

Bei *erzwungener Konvektion* wird der Wärmeübergang durch die Temperaturunterschiede und die Strömung, die durch eine äußere Druckdifferenz aufrechterhalten wird, bestimmt. Die Druckdifferenz kann z. B. durch eine Pumpe oder einen Höhenunterschied erzeugt werden. Erzwungene Konvektion ist die in der Technik am häufigsten vorkommende Wärmeübergangsart. In Wärmeübertragern wird zwischen zwei Fluiden, die durch eine Wand getrennt sind, Wärme übertragen. Unsere Aufgabe wird sein, die Wärmeübergangszahlen in Abhängigkeit von den Strömungsbedingungen, den Temperaturen und der Geometrie des Wärmeübertragers zu bestimmen.

Betrachtet man ein Fluid mit der Temperatur ϑ_F , das in einem Rohr, dessen Wandtemperatur ϑ_W ist, entlangströmt, ist die Wärmestromdichte an einem beliebigen Punkt der Rohrrinnenwand gegeben als:

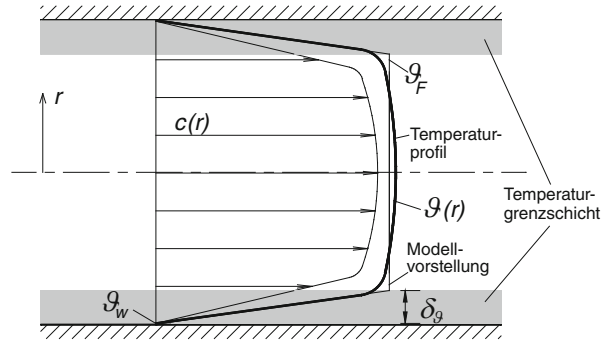
$$\dot{q} = \alpha \cdot (\vartheta_F - \vartheta_W) \quad (3.1)$$

Bei dieser Definition wird das Fluid mit einer konstanten Temperatur im gesamten Raum angenommen. Die Erfahrung zeigt, dass im Fluid in Wandnähe ein Temperaturprofil, analog dem Geschwindigkeitsprofil, entsteht. Bei einer turbulenten Strömung, auf deren Behandlung sich dieses Kapitel hier zunächst beschränkt, ist in der Wandnähe eine *Temperaturgrenzschicht* vorhanden [1, 2], in der sich die Temperatur von der Wandtemperatur zur Fluidtemperatur ändert (Abb. 3.1).

In der Grenzschicht bzw. unmittelbar vor der Wand wird die Wärme durch Wärmeleitung übertragen. Erweitert man Gl. 3.1, indem man eine Bilanz an der Oberfläche der Wand bildet, so kann man schreiben:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \alpha \cdot (\vartheta_F - \vartheta_W) = -\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)_{r_W} \\ \alpha &= -\lambda \frac{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)_{r_W}}{\vartheta_F - \vartheta_W} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Abb. 3.1 Temperaturverlauf in einer turbulenten Rohrströmung



Die Wärmeübergangszahl hängt demnach von der Temperaturverteilung im Fluid sowie von der Wärmeleitfähigkeit des Fluids ab. Die Temperaturverteilung im Fluid ist ihrerseits in komplizierter Weise mit dem Geschwindigkeitsfeld im Fluid verknüpft. Durch Linearisierung des Temperaturverlaufs im Fluid kann man jedoch zunächst eine Näherung für den Temperaturanstieg in der Grenzschicht und damit eine Abschätzung für den Zusammenhang zwischen Dicke δ_ϑ der Grenzschicht, Wärmeübergangszahl und Wärmeleitfähigkeit angeben:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)_{r_w} \approx \frac{\vartheta_F - \vartheta_w}{\delta_\vartheta} \quad (3.3)$$

$$\alpha \approx \frac{\lambda}{\delta_\vartheta} \quad \text{bzw.} \quad \delta_\vartheta = \frac{\lambda}{\alpha}$$

In den meisten für die Praxis relevanten Fällen kann die Temperaturgrenzschicht wegen ihrer geringen Dicke nicht vermessen werden. Bei der Messung würde man durch den Messfühler die Grenzschicht stören. Ähnlich wie bei der Bestimmung der Rohrreibungszahlen turbulenter Strömungen kann die Wärmeübergangszahl auch nicht analytisch hergeleitet werden. Sie muss vielmehr aus Messungen empirisch ermittelt werden. Da die Anzahl der unabhängigen Einflussgrößen größer ist als bei der Bestimmung der Reibung [3], müsste eine noch größere Zahl von Versuchen durchgeführt werden. Um den Messaufwand in einem vernünftigen Rahmen zu halten, nutzt man *Modellvorstellungen* und physikalische Ähnlichkeitsprinzipien, nach denen sich Unterschiede beim Wärmeübergang für verschiedene Geometrien, Stoffe und Fluidzustände letztlich auf wenige *charakteristische Kennzahlen* zurückführen lassen.

Bei der laminaren Strömung entsteht ein ganz anders verlaufendes Temperaturprofil, das für einfache Geometrien mit einigem mathematischen Aufwand analytisch berechenbar ist. Wegen ihrer geringeren technischen Bedeutung werden die Beziehungen für die laminare Rohrströmung in diesem Kapitel zwar angegeben, die Herleitung wird jedoch nicht behandelt.

3.1 Kennzahlen

Die beim konvektiven Wärmeübergang auftretenden Transportvorgänge lassen sich durch Differentialgleichungen beschreiben. Grundsätzlich müssen Geschwindigkeit (mit drei Komponenten), Druck und Temperatur des Mediums bestimmt werden. Hierfür benötigt man fünf unabhängige Gleichungen, die aus Erhaltungssätzen bzw. Bilanzen hergeleitet werden können:

- Erhaltung der Masse – Massenbilanz – Kontinuitätsgleichung
- Erhaltung des Impulses – Impulsbilanz – Bewegungsgleichung
- Erhaltung der Energie – Energiebilanz – Energiegleichung

In den nachfolgenden Abschnitten wird vereinfacht aufgezeigt, wie aus diesen Gleichungen die wichtigsten charakteristischen Kennzahlen und damit die Grundlage für die empirische Bestimmung der Wärmeübergangszahlen abgeleitet werden können.

3.1.1 Kontinuitätsgleichung

Wir betrachten zunächst einen ortsfesten Quader mit den Kantenlängen dx , dy , dz in einem kartesischen Koordinatensystem (s. Abb. 3.2).

Die in den Quader über die Fläche $dy \cdot dz$ einfließende Masse ist

$$\dot{m}_x = \rho \cdot c_x \cdot dy \cdot dz$$

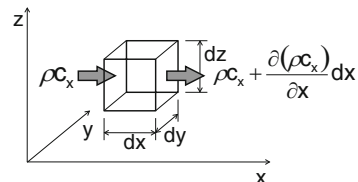
und die an der gegenüberliegenden Fläche ausfließende Masse kann mit

$$\dot{m}_{x+dx} = \rho \cdot c_x \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial (\rho \cdot c_x)}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz$$

angegeben werden. Betrachtet man ein inkompressibles Fluid mit der Dichte ρ , so ist die Differenz beider Massenströme:

$$d\dot{m}_x = -\frac{\partial c_x}{\partial x} \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Abb. 3.2 Zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung



Führt man diese Berechnung auch für die anderen Raumrichtungen durch, so erhält man nach Summieren, Umordnen und Teilen durch $\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

$$0 = \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z}$$

Dies ist die Kontinuitätsgleichung für ein inkompressibles Medium in kartesischen Koordinaten. Aus ihr lässt sich keine charakteristische Kennzahl ermitteln, da diese Gleichung ohnehin keine spezifischen Größen eines bestimmten Fluids oder einer bestimmten *geometrischen* Anordnung enthält. Die Kontinuitätsgleichung ist aber die erste der fünf benötigten unabhängigen Gleichungen.

3.1.2 Bewegungsgleichung

Diese Gleichung folgt aus einer Kräftebilanz an einem Massenelement im strömenden Fluid, wobei s zunächst eine allgemeine Ortskoordinate ist:

$$\sum dF_{\text{äußere}} = dm \cdot \frac{dc_x}{dt} = \rho \cdot dV \cdot \frac{dc_x}{dt}$$

Diese Bilanz besagt, dass die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit bzw. des Impulses des Fluides durch äußere Kräfte bewirkt wird. Wenn wir hier Kraftwirkungen aufgrund von elektrischen, magnetischen und Gravitationsfeldern ausschließen, lassen sich die äußeren Kräfte auf Druck- und Zähigkeitskräfte, letztere ausgedrückt mittels der Spannung τ , reduzieren:

$$\sum dF_{\text{äußere}} = -dp \cdot dA + \sum d\tau \cdot dA$$

Wenn wir weiterhin beachten, dass $dV = dA \cdot ds$ gilt und $c_x = f(s, t)$, d. h. die Geschwindigkeit allgemein eine Funktion von Ort und Zeit ist, so können wir zusammenfassend schreiben:

$$\rho \cdot \frac{dc_x}{dt} = \rho \cdot \left(\frac{\partial c_x}{\partial t} + \frac{\partial c_x}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} \right) = -\frac{\partial p}{\partial s} + \sum \frac{\partial \tau}{\partial s}$$

Für die Schubspannung wird der *Newton'sche* Schubspannungsansatz $\tau = \eta \cdot dc_x/ds$ einführt und wir erhalten dann für eine stationäre Strömung allgemein

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial c_x}{\partial s} c_x \right) = -\frac{\partial p}{\partial s} + \eta \cdot \sum \frac{\partial^2 c_x}{\partial s^2}$$

bzw. speziell für die Raumrichtung x mit der Geschwindigkeit $c_x = f(x, y)$:

$$\rho \cdot \frac{\partial c_x}{\partial x} c_x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \cdot \sum \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2}$$

Durch geschicktes Umschreiben dieser Gleichung kann man nun versuchen, möglichst viele der fluid-, zustands- oder geometriespezifischen Größen in der Gleichung zusammenzufassen. Der übliche Weg hierfür ist die Überführung in eine dimensionslose Gleichung. Diese erhalten wir, indem alle Variablen auf charakteristische Maße bezogen werden:

$$\begin{aligned}\text{Bezugslänge } L: & \quad x = x^* \cdot L \\ \text{Bezugsgeschwindigkeit } c: & \quad c_x = c_x^* \cdot c \\ \text{Bezugsdruck } p \cdot c^2: & \quad p = p^* \cdot \rho \cdot c^2\end{aligned}$$

Die mit Stern versehenen Größen x^* , c_x^* und p^* sind die dimensionslose Ortskoordinate, die dimensionslose Geschwindigkeitskomponente sowie der dimensionslose Druck. Wir werden später sehen, welche Größen in praktischen Einsatzfällen als Bezugsgrößen dienen. Einsetzen der genannten Größen in die hergeleitete Bewegungsgleichung und Umordnen führt zu:

$$c_x^* \frac{\partial c_x^*}{\partial x^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\eta}{\rho \cdot c \cdot L} \cdot \sum \frac{\partial^2 c_x^*}{\partial y^{*2}}$$

Der Kehrwert des Faktors vor dem Differential im dritten Term wird *Reynoldszahl* genannt. Sie ist das Verhältnis der Trägheits- zu den Reibungskräften.

$$Re_L = \frac{c \cdot L}{\nu} = \frac{c \cdot L \cdot \rho}{\eta} = \frac{\dot{m} \cdot L}{A \cdot \eta} \quad (3.4)$$

Die mittlere Geschwindigkeit der Strömung ist c , die charakteristische Länge L , die kinematische Viskosität des Fluids ν und η die dynamische Viskosität. Es ist üblich, die *Reynoldszahl* mit einem Index zu versehen, der die charakteristische Länge L repräsentiert. Da in der dimensionslosen Bewegungsgleichung außer Re nur dimensionslose Lösungsvariablen und unabhängige Variablen stehen, ist die Lösung der Gleichung für alle Strömungen mit gleicher *Reynoldszahl* identisch. Umgekehrt gilt: Die Unterschiede in den Lösungen der Differentialgleichung für unterschiedliche Fluide, Zustände oder Geometrien lassen sich auf die Unterschiede in der *Reynoldszahl* zurückführen. Mit je einer Bewegungsgleichung für jede Raumrichtung gewinnen wir drei weitere Gleichungen für die fünf unbekannten Variablen.

3.1.3 Energiegleichung

Die *Reynoldszahl* enthält die Geschwindigkeit, die Zähigkeit sowie eine charakteristische Länge. Aus den vorangegangenen Kapiteln wissen wir aber, dass für die Wärmeübertragung auch Eigenschaften wie Wärmeleitfähigkeit oder Wärmekapazität relevant sind. Wir werden daher eine Energiegleichung für das strömende Fluid ableiten und analog der Be-

wegungsgleichung entdimensionieren, um zu einer weiteren charakteristischen Kennzahl zu kommen.

$$d\dot{m}_x = -\frac{\partial c_x}{\partial x} \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Wir gehen hierfür von der Temperaturfeldgleichung in einem ruhenden Medium aus, die bereits in Abschn. 2.2.1 aus einer Energiebilanz bestimmt wurde:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right)$$

Für ein strömendes Fluid muss auf der linken Seite der Gleichung noch die Temperaturänderung aufgrund des Enthalpietransports hinzugefügt werden. Hierzu ersetzen wir das partielle Differential durch das totale Differential der Temperatur und beachten, dass $dx/dt = c_x$, $dy/dt = c_y$ und $dz/dt = c_z$ gilt. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} c_x + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} c_y + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} c_z = a \cdot \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Die Variablen dieser Gleichung können analog jenen der Impulsgleichung entdimensioniert werden. Hier kommen aber noch folgende Größen hinzu:

$$\begin{aligned} \text{Bezugstemperaturdifferenz } (\vartheta_F - \vartheta_W): \vartheta &= \vartheta^* \cdot (\vartheta_F - \vartheta_W) + \vartheta_F \\ \text{Bezugszeit } L/c: t &= t^* \cdot L/c \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der dimensionslosen Variablen und Umordnen gewinnen wir folgende dimensionslose Form der Temperaturfeldgleichung:

$$\frac{\partial \vartheta^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \vartheta^*}{\partial x^*} c_x^* + \frac{\partial \vartheta^*}{\partial y^*} c_y^* + \frac{\partial \vartheta^*}{\partial z^*} c_z^* = \frac{a}{c \cdot L} \cdot \left(\frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 \vartheta^*}{\partial z^{*2}} \right)$$

Den Vorfaktor vor dem rechten Term können wir etwas umschreiben:

$$\frac{a}{c \cdot L} = \frac{\nu}{c \cdot L} \cdot \frac{a}{\nu} = \frac{1}{Re} \cdot \frac{1}{Pr}$$

Die neue, neben der *Reynoldszahl* auftretende Kennzahl wird *Prandtlzahl* Pr genannt:

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\nu \cdot \rho \cdot c_p}{\lambda} \quad (3.5)$$

Sie kann auch als das Verhältnis der Dicken der laminaren Strömungs- und Temperaturgrenzschicht aufgefasst werden. Gase haben eine *Prandtlzahl* von etwa 0,7, die der Flüssigkeiten variiert in einem weiten Bereich. Sie ist temperaturabhängig.

Wir haben nun fünf Gleichungen für fünf abhängige Variable hergeleitet, entdimensioniert und auf diese Weise zwei für die konvektive Wärmeübertragung wesentliche charakteristische Kennzahlen gewonnen. Nun wenden wir die Methodik der Entdimensionierung abschließend auf die Gl. 3.2 an und erhalten

$$\frac{\alpha \cdot L}{\lambda} = - \left(\frac{\partial \vartheta^*}{\partial r^*} \right)_{r^*=1} = Nu_L \quad (3.6)$$

Die dimensionslose Wärmeübergangszahl wird *Nußeltzahl* genannt. Sie ist das Verhältnis der für die Strömung charakteristischen Länge L und der Dicke der Temperaturgrenzschicht δ_ϑ .

Zugleich stellen wir fest, dass diese dimensionslose Wärmeübergangszahl offenbar nur vom dimensionslosen Temperaturfeld abhängig ist! Dieses wiederum erhalten wir aber als eine Lösung des eben hergeleiteten Gleichungssystems, die durch *Reynolds*- bzw. *Prandtl*zahl und die durchströmte Geometrie charakterisiert ist.

Trotz der sehr vereinfachten Herleitung des o. g. Gleichungssystems findet man diesen Zusammenhang auch empirisch bestätigt und gibt die *Nußeltzahlen* daher in folgender Form an:

$$Nu_L = f(Re_L, Pr, \text{Geometrie}, \vartheta/\vartheta_W) \quad (3.7)$$

Der letzte Term berücksichtigt die Abhängigkeit der *Nußeltzahl* von der Richtung des Wärmestroms. Näheres dazu wird später ausgeführt. *Nußeltzahlen* wurden in der o. g. Form für verschiedenste Geometrien, Stoffe und Strömungen experimentell bestimmt und in Form sogenannter Korrelationen, d. h. Funktionen, die die erhaltenen Messwerte bestmöglich wiedergeben, von zahlreichen Autoren veröffentlicht. Eine der umfangreichsten Darstellungen von *Nußeltfunktionen* findet sich im VDI-Wärmeatlas [3].

Die Ermittlung von Wärmeübergangszahlen wird also auf die Ermittlung der für das jeweils vorliegende Problem passenden *Nußeltzahl* zurückgeführt. Aus dieser *Nußeltzahl* wird dann die Wärmeübergangszahl nach der o. g. Definition bestimmt.

In den nachfolgenden Kapiteln wird dies für einige technisch wichtige Fälle näher erläutert.

3.2 Bestimmung der Wärmeübergangszahlen

Wie erwähnt, hängt die Wärmeübergangszahl von der *Reynoldszahl*, den Stoffeigenschaften, der Geometrie und Richtung des Wärmestromes ab. Die Stoffeigenschaften werden durch die *Prandtlzahl* berücksichtigt. Die Wärmeübergangszahl wird aus der *Nußeltzahl* bestimmt. Man gibt die *Nußeltzahlen* in der Gl. 3.7 definierten Form an.

3.2.1 Rohrströmung

Bei der Strömung von Fluiden in zylindrischen Rohren ist die charakteristische Länge der Innendurchmesser d_i des Rohres. Zur Bestimmung der Wärmeübergangszahlen muss zwischen der turbulenten und laminaren Strömung unterschieden werden.

3.2.1.1 Turbulente Rohrströmung

Das Temperaturprofil einer turbulenten Rohrströmung ist in Abb. 3.1 dargestellt. Die Temperatur des Fluids ist die Temperatur in der Rohrmitte. Die von *Gnielinski* [4, 5] angegebene Gl. 3.8 für die *Nußeltzahl* gibt nach heutigem Kenntnisstand die Messergebnisse am besten wieder.

$$Nu_{d_i, turb} = \frac{(\xi/8) \cdot Re_{d_i} \cdot Pr}{1 + 12,7 \cdot \sqrt{\xi/8} \cdot (Pr^{2/3} - 1)} \cdot f_1 \cdot f_2 \quad (3.8)$$

Die *Rohrreibungszahl* ist dabei ξ . Sie ist folgendermaßen gegeben:

$$\xi = [1,8 \cdot \log(Re_{d_i}) - 1,5]^{-2} \quad (3.9)$$

Die Stoffwerte werden mit der Temperatur des Fluids in der Rohrmitte bestimmt. Die Gl. 3.8 und 3.9 geben die Wärmeübergangszahl mit der besten Genauigkeit bei der Strömung durch Rohre wieder.

Gl. 3.8 zeigt auch, dass zwischen der Reibung und dem Wärmeübergang ein grundsätzlicher Zusammenhang besteht. Je größer die Reibungszahl ξ der turbulenten Strömung im Rohr ist, desto größer auch die *Nußelt-* und damit die Wärmeübergangszahl. Dieses verlangt vom Ingenieur, Wärmeübertrager so zu optimieren, dass er bezüglich Reibung und Wärmeübertragung die günstigste Lösung findet.

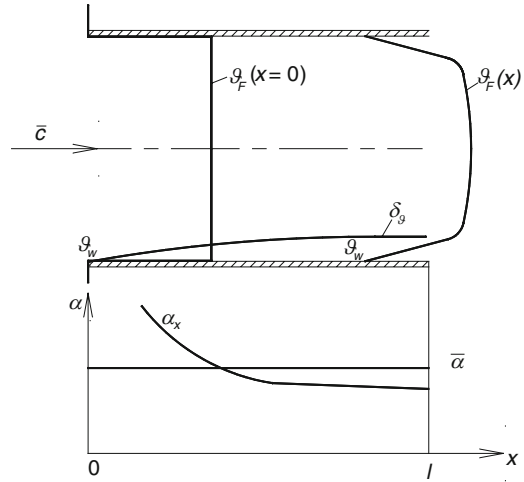
Die Funktion f_1 gibt den Einfluss der Rohrlänge und f_2 den der Richtung des Wärmestromes an. Die Rohrlänge beeinflusst die Wärmeübergangszahl, weil das Temperaturprofil am Eintritt des Rohres nicht ausgebildet und damit die Dicke der Temperaturgrenzschicht dort gleich null ist. Die Wärmeübergangszahl ist unendlich. Abb. 3.1 zeigt das Strömungs- und Temperaturprofil.

Die Dicke der Temperaturgrenzschicht nimmt mit steigender Lauflänge zu und die lokale Wärmeübergangszahl wird kleiner, bis sie bei ausgebildeter Temperaturgrenzschicht konstant bleibt. In der Regel ist bei der Berechnung von Wärmeübertragern nicht die lokale Wärmeübergangszahl von Interesse, sondern deren mittlerer Wert für die gesamte Rohrlänge. Die höheren Wärmeübergangszahlen am Eintritt des Rohres beeinflussen die mittlere Wärmeübergangszahl. Die Funktion f_1 zur Berücksichtigung der Rohrlänge (siehe auch Abb. 3.3) lautet:

$$f_1 = 1 + (d_i/l)^{2/3} \quad (3.10)$$

Die Richtung des Wärmestromes beeinflusst die Wärmeübergangszahl, weil die *Reynolds-* und *Prandtlzahl* mit den temperaturabhängigen Stoffwerten des Fluids gebildet werden und in der Temperaturgrenzschicht eine andere Temperatur herrscht. Für

Abb. 3.3 Einfluss der Rohrlänge auf die Wärmeübergangszahl



die Funktion f_2 hat man für Flüssigkeiten und Gase zwei unterschiedliche Beziehungen gefunden:

$$f_2 = \begin{cases} (Pr/Pr_W)^{0,11} & \text{für Flüssigkeiten} \\ (T/T_W)^{0,45} & \text{für Gase} \end{cases} \quad (3.11)$$

Die angegebenen Gleichungen gelten für:

$$10^4 < Re_{di} < 10^6 \\ l/d_i > 1$$

In Wärmeübertragerrohren sind die Temperatur des Fluids und die Temperatur der Wand nicht konstant.

Die Stoffwerte des Fluids bestimmt man mit der mittleren Temperatur:

$$\vartheta_m = (\vartheta_{ein} + \vartheta_{aus})/2$$

Zur Berechnung des Wärmestromes wird die mittlere Temperaturdifferenz nach Gl. 1.15 verwendet. Sie wird mit den Temperaturdifferenzen am Ein- und Austritt des Rohres gebildet.

$$\dot{Q} = \alpha \cdot A \cdot \Delta \vartheta_m \quad (3.12)$$

Strömt außen am Rohr ebenfalls ein Fluid, wird zur Bestimmung des Wärmestromes die Wärmedurchgangszahl eingesetzt und mit den Fluidtemperaturen die mittlere Tempe-

raturdifferenz gebildet. Die Wandtemperatur ist:

$$\vartheta_{wi} = \vartheta_{mi} + \frac{k \cdot d_a}{\alpha_i \cdot d_i} \cdot \Delta \vartheta_m \quad \vartheta_{wa} = \vartheta_{ma} - \frac{k}{\alpha_a} \cdot \Delta \vartheta_m \quad (3.13)$$

Für überschlägige Berechnungen kann an Stelle von Gl. 3.8 eine vereinfachte Potenzgleichung verwendet werden, die die Wärmeübergangszahl mit etwa 5 % Genauigkeit angibt:

$$Nu_{di} = 0,0235 \cdot (Re_{di}^{0,8} - 230) \cdot Pr^{0,48} \cdot f_1 \cdot f_2 \quad (3.14)$$

Zur Berücksichtigung der Richtung des Wärmestromes bei Gasen sind im VDI-Wärmeatlas [4] weitere Funktionen angegeben.

3.2.1.2 Laminare Rohrströmung bei konstanter Wandtemperatur

Hier wird nur die Strömung bei konstanter Wandtemperatur behandelt. In [3] findet man Beziehungen für konstante Wärmestromdichte. Bei laminarer Rohrströmung ist in sehr langen Rohren (thermisch und hydraulisch ausgebildeter Strömung) die Wärmeübergangszahl von der *Reynolds*- und *Prandtl*zahl unabhängig. Die *Nußelt*zahl hat einen konstanten Wert.

$$Nu_{di, lam} = 3,66 \quad (3.15)$$

Bei kürzeren Rohren, in denen die Temperatur- und Strömungsgrenzschicht nicht ausgebildet sind, ist die *Nußelt*zahl:

$$Nu_{di, lam} = 0,644 \cdot \sqrt[3]{Pr} \cdot \sqrt{Re_{di} \cdot d_i / l} \quad (3.16)$$

Da der Übergang asymptotisch erfolgt, gilt folgende Ausgleichsgleichung:

$$Nu_{di, lam} = \sqrt[3]{3,66^3 + 0,644^3 \cdot Pr \cdot (Re_{di} \cdot d_i / l)^{3/2}} \quad (3.17)$$

Bis zu *Reynolds*zahlen von 2 300 ist Gl. 3.17 gültig. Abb. 3.4 zeigt die *Nußelt*zahlen für $Pr = 1$ in Abhängigkeit von der *Reynolds*zahl für verschiedene Rohrlängen.

3.2.1.3 Gleichungen für den Übergangsbereich

Aus dem Diagramm in Abb. 3.4 ist ersichtlich, dass es beim Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung sprunghafte Übergänge gibt. Gl. 3.8 ist wie angegeben nur ab $Re > 10^4$ gültig. Für den Übergangsbereich $2\,300 < Re_{di} < 10^4$ wird folgende Interpolationsgleichung vorgeschlagen:

$$Nu_{di} = (1 - \gamma) \cdot Nu_{di, lam}(Re = 2\,300) + \gamma \cdot Nu_{di, turb}(Re = 10^4) \quad (3.18)$$

mit $\gamma = \frac{Re - 2\,300}{7\,700}$

Abb. 3.5 zeigt die mit der Ausgleichsgleichung berechneten *Nußelt*zahlen.

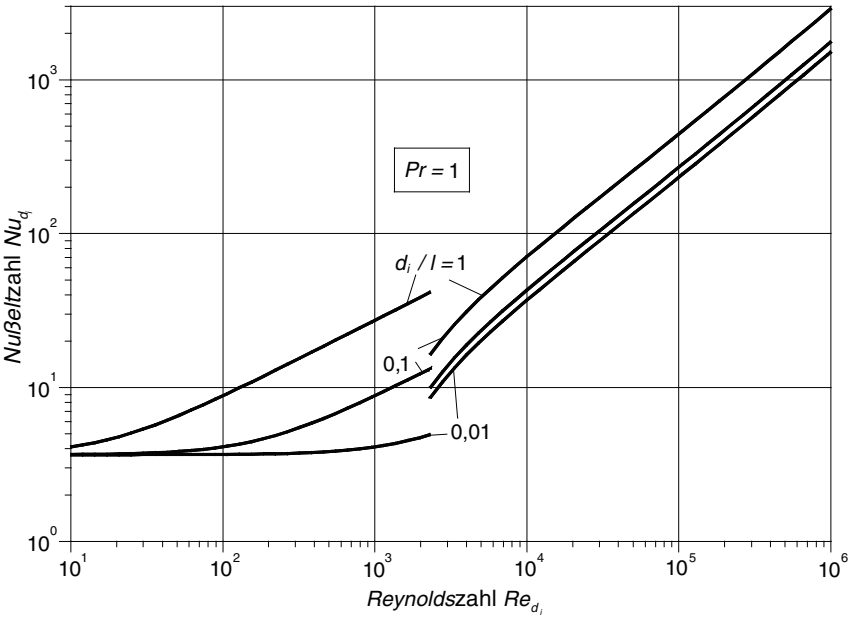


Abb. 3.4 Nußeltzahl bei $Pr = 1$; Sprünge beim Übergang von laminar zu turbulent

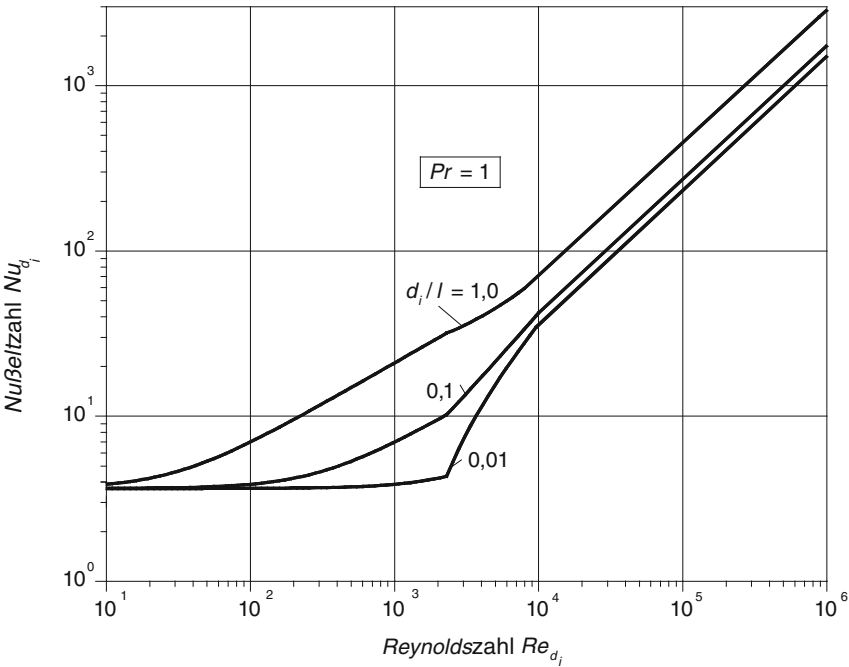


Abb. 3.5 Nußeltzahl als Funktion der Reynoldszahl und d_i/l nach Gl. 3.18 bei $Pr = 1$

Beispiel 3.1: Wärmeübergangszahl in einem Rohr

Zur Demonstration ihrer Größe werden die Wärmeübergangszahlen für verschiedene Stoffe in einem Rohr mit 25 mm Innendurchmesser berechnet. Die Rohrwand hat eine Temperatur von 90 °C, das Fluid die von 50 °C. Die Geschwindigkeiten und Stoffwerte sind:

		Geschwindigkeit m/s	kinematische Viskosität $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	Wärmeleitfähigkeit Pr W/(m K)	Pr_{Wi}	
Wasser	1 bar	2	0,554	0,6410	3,565	1,964
Luft	1 bar	20	18,210	0,0279		0,711
Luft	10 bar	20	1,833	0,0284		0,712
R134a	25 bar	2	0,114	0,0751	3,111	2,817

Berechnen Sie die Wärmeübergangszahlen.

Lösung**Annahmen**

- Die Rohrwandtemperatur ist konstant.
- Der Einfluss der Anlaufströmung bleibt unberücksichtigt.

Analyse

Wie man später sieht, ist die *Reynoldszahl* in allen Fällen größer als 10, sodass mit Gl. 3.8 gerechnet werden kann. Die ermittelten Werte sind:

		Re_{di}	ξ	f_2	$Nu_{di \text{ turb}}$	α $\text{W}/(\text{m}^2 \text{ K})$
Wasser	1 bar	90 253	0,0182	1,068	431,8	11 070,4
Luft	1 bar	27 397	0,0238	0,949	63,9	71,3
Luft	10 bar	272 777	0,0146	0,949	377,0	428,3
R134a	55 bar	439 367	0,0133	1,011	1 452,6	4 363,7

Diskussion

Die Berechnungen zeigen, dass Flüssigkeiten wesentlich größere Wärmeübergangszahlen als Gase haben, obwohl die Gasgeschwindigkeiten sehr viel höher als die der Flüssigkeiten sind. Die kleineren Wärmeübergangszahlen werden durch größere kinematische Viskosität und kleinere Wärmeleitfähigkeit der Gase verursacht, wobei Wasser auf Grund seiner hohen Wärmeleitfähigkeit eine Sonderstellung einnimmt. Bei Gasen steigen wegen Verringerung der kinematischen Viskosität mit dem Druck die *Reynoldszahl* und Wärmeübergangszahl an. Der Einfluss der Rohrlänge bleibt unberücksichtigt, da er in diesem Beispiel keine Rolle spielt.

Beispiel 3.2: Wärmeübergangszahl in einem Wärmeübertrager

In einem Wärmeübertrager mit 1 m langen Rohren, 15 mm Außendurchmesser und 1 mm Wandstärke strömt Wasser mit der Geschwindigkeit von 1 m/s. Außen an den Rohren kondensiert Frigen R134a bei 50 °C. Die Wärmeübergangszahl des Frigens ist 5 500 W/(m² K). Wärmeleitfähigkeit des Rohrmaterials: 230 W/(m K). Am Rohreintritt hat das Wasser eine Temperatur von 20 °C.

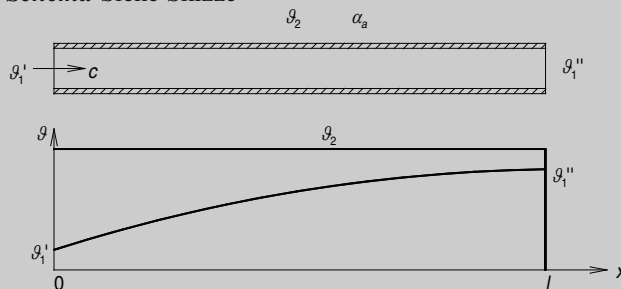
Stoffwerte des Wassers:

	ρ kg/m ³	c_p J/(kg K)	λ W/(m K)	ν m ² /s	Pr
20 °C:	998,2	4 184	0,598	$1,003 \cdot 10^{-6}$	7,00
30 °C:	995,7	4 180	0,616	$0,801 \cdot 10^{-6}$	5,41
40 °C:	992,2	4 179	0,631	$0,658 \cdot 10^{-6}$	4,34

Berechnen Sie die Wärmeübergangszahl, die Austrittstemperatur des Wassers und den pro Rohr transferierten Wärmestrom.

Lösung

Schema Siehe Skizze

**Annahme**

- Die mittlere Wärmeübergangszahl ist konstant.

Analyse

Die Austrittstemperatur des Wassers ist nicht bekannt, d. h., zur Bestimmung der Stoffwerte muss eine mittlere Temperatur angenommen und damit die Wärmeübergangszahl, Wärmedurchgangszahl und der Wärmestrom bestimmt werden. Dann können die Austrittstemperatur des Wassers und die mittlere Temperatur berechnet werden. Zunächst wird angenommen, dass die Austrittstemperatur des Wassers 30 °C ist. Die mittlere Temperatur beträgt 25 °C. Die Stoffwerte des Wassers sind:

$$\rho = 997,9 \text{ kg/m}^3, \quad c_p = 4 182 \text{ J/(kg K)}, \quad \lambda = 0,607 \text{ W/(m K)}, \quad Pr = 6,205, \\ \nu = 0,902 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Die *Reynoldszahl* ist:

$$Re = \frac{c \cdot d_i}{\nu} = \frac{1 \cdot \text{m} \cdot 0,013 \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{s} \cdot 0,902 \cdot 10^{-6} \cdot \text{m}^2} = 14\,412$$

Widerstandszahl nach Gl. 3.9:

$$\xi = [1,8 \cdot \log(Re_{d_i}) - 1,5]^{-2} = 0,0279$$

Die *Nußeltzahl* kann jetzt mit den Gln. 3.8, 3.10 und 3.11 berechnet werden. Der Einfluss der Richtung des Wärmestromes nach Gl. 3.11 benötigt die *Prandtlzahl*, gebildet mit der Wandtemperatur. Da diese erst nach Berechnung der Wärmeübergangs- und Wärmedurchgangszahl möglich ist, muss später iteriert werden. Die Größe f_2 wird zunächst als 1 angenommen. Die Größe f_1 ist:

$$f_1 = 1 + (d_i/l)^{2/3} = 1 + (0,013/1)^{2/3} = 1,055$$

Die *Nußeltzahl* nach Gl. 3.8 berechnet sich als:

$$Nu_{d_i, \text{turb}} = \frac{(\xi/8) \cdot Re_{d_i} \cdot Pr}{1 + 12,7 \cdot \sqrt{\xi/8} \cdot (Pr^{2/3} - 1)} \cdot f_1 \cdot f_2 = 118,3$$

Damit ist die Wärmeübergangszahl:

$$\alpha = Nu_{d_i} \cdot \lambda / d_i = 118,3 \cdot 0,606 \cdot \text{W}/(\text{m} \cdot \text{K}) / (0,013 \cdot \text{m}) = 5\,524,31 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

Die Wärmedurchgangszahl ist nach Gl. 2.27:

$$k = \left(\frac{1}{\alpha_a} + \frac{d_a}{2 \cdot \lambda_R} \cdot \ln \frac{d_a}{d_i} + \frac{d_a}{d_i \cdot \alpha_i} \right)^{-1} = 2\,529 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Mit der Wärmedurchgangszahl und der mittleren Temperaturdifferenz kann die Wandtemperatur ermittelt werden. Die mittlere Temperaturdifferenz beträgt:

$$\Delta \vartheta_m = \frac{\vartheta_1'' - \vartheta_1'}{\ln \left(\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1'}{\vartheta_2 - \vartheta_1''} \right)} = \frac{(30 - 20) \cdot \text{K}}{\ln \left(\frac{50 - 20}{50 - 30} \right)} = 24,66 \text{ K}$$

Die Wandtemperatur ist nach Gl. 3.13:

$$\vartheta_W = \vartheta_m + \Delta\vartheta_m \cdot \frac{k \cdot d_i}{\alpha_i \cdot d_a} = 25^\circ\text{C} + 24,66 \cdot \text{K} \cdot \frac{2\,566 \cdot 13}{5\,678 \cdot 15} = 34,79^\circ\text{C}$$

Mit der kinetischen Kopplung berechnen wir die transferierte Wärme.

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= k \cdot A \cdot \Delta\vartheta_m = k \cdot \pi \cdot d_a \cdot l \cdot \Delta\vartheta_m \\ &= 2\,529 \cdot \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \cdot \pi \cdot 0,015 \cdot \text{m} \cdot 1 \cdot \text{m} \cdot 24,66 \cdot \text{K} = 2\,940 \text{ W}\end{aligned}$$

Aus der Energiebilanzgleichung des Wassers kann die Austrittstemperatur bestimmt werden. Der Massenstrom im Rohr ist:

$$\begin{aligned}\dot{m} &= c \cdot 0,25 \cdot \pi \cdot d_i^2 \cdot \rho = 1 \cdot \text{m/s} \cdot 0,25 \cdot \pi \cdot 0,013^2 \cdot \text{m}^2 \cdot 997 \cdot \text{kg/m}^3 \\ &= 0,132 \text{ kg/s} \\ \vartheta_1'' &= \vartheta_1' + \frac{\dot{Q}}{\dot{m} \cdot c_p} = 20^\circ\text{C} + \frac{2\,982 \cdot \text{W}}{0,132 \cdot \text{kg/s} \cdot 4\,182 \cdot \text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})} = 25,31^\circ\text{C}\end{aligned}$$

Die Austrittstemperatur des Wassers ϑ_1'' ist nicht wie angenommen 30°C , sondern $25,24^\circ\text{C}$. Die Berechnung muss mit neuen Stoffwerten bei $22,70^\circ\text{C}$, der errechneten Korrekturfunktion $f_2 = (Pr/Pr_W)^{0,11}$ und der Austrittstemperatur ϑ_1'' wiederholt werden, bis die erforderliche Genauigkeit erreicht ist. Die Korrekturfunktion f_2 wird hier der Einfachheit halber mit der Wandtemperatur aus dem jeweils vorhergehenden Iterationsschritt gebildet. Die erste Zeile entspricht somit den oben gezeigten Werten ohne f_2 -Korrektur. Es wäre auch möglich, in jeder Zeile ein „innere Iteration“ für den Einfluss der Wandtemperatur vorzunehmen. Am Endergebnis der gesamten Iteration ändert das nichts. Die gezeigte Tabelle wurde in einer Tabellenkalkulation umgesetzt, wobei die temperaturabhängigen Stoffwerte zwischen den oben gegebenen Werten linear interpoliert wurden.

ϑ_1'' °C	f_2	Re_{di}	α_i W/(m ² K)	k W/(m ² K)	$\Delta\vartheta_m$ K	ϑ_W °C	\dot{Q} W	ϑ_1'' °C
30,00	1,0000	14 412	5 524	2 529	24,66	34,79	2 940	25,31
25,31	1,0297	13 694	5 541	2 533	27,26	33,46	3 254	25,88
25,88	1,0293	13 776	5 556	2 537	26,96	33,61	3 223	25,82
25,82	1,0293	13 768	5 555	2 537	26,99	33,59	3 226	25,83
25,83	1,0293	13 769	5 555	2 537	26,98	33,59	3 226	25,82
25,82	1,0293	13 769	5 555	2 537	26,98	33,59	3 226	25,82

Hier kann die Iteration abgebrochen werden, weil die letzten Änderungen kleiner als 0,2 % sind.

Diskussion

Zur Berechnung der Wärmeübergangszahlen und Temperaturen in Wärmeübertragern sind in der Regel Iterationen erforderlich, die stark konvergent sind. Bei diesem Beispiel hätte man bereits nach der dritten Iteration aufhören können. Der Wärmestrom war schon mit 1 % Genauigkeit berechnet. Will man aufwändige Berechnungen vermeiden, muss man Computerprogramme erstellen, in denen die Stoffwerte und Formeln programmiert sind. Oft genügt es, nur die Stoffwerte bei zwei Temperaturen anzugeben und zwischen diesen Stützstellen linear zu interpolieren. Jedenfalls sollte geprüft werden, ob dann die erforderliche Genauigkeit erreicht wird.

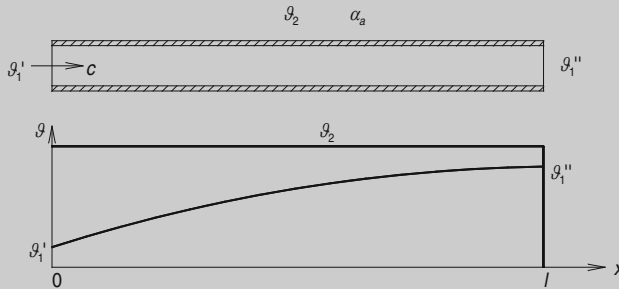
Beispiel 3.3: Auslegung eines Kraftwerkkondensators

In einem Kraftwerkkondensator soll ein Wärmestrom von 2 000 MW abgeführt werden. Der Kondensator hat Titanrohre mit 24 mm Außendurchmesser und 0,5 mm Wandstärke. Die Kühlwassergeschwindigkeit in den Rohren beträgt 2 m/s. Titan hat eine Wärmeleitfähigkeit von 16 W/(m K). Der Dampf kondensiert bei einer Sättigungstemperatur von 35 °C, die Wärmeübergangszahl bei der Kondensation ist 13 500 W/(m² K). Das Kühlwasser wird von 20 auf 30 °C erwärmt. Bei 25 °C sind die Stoffwerte des Wassers:

$$\rho = 997,0 \text{ kg/m}^3, \quad c_p = 4182 \text{ J/(kg K)}, \quad Pr = 6,135, \quad \lambda = 0,607 \text{ W/(m K)}, \\ \nu = 0,902 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Der Einfluss der Richtung des Wärmestromes kann vernachlässigt werden. Zu berechnen sind:

- a) Die Anzahl der Rohre
- b) die Rohrlänge
- c) die Kondensationstemperatur, wenn sich die Wärmedurchgangszahl wegen Verschmutzung um 10 % verringert.

Lösung**Schema** Siehe Skizze**Annahmen**

- Die mittlere Wärmeübergangszahl ist konstant.
- Der Einfluss der Richtung des Wärmestromes kann vernachlässigt werden, d. h., $f_2 = 1$.

Analyse

- a) Mit der Energiebilanzgleichung kann der Massenstrom des Kühlwassers bestimmt werden.

$$\dot{m} = \frac{\dot{Q}}{c_p \cdot (\vartheta_1'' - \vartheta_1')} = \frac{2000 \cdot 10^6 \cdot \text{W} \cdot \text{kg} \cdot \text{K}}{4182 \cdot \text{J} \cdot (30 - 20) \cdot \text{K}} = 47\,824 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Mit der gegebenen Geschwindigkeit des Kühlwassers kann der Massenstrom pro Rohr berechnet werden.

$$\dot{m}_{1\text{Rohr}} = c \cdot 0,25 \cdot \pi \cdot d_i^2 \cdot \rho = 2 \cdot \text{m/s} \cdot 0,25 \cdot \pi \cdot 0,023^2 \cdot \text{m}^2 \cdot 997 \cdot \text{kg/s} = 0,828 \text{ kg/s}$$

Man benötigt **57 727** Rohre, um den Massenstrom von 47 824 kg/s zu erreichen.

- b) Zur Berechnung der *Nußeltzahl* mit Gl. 3.8 benötigt man die Funktion f_1 . Sie berücksichtigt den Einfluss der Rohrlänge, die jetzt noch unbekannt ist. Die Berechnung wird mit einer Rohrlänge von 1 m gestartet.

Reynoldszahl:

$$Re = \frac{c \cdot d_i}{\nu} = \frac{2 \cdot \text{m} \cdot 0,023 \cdot \text{m} \cdot \text{s}}{\text{s} \cdot 0,893 \cdot 10^{-6} \cdot \text{m}^2} = 51\,512$$

Widerstandszahl nach Gl. 3.9:

$$\xi = [1,8 \cdot \log(Re_{d_i}) - 1,5]^{-2} = 0,0205$$

$$Nu_{d_i, \text{turb}} = \frac{(\xi/8) \cdot Re_{d_i} \cdot Pr}{1 + 12,7 \cdot \sqrt{\xi/8} \cdot (Pr^{2/3} - 1)} = 347,33$$

Damit ist die Wärmeübergangszahl:

$$\alpha_i = Nu_{d_i} \cdot \lambda / d_i \cdot \left[1 + (d_i / l)^{2/3} \right] = 9\,166 \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{K})$$

und die Wärmedurchgangszahl nach Gl. 2.27:

$$\begin{aligned} k &= \left(\frac{1}{\alpha_a} + \frac{d_a}{2 \cdot \lambda_R} \cdot \ln \frac{d_a}{d_i} + \frac{d_a}{d_i \cdot \alpha_i} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{13\,500} + \frac{0,024}{2 \cdot 16} \cdot \ln \frac{24}{23} + \frac{24}{23 \cdot 9\,166} \right)^{-1} \\ &= 4\,549 \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{K}) \end{aligned}$$

Mit der Wärmedurchgangszahl und mittleren Temperaturdifferenz kann die notwendige Austauschfläche ermittelt werden. Die mittlere Temperaturdifferenz ist:

$$\Delta \vartheta_m = \frac{\vartheta_1'' - \vartheta_1'}{\ln \left(\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1'}{\vartheta_2 - \vartheta_1''} \right)} = \frac{(30 - 20) \cdot \text{K}}{\ln \left(\frac{35 - 20}{35 - 30} \right)} = 9,102 \text{ K}$$

Die für den Wärmestrom benötigte Austauschfläche wird mit der kinetischen Kopplungsgleichung berechnet.

$$A = \frac{\dot{Q}}{k \cdot \Delta \vartheta_m} = \frac{2\,000 \cdot 10^6 \cdot \text{W} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}}{4\,549 \cdot \text{W} \cdot 9,102 \cdot \text{K}} = 48\,302 \text{ m}^2$$

Daraus errechnet sich die Rohrlänge zu:

$$l = \frac{A}{n \cdot \pi \cdot d_a} = \frac{49\,372 \cdot \text{m}^2}{57\,727 \cdot \pi \cdot 0,024 \cdot \text{m}} = 11,099 \text{ m}$$

Da die Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge abhängig ist, muss mit der errechneten Rohrlänge die Berechnung wiederholt werden bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Mit der Iteration erhält man **11,465 m**.

- c) Der Dampfzufluss bleibt durch die Verschmutzung unbeeinflusst, sodass sich der Wärmestrom und die Erwärmung des Kühlwassers nicht verändern. Damit der Wärmestrom entsprechend der kinetischen Kopplungsgleichung abgeführt werden kann, ändert sich die mittlere Temperaturdifferenz. Da sich das Produkt aus k und A unter Berücksichtigung der Rohrlänge nicht verändert, können die zuvor berechneten Werte verwendet werden.

$$\Delta \vartheta_m = \frac{\dot{Q}}{A \cdot k_v} = \frac{2 \cdot 10^9 \cdot \text{W} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}}{49\,901 \cdot \text{m}^2 \cdot 4\,403 \cdot 0,9 \cdot \text{W}} = 10,114 \text{ K}$$

Daraus kann man mit Gl. 1.15 die Kondensationstemperatur ermitteln.

$$\vartheta_2 = \frac{\vartheta_1' - \vartheta_1'' \cdot e^{\frac{\vartheta_1'' - \vartheta_1'}{\Delta\vartheta_m}}}{1 - e^{\frac{\vartheta_1'' - \vartheta_1'}{\Delta\vartheta_m}}} = 35,93^\circ\text{C}$$

Diskussion

Bei der Auslegung des Kondensators muss die Rohrlänge bestimmt werden, die Funktion f_1 ist daher nicht bekannt, eine Iteration ist notwendig. Durch Verschmutzung erhöht sich die Kondensationstemperatur. Damit bei verringerter Wärmedurchgangszahl der Wärmestrom abgeführt werden kann, muss sich die mittlere Temperaturdifferenz erhöhen. Weil sich die Aufwärmung des Kühlwassers nicht ändert, erhöht sich die Kondensationstemperatur, damit der Wärmestrom abgeführt werden kann.

3.2.1.4 Lokale Wärmeübergangszahlen

Die bisher angegebenen Wärmeübergangszahlen bzw. *Nußeltzahlen* bei der Rohrströmung sind die mittleren Werte für eine bestimmte Rohrlänge. Die Praxis zeigt, dass die mittleren Wärmeübergangszahlen genau genug sind, um Wärmeübertrager mit sehr guter Genauigkeit auszulegen oder nachzurechnen.

Lokale Wärmeübergangszahlen werden benötigt, wenn in einzelnen Rohrabschnitten berechnet werden oder untersucht werden muss, ob an einem bestimmten Ort gewisse Temperaturen nicht über- oder unterschritten werden dürfen. Das kann z. B. der Fall sein, wenn unerwünschte Kondensation oder Verdampfung vermieden oder erlaubte Höchsttemperaturen auch lokal eingehalten werden sollen, über denen das Fluid sich chemisch zersetzt oder einer beschleunigten Alterung unterliegt.

Der Grund für die Abhängigkeit der lokalen *Nußeltzahlen* von der Lauflänge x ist die Ausbildung der Temperatur- und Geschwindigkeitsgrenzschicht. Die lokale Korrekturfunktion f_{1x} lautet:

$$f_{1x} = 1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{d_i}{x} \right)^{2/3} \quad (3.19)$$

Die mittlere Wärmeübergangszahl bzw. die Korrekturfunktion f_1 nach Gl. 3.10, die den Einfluss der Rohrlänge auf die mittlere *Nußeltzahl* berücksichtigt, erhält man durch Integration der lokalen Korrekturfunktion f_{1x} über die Rohrlänge.

$$f_1 = \frac{1}{l} \cdot \int_0^l \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{d_i}{x} \right)^{2/3} \right] \cdot dx = \frac{1}{l} \cdot \left(l + d_i^{2/3} \cdot l^{1/3} \right) = 1 + \left(\frac{d_i}{l} \right)^{2/3}$$

Die lokale *Nußeltzahl* der turbulenten Rohrströmung wird wie mit Gl. 3.8 bestimmt, dabei wird die der Korrekturfunktion f_1 durch f_{1x} ersetzt.

$$Nu_{d_i, turb, x} = \frac{(\xi/8) \cdot Re \cdot Pr}{1 + 12,7 \cdot \sqrt{\xi/8} \cdot (Pr^{2/3} - 1)} \cdot \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{d_i}{x} \right)^{2/3} \right] \quad (3.20)$$

Bei der laminaren Strömung erhält man mit den Gln. 3.16 und 3.17:

$$Nu_{d_i, lam, x} = \sqrt[3]{3,66^3 + 0,332^3 Pr \left(Re \frac{d_i}{x} \right)^{3/2}} \quad (3.21)$$

Im Übergangsbereich $2\,300 < Re < 10^4$ lautet die lokale *Nußeltzahl*:

$$Nu_{d_i, x} = (1 - \gamma) \cdot Nu_{d_i, lam, x} (Re_{d_i} = 2\,300) + \gamma \cdot Nu_{d_i, turb, x} (Re_{d_i} = 10^4) \quad (3.22)$$

Im Falle der turbulenten Strömung bilden sich die Grenzschichten fast immer schon nach kurzer Einlaufänge voll aus, sodass die Korrekturfunktionen f_1 und f_{1x} auch meistens nahe 1 liegen. Bei einer Rohrlänge vom 100-fachen Rohrrinnendurchmesser, haben die Korrekturfunktionen bspw. den Wert von $f_1 = 1,046$ und $f_{1x} = 1,016$. Die meisten Wärmeübertrager mit geraden Rohren haben nur sehr selten Rohrlängen, die unterhalb von $100 \cdot d_i$ liegen. Dagegen sind die Einlaufängen der laminaren Grenzschichten deutlich größer, sodass die lokale laminare Nusseltzahl, insbesondere bei relativ kurzen Rohren, deutlich von der mittleren abweichen kann.

Zusammenfassend werden hier zwei Formeln angegeben, mit denen die mittleren und lokalen *Nußeltzahlen* der Rohrströmung im gesamten Bereich der *Reynoldszahlen* gültig und leicht zu programmieren sind.

$$Nu_{d_i} = \begin{cases} Nu_{d_i, lam} & \text{wenn } Re < 2\,300 \\ Nu_{d_i, turb} & \text{wenn } Re < 10^4 \\ (1 - \gamma) \cdot Nu_{d_i, lam} (Re = 2\,300) \\ \quad + \gamma \cdot Nu_{d_i, turb} (Re = 10^4) & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.23)$$

$$Nu_{d_i, x} = \begin{cases} Nu_{d_i, lam, x} & \text{wenn } Re < 2\,300 \\ Nu_{d_i, turb, x} & \text{wenn } Re < 10^4 \\ (1 - \gamma) \cdot Nu_{d_i, lam, x} (Re = 2\,300) \\ \quad + \gamma \cdot Nu_{d_i, turb, x} (Re = 10^4) & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.24)$$

Beispiel 3.4: Berechnung der Wandtemperatur eines Durchlauferhitzers

In einem Rohr von 8 mm Innendurchmesser und 500 mm Länge soll Wasser von 85 °C Temperatur auf 95 °C aufgeheizt werden. Das Rohr ist mit einem elektrischen

Wärmeübertragung

Grundlagen und Praxis

Böckh, P.; Wetzel, Th.

2017, XVIII, 363 S. 85 Abb. Mit Online-Extras., Hardcover

ISBN: 978-3-662-55479-1