - i b'_2 \\ a'_3 - i b'_3 \\ a'_4 - i b'_4 \\ a'_5 - i b'_5 \\ a'_6 - i b'_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5148 \\ 10434 + 6222i \\ -37926 - 7578i \\ -7452 + 198i \\ -6624 + 3420i \\ -2382 + 3884i \\ -3648 \end{pmatrix}$$

und man kann daraus die Koeffizienten ablesen. Sowohl die Matrixmultiplikation  $W_6 \mathbf{z}$  als auch die Berechnung der rechten Seiten der Formel (3.119) sind zweifellos per Hand etwas aufwendig, und deshalb haben wir hier auch einen Rechner bzw. ein Computerprogramm (octave) zum Rechnen mit komplexen Zahlen zu Hilfe genommen. Nach der Multiplikation mit  $\frac{2}{k} = \frac{1}{6}$  erhält man

$$a_0^* = 858, a_1^* = 1739, a_2^* = -6321, a_3^* = -1242, a_4^* = -1104, a_5^* = -397, a_6^* = -608$$

und

$$b_1^* = -1037, b_2^* = 1263, b_3^* = -33, b_4^* = -570, b_5^* = -649,$$

so dass sich das spezielle FOURIER-Polynom

$$\begin{aligned} g_6^*(\varphi) = & 429 + 1739 \cos \varphi - 1037 \sin \varphi - 6321 \cos(2\varphi) + 1263 \sin(2\varphi) \\ & - 1242 \cos(3\varphi) - 33 \sin(3\varphi) \\ & - 1104 \cos(4\varphi) - 570 \sin(4\varphi) - 397 \cos(5\varphi) - 649 \sin(5\varphi) - 304 \cos(6\varphi) \end{aligned}$$

ergibt.  $T(\varphi)$  (s. Formel (3.115)) stimmt mit  $g_6^*(\varphi)$  überein, und damit wurde der Bezug der diskreten komplexen FOURIER-Transformation zur diskreten reellen bestätigt.

### 3.10 Aufgaben

- 1) Berechnen Sie den Wert der Reihe  $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k$ .
- 2) Untersuchen Sie die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$  auf ihr Konvergenzverhalten.
- 3) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} (x-5)^k$  und geben Sie das Konvergenzintervall an. Untersuchen Sie die Konvergenzeigenschaften an den Randpunkten des Konvergenzintervalls.
- 4) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-i}{2-i}\right)^k (z-i)^k$  und geben Sie den Konvergenzkreis an.
- 5) Von einer Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-2)^k$ ,  $a_k \in \mathbb{R}$ , weiß man, dass sie für  $x=5$  absolut konvergent ist, für  $x=-2$  konvergent und für  $x=-4$  divergent ist. Was kann man über den Konvergenzradius aussagen? In welchen Intervallen liegt mit Sicherheit Konvergenz bzw. Divergenz vor?

- 6) Zeigen Sie unter Nutzung der arctan-Reihe die Gültigkeit der Beziehung

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$$

und geben Sie eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$  an, so dass der Fehler bei der Berechnung von  $\frac{\pi}{4}$  durch  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{2k+1}$  kleiner als  $10^{-5}$  wird.

- 7) Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{4}{\pi}(\pi x - x^2)$ ,  $x \in [0, \pi]$ . Setzen Sie die Funktion ungerade zu einer  $2\pi$ -periodischen Funktion fort und berechnen Sie die FOURIER-Reihe der Funktion.

- 8) Berechnen Sie die FOURIER-Reihe der ungeraden  $2\pi$ -periodischen Funktion

$$f(x) = \begin{cases} y = x & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ y = \pi - x & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}.$$

Nutzen Sie das Ergebnis und die PARSEVALSche Gleichung zur Berechnung des Wertes der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}.$$

- 9) (a) Skizzieren Sie den Graphen der  $\pi$ -periodischen Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die durch  $f(x) = (x - \frac{\pi}{2})^2$  für  $0 \leq x \leq \pi$  definiert ist.

(b) Berechnen Sie die zugehörige reelle FOURIER-Reihe der Funktion.

(c) Untersuchen Sie diese FOURIER-Reihe auf Konvergenz im Intervall  $[0, \pi]$  und folgern Sie, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

gilt.

- 10) (a) Bestimmen Sie das komplexe FOURIER-Polynom  $n$ -ter Ordnung der Funktion  $f$ , die definiert ist durch  $f(x) = e^{2x}$  für  $0 \leq x \leq 1$  mit  $f(x) = f(x+2)$  und  $f(x) = f(-x)$ .

(b) Wie lautet die zugehörige Darstellung des FOURIER-Polynoms  $n$ -ter Ordnung im Reellen?

- 11) Approximieren Sie  $\sin x$  im Intervall  $]0, \pi[$  durch ein FOURIER-Polynom  $n$ -ter Ordnung, das nur Cosinus-Terme enthält.

- 12) Entwickeln Sie die Funktion  $f(x) = \sin^2 x$  in eine trigonometrische Reihe und bestimmen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx$$

mit Hilfe der PARSEVALSchen Gleichung.

- 13) (a) Definieren Sie eine ungerade Fortsetzung der auf dem Intervall  $[0, 1]$  definierten Funktion  $f(x) = x(1-x)$  zu einer 2-periodischen Funktion,

(b) Skizzieren Sie den Graphen der 2-periodischen Funktion.

(c) Bestimmen Sie eine FOURIER-Reihe zur Darstellung der auf  $[0, 1]$  definierten Funktion  $f(x) = x(1-x)$ .

Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und  
Ingenieure

Bärwolff, G.

2017, XIII, 999 S. 354 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-55021-2