

## Kapitel 2.

### Vorbereitung: Arten des Schließens

Alle Arten des Schließens haben gemeinsam, dass man von gegebener Information ausgeht und daraus neue Information gewinnt. Die gegebene Information wird als *Voraussetzung(en)* bezeichnet, die neu gewonnene Information als *Konklusion*.

Verschiedene Arten des Schließens unterscheiden sich vor allem in zweierlei Hinsicht:

- Mit welchen Methoden wird die Konklusion aus den Voraussetzungen gewonnen?
- Wie hängen Voraussetzungen und Konklusion miteinander zusammen?

Dass es hier größere Unterschiede gibt, illustrieren die Beispiele in den folgenden Abschnitten.

Traditionell unterscheidet man hauptsächlich zwischen deduktivem Schließen, induktivem Schließen und abduktivem Schließen (siehe zum Beispiel [Wik16f, darin 3.4 *Logical reasoning methods and argumentation*]). Diese Arten des Schließens werden in den nächsten drei Abschnitten kurz anhand von Beispielen vorgestellt (die Beispiele sind mit **Kein Beweis!** gekennzeichnet, weil sie keine mathematischen Beweise enthalten). Danach folgt ein Abschnitt, der speziell auf das Schließen in mathematischen Beweisen eingeht.

#### 2.1. Deduktives Schließen (Deduktion)

*Deduktives Schließen* ist dadurch charakterisiert, dass es sicherstellt, dass der Zusammenhang zwischen Voraussetzungen und Konklusion die *logische Folgerungsbeziehung* ist. Aus den Voraussetzungen folgt logisch die Konklusion. Das bedeutet: Sofern die Voraussetzungen erfüllt sind, ist garantiert, dass die Konklusion gilt; es ist also unmöglich, dass die Voraussetzungen wahr und die Konklusion falsch sind.

##### Beispiel 1 (Deduktives Schließen: Regen und Wolken)

**Kein Beweis!**

**Voraussetzungen:** (i) Wenn es regnet, sind Wolken am Himmel.  
(ii) Es regnet.

**Konklusion:** Es sind Wolken am Himmel.

Die Voraussetzung (i) ist wahr (bei wolkenlosem Himmel wäre herunterfallendes Wasser kein Regen). In einer Situation, in der auch Voraussetzung (ii) wahr ist, ist die Konklusion zwangsläufig ebenfalls wahr.

**Beispiel 2 (Deduktives Schließen: geizige Schotten)****Kein Beweis!**

**Voraussetzungen:** (i) Alle Schotten sind geizig.  
 (ii) Paul ist ein Schotte.

**Konklusion:** Paul ist geizig.

Das Beispiel zeigt, dass die Voraussetzungen beim deduktiven Schließen nicht unbedingt wahr sein müssen. Voraussetzung (i) ist selbstverständlich falsch (es gibt sehr freigiebige Schotten). Trotzdem besteht die logische Folgerungsbeziehung zwischen Voraussetzungen und Konklusion: Es ist unmöglich, dass die Voraussetzungen wahr und die Konklusion falsch sind.

Mathematisches Beweisen beruht in allererster Linie auf deduktivem Schließen.

## 2.2. Induktives Schließen (Induktion)

Der Unterschied zwischen deduktivem und *induktivem Schließen* lässt sich vielleicht am prägnantesten so formulieren: deduktiv schließt man (oft) *vom Allgemeinen zum Speziellen*, induktiv schließt man *vom Speziellen zum Allgemeinen*.

Das deduktive Beispiel 2 schließt von der allgemeinen Voraussetzung, dass alle Schotten geizig sind, zu der speziellen Konklusion, dass der Schotte Paul geizig ist. Induktiv ist es gerade umgekehrt.

**Beispiel 3 (Induktives Schließen: geizige Schotten)****Kein Beweis!**

**Voraussetzungen:** (i) Paul ist ein Schotte. (i') Paul ist geizig.  
 (ii) Andrew ist ein Schotte. (ii') Andrew ist geizig.  
 (iii) Tom ist ein Schotte. (iii') Tom ist geizig.

**Konklusion:** Alle Schotten sind geizig.

Man schließt also aus den Einzelfällen Paul, Andrew und Tom auf ein allgemeines Gesetz, von dem jeder der Einzelfälle ein Spezialfall ist. Das ist natürlich hochgradig unzuverlässig. Kaum jemand würde erwarten, dass diese Konklusion wahr sein muss, nur weil die drei Einzelfälle wahr sind.

**Beispiel 4 (Induktives Schließen: Sonnenaufgang)****Kein Beweis!**

**Voraussetzung:** Bisher ist die Sonne jeden Tag im Osten aufgegangen.

**Konklusion:** An allen Tagen (auch in Zukunft) geht die Sonne im Osten auf.

Diese Konklusion würde dagegen kaum jemand bezweifeln, sofern man die Zukunft auf den Zeitraum beschränkt, in dem das Sonnensystem und die Erde existieren.

**Beispiel 5 (Induktives Schließen: Kondratjew-Zyklus)****Kein Beweis!**

Zur Zeit der Weltwirtschaftskrise kurz vor 1930 untersuchte der russische Wirtschaftswissenschaftler Kondratjew den weltweiten Konjunkturverlauf seit 1800. Er stellte fest, dass Minima und Maxima alle 40 bis 60 Jahre abwechselten.

**Voraussetzung:**

Zwischen 1800 und 1930 wechselten konjunkturelle Minima und Maxima im Abstand von jeweils etwa einem halben Jahrhundert ab.

**Konklusion:**

Es ist eine inhärente Gesetzmäßigkeit unseres Wirtschaftssystems, dass die Konjunktur zyklisch ist: Ihr Verlauf entspricht einer Sinuskurve mit einer Wellenlänge von ca. einem Jahrhundert.

Stimmt Kondratjews Konklusion? Immerhin scheinen das Ende des „Wirtschaftswunders“ (ca. 1970, Maximum) und die Finanzkrise (ca. 2010, Minimum) ganz gut dazu zu passen. Trotzdem gehen die meisten Wirtschaftswissenschaftler heute davon aus, dass die Konklusion nicht stimmt und dass es überhaupt keine zyklischen Konjunkturmuster gibt [Wik16b]. Aber letztlich weiß niemand definitiv, ob Kondratjew Recht hatte oder nicht.

Die Beispiele zeigen, dass auch bei erfüllten Voraussetzungen eine induktive Konklusion nicht mit Sicherheit wahr ist. Sie mag plausibel sein, aber sicher ist sie nicht. Sie ist nur mehr oder weniger wahrscheinlich.

Nichtsdestotrotz ist induktives Schließen im Alltag enorm wichtig. Alle experimentellen Wissenschaften beruhen darauf. In der Informatik wird induktives Schließen in maschinellen Lernsystemen und Datenanalyse-Ansätzen verwendet. Diese Systeme versuchen, in gegebenen Datenmengen Regelmäßigkeiten zu erkennen, die sich zu schematischen Regeln verallgemeinern lassen.

In der Mathematik kann induktives Schließen zwar Ideen für Hypothesen liefern, aber solche Hypothesen können sich als falsch herausstellen. Sie sind erst dann gesichert, wenn sie bewiesen sind. Induktives Schließen eignet sich also zunächst einmal nicht für solche Beweise.

Allerdings gibt es Formen der *vollständigen Induktion*, die im Gegensatz zum allgemeinen induktiven Schließen doch für mathematische Beweise geeignet und in vielen Anwendungsgebieten sogar unentbehrlich sind. Sie garantieren nämlich, dass die Konklusion wahr ist, sofern die Voraussetzungen wahr sind. Ihre Grundidee besteht darin, nicht nur *einige* Einzelfälle zu betrachten, sondern tatsächlich *alle*. Wenn die Induktion in diesem Sinne *vollständig* ist, gilt bei erfüllten Voraussetzungen zwangsläufig auch die Konklusion.

Es ist jedoch alles andere als trivial, sämtliche Einzelfälle zu betrachten, wenn es unendlich viele davon gibt. Verschiedene Formen der vollständigen Induktion unterscheiden sich darin, wie sie ihre Vollständigkeit für unendliche Mengen sicherstellen. Mehr dazu in Kapitel 6.

**Warnung:** Die Bezeichnung „Induktion“ ohne Zusatz ist nicht zu empfehlen. Damit kann „induktives Schließen“ gemeint sein oder „vollständige Induktion“, also Arten des Schließens mit sehr unterschiedlichen Eigenschaften.

## 2.3. Abduktives Schließen (Abduktion)

Beim *abduktiven Schließen* unterscheidet man zwei Arten von Voraussetzungen. Die einen sind *erklärungsbedürftig*. Sie stammen oft aus Beobachtungen, so dass zwar klar ist, *dass* sie gelten, aber nicht, *warum*. Man sucht nach einer Erklärung, wie sie zustandegekommen sind. Diese Voraussetzungen sind in den folgenden Beispielen mit einem Stern markiert. Die restlichen Voraussetzungen repräsentieren Hintergrundwissen über das jeweilige Anwendungsgebiet. Die Konklusion ist eine mögliche Erklärung für die fraglichen Voraussetzungen. Genauer: Hintergrundwissen und Konklusion zusammen reichen aus, damit die erklärungsbedürftigen Voraussetzungen mit Sicherheit gelten – was sie ja tun.

### Beispiel 6 (Abduktives Schließen: geizige Schotten)

Kein Beweis!

**Voraussetzungen:** (i)\* Paul ist geizig.  
 (ii) Alle Schotten sind geizig.  
 (iii) Alle Schwaben sind geizig.

**Konklusion:** Paul ist ein Schotte.

### Beispiel 7 (Abduktives Schließen: medizinische Diagnose)

Kein Beweis!

Ein Arzt untersucht einen Patienten, der über Schmerzen im Brustbereich klagt.

**Voraussetzungen:** (i)\* Der Patient hat Schmerzen im Brustbereich.  
 (ii) Wenn der Patient eine Herzerkrankung hat, sind Schmerzen im Brustbereich typische Symptome.  
 (iii) Wenn der Patient eine Lungenerkrankung hat, sind Schmerzen im Brustbereich typische Symptome.

**Konklusion:** Der Patient hat eine Herzerkrankung.

In beiden Beispielen ist Voraussetzung (i) die erklärungsbedürftige, Voraussetzungen (ii) und (iii) repräsentieren Hintergrundwissen. Vor diesem Hintergrundwissen ist die Konklusion eine mögliche Erklärung für Voraussetzung (i), also dafür, dass Paul geizig ist bzw. dass der Patient Schmerzen im Brustbereich hat.

Die Beispiele machen mehrere Besonderheiten des abduktiven Schließens deutlich:

- Es kann verschiedene Erklärungen geben. In Beispiel 7 ist eine andere abduktive Konklusion für dieselben Voraussetzungen, dass der Patient eine Lungenerkrankung hat, eine weitere, dass er sowohl eine Herz- als auch eine Lungenerkrankung hat, und noch eine andere, dass er eine Lungenerkrankung und einen gebrochenen Zeh hat. In völlig analoger Weise kann man auch zu Beispiel 6 weitere Erklärungen konstruieren.
- Im Gegensatz zum deduktiven Schließen garantiert das abduktive Schließen nicht, dass bei erfüllten Voraussetzungen auch die Konklusion gilt. Wenn alle Voraussetzungen wahr sind, ist eine abduktive Konklusion nicht zwangsläufig ebenfalls wahr, sondern nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit. Verschiedene abduktive Konklusionen schließen sich oft sogar gegenseitig aus, weshalb sie gar nicht alle wahr sein können.

- Eine abduktive Konklusion ist also nur eine ungesicherte Hypothese. Im medizinischen Beispiel müsste der Arzt weitere Untersuchungen durchführen, um eine der möglichen Hypothesen zu erhärten, die er durch abduktives Schließen gewinnen kann.

In den meisten Anwendungen des abduktiven Schließens ist bereits das Hintergrundwissen mit Wahrscheinlichkeiten behaftet. Das ist ein weiterer Grund, warum eine abduktive Konklusion nicht garantiert wahr ist, sondern nur mehr oder weniger wahrscheinlich.

Häufig wird beim abduktiven Schließen zusätzlich verlangt, dass die Konklusion nicht einfach irgend eine Erklärung für die erklärungsbedürftigen Voraussetzungen ist, sondern diejenige mit der höchsten Wahrscheinlichkeit. Man spricht dann auch vom *Schließen auf die beste Erklärung* (*inference to the best explanation*). Wenn zum Beispiel als weitere Voraussetzung hinzukäme, dass der Patient ein starker Raucher ist, würde der Arzt die Hypothese „Lungen-erkrankung“ wohl vorrangig vor anderen Hypothesen überprüfen.

Abduktives Schließen ist im Alltag sehr geläufig und von praktischer Relevanz. In der Informatik wird diese Art des Schließens oft in Diagnosesystemen eingesetzt, die Ursachen von Fehlern in technischen Systemen finden sollen oder Medizinern bei der Diagnose von Krankheiten helfen. Derartige Diagnosesysteme bilden einen eigenen Zweig im großen Bereich der Expertensysteme in der Informatik. In der Mathematik spielt abduktives Schließen dagegen kaum eine Rolle.

## 2.4. Andere Arten des Schließens im Alltag

Im Alltag sind weitere Arten des Schließens verbreitet. Beim *Schließen mit Negation durch Scheitern* (*negation as failure*) schließt man aus der Abwesenheit einer Information, dass diese Information falsch ist (Voraussetzung: Im Fahrplan steht kein Bus für 12:00 Uhr. Konklusion: Es fährt kein Bus um 12:00 Uhr – obwohl der Fahrplan das nicht ausdrücklich ausschließt). Beim *Default Reasoning* verwendet man *Default-Annahmen*, die normalerweise gelten, aber in (seltenen) Ausnahmefällen doch falsch sein können (Voraussetzung: Piepsi ist ein Vogel. Konklusion: Piepsi kann fliegen – obwohl er auch ein Pinguin sein könnte). Beim *epistemischen Schließen* berücksichtigt man, was verschiedene Akteure wissen oder nicht wissen (Voraussetzung: Meine Mutter schlägt vor, jetzt mit mir spazieren zu gehen. Konklusion: Jetzt regnet es oder ist stark bewölkt – obwohl das für Leute, die anders als meine Mutter nicht wissen, dass ich eine Sonnenallergie habe, wohl kaum ein Anlass für diesen Vorschlag gewesen wäre). Beim *Analogieschließen* übernimmt man Konklusionen, die mit anderen, aber ähnlichen Voraussetzungen gewonnen wurden. Es gibt noch eine ganze Reihe weiterer Arten des Schließens.

Manchmal gewinnt man eine Konklusion auch einfach mit dem „gesunden Menschenverstand“ oder durch Intuition oder Eingebung. Das kann durchaus zu sinnvollen Konklusionen führen, aber deren Zustandekommen ist für andere schwer nachvollziehbar.

Viele dieser Arten des Schließens sind im Alltag nützlich oder sogar unverzichtbar. Aber für mathematische Beweise sind sie ungeeignet.

## 2.5. Schließen in mathematischen Beweisen

Beim mathematischen Beweisen besteht die Ausgangssituation nicht darin, dass Voraussetzungen gegeben sind und eine Konklusion gesucht wird. Vielmehr ist auch die Konklusion bereits vorgegeben, und zwar in Form einer *Behauptung*. Was stattdessen gesucht wird, ist ein Nachweis, dass zwischen den vorgegebenen Voraussetzungen und der vorgegebenen Behauptung die logische Folgerungsbeziehung besteht. Man muss also nachweisen: Sofern die Voraussetzungen erfüllt sind, ist garantiert, dass die Behauptung ebenfalls gilt.

Einen solchen Nachweis nennt man einen (mathematischen) *Beweis*, falls er folgende Anforderungen erfüllt:

- Der Nachweis der Folgerungsbeziehung verwendet nur Methoden, die auf schrittweisen Umformungen der Formeln beruhen. Dabei muss für jeden Schritt eindeutig klar sein, was wie und mit welcher Begründung umgeformt wurde. Dadurch wird ein Beweis unabhängig von der Person, die ihn geführt hat, von anderen objektiv nachprüfbar.

- Der Beweis der Behauptung hängt nur von den gegebenen Voraussetzungen ab.

In der Realität sind diese gegebenen Voraussetzungen allerdings meistens gar nicht alle explizit aufgelistet. Deshalb muss man unterscheiden zwischen *expliziten Voraussetzungen* und *impliziten Voraussetzungen*. Beide Arten von Voraussetzungen gelten als gegeben, aber die impliziten werden nicht ausdrücklich genannt.

Implizit können natürlich nur solche Voraussetzungen sein, die für typische Leser selbstverständlich dazugehören. Das sind vor allem Rechenregeln und Standard-Definitionen des jeweiligen Gebiets, oder auch klassische Ergebnisse, die jeder aus dem Gebiet kennt.

Explizit sind dagegen alle Voraussetzungen, die typische Leser nicht von vornherein erwarten, insbesondere Ergebnisse aus neueren mathematischen Arbeiten, die dann auch sauber zitiert werden müssen.

Offensichtlich hängt diese Unterscheidung sehr stark von der Zielleserschaft ab, für die ein Beweis formuliert wird. Voraussetzungen, die in einem Lehrbuch explizit sind, können zum Beispiel in einem spezialisierten Fachartikel implizit sein.

- Üblicherweise erwartet man von einem Beweis außerdem eine äußere Form, aus der unmissverständlich hervorgeht, was zum Beweis gehört und was nicht. Der Anfang eines Beweises besteht fast immer aus dem Wort „Beweis“ (bzw. dessen Übersetzung in die jeweilige Publikationssprache). Sein Ende ist ebenfalls syntaktisch gekennzeichnet, traditionell durch die Abkürzung *q.e.d.* für *quod erat demonstrandum* (das bedeutet „was zu beweisen war“).

In diesem Leitfaden haben alle Beweise die syntaktische Form

**Beweis:** ..... ■

wobei das kleine schwarze Quadrat rechts unten das Ende des Beweises markiert (ein solches Symbol ist auch üblich, weil es weniger Platz benötigt als *q.e.d.* oder gar die volle Floskel *quod erat demonstrandum*).

Die Behauptung, für die ein Beweis gesucht wird, kann auf verschiedene logisch äquivalente Weisen formuliert werden, zum Beispiel „*Es gibt eine Menge, die kein Element enthält*“ oder „*Nicht jede Menge enthält ein Element*“. Siehe dazu auch Abschnitt 3.5.

Zwischen Voraussetzungen und Behauptung besteht beim Beweisen derselbe Zusammenhang wie beim deduktiven Schließen. Aber der *Nachweis* dieses Zusammenhangs ist grundsätzlich auf zwei Weisen möglich: durch *Vorwärtsschließen* und durch *Rückwärtsschließen*. Und jede dieser beiden Richtungen kann im Prinzip sowohl für die *Beweispräsentation* als auch für die *Beweissuche* eingesetzt werden.

### 2.5.1. Vorwärtsschließen

*Vorwärtsschließen* geht von Voraussetzungen aus und erschließt daraus die Behauptung. Beginnend mit Voraussetzungen folgen also Beweisschritte, bis die Behauptung dasteht.

Vorwärtsschließen ist die Standard-Vorgehensweise für die *Präsentation* eines Beweises und meistens auch die natürlichste Vorgehensweise für die *Suche* nach einem Beweis.

### 2.5.2. Rückwärtsschließen

*Rückwärtsschließen* beginnt mit der Behauptung und verfolgt rückwärts die Argumentketten, mit denen die Behauptung bewiesen wird, bis diese Ketten mit Voraussetzungen enden.

Rückwärtsschließen kann hilfreich sein, während man nach einem Beweis *sucht*. Wenn der Beweis dann gefunden ist, wird er aber traditionell in Vorwärtsrichtung *präsentiert*. Das erklärt in vielen Fällen, wieso Beweisschritte manchmal vom Himmel zu fallen scheinen (vergleiche Kapitel 1, Punkt 6). Sie wurden durch Rückwärtsschließen gefunden, aber in Vorwärts-Argumentketten präsentiert. Beispiel 11 auf Seite 24 illustriert einen solchen Fall.

Rückwärtsschließen wird in der Informatik in einigen automatischen Systemen eingesetzt, zum Beispiel in der Programmiersprache PROLOG. Man kann auch das abduktive Schließen als Variante des Rückwärtsschließens mit einem anderen Richtungsbegriff auffassen, aber das ist für mathematische Beweise nicht relevant und soll deshalb hier nicht vertieft werden.

### 2.5.3. Bidirektionales Schließen

Unter *bidirektionalem Schließen* versteht man Mischformen von Vorwärts- und Rückwärtsschließen. Bidirektionales Schließen dient selten zur *Beweispräsentation*, sondern fast ausschließlich zur *Beweissuche*. Deshalb spricht man auch meistens von bidirektionaler *Suche*.

Häufig sind manche Voraussetzungen Definitionen, die eine Kurznotation für komplexere Formeln oder Terme einführen. Die übrigen Voraussetzungen und die Behauptung verwenden diese Kurznotation. Im Beweis braucht man aber normalerweise die vollen Details, die sich hinter der Kurznotation verbergen.

Bei der *Beweissuche* besteht deshalb eine typische Vorgehensweise darin, dass man zunächst die Definition auf Voraussetzungen anwendet und so ein Zwischenergebnis① erhält, in dem die Kurznotation „ausgepackt“ ist. Zwischenergebnis① hat man damit durch *Vorwärtsschließen* gewonnen. Dann wendet man die Definition auf die Behauptung an, um die Kurznotation auch hier „auszupacken“, und erhält so durch *Rückwärtsschließen* ein Zwischenergebnis②. Dann sucht man, wie man von Zwischenergebnis① zu Zwischenergebnis② kommen kann.

Egal wie man diese verbleibende Lücke füllt, sobald sie geschlossen ist, hat man einen Beweis durch *bidirektionales Schließen* gefunden.

Zur *Präsentation* des gefundenen Beweises schreibt man die einzelnen Schritte aber nicht chronologisch in der Reihenfolge auf, in der man sie beim Suchen durchgeführt hat, sondern in der Reihenfolge, als hätte man sie alle durch Vorwärtsschließen gefunden. Für Zwischenergebnis ① ändert das nichts gegenüber der Beweissuche. Aber bei Zwischenergebnis ② dreht man den Schritt, der durch Rückwärtsschließen gefunden wurde, in Vorwärtsrichtung um: Man wendet die Definition nicht auf die Behauptung an, um die darin verwendete Kurznotation „auspacken“, sondern auf Zwischenergebnis ②, um die darin vorkommenden komplexen Details wieder in die Kurznotation „einpacken“ und so die Behauptung zu erhalten.

Diese Vorgehensweise wird später noch einmal anhand von konkreten Beweisen erläutert: Für Beispiel 8 auf Seite 21 im Text kurz hinter dem Beispiel und für Beispiel 10 auf Seite 23 im Unterabschnitt 4.1.1.



Design Patterns für mathematische Beweise

Ein Leitfaden insbesondere für Informatiker

Ohlbach, H.J.; Eisinger, N.

2017, XI, 184 S. 2 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-55651-1