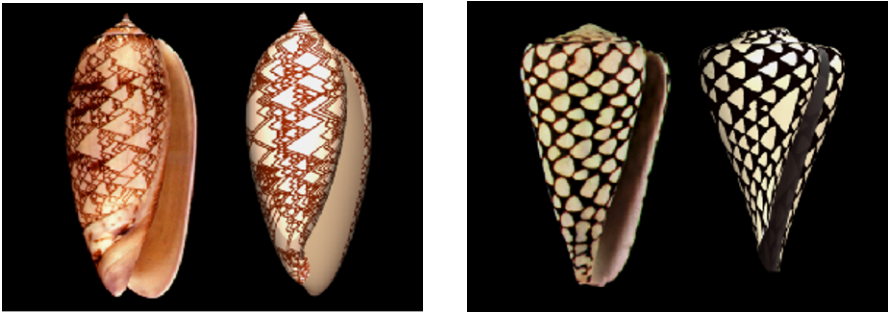


Kapitel 2

Dynamische Systeme



Seeschnecken (Links: Oliva porphyria, Rechts: Conus marmoreus)
 Jeweils Links: Fotografie, Rechts: Simulation durch ein dynamisches System.¹

2.1	Iterierte Abbildungen, dynamische Systeme	12
2.2	Stetige dynamische Systeme	16
2.3	Differenzierbare dynamische Systeme	26

Dynamiken kann man unter verschiedenen Blickwinkeln und mit unterschiedlichen Zusatzstrukturen betrachten, und entsprechend gibt es auch verschiedene Definitionen dynamischer Systeme. Wir werden in diesem Kapitel zwar hauptsächlich sogenannte *topologische* und *differenzierbare* dynamische Systeme untersuchen, beginnen aber noch etwas allgemeiner.

Erst ab Kapitel 6 rücken die in der Klassischen Mechanik dominierenden *hamiltonschen* dynamischen Systeme ins Zentrum. Das sind Lösungen von speziellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Sie besitzen ein zeitinvariantes Maß, was für einen Vektorraum als Phasenraum das Lebesgue-Maß ist.

Das Kapitel 9 widmet sich solchen (nicht notwendig hamiltonschen) *maßerhaltenden* dynamischen Systemen.

¹Die Fotos entstammen Kapitel 10 (geschrieben von D. FOWLER und P. PRUSINKIEWICZ [FP]) in H. MEINHARDT: The Algorithmic Beauty of Sea Shells. 4. ed., c Springer 2009. Fotos mit freundlicher Genehmigung von D. FOWLER und P. PRUSINKIEWICZ

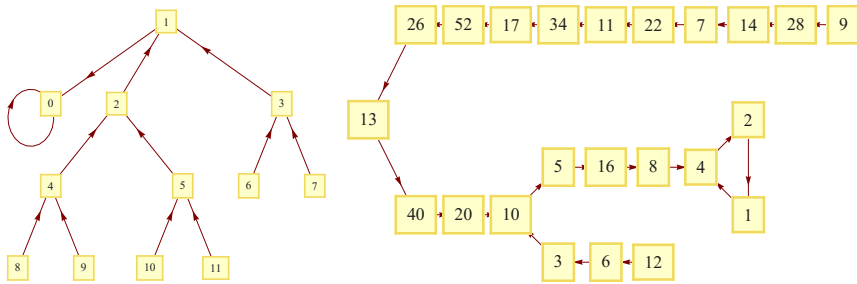


Abbildung 2.1.1: Iterierte Abbildungen. Links: Beispiel 2.2. Rechts: Collatz-Graph aus Beispiel 2.3

2.1 Weiterführende Literatur Die Lehrbücher von KATOK und HASSELBLATT [KH] und von ROBINSON [Ro] behandeln allgemeine (nicht notwendig hamiltonsche) dynamische Systeme, und auch iterierte nicht invertierbare Abbildungen (die oft ebenfalls als dynamische Systeme bezeichnet werden). $\diamond$

2.1 Iterierte Abbildungen, dynamische Systeme

„Wir müssen also den gegenwärtigen Zustand des Weltalls als die Wirkung seines früheren und als die Ursache des folgenden Zustandes betrachten. Eine Intelligenz, welche für einen gegebenen Augenblick alle in der Natur wirkenden Kräfte sowie die gegenseitige Lage der sie zusammensetzenden Elemente kannte, und überdies umfassend genug wäre, um diese gegebenen Größen der Analysis zu unterwerfen, würde in derselben Formel die Bewegungen der größten Himmelskörper wie des leichtesten Atoms umschließen; nichts würde ihr ungewiß sein und Zukunft und Vergangenheit würden ihr offen vor Augen liegen.“ PIERRE-SIMON LAPLACE (1814), [Lap], Seite 1

Gegeben sei eine Abbildung $f : M \rightarrow M$ einer Menge M in sich. Diese können wir iterieren, indem wir die *iterierte Abbildung*

$$f^{(0)} := \text{Id}_M \quad , \quad f^{(t)} := f \circ f^{(t-1)} \quad (t \in \mathbb{N})$$

definieren. Für jedes $m \in M$ erhalten wir eine Folge $a : \mathbb{N} \rightarrow M$, $a_t = f^{(t)}(m)$. Wir nennen dann M Phasenraum, t Zeitparameter und m Anfangspunkt. Wir haben nicht vorausgesetzt, dass f injektiv ist. Dass verschiedene Anfangspunkte also die gleiche Zukunft haben können, kann man am Graphen von f ablesen.

2.2 Beispiel Für $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $m \mapsto \lfloor m/2 \rfloor$ ergibt sich der in Abbildung 2.1.1 (links) durch Pfeile von m nach $f(m)$ dargestellte gerichtete Graph. $\diamond$

Schon einfache iterierte Abbildungen können zu sehr schwierigen Fragen führen.

2.3 Beispiel (Collatz–Vermutung) Auf dem Phasenraum $M := \mathbb{N}$ ist f definiert durch $f(m) := m/2$, falls m gerade und $f(m) := 3m + 1$, falls m ungerade. Zum Beispiel beginnt die Folge mit Anfangspunkt 7 mit 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, ... und wird nach Erreichen der Eins zyklisch, siehe Abbildung 2.1.1 (rechts).

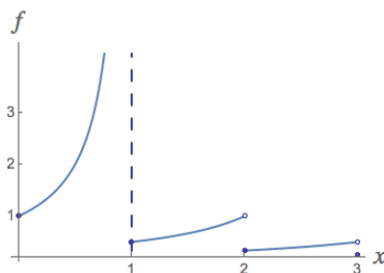
Die Vermutung von Lothar Collatz, dass *jede* Folge die 1 enthält, ist seit 1937 weder bewiesen noch widerlegt worden. $\diamond$

2.4 Beispiel (Calkin–Wilf–Folge) Für die Zerlegung $x = [x] + \{x\}$ von $x \in \mathbb{R}$, mit $[x] \in \mathbb{Z}$ und $\{x\} \in [0, 1)$ iterieren wir die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad , \quad x \mapsto \frac{1}{[x] + 1 - \{x\}} ,$$

beginnend mit 1. Die ersten Folgenglieder sind also

$1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, 3, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \dots$
Diese Folge zählt die positiven rationalen Zahlen ab. Einen Beweis findet man in CALKIN und WILF [CW]. $\diamond$



2.5 Aufgabe (Cantor–Menge) Im Intervall

$I := [0, 1]$ befindet sich das Loch $L := (1/3, 2/3)$.

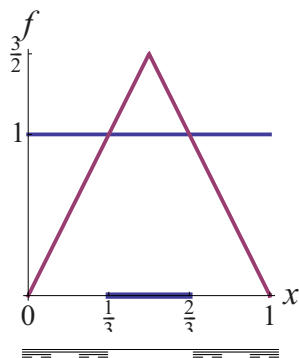
Wir iterieren die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{3}{2}(1 - 2|x - 1/2|)$$

so oft, bis wir das Loch erreichen. Wir betrachte also für den Startwert $x_0 \in I$ die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_{n+1} := f(x_n)$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$C := \{x_0 \in I \setminus L \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in I \setminus L\}$$

der nie in das Loch fallenden Anfangswerte die Cantorsche $1/3$ -Menge ist. $\diamond$



2.6 Bemerkung (Invertierbarkeit)

Die Grundgleichungen der Natur geben keine Zeitrichtung vor. Daher spielen nicht bijektive, eine Dynamik definierende Abbildungen nur als grobe Modelle physikalischer Geschehnisse eine Rolle. Statt allgemeiner iterierter Abbildungen stehen in der Klassischen Mechanik eher dynamische Systeme im Sinn der folgenden Definition im Mittelpunkt des Interesses.

Trotzdem kommen wir gelegentlich auf nicht injektive iterierte Abbildungen zurück (so die *logistische Familie* aus Beispiel 2.26). Denn diese können schon in Dimension Eins komplizierte Dynamiken aufweisen und eignen sich daher besonders zur Veranschaulichung. $\diamond$

2.7 Definition Für die Gruppen $G := (\mathbb{Z}, +)$ beziehungsweise $G := (\mathbb{R}, +)$ heißt eine Familie von Abbildungen $\Phi_t : M \rightarrow M$ ($t \in G$) auf einer Menge M **dynamisches System**, wenn gilt:

$$\Phi_0 = \text{Id}_M \quad \text{und} \quad \Phi_{t_2} \circ \Phi_{t_1} = \Phi_{t_1+t_2} \quad (t_1, t_2 \in G). \quad (2.1.1)$$

M heißt dann **Phasenraum**. Für $G = \mathbb{Z}$ heißt das dynamische System **diskret**, für $G = \mathbb{R}$ **kontinuierlich** oder **Fluss** auf M .

2.8 Beispiel (Diskretes dynamisches System)

$(\Phi_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ ist genau dann ein dynamisches System, wenn $f := \Phi_1 : M \rightarrow M$ bijektiv ist mit $\Phi_t = f^{(t)}$ und $\Phi_{-t} = (f^{-1})^{(t)}$ ($t \in \mathbb{N}_0$). $\diamond$

2.9 Bemerkungen

1. Der Phasenraumpunkt $\Phi(t, m)$ gibt den Zustand des dynamischen Systems (also z.B. die Orte und Geschwindigkeiten der betrachteten Himmelskörper) zur Zeit t an, wenn zur Zeit 0 der Zustand m war.
2. Die Forderung $\Phi_0(m) = m$ ist nur billig und stellt sicher, dass die Abbildungen Φ_t bijektiv sind.

Die Forderung $\Phi_{t_2} \circ \Phi_{t_1} = \Phi_{t_1+t_2}$ der Invarianz unter Zeittranslationen ist für $G = \mathbb{R}$ erfüllt, wenn Φ die Lösung eines autonomen Differentialgleichungssystems ist (siehe Def. 3.13). Um beispielsweise die Position und Geschwindigkeit der Erde in zehn Monaten zu berechnen, können wir zunächst ihren Zustand in sieben Monaten bestimmen, um danach diesen Zeitpunkt als neuen Zeitnullpunkt zu wählen und den Zustand in drei Monaten zu berechnen.

Für Lösungen Φ explizit zeitabhängiger Differentialgleichungen ist diese Forderung aber nicht erfüllt. Nehmen wir etwa an, dass in acht Monaten ein schneller Komet die Erde ablenkt und sei $\Phi(t, m)$ der Zustand der Erde zum Zeitpunkt t . Dann erfüllt *diese* Abbildung Φ die obige Bedingung nicht. Erst nach Einbeziehung der Kometendynamik durch Vergrößerung des Phasenraums um dessen Ort und Geschwindigkeit erhalten wir wieder ein autonomes Differentialgleichungssystem und als Lösung ein dynamisches System. $\diamond$

2.10 Definition

Für ein dynamisches System $(\Phi_t)_{t \in G}$ auf dem Phasenraum M und $m \in M$ heißt

- die Abbildung $G \rightarrow M$, $t \mapsto \Phi_t(m)$ die **Bahnkurve** durch m .
- ihr Bild $\mathcal{O}(m) := \{\Phi_t(m) \mid t \in G\}$ der **Orbit** oder die **Trajektorie** durch m ,
- m heißt **Ruhelage** oder **Fixpunkt**, wenn $\mathcal{O}(m) = \{m\}$.
- $m \in M$ heißt **periodisch** (oder **geschlossen**) mit **Periode** $T \in G$, wenn $T > 0$ und $\Phi_T(m) = m$.
 T heißt dabei **Minimalperiode**, wenn für alle $t \in (0, T)$ gilt: $\Phi_t(m) \neq m$.

Analoge Definitionen ergeben sich für nicht invertierbare iterierte Abbildungen, wenn man von der Gruppe $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{N}_0$ übergeht.

2.11 Beispiel (Matrixpotenzen als dynamische Systeme)

Für eine invertierbare symmetrische Matrix $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ und $M := \mathbb{R}^n$ ist

$$\Phi : \mathbb{Z} \times M \rightarrow M, \quad \Phi(t, x) := A^t x \quad \text{mit } A^t = \sum_{\lambda \in \text{spek}(A)} \lambda^t P_\lambda$$

für die Spektraldarstellung $A = \sum_{\lambda \in \text{spek}(A)} \lambda P_\lambda$ von A ein dynamisches System. Falls $1 \notin \text{spek}(A)$, also kein Eigenwert ist, ist $x = 0$ die einzige Ruhelage. $\diamond$

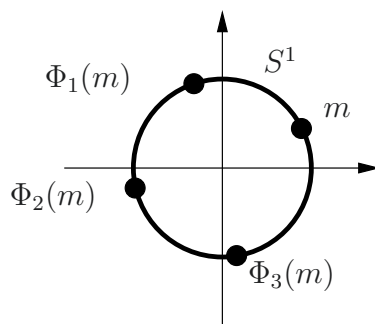
2.12 Aufgaben (Periode)

1. Auf dem Phasenraum $S^1 = \{c \in \mathbb{C} \mid |c| = 1\}$ sei für einen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ die Drehung um Vielfache von $2\pi\alpha$ gegeben durch

$$\Phi_t : S^1 \rightarrow S^1, \quad \Phi_t(m) := \exp(2\pi i t \alpha) m \quad (t \in \mathbb{Z}), \quad (2.1.2)$$

siehe Abbildung. Zeigen Sie:

- (a) Die Abbildungen (2.1.2) bilden ein dynamisches System.
- (b) Für rationale Parameterwerte $\alpha \in \mathbb{Q}$, also $\alpha = \frac{q}{p}$, $q \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$, q und p teilerfremd, ist jeder Phasenraumpunkt periodisch, mit Minimalperiode p .
- (c) Für irrationale $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist kein Phasenraumpunkt periodisch.



2. Die Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^m$ mit $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ induziert durch Einschränkung auf $|z| = 1$ eine (nicht invertierbare) Abbildung $f_m : S^1 \rightarrow S^1$ der Kreislinie auf sich.

Berechnen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl $P_n(f_m)$ der periodischen Punkte von f_m mit Periode n (wobei n nicht die Minimalperiode zu sein braucht) und zeigen Sie, dass die Menge der periodischen Punkte von f_m dicht in S^1 liegt. $\diamond$

2.13 Satz (Orbiten dynamischer Systeme)

1. Die Relation $m_1 \sim m_2$, falls $m_2 \in \mathcal{O}(m_1)$ der Zugehörigkeit zum gleichen Orbit ist eine Äquivalenzrelation auf M .
2. Ist m periodisch mit Periode T , dann gilt dies auch für alle Punkte des Orbits $\mathcal{O}(m)$ (wir sprechen dann von einem **periodischen Orbit**).
3. Besitzt der Orbit $\mathcal{O}$ die Minimalperiode $T > 0$, dann ist diese eindeutig, und die Perioden von $\mathcal{O}$ bilden die Menge $T\mathbb{N} = \{Tn \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis:

1. • Wegen $\Phi_0 = \text{Id}_M$ ist die Relation $\sim$ *reflexiv* (d.h. $m \sim m$ für alle $m \in M$).
 • Ist $m_2 = \Phi_t(m_1)$, dann gilt $\Phi_{-t}(m_2) = \Phi_{-t} \circ \Phi_t(m_1) = \Phi_{t-t}(m_1) = m_1$, die Relation also *symmetrisch*.
 • Mit $m_2 = \Phi_{t_1}(m_1)$ und $m_3 = \Phi_{t_2}(m_2)$ ist $m_3 = \Phi_{t_1+t_2}(m_1)$, $\sim$ also *transitiv*.
2. Ist $m' = \Phi_t(m)$, dann ist $\Phi_T(m') = \Phi_{T+t}(m) = \Phi_t \circ \Phi_T(m) = \Phi_t(m) = m'$, also T auch Periode von m' .
3. Ist $S > 0$ ebenfalls Minimalperiode von $\mathcal{O}$, dann gilt $T \notin (0, S)$, also $T \geq S$ und umgekehrt $S \geq T$.

Letzteres gilt für alle Perioden S . Wäre $S \notin T\mathbb{N}$, dann gäbe es eine eindeutige Darstellung $S = nT + r$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $r \in (0, T)$. Damit wäre auch r Periode von $m \in \mathcal{O}$:

$$\Phi_r(m) = \Phi_{S-nT}(m) = \Phi_S \circ \Phi_{-nT}(m) = \Phi_S(m) = m,$$

was einen Widerspruch zur Minimalität von T ergeben würde. $\square$

Für die Gruppe $G = \mathbb{Z}$ von Zeiten haben die Ruhelagen eine Minimalperiode, nämlich 1, für $G = \mathbb{R}$ haben sie keine.

2.14 Definition Eine Teilmenge $N \subseteq M$ des Phasenraums M heißt

- **vorwärtsinvariant**, wenn für alle $t \in G$, $t \geq 0$ gilt: $\Phi_t(N) \subseteq N$.
- **invariant**, wenn für alle $t \in G$ gilt: $\Phi_t(N) \subseteq N$.

Invariante Teilmengen N haben die Eigenschaft $\Phi_t(N) = N$ für alle $t \in G$, denn aus $\Phi_{-t}(N) \subseteq N$ folgt $N = \Phi_t(\Phi_{-t}(N)) \subseteq \Phi_t(N)$.

Wir nennen eine nicht leere invariante Teilmenge N von M (mengentheoretisch) *minimal*, wenn sie nicht ihrerseits eine echte solche Teilmenge besitzt. Die minimalen Teilmengen sind also gerade die Orbits. Wir haben also ein dynamisches System $(\Phi_t)_{t \in G}$ verstanden, wenn wir dessen Orbits und die Restriktionen von $\Phi_t : M \rightarrow M$ auf diese Orbits kennen.

2.15 Aufgabe (Minimalperiode eines dynamischen Systems)

Wir nennen $T > 0$ **Periode des dynamischen Systems**, wenn $\Phi_T = \text{Id}_M$ gilt.

Zeigen Sie, dass ein diskretes dynamisches System $\Phi : \mathbb{Z} \times M \rightarrow M$ auf einer endlichen Menge $M \neq \emptyset$ als Minimalperiode das kleinste gemeinsame Vielfache der Minimalperioden seiner Orbits besitzt. $\diamond$

2.2 Stetige dynamische Systeme

Die Zahl der Fragen an ein dynamisches System erhöht sich enorm, wenn wir eine Topologie zur Verfügung haben (siehe Anhang A.1), also zum Beispiel von Grenzwerten sprechen können.

2.16 Definition

Ein dynamisches System $(\Phi_t)_{t \in G}$ auf dem Phasenraum M heißt **stetiges** oder **topologisches** dynamisches System, wenn M ein topologischer Hausdorff-Raum ist und

$$\Phi : G \times M \rightarrow M \quad , \quad \Phi(t, m) := \Phi_t(m)$$

stetig² ist.

2.17 Bemerkungen (Topologische dynamische Systeme)

1. Da $\mathbb{Z}$ als topologischer Raum diskret ist, also jede Teilmenge offen ist, ist die Stetigkeit von Φ für $G = \mathbb{Z}$ gleichbedeutend mit der Stetigkeit der Φ_t ($t \in \mathbb{Z}$). Dies wiederum ist äquivalent dazu, dass $\Phi_1 : M \rightarrow M$ ein Homöomorphismus (siehe Definition A.17) ist. Umgekehrt erzeugt jeder Homöomorphismus $f : M \rightarrow M$ durch Iteration ein stetiges dynamisches System.
2. In fast allen Anwendungen ist der Phasenraum eines dynamischen Systems in natürlicher Weise ein Hausdorff-Raum. Ob aber die Dynamik stetig ist, muss von Fall zu Fall entschieden werden. Dies ist zum Beispiel bei Billards oder bei Stößen von Punktmassen nicht immer der Fall.
3. Verzichtet man auf die Topologie, also auch auf die Forderung der Stetigkeit von Φ , dann verliert man aber die Kontrolle darüber, dass für endliche Zeit t die $\Phi(t, m')$ nahe bei $\Phi(t, m)$ bleibt, wenn die Anfangspunkte $m, m' \in M$ nahe beieinander liegen. Dies ist aber von praktischem Interesse, denn m kann im Experiment nur mit endlicher Genauigkeit gemessen werden.
4. In allen einleitenden Beispielen ist M der Raum der Orte q und Geschwindigkeiten v der betrachteten Massenkörper. Etwa im Fall der Erde im dreidimensionalen Raum ist also M der topologische Raum $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ und $m = (q, v)$. Der Wert $\Phi(t, m)$ gibt den Zustand (also hier Ort und Geschwindigkeit) des Körpers nach der Zeit t an, wenn er sich zur Zeit 0 im Zustand m befand.
Wir möchten aber auch zum Beispiel die Bewegung einer Perle auf einem kreisförmigen Draht betrachten. Dort ist ihr Ort durch einen Punkt auf dem Kreis $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$ gegeben und der Phasenraum ist die Mannigfaltigkeit $M := S^1 \times \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ für die Geschwindigkeit der Kreisbewegung). Im Anhang A.2 wird der Begriff der Mannigfaltigkeit eingeführt.
5. Es kommen auch Phasenräume vor, die keine Mannigfaltigkeiten sind.

Beispielsweise definiert die quantenmechanische *Schrödinger-Gleichung*

$$\frac{d\Phi_t}{dt} = -i H \Phi_t \quad , \quad \Phi_0 = \mathbb{1}_{\mathcal{H}}$$

eines selbstadjungierten Operators $H = H^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ eine unitäre Zeitentwicklung $\Phi_t = \exp(-i H t)$ ($t \in \mathbb{R}$) auf dem $\mathbb{C}$ -Hilbert-Raum $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

²Dabei wird $(\mathbb{R}, +)$ beziehungsweise $(\mathbb{Z}, +)$ als topologische Gruppe (Definition E.16) aufgefasst und die Produkttopologie (Anhang A.1) auf $G \times M$ benutzt.

Letzterer ist als normierter Vektorraum ein topologischer Raum, und die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \quad , \quad \Phi(t, \psi) = \Phi_t(\psi)$$

ist stetig³. Allerdings ist nur für $\dim(\mathcal{H}) < \infty$ der Phasenraum eine (endlich-dimensionale) Mannigfaltigkeit im Sinn der Definition A.25.

6. Teil unserer Aufgabe wird es sein, Φ zu bestimmen, für die Gruppe $G = \mathbb{R}$ durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen und für $G = \mathbb{Z}$ durch Iteration einer Abbildung. Die Abbildungen Φ werden dabei nicht nur stetig, sondern beliebig oft differenzierbar („glatt“) sein, falls entsprechendes für die Differentialgleichung beziehungsweise für die zu iterierende Abbildung gilt.
7. Lässt man in Definition 2.16 beliebige topologische Gruppen⁴ $(G, \circ)$ zu (und fordert verallgemeinert $\Phi_{t_2} \circ \Phi_{t_1} = \Phi_{t_2 \circ t_1}$), dann kommt man zum Begriff der (topologischen) *Gruppenwirkung*, genauer *Linkswirkung* oder *-operation*, im Gegensatz zur *Rechtswirkung* mit $\Phi_{t_2} \circ \Phi_{t_1} = \Phi_{t_1 \circ t_2}$. Solche Gruppenwirkungen können z.B. als Symmetrien eines dynamischen Systems auftreten. Der Spezialfall dynamischer Systeme ist zwar insofern einfacher, weil die topologischen Gruppen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Z}$ abelsch sind. Allerdings sind sie nicht kompakt, was die Analyse erschwert. $\diamond$

2.18 Beispiele (Topologische dynamische Systeme)

1. Ein einfaches Beispiel ist die *freie Bewegung* eines Himmelskörpers im Vakuum. Der Phasenraum ist wieder $M := \mathbb{R}_q^3 \times \mathbb{R}_v^3$. Da nach Voraussetzung am Körper keine Kräfte angreifen, ist seine Beschleunigung $\frac{d^2}{dt^2}q = 0$. Damit ist die Geschwindigkeit, also die Ableitung $v = \frac{d}{dt}q$ des Ortes nach der Zeit, zeitlich konstant: $\frac{d}{dt}v = 0$, und wir haben die in Anfangswert m und Zeit t stetige Lösung

$$\Phi(t, m) = (q + vt, v) \quad (t \in \mathbb{R}, m = (q, v) \in M) .$$

2. Das einleitende Beispiel des himmelsmechanischen Zweikörperproblems liefert dagegen im strengen Sinn noch nicht einmal ein dynamisches System im Sinn von Definition 2.7, denn die beiden Himmelskörper können in endlicher Zeit kollidieren. Restringt man aber den Phasenraum durch die (flussinvariante) Bedingung $q \times v \neq 0$ nicht verschwindenden Drehimpulses, dann erhält man ein stetiges dynamisches System.

3. Für eine endliche Menge $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ist auf dem Folgenraum

$$M := \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{A}\} = \{(a_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mid a_k \in \mathcal{A}\}$$

³Im Fall der in der Quantenmechanik üblichen *unbeschränkten* selbstadjungierten Operatoren H ist der Fluss Φ zwar nicht mehr bezüglich der Normtopologie, aber der sogenannten starken Topologie auf $\mathcal{H}$ stetig.

⁴siehe Anhang E.1 und E.2.

durch

$$\Phi_t : M \rightarrow M, \quad (\Phi_t(a))_k := a_{k+t} \quad (t \in \mathbb{Z}) \quad (2.2.1)$$

eine diskrete Dynamik definiert.

Versieht man das sogenannte *Alphabet* $\mathcal{A}$ mit der diskreten Topologie und den *Folgenraum* oder *Shift* M mit der Produkttopologie, dann ist M ein topologischer Raum und der *Shift* Φ ein stetiges dynamisches System. Nach dem Satz von Tychonoff (Satz A.19) ist dabei der Phasenraum X kompakt.

Obwohl sein Phasenraum (für $|\mathcal{A}| > 1$) keine Mannigfaltigkeit bildet, kann es, wie wir sehen werden, auch für die Analyse physikalisch relevanter chaotischer dynamischer Systeme benutzt werden.

Als einfaches Beispiel betrachten wir ein von drei Kreisscheiben elastisch reflektiertes Teilchen, siehe Abbildung. Diejenigen Orbits, die für alle Zeiten beschränkt sind, besitzen unendlich viele Kollisionen mit den Scheiben.

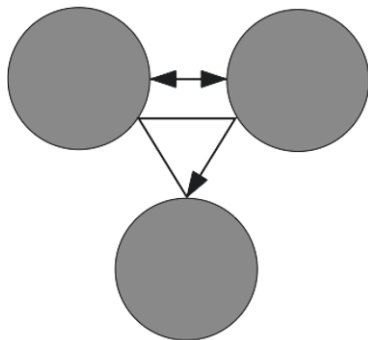
Da sie nicht zweimal hintereinander mit der selben Scheibe kollidieren können, ist die Kollisions-Folge ein Punkt in

$$\Sigma := \{a \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \mid \forall k \in \mathbb{Z} : a_{k+1} \neq a_k\},$$

für das die Kreisscheiben nummerierende Alphabet $\mathcal{A} := \{1, 2, 3\}$. Es stellt sich heraus, dass es eine Bijektion zwischen Σ und denjenigen Phasenraumpunkten auf den Scheiben gibt, die zu diesen gebundenen Orbits gehören.

In der Abbildung werden zwei periodische Orbits dargestellt, mit den Symbolfolgen $\overline{12}$ beziehungsweise $\overline{123}$.

Siehe [KS, Section 3] für weitere Details. $\diamond$



2.19 Aufgabe (Shift) Es sei wie in Beispiel 2.18.3 $\mathcal{A}$ ein Alphabet, $M := \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

(a) Überprüfen Sie, dass $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$, gegeben durch

$$d(x, y) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-|j|} d_{\mathcal{A}}(x_j, y_j) \quad (x = (x_j)_{j \in \mathbb{Z}}, y = (y_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in M),$$

mit $d_{\mathcal{A}}(a, b) := 0$ falls $a = b$, sonst $d_{\mathcal{A}}(a, b) := 1$, eine Metrik auf M definiert. Zeigen Sie, dass der Shift Φ stetig ist.

(b) Wie viele periodische Punkte $m \in M$ und wie viele periodische Orbits der Periode $n \in \{2, 3, 4\}$ hat Φ aus (2.2.1) für das Alphabet $\mathcal{A} := \{0, 1\}$? Geben Sie alle Punkte der Minimalperiode n für $n \in \{2, 3, 4\}$ an.

(c) Zeigen Sie, dass ein $x \in M$ mit in M dichtem Orbit existiert, das heißt, es gilt

$$\overline{\{\Phi_t(x) \mid t \in \mathbb{Z}\}} = M.$$

Bemerkung: Damit ist das stetige dynamische System $\Phi : \mathbb{Z} \times M \rightarrow M$ *topologisch transitiv*, das heißt für offene, nicht leere $A, B \subseteq M$ gibt es ein $t \in \mathbb{Z}$ mit $\Phi_t(A) \cap B \neq \emptyset$. $\diamond$

Das Langzeitverhalten eines Punktes im Phasenraum M wird (zumindest für kompakte M) durch seine Limesmengen beschrieben:

2.20 Definition

Für ein stetiges dynamisches System $\Phi : G \times M \rightarrow M$ und $x \in M$ heißen

$$\alpha(x) := \left\{ y \in M \mid \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = -\infty \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(t_n, x) = y \right\},$$

$$\omega(x) := \left\{ y \in M \mid \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(t_n, x) = y \right\}$$

α -Limesmenge von x beziehungsweise ω -Limesmenge von x .

Diese Mengen sind einerseits Invarianten des Orbits $\mathcal{O}(x)$ (das heißt $\alpha(y) = \alpha(x)$ und $\omega(y) = \omega(x)$ für $y \in \mathcal{O}(x)$), andererseits selbst invariant.

Man ist aber nicht nur an den einzelnen Orbits interessiert, sondern auch am Verhalten benachbarter Orbits. Zum Beispiel ist es beruhigend, dass auch bei einer kleinen Veränderung der Geschwindigkeit der Erde, etwa durch Meteoriteneinschlag, ihre neue Bahn auf Dauer in der Nähe der alten bleibt. Zunächst untersuchen wir die Stabilität von Fixpunkten, später von periodischen Orbits.

2.21 Definition (Stabilität)

Sei $m_0 \in M$ ein Fixpunkt des stetigen dynamischen Systems $\Phi : G \times M \rightarrow M$.

1. m_0 heißt **liapunov-stabil**, wenn für jede Umgebung $U \subseteq M$ von m_0 eine (kleinere) Umgebung V von m_0 existiert, so dass für alle $t \geq 0$

$$\Phi_t(V) \equiv \{\Phi_t(m) \mid m \in V\} \subseteq U.$$

2. Andernfalls heißt m_0 **instabil**.

3. m_0 heißt **asymptotisch stabil**, falls m_0 liapunov-stabil ist und eine vorwärtsinvariante Umgebung $V \subseteq M$ von m_0 existiert mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(m) = m_0 \quad (m \in V).$$

2.22 Aufgabe (Stabilität)

Auf dem Phasenraum $M := \mathbb{C}$ seien für den Parameter $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Abbildungen $\Phi_t : M \rightarrow M$, $\Phi_t(m) := \lambda^t m$ ($t \in \mathbb{Z}$) gegeben. Zeigen Sie:

- (a) Diese bilden ein stetiges dynamisches System, und $0 \in M$ ist ein Fixpunkt.
- (b) Dieser Fixpunkt ist genau dann liapunov-stabil, wenn $|\lambda| \leq 1$.
- (c) Der Fixpunkt ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $|\lambda| < 1$. $\diamond$

2.23 Definition

- Eine kompakte invariante Teilmenge $A \subseteq M$ heißt **Attraktor** des stetigen dynamischen Systems $\Phi : G \times M \rightarrow M$, wenn eine offene Umgebung $U_0 \subseteq M$ von A existiert mit

(a) U_0 ist vorwärts invariant.

(b) Für jede offene Umgebung V von A , $A \subseteq V \subseteq U_0$ gibt es ein $\tau > 0$ mit $\Phi_t(U_0) \subseteq V$ für alle $t \geq \tau$.

- Das **Bassin** eines Attraktors A ist die Vereinigung aller offenen Umgebungen U_0 von A , die a) und b) erfüllen.

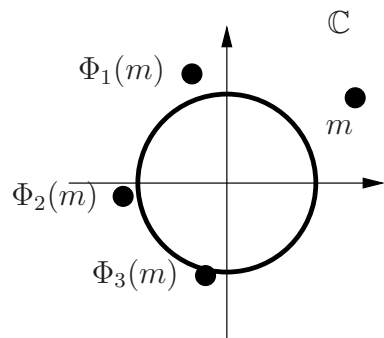
Damit ist das Bassin B selbst eine offene Umgebung von A , die die Eigenschaft a) besitzt. Wie das nächste Beispiel zeigt, ist aber die Eigenschaft b) für B im Allgemeinen nicht erfüllt.

2.24 Beispiel (Attraktor)

Auf dem Phasenraum $\mathbb{C}$ ist ein stetiges dynamisches System $\Phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben durch Iteration des Homöomorphismus

$$\Phi_1(m) := \begin{cases} e^{i\lambda} \frac{m}{\sqrt{|m|}} & , \quad m \neq 0 \\ 0 & , \quad m = 0, \end{cases}$$

siehe Abbildung. Hier ist $A := S^1 \subset \mathbb{C}$ ein Attraktor, und sein Bassin ist $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Denn $\Phi_t : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ bildet Kreise vom Radius $r > 0$ auf solche vom Radius $r^{(2^{-t})}$ ab, die (abgeschlossene) Kreislinie S^1 ist also invariant, und die Bilder der offenen Kreislänge



$$U(r_1, r_2) := \{c \in \mathbb{C} \mid |c| \in (r_1, r_2)\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

konvergieren für $0 < r_1 < 1 < r_2$ im folgenden Sinn gegen A :

Für alle $c > 1$ existiert ein $\tau \in \mathbb{N}$ mit $\Phi_t(U(r_1, r_2)) \subseteq U(1/c, c)$ falls $t \geq \tau$. Wegen Kompaktheit von A enthält aber jede offene Umgebung V von A ein $U(1/c, c)$. Das Bassin von A kann den Fixpunkt $0 \in \mathbb{C}$ nicht enthalten, enthält aber die Mengen $U(r_1, r_2)$, ist also gleich $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Der Parameter λ beschreibt die Drehung um den Ursprung. Sein Wert ist wesentlich für die Frage, welche Teilmengen von A ebenfalls Attraktoren sind. $\diamond$

2.25 Aufgaben (Attraktor)

1. Finden Sie zum dynamischen System aus Beispiel 2.24 alle Fixpunkte und zwei weitere Attraktoren mit Bassin.
2. Es sei $\Phi : G \times M \rightarrow M$ ein stetiges dynamisches System.

- (a) Ist die Vereinigung zweier Attraktoren wieder ein Attraktor?
- (b) Zeigen Sie $A = \bigcap_{t \geq 0} \Phi_t(U_0)$ für einen Attraktor $A \subseteq M$ und eine zugehörige offene Menge U_0 aus der Definition 2.23 eines Attraktors. $\diamond$

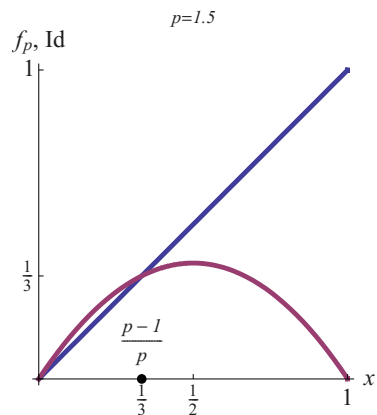
2.26 Beispiel (Logistische Familie)

Für Parameterwerte $p \in [0, 4]$ betrachten wir die (nicht invertierbare) *logistische Abbildung* auf $M := [0, 1]$

$$f_p : M \rightarrow M \quad , \quad f_p(x) := p x (1 - x). \quad (2.2.2)$$

- Der Punkt $0 \in M$ wird von f_p für jeden Parameterwert p auf sich abgebildet, ist also Fixpunkt.
- Ist nun der Parameter $p \leq 1$, dann ist für $x > 0$ immer $f_p(x) < x$, sodass für alle Startwerte $m \in M$ folgt: $\lim_{t \rightarrow \infty} f_p^{(t)}(m) = 0$.

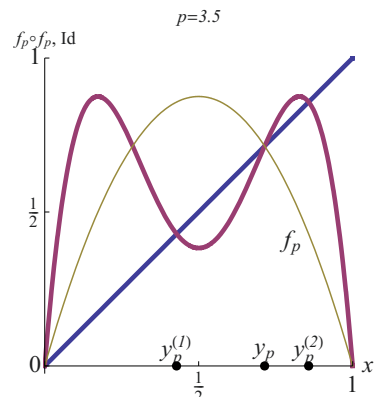
- Darüber hinaus gibt es für Parameterwerte $p \in (1, 4]$ einen zweiten Fixpunkt von f_p in M , nämlich $y_p := \frac{p-1}{p}$, siehe nebenstehende Abbildung.



- Für $p \in (1, 3]$ gilt für alle Folgen mit Anfangspunkt $m \in (0, 1)$, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} f_p^{(t)}(m) = y_p$. Dies sieht man für $p \in (1, 2]$ so: Da f_p das rechte Intervall $[1/2, 1]$ in das linke Intervall $(0, 1/2]$ abbildet, brauchen wir Anfangswerte $x \in (0, 1/2]$ zu betrachten. Für $x \in (0, y_p)$ gilt: $f_p(x) \in (x, y_p)$, für $x \in (y_p, 1/2]$ gilt: $f_p(x) \in (y_p, x)$.

Der allgemeine Fall soll in Aufgabe 2.27 bearbeitet werden.

- Für Werte $p \in (3, 4]$ besitzt die zweifach iterierte Abbildung $f_p \circ f_p$ vier Fixpunkte. Diese sind in nebenstehender Abbildung als die Schnittpunkte zwischen der Diagonale und dem Graphen von $f_p \circ f_p$ sichtbar. Zwei dieser Fixpunkte sind die schon diskutierten Fixpunkte von f_p . Die beiden anderen, nennen wir sie $y_p^{(1)}$ und $y_p^{(2)}$, werden durch die logistische Abbildung aufeinander abgebildet, das heißt $f_p(y_p^{(1)}) = y_p^{(2)}$ und $f_p(y_p^{(2)}) = y_p^{(1)}$.



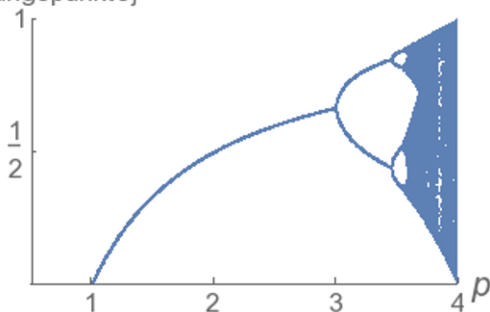
Wegen des Satzes von Bolzano–Weierstraß wissen wir, dass die Folgen $t \mapsto f_p^{(t)}(m)$ immer einen Häufungspunkt besitzen.

Wir interessieren uns für Menge ihrer Häufungspunkte, in Abhängigkeit vom Parameter p und vom Startwert m .

Wegen $f_p(0) = 0$ existiert für $m = 0$ nur der Häufungspunkt 0. Für typische Startwerte m ergibt sich in Abhängigkeit von p eine komplizierte Struktur der Häufungspunkte,

siehe nebenstehende Abbildung (mit Startwert $m = 0.01$). Nebenbei: Die iterierte logistische Abbildung dient in der Physik als einfaches Modell für den Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung von Flüssigkeiten, wobei große Werte von p dem turbulenten Regime zugeordnet werden, siehe FEIGENBAUM [Fei]. $\diamond$

{Häufungspunkte}



2.27 Aufgaben (Logistische Familie)

- Wir betrachten die n -te Iterierte $f_4^{(n)}$ der logistischen Abbildung (2.2.2). Zeigen Sie, dass $f_4^{(n)}$ genau 2^n Fixpunkte in $[0, 1]$ hat, indem Sie die Monotonieintervalle von $f_4^{(n)}$ untersuchen.
- Zeigen Sie, dass die logistische Abbildung (2.2.2) für Parameterwerte $p \in (1, 3)$ den Fixpunkt $y_p = (p - 1)/p$ besitzt und dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f_p^{(n)}(x) = y_p$ für alle $x \in (0, 1)$.
 Tipp: Welche Werte nimmt $f'_p(y_p)$ im Intervall $1 \leq p \leq 3$ an? $\diamond$

Wir wollen nun stetige dynamische Systeme miteinander vergleichen.

2.28 Definition

Für zwei stetige dynamische Systeme $\Phi^{(i)} : G \times M^{(i)} \rightarrow M^{(i)}$ ($i = 1, 2$)

- heißt $\Phi^{(2)}$ (topologischer) **Faktor von** $\Phi^{(1)}$, und $\Phi^{(2)}$ zu $\Phi^{(1)}$ **semikonjugiert**, wenn es eine stetige Surjektion $h : M^{(1)} \rightarrow M^{(2)}$ gibt mit $\Phi_t^{(2)} \circ h = h \circ \Phi_t^{(1)}$ für alle $t \in G$, das heißt wenn das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 M^{(1)} & \xrightarrow{\Phi_t^{(1)}} & M^{(1)} \\
 h \downarrow & & \downarrow h \\
 M^{(2)} & \xrightarrow{\Phi_t^{(2)}} & M^{(2)}
 \end{array} \quad (2.2.3)$$

- heißt $\Phi^{(2)}$ **konjugiert zu** $\Phi^{(1)}$, wenn $\Phi^{(2)}$ sogar für einen Homöomorphismus $h : M^{(1)} \rightarrow M^{(2)}$ Faktor von $\Phi^{(1)}$ ist. h heißt dann **Konjugation**.

2.29 Bemerkungen (Konjugation)

1. Da die Inversen (und die Komposition) von Homöomorphismen wieder Homöomorphismen sind, ist die Definition der Konjugation unabhängig von der Nummerierung der beiden dynamischen Systeme, und wir erhalten eine Einteilung in Klassen zueinander konjugierter stetiger dynamischer Systeme.
2. Wenn zwei stetige dynamische Systeme überhaupt konjugiert sind, gibt es im Allgemeinen viele Konjugationen. Denn mit h aus (2.2.3) sind zum Beispiel auch $h_s := h \circ \Phi_s^{(1)}$, $s \in G$ Konjugationen, die aber für $\Phi_s^{(1)} \neq \text{Id}_{M^{(1)}}$ von h verschieden sind.
3. Im Beweis des Satzes 2.31 über Kreisrotationen wird eine Semikonjugation als Beweistechnik benutzt werden. $\diamond$

Da die in diesem Kapitel definierten Begriffe rein topologischer Natur sind, gelten sie gleichermaßen für konjugierte Systeme. Insbesondere gilt:

2.30 Aufgabe (Konjugation) Es sei $h : M^{(1)} \rightarrow M^{(2)}$ eine Konjugation der stetigen dynamischen Systeme $\Phi^{(i)} : G \times M^{(i)} \rightarrow M^{(i)}$. Beweisen Sie:

- (a) $x_1 \in M^{(1)}$ ist genau dann Ruhelage von $\Phi^{(1)}$, wenn $x_2 := h(x_1) \in M^{(2)}$ Ruhelage von $\Phi^{(2)}$ ist. Konjugierte Ruhelagen unterscheiden sich nicht hinsichtlich ihrer Liapunov-Stabilität oder asymptotischen Stabilität.
- (b) Der $\Phi^{(1)}$ -Orbit $\mathcal{O}(x_1)$ durch $x_1 \in M^{(1)}$ ist genau dann geschlossen, wenn der $\Phi^{(2)}$ -Orbit $\mathcal{O}(x_2)$ durch $x_2 := h(x_1) \in M^{(2)}$ geschlossen ist. Dann sind auch die Perioden gleich.
- (c) Das Bild der ω -Limes-Menge $\omega(x_1)$ von $x_1 \in M^{(1)}$ ist gleich

$$h(\omega(x_1)) = \omega(h(x_1)). \quad \diamond$$

Um zu zeigen, dass zwei stetige dynamische Systeme *nicht* konjugiert sind, genügt es, eine Konjugationsinvariante zu benutzen. Zum Beispiel sind nach Aufgabe 2.30.b) die Systeme nicht konjugiert, wenn im ersten System ein periodischer Orbit einer bestimmten Periode existiert, aber nicht im zweiten.

Im Beweis des folgenden Satzes ist die sogenannte *Rotationszahl* (fast) eine solche Invariante.

Als Beispiel untersuchen wir nämlich, wann die Kreisrotationen aus Aufgabe 2.12.1 konjugiert sind. Für diese stetigen dynamischen Systeme

$$\Phi^{(\gamma)} : \mathbb{Z} \times S^1 \rightarrow S^1, \quad \Phi^{(\gamma)}(t, m) = \exp(2\pi i \gamma t) m \quad (\gamma \in \mathbb{R})$$

ist genau dann sogar $\Phi^{(\alpha)} = \Phi^{(\beta)}$, falls $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$ ist. Wir nehmen also ohne Einschränkung $\gamma \in [0, 1)$ an.

2.31 Satz (Kreisrotationen)

Zwei solche Kreisrotationen $\Phi^{(\alpha)}$ und $\Phi^{(\beta)}$ sind genau dann konjugiert, wenn $\alpha = \beta$ oder $\alpha = 1 - \beta$ gilt.

Beweis:

- Für $\alpha = \beta$ ist Id_{S^1} eine Konjugation, für $\alpha = 1 - \beta$ die Abbildung

$$S^1 \rightarrow S^1, \quad z \mapsto \bar{z}.$$

- Gilt dagegen $\Phi_t^{(\beta)} = h \circ \Phi_t^{(\alpha)} \circ h^{-1}$ ($t \in \mathbb{Z}$) für einen Homöomorphismus $h : S^1 \rightarrow S^1$, dann *liften* wir diese dynamischen Systeme auf den Phasenraum $\mathbb{R}$. Darunter ist Folgendes zu verstehen: Die Abbildung

$$\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad x \mapsto \exp(2\pi i x)$$

ist stetig und wickelt anschaulich die Zahlengerade auf der Kreislinie auf. π ist ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ auf $(S^1, \cdot)$, denn wegen der Funktionalgleichung von $\exp$ ist $\pi(x + y) = \pi(x)\pi(y)$.

- Wir nennen ein stetiges dynamisches System

$$\tilde{\Phi}^{(\gamma)} : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

π -Lift der Kreisrotation $\Phi^{(\gamma)} : \mathbb{Z} \times S^1 \rightarrow S^1$, wenn $\pi \circ \tilde{\Phi}_t^{(\gamma)} = \Phi_t^{(\gamma)} \circ \pi$ ($t \in \mathbb{Z}$) gilt, also

$$\exp(2\pi i \tilde{\Phi}_1^{(\gamma)}(x)) = \exp(2\pi i(x + \alpha)) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

das heißt $\tilde{\Phi}_1^{(\gamma)}(x) = x + \alpha - n_\gamma$ für ein $n_\gamma \in \mathbb{Z}$ (wegen der Stetigkeit von $\tilde{\Phi}^{(\gamma)}$ hängt n_γ nicht von x ab).

- Ähnlich nennen wir eine stetige Abbildung $\tilde{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ einen π -Lift der Konjugation $h : S^1 \rightarrow S^1$, wenn gilt: $\pi \circ \tilde{h} = h \circ \pi$, also $\exp(2\pi i \tilde{h}(x)) = h(\exp(2\pi i x))$. Damit muss $\tilde{h}(x + 1) = \tilde{h}(x) + n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ gelten. Da $\tilde{h}$ streng monoton ist, folgt $n \neq 0$. Da andererseits kein $y \in (x, x + 1)$ existiert mit $\tilde{h}(y) - \tilde{h}(x) \in \mathbb{Z}$, kommen für n nur $n = -1$ und $n = 1$ in Frage.

- Die Rotationszahl des π -Lifts $\tilde{\Phi}^{(\gamma)}$ ist definiert als

$$R(\gamma) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{\Phi}^{(\gamma)}(t, x)}{t} \quad (2.2.4)$$

und in der Tat unabhängig vom Startpunkt $x \in \mathbb{R}$, nämlich $R(\gamma) = \gamma - n_\gamma$. Sinnvollerweise wählen wir $n_\gamma := 0$. Für zu $\Phi^{(\alpha)}$ konjugierte dynamische Systeme $\Phi^{(\beta)}$ kommt also, je nachdem ob $\tilde{h}$ streng monoton steigend oder fallend ist, nur

$$R(\beta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{h} \circ \Phi_t^{(\alpha)} \circ \tilde{h}^{-1}(x)}{t} \in \begin{cases} \alpha + \mathbb{Z} & , \quad \tilde{h} \text{ steigend} \\ -\alpha + \mathbb{Z} & , \quad \tilde{h} \text{ fallend.} \end{cases}$$

in Frage. Das zeigt, dass nur $\beta = \alpha$ und $\beta = 1 - \alpha$ Lösungen sein können. $\square$

Die meisten Kreisrotationen unterscheiden sich also topologisch voneinander.

Andererseits kann man auch für andere Diffeomorphismen (siehe Def. 2.36) $f : S^1 \rightarrow S^1$ der Kreislinie als die Rotationen die Rotationszahl $R(f)$ der iterierten Abbildung analog zu (2.2.4) definieren, und es gilt folgender erstaunliche Satz (siehe HERMAN [Her]):

2.32 Satz (Denjoy)

Ist für den Diffeomorphismus $f \in C^2(S^1, S^1)$ die Rotationszahl $R(f)$ irrational, dann ist das von f definierte dynamische System zur Kreisrotation $\Phi^{(R(f))}$ konjugiert.

2.3 Differenzierbare dynamische Systeme

Um Techniken der Analysis auf stetige dynamische Systeme anzuwenden, ist es natürlich anzunehmen, dass deren Phasenraum eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Mannigfaltigkeiten werden in Anhang A systematisch eingeführt. Hier betrachten wir nur den Fall von Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$. Dies ist aber keine wirkliche Einschränkung (siehe Satz A.49).

2.33 Definition

Für eine offene Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f \in C^1(W, \mathbb{R}^m)$ heißt $y \in \mathbb{R}^m$ **regulärer Wert** von f , wenn für alle $q \in W$ mit $f(q) = y$ die Ableitung $D_q f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ surjektiv ist.

Dieser Begriff dient zunächst zur Definition von Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$. Er wird in (A.45) auf Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten verallgemeinert.

2.34 Definition

Für $p \in \{0, \dots, n\}$ heißt eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ **p -dimensionale Untermannigfaltigkeit** des $\mathbb{R}^n$, wenn jeder Punkt $x \in M$ eine Umgebung $V_x \subseteq \mathbb{R}^n$ besitzt, so dass für eine geeignete Abbildung $f \in C^1(V_x, \mathbb{R}^{n-p})$ mit regulärem Wert 0 gilt:

$$M \cap V_x = f^{-1}(0).$$

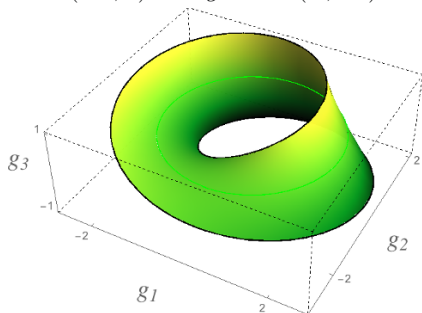
Im einfachsten Fall ist $M = f^{-1}(0)$, aber man möchte auch Mengen wie im folgenden Beispiel als Mannigfaltigkeiten bezeichnen.

2.35 Beispiel (Möbius-Band) Für $U := \mathbb{R} \times (-1, 1)$ und $g \in C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$,

$$g(x, y) := \begin{pmatrix} (2 - y \sin \frac{x}{2}) \sin x \\ (2 - y \sin \frac{x}{2}) \cos x \\ y \cos \frac{x}{2} \end{pmatrix}$$

ist $M := g(U) \subset \mathbb{R}^3$ das sogenannte **Möbius-Band**.

Für die Parametrisierung würde der Winkelbereich $x \in [0, 2\pi)$ ausreichen, denn zwar kommen Winkel $x/2$ in g vor, aber $g(x + 2\pi, y) = g(x, -y)$. $g(\mathbb{R} \times \{0\})$ ist eine Kreislinie vom Radius 2. Da die



Fläche M nur eine Seite besitzt, kann sie nicht Niveaumenge $f^{-1}(0)$ eines regulären Wertes 0 sein, denn sonst würde $\nabla f(x) \neq 0$ an jedem Punkt $x \in M$ senkrecht auf der Fläche stehen und damit eine von zwei Seiten auszeichnen. $\diamond$

2.36 Definition

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$.

- f heißt **Diffeomorphismus auf das Bild** $V := f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, wenn V offen, $f : U \rightarrow V$ bijektiv und auch $f^{-1} : V \rightarrow U$ stetig differenzierbar ist.
- f heißt **lokaler Diffeomorphismus**, wenn jeder Punkt $x \in U$ eine offene Umgebung $U_x \subseteq U$ besitzt, für die $f|_{U_x}$ ein Diffeomorphismus auf das Bild ist.
- Für $r \in \mathbb{N}$ und $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen heißt eine Abbildung $f \in C^r(U, V)$ ein **C^r -Diffeomorphismus**, wenn f Diffeomorphismus auf das Bild V ist (also die inverse Abbildung $f^{-1} \in C^r(V, U)$ ist).

Man kann Diffeomorphismen als Koordinatenwechsel ansehen, und da man gerne dem jeweiligen Problem angepasste Koordinaten verwendet, sind Diffeomorphismen eine häufig verwendete Klasse von Abbildungen.

2.37 Beispiel (Affine Abbildungen)

Eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitzt die Form $f(x) = Ax + b$ mit $A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Sie ist genau dann ein Diffeomorphismus, wenn sie bijektiv ist, d.h. wenn $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ ist. $\diamond$

Aus diesem Beispiel liest man ab, dass die Regularität der Jacobi-Matrix Df Einfluss auf die Invertierbarkeit der Abbildung f hat, denn hier ist $Df = A$.

2.38 Satz (Lokale Diffeomorphismen)

Für $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ genau dann ein lokaler Diffeomorphismus, wenn für alle $x \in U$ gilt:

$$Df(x) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$$

Beweis:

- Es sei f ein lokaler Diffeomorphismus, $x \in U$, und $g : V_x \rightarrow U_x$ die Umkehrfunktion des Diffeomorphismus $f|_{U_x} : U_x \rightarrow V_x$. Dann gilt nach der Kettenregel

$$Dg(f(x)) Df(x) = D(g \circ f)(x) = D\text{Id}_{U_x}(x) = \mathbb{1}, \text{ also } Df(x) \in \text{GL}(n, \mathbb{R}).$$

- Es gelte umgekehrt $Df(z) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$. Um die lokale Inverse von f bei $z \in U$ zu finden, wenden wir den Satz über die implizite Funktion auf

$$F : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (y, z) \mapsto -y + f(z)$$

an. Nach Voraussetzung ist für $X := (f(z), z)$

$$D_2 F(X) = Df(z) \in \text{GL}(n, \mathbb{R}), \text{ und } F(X) = 0.$$

Anwendung des Satzes über die implizite Funktion ergibt die Existenz einer auf der Umgebung $V_z := U_{r_y}(f(z))$ des Bildpunktes definierten Abbildung $g \in C^1(V_z, W)$ mit $W = U_{r_z}(z)$, für die $F(y, g(y)) = f(g(y)) - y = 0$ ist. Wir setzen $U_z := g(V_z) \subseteq W$. Sowohl g als auch $f|_{U_z}$ sind injektiv, denn sonst könnte nicht $f \circ g = \text{Id}_{V_z}$ gelten. Damit ist auch $g \circ f|_{U_z} = \text{Id}_{U_z}$ und nach der Kettenregel $Dg(y) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ für alle $y \in V_z$. Damit ist U_z nach dem folgenden Satz eine offene Umgebung von z . $\square$

2.39 Satz Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Ist f **regulär**, d.h. gilt $Df(x) \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ für alle $x \in U$, dann ist $f(V)$ offen, falls $V \subseteq U$ offen ist.

Beweis: Siehe zum Beispiel HILDEBRANDT [Hil], Band 2, Kapitel 1.9. $\square$

2.40 Bemerkung (Lokale Koordinaten für Untermannigfaltigkeiten)

Wir nehmen an, dass für eine offene Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}^n$ $0 \in F(W)$ regulärer Wert von $F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist. Dann muss offensichtlich $m \leq n$ sein, und wegen des Satzes über die implizite Funktion können wir für $q \in M := F^{-1}(0)$ eine Umgebung $U \subseteq W$ von q und einen Diffeomorphismus $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ finden, sodass $\varphi(z)_i = 0$ für $n - m < i \leq n$ und alle $z \in U \cap M$.

Die ersten $n - m$ Komponenten von φ dienen dann, eingeschränkt auf $U \cap M$, als **lokale Koordinaten** der Untermannigfaltigkeit M . Beispielsweise kann man bei q immer geeignete $n - m$ der n kartesischen Koordinaten verwenden. $\diamond$

2.41 Beispiel (Sphäre)

Null ist regulärer Wert von $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) := \|x\|^2 - 1$, denn für die Urbilder $x \in F^{-1}(0) = S^2$ ist $\|DF(x)\| = \|2x\| = 2$. Der Nordpol $q := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in S^2$ besitzt die Umgebung $U := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$. Der Diffeomorphismus auf das Bild $\varphi : U \rightarrow V$, $\varphi(x) := (x_1, x_2, F(x))$ wird durch die Abbildung $\varphi^{-1}(y) = (y_1, y_2, \sqrt{y_3 + 1 - y_1^2 - y_2^2})$ invertiert.

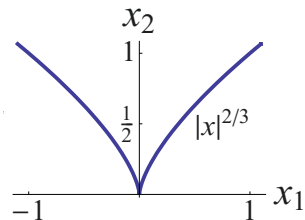
Da wir durch Drehung in jedem Punkt $q \in S^2$ eine analoge Konstruktion durchführen können, haben wir gezeigt, dass S^2 eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. $\diamond$

2.42 Beispiel

Ein Gegenbeispiel hierzu ist

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, F(x_1, x_2) := x_1^2 - x_2^3,$$

also mit $F^{-1}(0) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 = x_2^3\}$. Auch hier ist F unendlich oft differenzierbar, aber 0 kein regulärer Wert von F . Nebenstehend sieht man die Niveaumenge $F^{-1}(0)$, die keine Untermannigfaltigkeit ist. $\diamond$



2.43 Definition

Ein stetiges dynamisches System $\Phi : G \times M \rightarrow M$ heißt **differenzierbar**, wenn M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist und Φ stetig differenzierbar ist.

2.44 Bemerkungen (Differenzierbare dynamische Systeme)

1. Auf differenzierbare dynamische Systeme kann man also die Methoden der Analysis anwenden. Ein Beispiel sind Stabilitätsuntersuchungen. So wird im Satz von Liapunov (Satz 7.6) von den Eigenwerten der totalen Ableitung eines Vektorfeldes bei einer Gleichgewichtslage auf die asymptotische Stabilität bezüglich des durch dieses Vektorfeld definierten Flusses geschlossen.
2. Die Diffeomorphismen $f : M \rightarrow M$ einer Mannigfaltigkeit (siehe Def. A.36) bilden unter Komposition eine Gruppe, die *Diffeomorphismengruppe* $\text{Diff}(M)$. Ist M kompakt, dann kann man $\text{Diff}(M)$ als unendlich-dimensionale Lie-Gruppe auffassen, deren Lie-Algebra der Raum $\mathcal{X}(M)$ der Vektorfelder ist.
Ein differenzierbares dynamisches System $\Phi : G \times M \rightarrow M$ ist damit ein Gruppenhomomorphismus

$$G \rightarrow \text{Diff}(M) \quad , \quad g \mapsto \Phi_g .$$

Diese Sichtweise hilft manchmal beim Verständnis dynamischer Systeme.

- Man kann untersuchen, welche Eigenschaften dynamischer Systeme typisch sind. Beispielsweise gilt für kompakte M , dass die Diffeomorphismen $F \in \text{Diff}(M)$, die nur endlich viele Fixpunkte besitzen, eine offene dichte Teilmenge von $\text{Diff}(M)$ bilden.

Allgemein heißt eine Eigenschaft, die diskreten dynamischen Systemen zukommen kann, *generisch*, wenn die durch sie definierte Teilmenge von $\text{Diff}(M)$ Schnitt abzählbar vieler offener dichter Mengen ist.

- Man kann statt der mengentheoretischen die algebraische Topologie von $\text{Diff}(M)$ untersuchen und beispielsweise feststellen, dass die Diffeomorphismen $F \in \text{Diff}(S^1)$ der Kreislinie $S^1 \subset \mathbb{C}$ entweder in der Zusammenhangskomponente der Identität oder der der Konjugationsabbildung $S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto \bar{z}$ liegen. $\diamond$

2.45 Aufgabe (Diffeomorphismengruppe)

Zeigen Sie, dass die Diffeomorphismengruppe $\text{Diff}(M)$ einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M transitiv wirkt, das heißt, es für alle $x, y \in M$ ein $f \in \text{Diff}(M)$ gibt mit $f(x) = y$.

Tipp: Beweisen Sie zunächst für alle y in einer kleinen Umgebung von $x \in M$ die Existenz eines Vektorfeldes auf M , dessen Zeit-1-Fluss f ein Diffeomorphismus mit $f(x) = y$ ist. $\diamond$

2.46 Weiterführende Literatur Eine sehr lesenswerte frühe Übersichtsarbeit zu differenzierbaren dynamischen Systemen ist [Sm1] von STEVEN SMALE. $\diamond$

Mathematische Physik: Klassische Mechanik

Knauf, A.

2017, XVI, 652 S. 91 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-55775-4