

1.1 Berechnung von Funktionen und Nullstellen

Aufgabe 1

► Vollständige Induktion

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^4)\cdots(1+z^{2^n}) = \frac{1-z^{2^{n+1}}}{1-z}, \\ n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1 \neq z \in \mathbb{C}).$$

Lösung

Vollständige Induktion:

I.A. (*Induktionsanfang*): Für $n = 0$ ergibt die

- linke Seite der Gleichung $1+z$,
- und die rechte Seite auch: $\frac{1-z^2}{1-z} = \frac{(1+z)(1-z)}{1-z} = 1+z$.

I.V. (*Induktionsvoraussetzung*): Sei für $n \in \mathbb{N}_0$

$$(1+z)(1+z^2)\cdots(1+z^{2^n}) = \frac{1-z^{2^{n+1}}}{1-z}. \quad (*)$$

I.S. (Induktionsschluss): $n \rightarrow n + 1$:

$$\begin{aligned}
 (1+z)(1+z^2)\cdots(1+z^{2^n})(1+z^{2^{n+1}}) &\stackrel{(*)}{=} \frac{1-z^{2^{n+1}}}{1-z} (1+z^{2^{n+1}}) \\
 &= \frac{(1-z^{2^{n+1}})(1+z^{2^{n+1}})}{1-z} \\
 &= \frac{1-z^{2 \cdot 2^{n+1}}}{1-z} = \frac{1-z^{2^{n+2}}}{1-z}.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

► Zahlenfolgen

Untersuchen Sie die angegebenen Zahlenfolgen auf Beschränktheit, Konvergenz und Divergenz, und geben Sie (bei Konvergenz) den Limes an:

- a) $a_n = \frac{(100n+1)^2}{25(n^2+n+1)}, n \in \mathbb{N}$;
 b) $b_n = \left(\frac{3+4i}{5}\right)^n, n \in \mathbb{N}. \quad (i = \text{imaginäre Einheit})$

Lösung

- a) Es gilt (binomische Formel)

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{(100n+1)^2}{25(n^2+n+1)} = \frac{10000n^2 + 200n + 1}{25n^2 + 25n + 25} \\
 &= \frac{10000 + \frac{200}{n} + \frac{1}{n^2}}{25 + \frac{25}{n} + \frac{25}{n^2}} \rightarrow 400 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Als konvergente Folge ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ insbesondere beschränkt.

- b) Hier ist

$$b_{n+1} - b_n = \left(\frac{3+4i}{5}\right)^{n+1} - \left(\frac{3+4i}{5}\right)^n = \left(\frac{3+4i}{5}\right)^n \left(-\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i\right).$$

Da $\left|\frac{3+4i}{5}\right| = 1$, ist $|b_n| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter ist

$$\left|-\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i\right| = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

so dass $|b_{n+1} - b_n| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ keine Nullfolge ist. Also kann $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergieren. Die Folge ist somit divergent und beschränkt.

Aufgabe 3

► Zahlenfolgen

Untersuchen Sie die angegebenen Zahlenfolgen auf Beschränktheit, Konvergenz und Divergenz, und geben Sie (bei Konvergenz) den Limes an:

a) $b_0 = 0, b_n = \frac{b_{n-1}}{2} + 2, n \in \mathbb{N};$

b) $c_n = i^n + (-1)^n, n \in \mathbb{N}. \quad (i = \text{imaginäre Einheit})$

Lösung

a) Induktiv sieht man, dass

$$b_n = \frac{b_0}{2^n} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2^k} + 2, \quad n \geq 1.$$

I.A.: Vereinbarungsgemäß ist $\sum_{k=0}^{-1} = 0$, so die Behauptung für $n = 1$ richtig ist:
 $b_1 = \frac{b_0}{2} + 2.$

I.V.: Die Behauptung gelte bis $n \geq 2$.

I.S.:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{b_n}{2} + 2 = \frac{1}{2} \left(\frac{b_0}{2^n} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2^k} + 2 \right) + 2 \\ &= \frac{b_0}{2^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} + 1 + 2 = \frac{b_0}{2^{n+1}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} + 2. \end{aligned}$$

Da die geometrische Reihe konvergiert,

$$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2^k} \rightarrow \frac{1}{1-1/2} = 2 \quad (n \rightarrow \infty),$$

und $b_0 = 0$, konvergiert $b_n \rightarrow 4 \quad (n \rightarrow \infty)$ und ist damit auch beschränkt.

b) Es ist

$$\begin{aligned} c_n &= i^n + (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N} \\ \implies c_n &= 0 \quad \forall n = 2(2k-1), \quad k = 1, 2, \dots \\ c_n &= 2 \quad \forall n = 4k, \quad k = 1, 2, \dots \\ \implies (c_n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{divergiert;} \\ c_n &= i - 1 \quad \forall n = 1 + 4k, \quad k = 1, 2, \dots \\ c_n &= -i - 1 \quad \forall n = 3 + 4k, \quad k = 1, 2, \dots \\ \implies (c_n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ist beschränkt: } |c_n| \leq 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

► Konvergenz und Divergenz von Reihen

Entscheiden Sie bei den folgenden Reihen, ob sie konvergieren (mit Begründung):

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+9}$
 b) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ mit $x_1 = 42$, $x_{n+1} = \frac{3n+9}{9n+1} x_n$.

Lösung

- a) Diese Reihe divergiert, da die Folge $(\sqrt{n+9})_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist, sondern gegen ∞ divergiert.
 b) Wir wenden das Quotientenkriterium an:

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \left| \frac{\frac{3n+9}{9n+1} x_n}{x_n} \right| = \left| \frac{3n+9}{9n+1} \right| = \frac{3 + \frac{9}{n}}{9 + \frac{1}{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dies konvergiert gegen $\frac{3}{9} = \frac{1}{3} < 1$. Also konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

Aufgabe 5

► Konvergenz von Reihen

Entscheiden Sie bei den folgenden Reihen, ob sie konvergieren (mit Begründung):

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n} \right)^9$
 b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{9n} \right)^n$

Hinweis: Sie können in a) benutzen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ für $s > 1$ konvergiert (vgl. z. B. [24], 5.9 und 5.10).

Lösung

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n} \right)^9 = 3^9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^9}$

Nach dem Hinweis (mit $s = 9$) konvergiert diese Reihe.

b) Anwendung des Wurzelkriteriums liefert

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n+1}{9n} \right|^n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{9n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{9} + \frac{1}{n} = \frac{1}{9} < 1.$$

Also konvergiert die Reihe, sogar absolut.

Aufgabe 6

► Horner-Schema

Bestimmen Sie für die angegebenen Polynome p und Zahlen x_0 mittels des allgemeinen Horner-Schemas (vgl. z. B. [23], 1.1) die zugehörigen Polynome p_m, \dots, p_0 ($m = 5$ bzw. $m = 4$) und die Ableitungen $\frac{d^j p}{dx^j}(x_0)$, $0 \leq j \leq m+1$.

a) $x_0 = 0,8$, $p(x) = 32x^6 - 48x^5 + 18x^3 - 1$,

b) $x_0 = i$, $p(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + x + 1$ (mit $i^2 = -1$).

Lösung

a) Das Horner-Schema liefert:

32	-48	0	18	0	0	-1
32	-22,4	-17,92	3,664	2,9312	2,34496	0,875968
32	3,2	-15,36	-8,624	-3,968	-0,82944	
32	28,8	7,68	-2,48	-5,952		
32	54,4	51,2	38,48			
32	80	115,2				
32	105,6					
32						

Damit ergibt sich

$$p_5(x) = 32x^5 - 22,4x^4 - 17,92x^3 + 3,664x^2 + 2,9312x + 2,34496$$

$$p_4(x) = 32x^4 + 3,2x^3 - 15,36x^2 - 8,624x - 3,968$$

$$p_3(x) = 32x^3 + 28,8x^2 + 7,68x - 2,48$$

$$p_2(x) = 32x^2 + 54,4x + 51,2$$

$$p_1(x) = 32x + 80$$

$$p_0(x) = 32$$

Aufgabensammlung Numerik
mit mehr als 250 gelösten Übungsaufgaben
Reinhardt, H.-J.
2017, VII, 306 S. 16 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-55452-4