

1 Vollständige Induktion

Seien $\mathbb{N}$ eine Menge und 1 ein Element von $\mathbb{N}$. Dann fordern die Peano-Axiome:

(P1) $1 \in \mathbb{N}$

(P2) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N}$

„Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es einen Nachfolger $n + 1$.“

(P3) $n, m \in \mathbb{N}, n \neq m \Rightarrow N(n) \neq N(m)$

„Verschiedene Elemente aus $\mathbb{N}$ haben verschiedene Nachfolger.“

(P4) $1 \notin N(\mathbb{N})$

„Kein Element aus $\mathbb{N}$ hat 1 als Nachfolger.“

(P5) Induktionsaxiom: Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:

(a) $1 \in M$

(b) $n \in M \Rightarrow N(n) \in M$

Dann gilt $M = \mathbb{N}$.

Bemerkungen:

- Die Peano-Axiome sind kategorisch, d. h., es gibt nur *eine* Realisierung der Peano-Axiome. Deshalb können wir von *den* natürlichen Zahlen sprechen. Es hat sich eingebürgert, den Nachfolger von 1 mit 2, den Nachfolger von 2 mit 3 usw. zu bezeichnen. Die natürlichen Zahlen sind dann die Menge

$$\{1, 2, 3, \dots\} =: \mathbb{N}.$$

- Unter Mathematikern besteht immer noch ein „Streit“ darüber, ob die Null zu den natürlichen Zahlen gehört. Man beachte daher, dass in der Literatur oft auch

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

gilt! Wenn wir hier die natürlichen Zahlen einschließlich der Null benötigen, so werden wir das Symbol

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

verwenden. Die Peano-Axiome sind selbstverständlich auch für $\mathbb{N}_0$ gültig.

- Die in (P3) verwendete injektive Abbildung $N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ wird oft auch als *Nachfolgerfunktion* bezeichnet.

- Die Axiome (P1) bis (P4) gewährleisten, dass man mit Hilfe der Nachfolgeabbildung N stets zu neuen natürlichen Zahlen kommt.
- Das Axiom (P5) stellt sicher, dass mittels der Nachfolgeabbildung auch alle natürlichen Zahlen erreicht werden. Das Axiom (P5) ist die Grundlage für das

Beweisprinzip der vollständigen Induktion: Sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$ und $A(n)$ sei für $n \geq n_0$ eine Aussage. Um die Gültigkeit von $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ zu beweisen, ist Folgendes zu zeigen:

(IA) Induktionsanfang: $A(n_0)$ ist richtig.

(IV) Induktionsvoraussetzung: Für ein beliebiges $n \geq n_0$ ist $A(n)$ richtig.

(IS) Induktionsschritt: Falls $A(n)$ richtig ist, so ist auch $A(n+1)$ richtig [d. h., aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$].

Man beachte dabei, dass nicht notwendig $n_0 = 0$ oder $n_0 = 1$ gelten muss, sondern $n_0 \in \mathbb{N}_0$ ist je nach Aufgabenstellung verschieden! Außerdem ist zu beachten, dass oft auch noch zusätzliche Schritte dazugenommen werden, wie zum Beispiel:

(IB) Induktionsbehauptung: Zu zeigen: $A(n+1)$ ist richtig.

Nach vielen Induktionsbeweisen sollte man in der Lage sein, die Induktionsbehauptung und damit das Ziel des Induktionsschrittes auch „mit dem Auge zu sehen“. Ein zusätzliches Hinschreiben kann damit eingespart werden, da es sich bei der Induktionsbehauptung mehr oder weniger „nur“ um das bloße Ersetzen von n durch $n+1$ in $A(n)$ handelt. Deshalb kann man die Induktionsbehauptung auch wegzulassen, was abschließend an einem Beispiel demonstriert werden soll.

Beispiel: Es ist zu zeigen, dass

$$A(n) := \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Der Beweis sieht (minimal) wie folgt aus:

(IA) Für $n_0 = 1$ gilt $A(1) = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, d. h., für n_0 ist die Behauptung richtig.

(IV) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gelte $A(n)$.

(IS) Man berechnet

$$\begin{aligned} A(n+1) &= \sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + n+1 = A(n) + n+1 \\ &\stackrel{(IV)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Übungsbuch zur Analysis

Aufgaben und ausführliche Lösungen (nicht nur) für
Studierende der Informatik

Kunath, J.

2017, IX, 451 S., Softcover

ISBN: 978-3-662-55398-5