

Zusammenfassung

Das Wissen über die Signale als Träger der Information und ihre Übertragung bzw. Verarbeitung durch Systeme gehören zur Kernkompetenz der Nachrichtentechnik. Dabei werden Signale als mathematische Funktionen und Systeme durch ihre Wirkung auf eben diese Signale, den Eingangs-Ausgangsgleichungen, definiert.

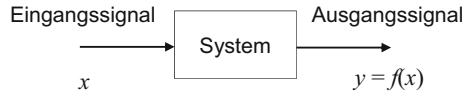
Eine zentrale Rolle spielen dabei die linearen zeitinvarianten Systeme, wie sie sich beispielsweise in der Elektrotechnik aus RLC-Netzwerken ergeben. Das Ausgangssignal resultiert dann aus der Faltung des Eingangssignals mit der Impulsantwort des Systems. Im Frequenzbereich ergibt sich das (Fourier-)Spektrum des Ausgangssignals aus dem Produkt des (Fourier-)Spektrums des Eingangssignals mit dem Frequenzgang des Systems. Darauf gründet sich auch der bekannte Begriff des Filters: Ist der Frequenzgang null, so wird die entsprechende Frequenzkomponente unterdrückt. Impulsantwort und Frequenzgang bilden ein Fourier-Paar.

Die Darstellung der Signale in Zeit- und im Frequenzbereich und die Übertragung des Konzepts auf die charakteristischen Systemfunktionen Impulsantwort und Frequenzgang liefern den Zugang zu wichtigen Kenngrößen und Methoden der Nachrichtentechnik, wie der Bandbreite und der Filterung eines Signals.

Schlüsselwörter

Analoge und digitale Signale • RLC-Netzwerke • Methode der Ersatzspannungsquellen • harmonische Analyse • Fourier-Transformation • Spektrum • Frequenzgang • lineare Filterung • Tiefpass • Bandpass • Hochpass • Bandsperre • Zeitdauer-Bandbreite-Produkt • lineare zeitinvariante Systeme • Impulsfunktion • Faltung

Abb. 2.1 System als Abbildung von Signalen



Dem Mitbegründer der modernen Informationstheorie N. Wiener¹ wird die Feststellung zugeschrieben: „Information is information, not matter or energy“. Die Information besitzt ihre eigene Qualität. Wie Materie oder Energie, ist sie ein grundlegendes Phänomen unserer Welt. Jedoch wird Information als Signal stets durch Materie bzw. Energie getragen.

Der eher philosophische Ausspruch Wieners deutet auf die Schwierigkeit hin, Information greifbar zu machen. Die Nachrichtentechnik unterscheidet deshalb zwischen der Information im Sinn einer Nachricht und ihrer physikalischen Darstellung, dem Signal, dessen Eigenschaften gemessen werden können.

Die Untersuchung von elektrischen Signalen und deren Übertragung durch elektrische Netzwerke ist seit der elektrischen Telegrafie ein Kernthema der Nachrichtentechnik. Mit ihren Ergebnissen trägt sie bis heute zur fachübergreifenden Theorie der Signale und Systeme, der *Systemtheorie*, bei. Die Systemtheorie erklärt die Systeme funktional, als Abbildungen von Signalen (Abb. 2.1).

► Die *Systemtheorie* beschreibt

- *Signale* als mathematische Funktionen und macht sie der mathematischen Analyse und Synthese zugänglich. Physikalische Signale werden durch Modelle in Form mathematischer Idealisierungen angenähert.
- *Systeme* und deren Reaktionen auf Signale. Physikalische Systeme werden durch mathematisch idealisierte Modelle beschrieben, die in einem eingeschränkten Arbeitsbereich das reale Systemverhalten approximieren.

In diesem Kapitel wird eine Einführung in den Themenkreis der Signale und Systeme aus nachrichtentechnischer Sicht gegeben. Gemäß dem A. Einstein² zugesprochenen Worten „alles so einfach wie möglich, aber nicht einfacher“ soll über die folgenden Beispiele hinaus auch eine solide Grundlage für eine spätere fachliche Vertiefung gelegt werden.

Zunächst werden in Abschn. 2.1 grundlegende Signalarten vorgestellt. Danach werden in Abschn. 2.2 einfache elektrische Netzwerke mit den konzentrierten Bauelementen R , L und C als typische Beispiele linearer zeitinvarianter Systeme betrachtet. Es wird gezeigt,

¹ *Norbert Wiener* (1884–1964), US-amerikanischer Mathematiker, grundlegende Arbeiten zur Kybernetik.

² *Albert Einstein* (1879–1955), Nobelpreis für Physik (1921), emigrierte vor der Verfolgung durch die Nationalsozialisten in die USA.

wie das Ausgangssignal für ein beliebiges Eingangssignal berechnet werden kann. Ausgehend von der komplexen Wechselstromrechnung wird zunächst mit der Fourier-Reihe in Abschn. 2.3 das Lösungsverfahren auf periodische Signale erweitert, auf die Methode der Ersatzspannungsquellen in Abschn. 2.4. Darauf aufbauend werden in Abschn. 2.5 anhand einfacher physikalischer Vorstellungen das Spektrum und der Frequenzgang eingeführt.

In Abschn. 2.6 wird anschließend mit der Verallgemeinerung, der Fourier-Transformation, die Betrachtung auf den eigentlich interessanten Fall der aperiodischen Signale ausgedehnt. Durch die Fourier-Transformation wird die Signalbeschreibung im Frequenzbereich mit dem Spektrum als charakteristische Funktion definiert. Komplementär zum Spektrum werden die linearen zeitinvarianten Systeme durch ihren Frequenzgang beschrieben und das Konzept der linearen Filterung demonstriert. Typische Beispiele wie Tiefpass und Hochpass werden erläutert. Der fundamentale reziproke Zusammenhang zwischen der Bandbreite und der Dauer eines Signals und seine Bedeutung für die Nachrichtentechnik werden herausgestellt.

Zum Schluss wird in Abschn. 2.7 das Konzept der linearen zeitinvarianten Systeme nochmals aufgegriffen. Mit der Definition der Impulsfunktion als mathematische Idealisierung eines sehr kurzen aber energiereichen Signals wird die Impulsantwort als die zentrale Systemfunktion eingeführt. An der Impulsantwort lassen sich wichtige Systemeigenschaften erkennen. Darüber hinaus können Impulsantwort und Frequenzgang als Fourier-Paar ineinander transformiert werden. So schließt sich der Kreis zwischen den Systembeschreibungen im Frequenzbereich und im Zeitbereich.

Die Organisation dieses Kapitels veranschaulicht die Mindmap in Abb. 2.2. Sie gibt auch einen Überblick über die zu klärenden Fachbegriffe.

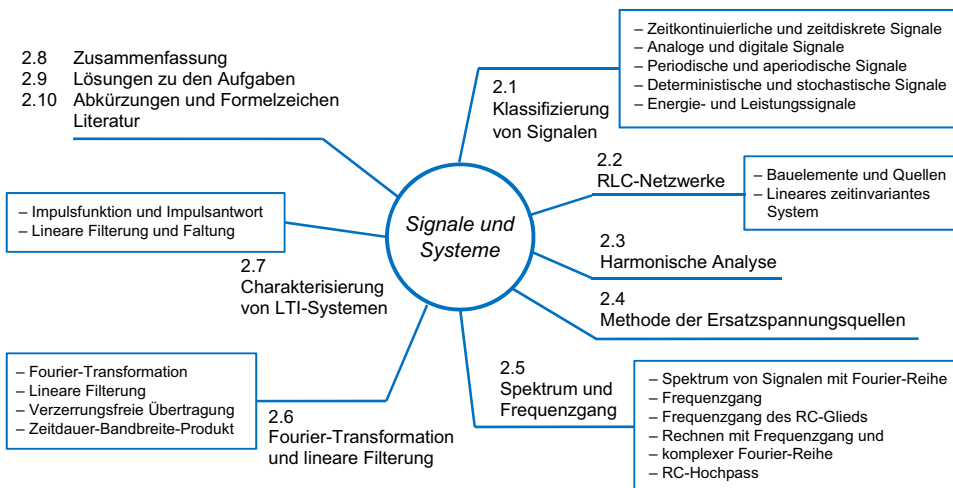


Abb. 2.2 Aufbau des Kapitels

2.1 Klassifizierung von Signalen

Signale treten in der Nachrichtentechnik an verschiedenen Stellen bei unterschiedlichen Randbedingungen auf. Es bietet sich deshalb an, die Mathematik zur Vereinheitlichung zu nutzen, d. h. die Signale als mathematische Funktionen zu modellieren und anhand gemeinsamer Eigenschaften in Signalklassen zu ordnen und dann jeweils die passenden Methoden als Werkzeuge bereitzustellen.

2.1.1 Zeitkontinuierliche und zeitdiskrete Signale

Ein Signal ist eine mathematische Funktion von mindestens einer unabhängigen Variablen. Wir schreiben für ein Signal allgemein $x(t)$; falls es sich um Spannung oder Strom handelt auch $u(t)$ bzw. $i(t)$. Die Variable t steht i. d. R. für die Zeit. Ist t kontinuierlich, so liegt ein *zeitkontinuierliches Signal* vor. Ist die Zeitvariable nur für diskrete Werte definiert, so spricht man von einem *zeitdiskreten Signal* und schreibt $x[n]$. Der Laufindex n wir *normierte Zeitvariable* genannt.

Im Beispiel der Telefonie liefert das Mikrofon eine sich zeitlich ändernde elektrische Spannung. Deren prinzipieller Verlauf könnte wie in Abb. 2.3 aussehen, einer Aufnahme des Wortes „Ful-da“. Darin gut zu erkennen, die zwei energiereichen Abschnitte zu den beiden Vokalen „u“ und „a“.

In vielen Anwendungen entstehen zeitdiskrete Signale durch gleichförmige zeitliche Diskretisierung zeitkontinuierlicher Signale, wie im *Stabdiagramm* in Abb. 2.4 illustriert. Man spricht von der (Signal-)Abtastung und der *Abtastfolge* $x[n] = x(t = n \cdot T_A)$ mit dem *Abtastintervall* T_A . Der Übergang vom zeitkontinuierlichen zum zeitdiskreten Signal wird in Kap. 3 noch ausführlich behandelt.

Anmerkungen

- Für zeitdiskrete Signale sind auch die Schreibweisen $x(n)$ verbreitet. Anzutreffen ist ebenfalls die in der Mathematik übliche Indexschreibweise x_n .

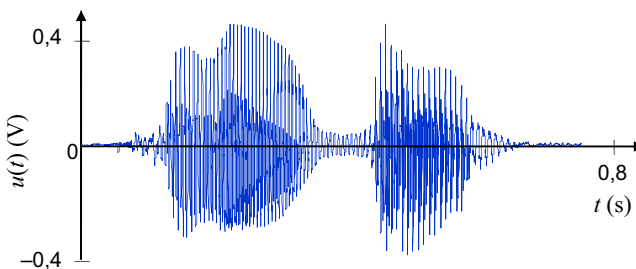
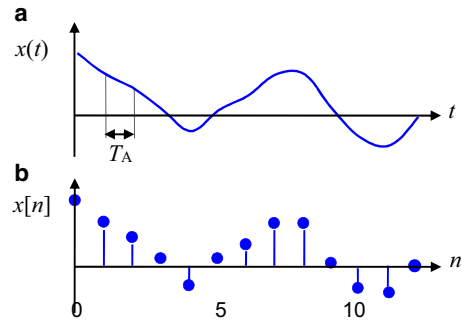


Abb. 2.3 Mikrofonspannung als Funktion der Zeit

Abb. 2.4 Zeitkontinuierliches Signal und Abtastintervall T_A (a) und zeitdiskretes Signal im Stabdiagramm (b)



- Viele Signale sind von Natur aus zeitdiskret, wie der tägliche Börsenschlusswert einer Aktie. Oder Audiosignale werden am Computer (Synthesizer) erzeugt und dann erst hörbar gemacht.
- Die Systemtheorie ist interdisziplinär. Die Variable t bzw. n muss nicht der Zeit entsprechen. Beispielsweise in der Bildverarbeitung und der Geologie sind die Signale vom Ort abhängig, man spricht dann von der Ortsvariablen.

2.1.2 Analoge und digitale Signale

Betrachtet man die Funktionswerte der Signale, wird zwischen *wertkontinuierlichen* und *wertdiskreten Signalen* unterschieden. Letztere erhält man stets bei der Signalverarbeitung an Digitalrechnern aufgrund der endlichen Wortlänge der Zahlendarstellung. Sie werden dort taktgesteuert verarbeitet. Man nennt derartige wert- und zeitdiskrete Signale *digitale Signale* im Gegensatz zu *analogen Signalen*, die wert- und zeitkontinuierlich sind.

Kann ein Signal nur zwei Werte annehmen, so spricht man von einem *binären Signal*. Solche Signale treten häufig in der Digitaltechnik auf und werden dort, abweichend von der Sprechweise hier, als digitale Signale bezeichnet. Die Abb. 2.5 zeigt ein bi-

Abb. 2.5 Binäres zeitkontinuierliches Signal zur Übertragung des ASCII-Zeichens Y mit Paritätsbit (10011010)

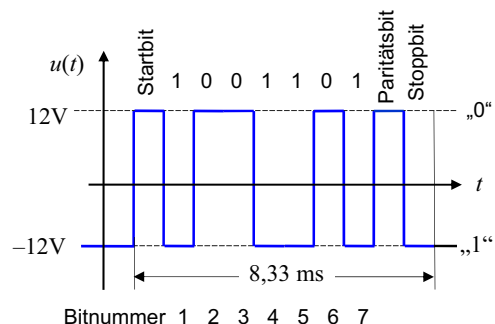
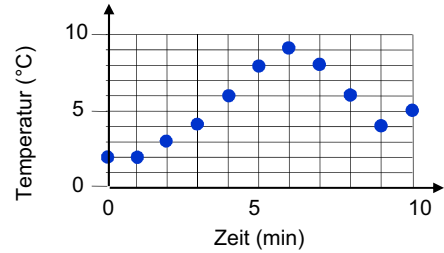


Abb. 2.6 Temperaturwerte eines Sensors als digitales Signal



näres Signal der früher am PC und auch heute noch an manchen Messgeräten üblichen RS-232-Schnittstelle. Es wird das Zeichen Y in der ASCII-Darstellung $89 = 2^0 + 2^3 + 2^4 + 2^6$ übertragen. Das Akronym ASCII steht für den bekannten American Standard Code for Information Interchange, der von der ITU als Internationales Alphabet Nr. 5 (IA5) eingeführt ist. Die Schrittgeschwindigkeit im Beispiel beträgt 1200 Baud³ pro Sekunde, was in Kap. 4 noch genauer erläutert wird.

Für ein Beispiel eines digitalen Signals betrachten wir ein Thermometer, das zur Prozessüberwachung einmal pro Minute abgelesen wird. Das Thermometer habe eine Anzeigenauflösung von 1 °C. Ein Messprotokoll könnte Abb. 2.6 enthalten. Es liegt ein digitales Signal vor, das sich in der Mengenschreibweise kurz so darstellt:

$$x[n] = \{2, 2, 3, 4, 6, 9, 9, 8, 6, 3, 5\} \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots, 10.$$

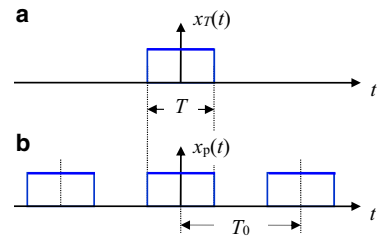
Das letzte Beispiel macht deutlich, das Konzept der Signale und Systeme kann überall da angewendet werden, wo geordnete Zahlenfolgen anfallen. Derartige Signale werden, insbesondere in den Wirtschafts-, Sozial- und Humanwissenschaften, oft *Zeitreihen* genannt. Ihre Auswertung im Rahmen der Zeitreihenanalyse, beispielsweise das Erkennen von Zyklen und Trends zur Prädiktion von Entwicklungen in Rohstoff-, Waren- oder Aktienmärkten oder das Entfernen von Störungen in Elektrokardiogramm(EKG)-Signalen, ist Gegenstand der Systemtheorie.

Man beachte auch den prinzipiellen Unterschied zwischen den durch einen Laufindex geordneten gleichartigen Daten der Informationstechnik und den in Datenbanken verknüpften Daten der elektronischen Datenverarbeitung (EDV) der Informatik, wie Adressen, Kontonummern, bestellte Artikel etc.

- Analoge Signale sind wert- und zeitkontinuierlich, digitale Signale wert- und zeitdiskret. Die technische Umsetzung eines analogen Signals in ein digitales erfolgt mit einem Analog-Digital-Umsetzer (ADU) bzw. umgekehrt mit einem Digital-Analog-Umsetzer (DAU).

³ Jean Maurice Emile Baudot (1845–1903), französischer Entwickler eines Schnelltelegraphen und Schöpfer des internationalen Fernschreibcodes Nr. 1.

Abb. 2.7 Rechteckimpuls der Dauer T (a) und periodischer Rechteckimpulszug mit Periode T_0 (b)



2.1.3 Periodische und aperiodische Signale

In der harmonischen Analyse ist die Unterscheidung der Signale in periodische und aperiodische wichtig. Bei einem *periodischen Signal* wiederholt sich jeder Signalwert nach genau einer Periode. Ist das Signal nicht periodisch, so spricht man von einem *aperiodischen Signal*. Als Beispiel für ein aperiodisches Signal zeigt Abb. 2.7a einen *Rechteckimpuls* mit der *Impulsdauer* T . Darunter wird der Rechteckimpuls periodisch im Abstand T_0 wiederholt. Man erhält einen *periodischen Rechteckimpulszug* mit dem *Tastverhältnis* T/T_0 , also dem Verhältnis von eingetastetem Zustand (an, 1) zu ausgetastetem Zustand (aus, 0) innerhalb einer Periode.

Eine wichtige Anwendung für periodische Signale liefert in Abschn. 2.2 die komplexe Wechselstromrechnung. Dort werden sinusförmige bzw. exponentielle Signale vorausgesetzt. Die eulersche Formel⁴ liefert für die (*allgemein*) *Exponentielle* den Zusammenhang

$$x(t) = e^{st} = e^{\sigma t} \cdot [\cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)]$$

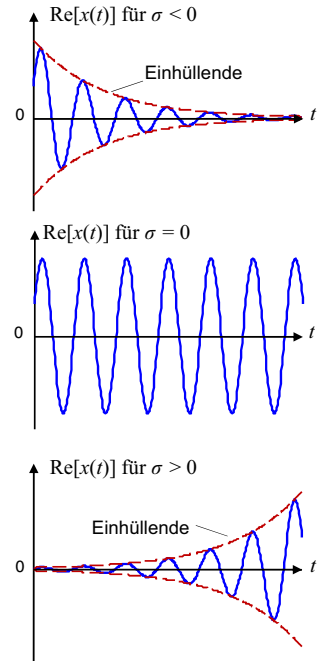
mit der komplexen Frequenz

$$s = \sigma + j\omega.$$

Man unterscheidet drei Fälle: die *angefachte* Exponentielle mit $\sigma > 0$, die *harmonische* Exponentielle mit $\sigma = 0$ und die *gedämpfte* Exponentielle mit $\sigma < 0$. Die Signalverläufe sind in Abb. 2.8 veranschaulicht. Das Bild oben zeigt einen Ausschnitt des Realteils von $x(t)$ im gedämpften Fall. Zusätzlich ist der Verlauf der Einhüllenden $e^{\sigma t}$ eingezeichnet. Die Einhüllende begrenzt das Signal von oben. Mit zunehmender Zeit verschwindet das Signal schließlich anschaulich in der Abszisse. Man spricht auch von einem transienten Signal. Mit $\sigma = 0$ erhält man den harmonischen Fall. Die sinusförmige Funktion bleibt beständig. Schließlich ist unten der Signalverlauf des Realteils für den angefachten Fall mit $\sigma > 0$ zu sehen. Die Einhüllende wächst schnell exponentiell und damit auch das Signal über alle Grenzen.

⁴ Leonhard Euler (1707–1783), Schweizer Mathematiker.

Abb. 2.8 Beispiele zur zeitkontinuierlichen allgemeinen Exponentiellen



2.1.4 Deterministische und stochastische Signale

Bei der bisherigen Unterscheidung der Signale wurden die Funktionstypen (Grafen) zugrunde gelegt. Eine weitere, in den Anwendungen wichtige Unterscheidung ergibt sich aus der Art bzw. der Quelle ihrer Entstehung, was sich u. a. darin äußert, ob das jeweilige Signal exakt vorhergesagt werden kann oder nicht. Im ersten Fall handelt es sich um ein *deterministisches Signal*. Sind beispielsweise Amplitude, Frequenz und Phase der Sinusfunktion bekannt, ist der Funktionswert für jeden beliebigen Zeitpunkt festgelegt.

Lassen sich für ein Signal nur statistische Kenngrößen, wie Mittelwert, Varianz und (Auto-)Korrelation angeben, so spricht man von einem *stochastischen Signal* oder Zufallssignal. Typische Beispiele für stochastische Signale sind die thermische Rauschspannung eines Widerstands, die elektrische Spannung am Mikrofon Ausgang eines Fernsprechapparats (Abb. 2.3), biologische Signale, z. B. die Signale einer EKG-Ableitung, oder Umweltsignale, wie die Bilder einer Webcam.

Das charakteristische Verhalten eines regellosen stochastischen Signals zeigt Abb. 2.9 links, wohingegen das stochastische Signal rechts im Bild, ein Tonsignal, neben einem An- und Abklingen eine gewisse periodische Grundstruktur aufweist. Stochastische Signale spielen eine herausragende Rolle, weil alle informationstragenden Signale stochastischer Natur sind. Andernfalls wäre die Nachricht bereits bekannt und eine Mitteilung könnte unterbleiben.

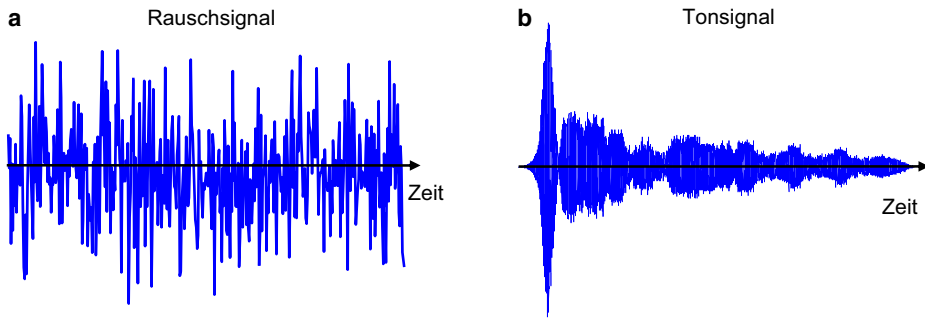


Abb. 2.9 Rauschsignal (a) und Tonsignal (b) der Dauer von etwa 1 s

Streng genommen handelt es sich bei allen abgebildeten Signalen um deterministische Signale, da sie durch die Abbildung per se eindeutig bestimmt sind. Man spricht hier treffender von einer *Musterfunktion* eines stochastischen Prozesses. Letzterer steht für eine prinzipiell unendliche Schar von Musterfunktionen und der Zufall bestimmt, welche Musterfunktion gerade beobachtet wird. Man spricht allgemein von einem stochastischen Prozess, wenn die Auswahl der Musterfunktion noch offen ist. Die Nachrichtentechnik, oder allgemein die Systemtheorie, beschäftigt sich intensiv mit stochastischen Signalen und deren Verarbeitung mit Systemen. Die moderne Nachrichtentechnik ist ohne die Wahrscheinlichkeitstheorie nicht möglich. Das Kap. 4 stellt grundlegende stochastische Konzepte soweit vor, dass ihre Anwendungen in der Nachrichtentechnik verständlich werden.

- Ein stochastisches Signal ist prinzipiell nicht vollständig vorhersagbar. Seine Realisierung als Musterfunktion hängt von einem Zufallsereignis ab.

2.1.5 Energie- und Leistungssignale

Für die Analyse von Signalen und Systemen, d. h. der Anwendbarkeit bestimmter mathematischer Methoden, ist die Unterscheidung von Energie- und Leistungssignalen wichtig. Dabei orientieren wir uns zunächst an bekannten physikalischen Größen. Betrachtet wir die Spannung $u(t)$ und den Strom $i(t)$ an einem Widerstand R , so resultiert die (elektrische) Momentanleistung

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t).$$

Die Energie E und die mittlere Leistung P sind

$$E = R \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} i^2(t) dt \quad \text{bzw.} \quad P = R \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} i^2(t) dt.$$

Betrachtet man dimensionslose Signale – gegebenenfalls nach Normierung der zugrundeliegenden physikalischen Größen, z. B. durch Bezug auf einen Referenzwiderstand von 1Ω , der Referenzstromstärke 1 A oder der Referenzspannung 1 V – so definiert man allgemein die normierte *Energie* und die normierte *Leistung*

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad \text{bzw.} \quad P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt.$$

Man spricht von *Energiesignalen* und *Leistungssignalen*, wenn E bzw. P als nichtnegativer endlicher Wert existiert.

Energiesignale sind alle betragsmäßig quadratisch integrierbaren Signale, also zeit- und amplitudenbegrenzte Signale, wie der Rechteckimpuls. Leistungssignale sind periodische Signale wie die Sinus- und Kosinusfunktion oder der periodische Rechteckimpulszug. Insbesondere sind alle später noch betrachteten Signale (Musterfunktionen) stationärer stochastischer Prozesse ebenfalls Leistungssignale.

Das Konzept der Energie- und Leistungssignale lässt sich unmittelbar auf die Folgen übertragen. Dazu ersetzt man oben die Integrale durch entsprechende Summen. Damit kann auch für die Folgen an der Bedeutsamkeit von Energie und Leistung, wie sie aus der Physik bekannt ist, angeknüpft werden.

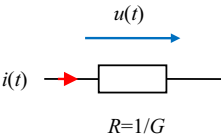
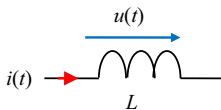
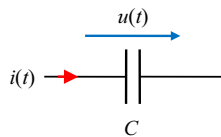
2.2 RLC-Netzwerke

Denkt man an die analoge Telefonie oder die Funktechnik, dann ist die Bedeutung elektrischer Netzwerke für die Nachrichtentechnik offensichtlich. Standen früher elektromagnetische Phänomene im Mittelpunkt, so haben sich heute in der Informationstechnik die Gewichte zwar verschoben, trotzdem bleibt das Wissen um elektrische Netzwerke, z. B. die Vierpoltheorie, Leitungstheorie etc. eine Kernkompetenz der Nachrichtenübertragungstechnik. Darüber hinaus liefern die elektrischen Netzwerke wichtige, physikalisch nachvollziehbare Anwendungsbeispiele zur Systemtheorie. Die Beschreibung der elektrischen Netzwerke führt zudem zur zentralen Theorie der linearen zeitinvarianten Systeme. Im Folgenden knüpfen wir kurz an den elektrotechnischen Grundlagen an.

2.2.1 Bauelemente und Quellen

Die Grundlagen zur Analyse und Synthese von RLC-Netzwerken bilden die aus der Physik bzw. Elektrotechnik bekannten Beziehungen zwischen den Spannungen und Strömen an den idealen konzentrierten Bauelementen *Widerstand* R , *Induktivität* L und *Kapazität* C . In Abb. 2.10 sind die Definitionsgleichungen zusammengestellt. Hinzu kommen die Definitionen der idealen Strom- und Spannungsquellen sowie die *kirchhoffsche*⁵ *Maschen-*

⁵ *Gustav Robert Kirchhoff* (1824–1887), deutscher Physiker.

Bezeichnungen und Schaltzeichen	Grundgleichungen		Energie
	Zeitfunktionen	Komplexe Wechselstromrechnung	
<p>Widerstand R</p> <p>$[R] = \text{V} / \text{A} = \Omega \text{ (Ohm)}$</p>  <p>$R = 1/G$</p>	$u(t) = R \cdot i(t)$ $i(t) = G \cdot u(t)$	$Z(s) = R$ $Y(s) = G$	$w(t) = \int_{-\infty}^t R \cdot i^2(\tau) \text{d}\tau$ <p>– in Wärme umgesetzt</p>
<p>Induktivität L</p> <p>$[L] = \text{Vs} / \text{A} = \text{H (Henry)}$</p>  <p>L</p>	$u(t) = L \cdot \frac{\text{d}}{\text{d}t} i(t)$ $i(t) = \frac{1}{L} \cdot \int_{-\infty}^t u(\tau) \text{d}\tau$	$Z(s) = sL$ $Y(s) = \frac{1}{sL}$	$w_m(t) = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t)$ <p>– im magnetischen Feld gespeichert</p>
<p>Kapazität C</p> <p>$[C] = \text{As} / \text{V} = \text{F (Farad)}$</p>  <p>C</p>	$u(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i(\tau) \text{d}\tau$ $i(t) = C \cdot \frac{\text{d}}{\text{d}t} u(t)$	$Z(s) = \frac{1}{sC}$ $Y(s) = sC$	$w_e(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2(t)$ <p>– im elektrischen Feld gespeichert</p>

Komplexe Frequenz $s = \sigma + \text{j}\omega$, Impedanz $Z(s)$, Admittanz $Y(s) = 1 / Z(s)$

(A) André-Marie Ampère (1775–1836)

(F) Michael Faraday (1791–1867)

(H) Joseph Henry (1779–1878)

(Ω) Georg Simon Ohm (1789–1854)

(V) Alessandro Volta (1745–1827)

Abb. 2.10 Lineare elektrische Zweipole – Definitionsgleichungen

regel für die Zweigspannungen und die kirchhoffsche Knotenregel für die Zweigströme in Abb. 2.11.

Die Analyse von RLC-Netzwerken mithilfe der komplexen Wechselstromrechnung als Operatorrechnung wird im Folgenden anhand des elektrischen Reihenschwingkreises in Abb. 2.12 kurz vorgestellt.

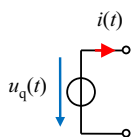
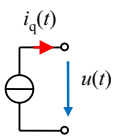
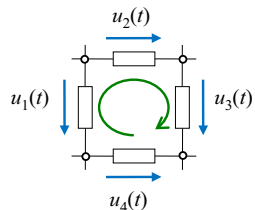
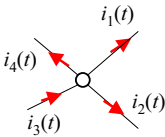
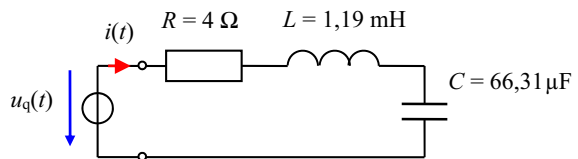
<p>Spannungsquelle</p> 	<p>Sinusförmige Spannungsquelle mit eingprägter Spannung und Innenwiderstand null</p>	<p>Zeitfunktion $u_q(t) = \hat{u}_q \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ Komplexe Amplitude $U_q = \hat{u}_q \cdot e^{j\varphi}$</p>
<p>Stromquelle</p> 	<p>Sinusförmige Stromquelle mit eingprägtem Strom und Innenwiderstand unendlich</p>	<p>Zeitfunktion $i_q(t) = \hat{i}_q \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ Komplexe Amplitude $I_q = \hat{i}_q \cdot e^{j\varphi}$</p>
<p>Kirchhoffsche Maschenregel</p> 	<p>Die Summe aller Zweigspannungen einer Masche ist null. Die Spannungen im Umlaufsinn der Masche werden positiv und die im Gegensinn negativ gezählt.</p>	$\sum_n u_n(t) = 0$ $\sum_n U_n = 0$
<p>Kirchhoffsche Knotenregel</p> 	<p>Die Summe aller Zweigströme eines Knotens ist null. Die hineinfließenden Ströme werden positiv und die herausfließenden negativ gezählt.</p>	$\sum_n i_n(t) = 0$ $\sum_n I_n = 0$

Abb. 2.11 Quellen und Grundgleichungen der RLC-Netzwerkanalyse

Abb. 2.12 Reihenschwingkreis



Wir betrachten eine sinusförmige Erregung mit der Spannungsquelle

$$u_q(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi) = 100 \text{ V} \cdot \cos(2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t)$$

und berechnen die Zeitfunktion des Stroms $i(t)$ im Kreis. Aus der kirchhoffschen Maschenregel erhalten wir zunächst den Zusammenhang der Zweigspannungen

$$u_q(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t).$$

Weil der Strom des Reihenschwingkreises alle Bauelemente der Masche durchfließt, kann mit den in Abb. 2.10 dargestellten Beziehungen seine Bestimmungsgleichung als Integrodifferenzialgleichung angegeben werden:

$$u_q(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau.$$

Differenziert man die Gleichung einmal nach der Zeit, ergibt sich eine *lineare Differenzialgleichung* zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

$$L \cdot \frac{d^2}{dt^2} i(t) + R \cdot \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{C} \cdot i(t) = \frac{d}{dt} u_q(t).$$

Aus der Mathematik ist das allgemeine Lösungsschema für lineare Differenzialgleichungen bekannt. Wegen der sinusförmigen Inhomogenität kann hier die Lösung über die Operatormethode relativ einfach bestimmt werden. In der Elektrotechnik bildet diese Methode die Grundlage für die komplexe Wechselstromrechnung. Weil die Inhomogenität sinusförmig ist, wird als Lösungsansatz ein ebenfalls sinusförmiger Strom gewählt. Damit erscheint in der Differenzialgleichung auf der linken und rechten Seite der gleiche Funktionstyp. Nur dann kann für alle Zeit t , d. h. im eingeschwungenen Zustand, die Gleichung gelöst werden, wenn sich beim Differenzieren und Integrieren der Funktionstyp reproduziert. Das genau leistet die sinusförmige Gestalt. Die Überlegungen führen unmittelbar auf den Exponentialansatz für die Spannungsquelle

$$u_q(t) = \operatorname{Re}(U_q \cdot e^{st})$$

mit der *komplexen Amplitude*

$$U_q = \hat{u} \cdot e^{j\varphi}.$$

Anmerkung

- In der komplexen Wechselstromrechnung wird für gewöhnlich der Realteil der komplexen Frequenz zu null gesetzt, d. h. $s = j\omega$. Der Realteil ist erst von Bedeutung, wenn die Laplace-Transformation zur Berechnung von Schaltvorgängen zum Einsatz kommt oder Stabilitätsüberlegungen wichtig werden.

Entsprechend wird für den Strom der Ansatz gewählt

$$i(t) = \operatorname{Re}(I \cdot e^{st}).$$

Die beiden Ansätze in die Bestimmungsgleichung (Integrodifferenzialgleichung) eingesetzt liefert

$$R \cdot I \cdot e^{st} + L \cdot \frac{d}{dt} I \cdot e^{st} + \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t I \cdot e^{st} d\tau = U_q \cdot e^{st},$$

was nach kurzer Zwischenrechnung die Vorgehensweise rechtfertigt:

$$R \cdot I \cdot e^{st} + L \cdot s I \cdot e^{st} + \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{s} I \cdot e^{st} = U_q \cdot e^{st}.$$

Jetzt kann die Zeitabhängigkeit durch Kürzen mit der Exponentialfunktion formal eliminiert werden. Die Zeitabhängigkeit der Lösung ist davon nicht betroffen. Sie ist als Exponentialfunktion definiert und wird der Lösung für die komplexe Amplitude wieder hinzugefügt. Die komplexe Wechselstromrechnung setzt die Betrachtung im stationären Zustand, auch eingeschwungener Zustand genannt, voraus. Es resultiert die algebraische Bestimmungsgleichung in s für die komplexe Amplitude des Stroms:

$$R \cdot I + sL \cdot I + \frac{1}{sC} \cdot I = U_q.$$

Sie ergibt schließlich die Lösung

$$I = \frac{sC}{s^2 LC + sCR + 1} \cdot U_q = Y(s) \cdot U_q = \frac{1}{Z(s)} \cdot U_q.$$

Der komplexe Faktor $Y(s)$ wird *Admittanz*, auch komplexer Leitwert, genannt. Sein Kehrwert $Z(s)$ heißt *Impedanz*, auch komplexer Widerstand. Der Zusammenhang zwischen den komplexen Größen stellt eine direkte Erweiterung des bekannten ohmschen Gesetzes dar. Unter Berücksichtigung der Rechenregeln für komplexe Zahlen kann für RLC-Netzwerke mit den komplexen Amplituden wie mit Gleichgrößen gerechnet werden.

Die Impedanz ist eine Funktion der Bauelemente R , L und C , sowie der komplexen Frequenz s der sinusförmigen Spannungsquelle. Im Zahlenwertbeispiel in Abb. 2.12 gilt mit

$$s = j2\pi \cdot 50 \text{ Hz}$$

für die Impedanz

$$Z = 4 \Omega - j3 \Omega = 5 \cdot e^{-j0,64} \Omega$$

und somit für die komplexe Amplitude des Stroms

$$I = 20 \cdot e^{j0,64} \text{ A}.$$

Die gesuchte Zeitfunktion des Stroms erhalten wir durch Einsetzen in den Lösungsansatz

$$i(t) = \operatorname{Re}(I \cdot e^{st}) = 20 \text{ A} \cdot \cos(2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot t + 0,64).$$

Anmerkungen

- Wie später noch gezeigt wird, steht die Lösung in engem Zusammenhang mit der Übertragungsfunktion und dem Frequenzgang von linearen zeitinvarianten Systemen.
- Der Schwingkreis zeichnet sich durch den Energieaustausch zwischen magnetischem und elektrischem Feld aus. Analoges gilt beispielsweise auch in der Mechanik, in der die kinetische und die potenzielle Energie in wechselseitigen Austausch treten können, z. B. beim mechanischen Pendel. Man spricht in diesen Fällen von mechanischen Schwingkreisen.

2.2.2 Lineares zeitinvariantes System

In den folgenden Abschnitten werden elektrische Netzwerke betrachtet, die sich aus den idealen Bauelementen Widerstand R , Induktivität L und Kapazität C und den idealen Strom- und Spannungsquellen zusammensetzen. Trotz der Idealisierung haben derartige Netze in der Nachrichtentechnik eine hohe praktische Bedeutung, weil sie reale Systeme im Arbeitsbereich oft gut beschreiben. So lassen sich reale Widerstände, Spulen und Kondensatoren in vielen Anwendungen durch RLC-Ersatzschaltungen modellieren. Eine wesentliche Eigenschaft der RLC-Netzwerke ist ihre Linearität. Sie entspricht dem physikalischen *Superpositionsprinzip* und garantiert eine relativ einfache mathematische Beschreibung. Die Linearität leitet sich hier allgemein aus den Beziehungen zwischen Strömen und Spannungen an den Bauelementen in Abb. 2.10 ab. Es treten nur lineare Rechenoperationen auf: die Multiplikation mit einer Konstanten, die Differenziation und die Integration. In der Elektrotechnik spricht man deshalb von der Linearisierung der Schaltung. Eine weitere wichtige Eigenschaft wird meist stillschweigend vorausgesetzt: die Zeitinvarianz. Das heißt, die Netzwerke ändern im betrachteten Zeitraum ihre Eigenschaften nicht.

Anmerkung

- Wie der Techniker weiß, sind Temperaturschwankungen der Kennwerte, wie beim sich im Betrieb erwärmenden Widerstand, sowie Alterungsprozesse typische Fehlerquellen in realen Schaltungen. Derartige Fehler und der Umgang mit ihnen sind hier außerhalb der weiteren Überlegungen.

Linearität und Zeitinvarianz führen unmittelbar zum Begriff des *linearen zeitinvarianten Systems*, kurz LTI-System („linear time-invariant“). Hierzu betrachte man in Abb. 2.13 den passiven elektrischen Vierpol in seiner Darstellung als System mit je einem Ein- und Ausgang und den elektrischen Spannungen als Eingangs- bzw. Ausgangssignal.

Zwei Eingangssignalen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ seien die Ausgangssignale $y_1(t)$ bzw. $y_2(t)$ zugeordnet. Das System ist dann linear, wenn für eine beliebige Linearkombination der

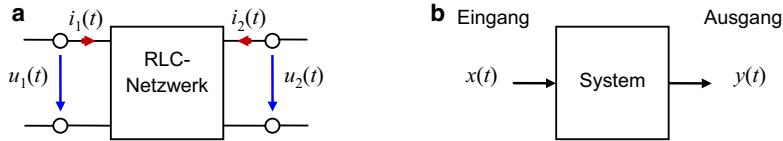


Abb. 2.13 RLC-Netzwerk als Zweitor (a) und als System mit einem Eingang und einem Ausgang (b)

Eingangssignale mit den Konstanten α_1 und α_2 stets die entsprechende Linearkombination der Ausgangssignale zu beobachten ist:

$$\alpha_1 \cdot x_1(t) + \alpha_2 \cdot x_2(t) \Rightarrow \alpha_1 \cdot y_1(t) + \alpha_2 \cdot y_2(t).$$

Diese Bedingung muss streng genommen für die Überlagerung von beliebig vielen, in Summe leistungs- bzw. energiebegrenzten Signalen gelten, wie sie sich beispielsweise durch die harmonische Analyse mit der Fourier-Reihe und der Fourier-Transformation in den folgenden Abschnitten ergibt.

Für RLC-Netzwerke kann die Linearität direkt aus den physikalischen Definitionsgleichungen für Strom und Spannung an den Bauelementen abgelesen werden. Weil diese mathematischen Operationen linear sind, muss jede Linearkombination solcher Operationen, also praktisch die Verschaltung der Bauelemente, wieder ein lineares System sein.

- Beschränken sich die Operationen im System auf die Addition von Signalen, die Multiplikation der Signale mit Konstanten und die Differenziation oder Integration der Signale, so resultiert ein lineares System.

Die Linearität ist deshalb so wichtig, weil dadurch das weitere Vorgehen wesentlich vereinfacht wird. Will man die Reaktion eines LTI-Systems auf ein beliebiges Eingangssignal bestimmen, so bietet es sich an, das Eingangssignal in sinusförmige Signalkomponenten zu zerlegen. Für diese kann das jeweilige Ausgangssignal, z. B. mit den Methoden der komplexen Wechselstromrechnung, gefunden werden. Die Systemreaktion ergibt sich dann aus der Überlagerung aller Ausgangs(teil)signale. Das Werkzeug hierzu liefert die Mathematik mit der Fourier-Reihe in Abschn. 2.3 und ihrer Verallgemeinerung, der Fourier-Transformation in Abschn. 2.6.

Anmerkungen

- In der komplexen Wechselstromrechnung wird vorausgesetzt, dass bei sinusförmiger Erregung mit einer festen Frequenz, alle Spannungen und Ströme ebenfalls sinusförmig und mit gleicher Frequenz sind, nur Amplituden und Phasen unterscheiden sich. Dem liegt bei den LTI-Systemen folgender allgemeine Zusammenhang zugrunde: Ein Signal von der Form einer (allgemein) Exponentiellen am Systemeingang führen auf die Exponentielle gleicher Frequenz am Ausgang; man spricht

von der Eigenfunktion. Es ist deshalb nicht verwunderlich, dass wichtige Gleichungen der Physik zur Ausbreitung von Wärme, mechanischer und elektromagnetischer Energie durch komplex Exponentielle gelöst werden, siehe Wellengleichungen bzw. Telegrafengleichung der Nachrichtentechnik.

- In der Systemtheorie stellt die Zeit als Variable nur einen Sonderfall dar. Man spricht deshalb mathematisch von der Translationsinvarianz oder aus dem Englischen auch von der Shift-Invarianz, kurz den LSI-Systemen.

2.3 Harmonische Analyse

Die Entwicklung einer Funktion in ihre *Fourier-Reihe*⁶ bezeichnet man als *harmonische Analyse*. Die Funktion wird dabei als Überlagerung von sinusförmigen Schwingungen oder allgemein Exponentiellen dargestellt. Ist die Funktion ein Eingangssignal eines LTI-Systems, kann das Ausgangssignal relativ einfach berechnet werden. Die harmonische Analyse ist deshalb ein wichtiges mathematisches Werkzeug in der Nachrichtentechnik und spielt auch in anderen Fachgebieten eine große Rolle.

In diesem Abschnitt werden periodische reelle Signale betrachtet, wie der Rechteckimpulszug in Abb. 2.7. Ein periodisches Signal $x(t)$ kann stets durch eine Fourier-Reihe dargestellt werden, wenn es den Dirichlet-Bedingungen⁷ genügt:

- Innerhalb einer Periode T_0 ist $x(t)$ in endlich viele Intervalle zerlegbar, in denen $x(t)$ stetig und monoton ist.
- An jeder Unstetigkeitsstelle (Sprungstelle) sind die Werte $x(t + 0)$ und $x(t - 0)$ definiert.

Die in der Nachrichtentechnik wichtigen periodischen Signale erfüllen die beiden Bedingungen. Je nach Bedarf kann eine der drei nachfolgenden äquivalenten Formen der Fourier-Reihe benutzt werden.

Trigonometrische Form

Die trigonometrische Form der Fourier-Reihe stellt das Signal $x(t)$ mit der Periode T_0 als Überlagerung von Sinus- und Kosinusfunktionen dar

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)],$$

mit der Grundkreisfrequenz

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

⁶ [Jean-Baptiste] Joseph Baron de Fourier (1768–1830), französischer Mathematiker und Physiker.

⁷ [Lejeune] Peter Dirichlet (1805–1859), deutsch-französischer Mathematiker.

und den *Fourier-Koeffizienten*

$$a_k = \frac{2}{T_0} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \cdot \cos(k\omega_0 t) dt \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \cdot \sin(k\omega_0 t) dt \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

Harmonische Form

Die Sinus- und Kosinusterme gleicher Frequenz können zu einer Harmonischen zusammengefasst werden:

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

mit den Amplituden bzw. Phasen

$$C_0 = \frac{a_0}{2}; C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \text{und} \quad \theta_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

Das konstante Glied C_0 entspricht dem *Gleichanteil* des Signals, also im Fall eines elektrischen Signals dem Gleichstrom- bzw. dem Gleichspannungsanteil. Der Anteil bei der Grundkreisfrequenz, für $k = 1$, wird *Grundschiwingung* oder *1. Harmonische* genannt. Die Anteile zu $k = 2, 3, \dots$ heißen *1. Oberschiwingung* oder *2. Harmonische* usw.

Komplexe Form

Alternativ können die Sinus- und Kosinusterme mit der eulerschen Formel als Linearkombinationen von Exponentialfunktionen geschrieben werden

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

mit den komplexen Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

Dabei wird ohne Unterschied mit positiven und negativen Frequenzen gerechnet. Für die üblichen reellen Signale gilt die Symmetrie

$$c_{-k} = c_k^*$$

und der Zusammenhang mit den Koeffizienten der trigonometrischen Form

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad \text{und} \quad c_k = \frac{1}{2} \cdot (a_k - jb_k) \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

Parsevalsche Gleichung

Die Sinus- und Kosinusfunktionen der Fourier-Reihe bilden ein vollständiges Orthogonalsystem, das den mittleren quadratischen Fehler minimiert. Diese wichtige mathematische Eigenschaft drückt sich in der *parsevalschen Gleichung*⁸ aus:

$$\frac{1}{T_0} \cdot \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Sie verknüpft die Signalleistung, die mittlere Signalleistung in einer Periode, mit der Summe der Betragsquadrate der Fourier-Koeffizienten. Damit kann auch die Approximationsgüte einer abgebrochenen Fourier-Reihe bezüglich des mittleren quadratischen Fehlers abgeschätzt werden.

Fourier-Reihe des Rechteckimpulszugs

Als wichtiges Beispiel betrachten wir den Rechteckimpulszug und seine Fourier-Reihe. In der Nachrichtenübertragungstechnik werden Rechteckimpulse zur binären Datenübertragung verwendet, siehe Abb. 2.5:

$$x_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Dazu passend betrachten wir den periodischen Rechteckimpulszug $x_p(t)$ in Abb. 2.7 mit der Periode T_0 , dem Tastverhältnis T/T_0 und der Amplitude A . Ihn entwickeln wir in eine trigonometrische Fourier-Reihe. Als Integrationsintervall nehmen wir eine Periode $t \in [-T_0/2, T_0/2]$ symmetrisch um den Ursprung. Für die Fourier-Koeffizienten gilt

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T_0} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) dt = 2A \cdot \frac{T}{T_0} \\ a_k &= \frac{2}{T_0} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} A \cdot \cos(k\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2A}{T_0} \cdot \frac{1}{k\omega_0} \cdot \left[\sin\left(\frac{k\omega_0 T}{2}\right) - \sin\left(\frac{-k\omega_0 T}{2}\right) \right] \quad \text{für } k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Da die Sinusfunktion ungerade ist, wird das Minuszeichen aus dem Argument vorgezogen. Nach Zusammenfassen der beiden Sinusterme ergeben sich nach kurzer Umformung die Fourier-Koeffizienten

$$a_k = 2A \cdot \frac{T}{T_0} \cdot \frac{\sin\left(k\omega_0 \cdot \frac{T}{2}\right)}{k\omega_0 \cdot \frac{T}{2}} = 2A \cdot \frac{T}{T_0} \cdot \text{si}\left(k\omega_0 \cdot \frac{T}{2}\right) \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots,$$

⁸ Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755–1836), französischer Mathematiker.

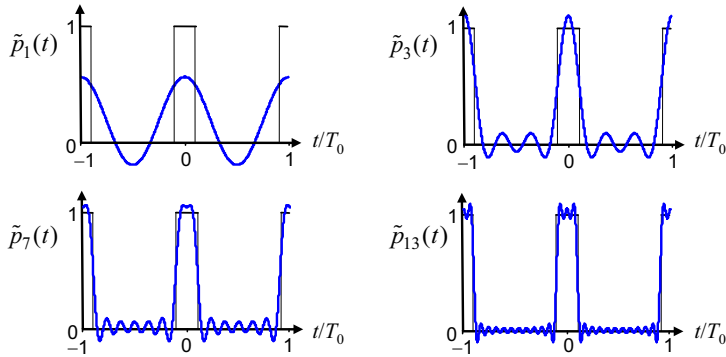


Abb. 2.14 Approximation des periodischen Rechteckimpulszugs durch den Gleichanteil und den ersten k Harmonischen

wobei als Abkürzung die *si-Funktion* benutzt wird:

$$\text{si}(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Für die Fourier-Koeffizienten zu den Sinusfunktionen resultiert hier stets null, weil $x_p(t)$ eine gerade Funktion ist. Im Beispiel treten keine Sinusfunktionen auf.

Ersetzen wir schließlich noch die Grundkreisfrequenz ω_0 durch $2\pi/T_0$, hängen die Fourier-Koeffizienten nur vom Tastverhältnis ab. Die Fourier-Reihe des periodischen Rechteckimpulszugs nimmt damit endgültig die kompakte Form

$$x_p(t) = 2A \cdot \frac{T}{T_0} \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \text{si}\left(\pi k \cdot \frac{T}{T_0}\right) \cdot \cos\left(2\pi k \cdot \frac{t}{T_0}\right) \right]$$

an.

In vielen Anwendungen ist es oft ausreichend, Signale nur durch eine endliche Zahl von Gliedern anzunähern. In Abb. 2.14 veranschaulichen wir den entstehenden Approximationsfehler am Beispiel des periodischen Rechteckimpulszugs. Das Tastverhältnis beträgt 1/5. Es werden jeweils der Gleichanteil und die ersten k Harmonischen benutzt mit $k = 1, 3, 7$ und 13. Im Bild ist deutlich die Annäherung an den Rechteckimpulszug bei wachsender Zahl berücksichtigter Harmonischen zu sehen. An den Sprungstellen zeigt sich das als *gibbsches Phänomen* bekannte Überschwingen der Approximation. Erhöht man die Zahl der berücksichtigten Harmonischen, so ist das Überschwingen von etwa 9 % der Sprunghöhe der Unstetigkeitsstelle weiter zu beobachten. Die maximalen Abweichungen rücken dabei links und rechts immer näher an die Sprungstelle. Erst im Grenzfall $k \rightarrow \infty$ fallen sie zusammen und kompensieren sich. Das gibbsche Phänomen spielt beispielsweise beim Entwurf digitaler Filter eine Rolle.

Anmerkungen

- Mit der Regel von L'Hospital⁹ oder mit der Potenzreihe für die Sinusfunktion lässt sich zeigen, dass für die si-Funktion an der Stelle null gilt

$$\text{si}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

- Eine quantitative Behandlung des Approximationsfehlers bei Abbruch der Fourier-Reihe ist mit der parsevalschen Gleichung möglich. Sie stellt auch sicher, dass mit jedem zusätzlich berücksichtigten Glied der Approximationsfehler im quadratischen Mittel abnimmt.

2.4 Methode der Ersatzspannungsquellen

In den letzten beiden Abschnitten wurden zwei allgemeine Prinzipien vorgestellt: die Linearität eines Systems und die harmonische Signalzerlegung. Nun zeigen wir anhand der Methode der Ersatzspannungsquellen wie sich beide Prinzipien vorteilhaft verbinden lassen.

Die Signaldarstellung als Fourier-Reihe ermöglicht es, die Reaktion auf periodische Spannungs- und Stromquellen in RLC-Netzwerken mit der komplexen Wechselstromrechnung zu bestimmen. Grundlagen hierzu sind, dass das Superpositionsprinzip gültig ist und die Harmonischen die Eigenfunktionen der LTI-Systeme sind. Das heißt, es darf die Wirkung jeder einzelnen Harmonischen getrennt berechnet werden. Die Teillösungen werden zur Gesamtlösung addiert. Das nachfolgende ausführliche Beispiel stellt das Verfahren vor. Dabei orientieren wir uns an einer typischen Aufgabe in der Nachrichtenübertragung, der Datenübertragung über eine Zweidrahtleitung. Wir modellieren das binäre Datensignal als periodischen Rechteckimpulszug, indem wir annehmen, es wird für jede logische „1“ ein Rechteckimpuls gesendet und sonst das Signal ausgetastet, d. h. der Rechteckimpuls nicht gesendet. Dann entspricht der Datenfolge ...01010101... ein Rechteckimpulszug mit dem Tastverhältnis $T/T_0 = 1/2$. Nehmen wir weiter an, die Übertragungsstrecke lasse sich – zumindest näherungsweise – durch das in Abb. 2.15 gezeigte *RC-Glied* beschreiben, so kann das Signal am Ausgang berechnet werden.

Anmerkungen

- Mit der periodischen Bitfolge lässt sich natürlich keine genuine Information übertragen. Der periodische Rechteckimpulszug spielt beispielsweise als Taktsignal in der Digitaltechnik eine wichtige Rolle.

⁹ *Guillaume François Antonine, Marquis de L'Hôpital* (1661–1704), französischer Mathematiker.

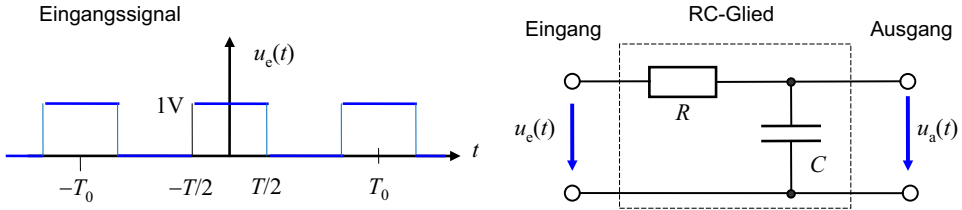


Abb. 2.15 Periodischer Rechteckimpulszug am RC-Glied

- Im Beispiel einer einfachen Zweidrahtleitung werden mit dem Widerstand R der Spannungsabfall entlang der Leitung und mit der Kapazität C die Querkapazitäten zwischen den Leitern modelliert.
- Die Aufgabe des Empfängers wäre dann, die gesendete Nachricht, die Bitfolge, aus dem Ausgangssignal zu rekonstruieren. Die sich aus dem Beispiel ergebenden Konsequenzen für die digitale Übertragung im Basisband werden in Kap. 4 behandelt.

Im ersten Schritt bestimmen wir die Ersatzspannungsquellen. Danach geben wir im zweiten Schritt mit der komplexen Wechselstromrechnung die zugehörigen Spannungen an der Kapazität an. Deren Überlagerung liefert schließlich das Ausgangssignal im dritten und letzten Schritt.

Ersatzspannungsquellen

Entsprechend der Fourier-Reihe des Rechteckimpulszugs fassen wir die Eingangsspannung als Überlagerung von Spannungsquellen auf:

$$\begin{aligned}
 u_e(t) &= U_{e,0} + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_{e,k} \cdot \cos\left(2\pi k \frac{t}{T_0}\right) \\
 &= 2 \text{ V} \cdot \frac{T}{T_0} \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \text{si}\left(\pi k \frac{T}{T_0}\right) \cdot \cos\left(2\pi k \frac{t}{T_0}\right) \right],
 \end{aligned}$$

und zwar mit der Gleichspannungsquelle

$$U_{e,0} = \frac{T}{T_0} \text{ V}$$

und den Wechselspannungsquellen

$$u_{e,k}(t) = \hat{u}_{e,k} \cdot \cos(\omega_k t).$$

Die Scheitelwerte und Kreisfrequenzen sind

$$\hat{u}_{e,k} = 2 \cdot \frac{T}{T_0} \cdot \text{si}\left(\pi \cdot k \cdot \frac{T}{T_0}\right) \text{ V} \quad \text{bzw.} \quad \omega_k = k \cdot \frac{2\pi}{T_0}.$$

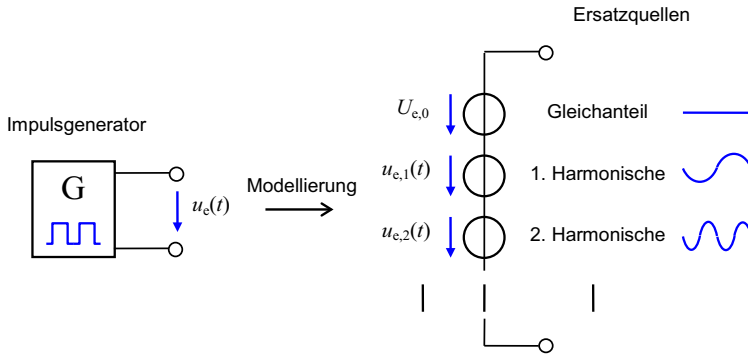


Abb. 2.16 Ersatzspannungsquellen für den periodischen Rechteckimpulszug

Die Modellierung der Impulsquelle durch die *Ersatzspannungsquellen* veranschaulicht Abb. 2.16.

Komplexe Wechselstromrechnung

Aus der Spannungsteilerregel der komplexen Wechselstromrechnung folgt mit den komplexen Amplituden am Eingang $U_{e,k}$ für die komplexen Amplituden am Ausgang des RC-Glieds, der Kapazität,

$$U_{a,k} = U_{e,k} \cdot \frac{\frac{1}{j\omega_k \cdot C}}{R + \frac{1}{j\omega_k \cdot C}} = U_{e,k} \cdot \frac{1}{1 + j\omega_k \cdot R \cdot C} \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

Daraus erhalten wir mit der *Zeitkonstante* des RC-Glieds

$$\tau = R \cdot C$$

die zugehörigen Spannungen am Ausgang:

$$u_{a,k}(t) = \operatorname{Re} \left(\frac{U_{e,k}}{1 + j\omega_k \tau} \cdot e^{j\omega_k t} \right) = \frac{\hat{u}_{e,k}}{\sqrt{1 + (\omega_k \tau)^2}} \cdot \cos(\omega_k t - \arctan(\omega_k \tau)).$$

Anmerkung

- Die Zeitkonstante des RC-Glieds τ ist ein Maß für die Dauer des Ladevorgangs an der Kapazität mit in Reihe geschaltetem Widerstand. Je größer R und/oder C , umso länger dauert der Ladevorgang. Beim Entladen eines Kondensators mit der Anfangsspannung U_0 beträgt die Spannung am Kondensator nach der Zeit $t = \tau$ genau $U_0 \cdot e^{-1} \approx 0,3679 \cdot U_0$.

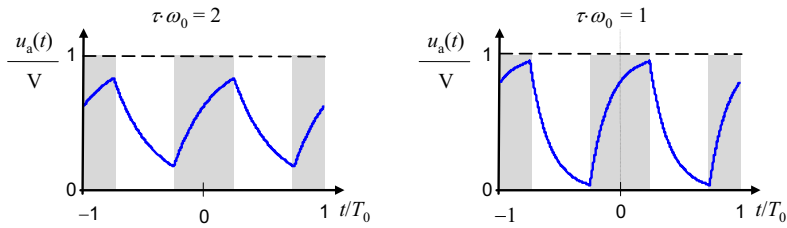


Abb. 2.17 Übertragung eines periodischen Rechteckimpulszugs (*hinterlegt*) durch ein RC-Glied mit der Zeitkonstante τ

Superposition

Die Überlagerung der sinusförmigen Teilspannungen am Ausgang liefert mit der unverändert übertragenen Gleichspannungskomponente die gesuchte Spannung an der Kapazität

$$u_a(t) = 2 \text{ V} \cdot \frac{T}{T_0} \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{si} \left(\pi k \cdot \frac{T}{T_0} \right)}{\sqrt{1 + \left(2\pi k \cdot \frac{\tau}{T_0} \right)^2}} \cdot \cos \left(2\pi k \cdot \frac{t}{T_0} - \arctan \left(2\pi k \cdot \frac{\tau}{T_0} \right) \right) \right].$$

Der Spannungsverlauf ist für zwei verschiedene Werte der Zeitkonstanten τ in Abb. 2.17 zu sehen. Im linken Teilbild ist die Zeitkonstante relativ groß. Es wird die Amplitude der ersten Harmonischen bereits so stark gedämpft, dass das Ausgangssignal im Wesentlichen einem unvollständigen Lade- bzw. Entladevorgang der Kapazität entspricht. Ist, wie im rechten Teilbild, die Zeitkonstante gleich der Inversen der Grundkreisfrequenz, so wird die Kapazität während der Impulsdauer fast vollständig geladen bzw. entladen. Die Konsequenzen, die sich daraus für die Datenübertragung ergeben, werden in Kap. 4 noch diskutiert.

2.5 Spektrum und Frequenzgang

Das Beispiel mit der harmonischen Analyse des Signals am RC-Glied lässt sich verallgemeinern. Es führt uns auf die zentralen Begriffe: Spektrum, Frequenzgang und Filterung. Bevor wir jedoch die grundlegenden Definitionen und allgemeinen Beziehungen behandeln, bleiben wir zunächst bei unserem Beispiel und führen die Begriffe auf anschauliche Weise ein.

2.5.1 Spektrum von Signalen mit Fourier-Reihe

Betrachtet man die Definition der Fourier-Reihe, so unterscheiden sich die Signale bei gleicher Periode durch die Gewichtung der Harmonischen, den Fourier-Koeffizienten.

Letztere enthalten, bis auf die Periode, die vollständige Information über das Signal. Im Beispiel des letzten Abschnitts entsprechen die Fourier-Koeffizienten den Amplituden der Ersatzspannungsquellen. Sie haben somit eine physikalische Bedeutung. Die Methode der Ersatzspannungsquellen in Abb. 2.16 liefert implizit eine Verteilung der Signalleistung auf die Harmonischen. Indem jeder Ersatzspannungsquelle genau eine bestimmte Frequenz zugeordnet ist, kann auch von Signalanteilen bzw. Leistungsanteilen bei diskreten Frequenzen gesprochen werden. Hierzu stellen wir zunächst den Zusammenhang zwischen den komplexen Fourier-Koeffizienten und den bekannten Größen der Wechselstromrechnung her. Aus der harmonischen Form der Fourier-Reihe folgt für die Amplitude des Gleichanteils

$$U_0 = c_0$$

und die Amplitude der k -ten Harmonischen

$$\hat{u}_k = C_k = 2 \cdot |c_k| \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

Damit sind auch die jeweiligen Anteile an der mittleren Leistung an einem Widerstand R bekannt:

$$\frac{U_{\text{eff},k}^2}{R} = \frac{2 \cdot |c_k|^2}{R} \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

Der Betrag des k -ten komplexen Fourier-Koeffizienten ist proportional zur Amplitude der k -ten Harmonischen. Und das Betragsquadrat des komplexen Fourier-Koeffizienten ist proportional zur am Referenzwiderstand R umgesetzten thermischen Leistung. Da dem k -ten Fourier-Koeffizienten genau die diskrete Frequenz $k \cdot f_0$ zugeordnet ist, spricht man vom *Amplitudenspektrum* bzw. vom *Leistungsspektrum* des periodischen Signals und nennt die zugeordneten Signalanteile *Spektral-* oder *Frequenzkomponenten*. Der Einfachheit halber wird kurz vom *Spektrum* gesprochen.

Die verschiedenen Formen der Fourier-Reihe lassen es zu, dass man je nach Zweckmäßigkeit einseitige Spektren mit nur positiven „natürlichen“ Frequenzen und zweiseitige Spektren mit positiven und negativen Frequenzen verwendet. Letzteres bietet Vorteile beim Rechnen und ist darum in der Physik und der Technik gebräuchlich.

Im Beispiel des periodischen Rechteckimpulszugs resultieren für die Spektren die Stabdiagramme in Abb. 2.18. Darin sind die Fourier-Koeffizienten c_k bzw. die (normierten) Leistungen $|c_k|^2$ der Signalanteile über den Index k aufgetragen. Jedem Index k ist die Frequenz $f_k = k \cdot f_0$ eindeutig zugeordnet. Deshalb kann Abb. 2.18 als Frequenzbereichsdarstellung interpretiert werden. Es resultieren *Linienspektren* mit äquidistant im Abstand f_0 verteilten Frequenzkomponenten. Man beachte auch, dass die si-Funktion die Fourier-Koeffizienten im oberen Teilbild interpoliert.

Wichtig ist ebenfalls die Symmetrie der Fourier-Koeffizienten für reelle Signale. Für die Beträge der Fourier-Koeffizienten ergibt sich eine gerade Symmetrie. Betragsspektrum und Leistungsspektrum werden deshalb meist nur für positive Frequenzen angegeben.

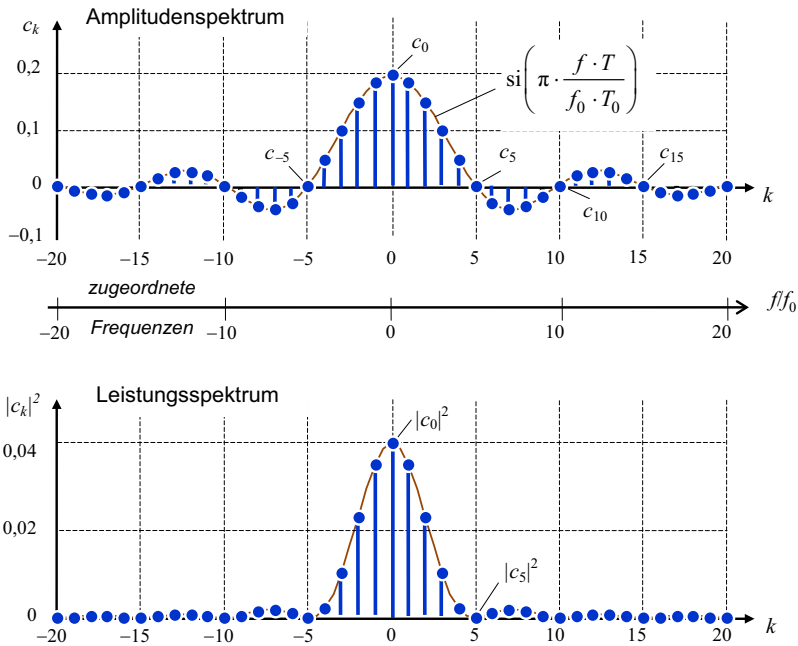


Abb. 2.18 Amplituden- und Leistungsspektrum des periodischen Rechteckimpulszugs

Bemerkenswert ist der Zusammenhang zwischen dem Tastverhältnis und der ersten Nullstelle im Spektrum für positive Frequenzen. Mit

$$\text{si}\left(\pi \cdot k \cdot \frac{T}{T_0}\right) = 0 \quad \text{nur für} \quad k \cdot \frac{T}{T_0} = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

ergeben sich mit dem Tastverhältnis $T/T_0 = 1/5$ Nullstellen bei $k = \pm 5, \pm 10, \pm 15$, usw. Der periodische Rechteckimpulszug besitzt keine Harmonischen bei diesen Frequenzen.

Die Verteilung der Leistungen auf die Frequenzkomponenten im unteren Teilbild zeigt, dass die wesentlichen Anteile auf Frequenzen bis zur ersten Nullstelle $k = \pm 5$ des Spektrums beschränkt sind. Man spricht deshalb von der *Bandbreite* des Signals und gibt je nach Anwendung einen geeigneten Kennwert an, was später noch genauer ausgeführt wird. In vielen Fällen genügt es, die Übertragung oder Weiterverarbeitung der Signale auf die Frequenzkomponenten innerhalb der Bandbreite zu beschränken. Der dabei vernachlässigte Leistungsanteil kann mit der parsevalschen Gleichung bestimmt werden.

2.5.2 Frequenzgang

In Abb. 2.15 ist das RC-Glied als *Zweitor* dargestellt. Mit den komplexen Amplituden an Eingang U_e und Ausgang U_a kann für jede beliebige, fest vorgegebene Kreisfrequenz ω ein komplexes Übertragungsverhältnis im eingeschwungenen Zustand angegeben werden:

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{\hat{u}_a}{\hat{u}_e} \cdot e^{j(\varphi_a - \varphi_e)} \Big|_{\omega \text{ fix}}.$$

Die Verallgemeinerung des Übertragungsverhältnisses der komplexen Amplituden, mit der komplexen Frequenz $s = j\omega$ als unabhängigem Parameter, führt auf den *Frequenzgang*

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \cdot e^{jb(\omega)}.$$

Das Argument des komplexen Frequenzgangs liefern den *Phasengang*, oft kurz auch nur Phase genannt,

$$b(\omega) = \arctan \left(\frac{\text{Im}[H(j\omega)]}{\text{Re}[H(j\omega)]} \right).$$

Die arctan-Funktion, ist bezüglich der vier Quadranten von 0 bis 2π auszuwerten. Der Phasengang kann, wie noch gezeigt wird, mit der Signalverzögerung der Frequenzkomponenten durch das System in Verbindung gebracht werden. Und anders als hier wird er in der Literatur manchmal mit negativem Vorzeichen festgelegt.

Der *Betragsgang* gibt an, wie stark ein sinusförmiges Signal bzw. eine Frequenzkomponente bei der Übertragung verstärkt oder gedämpft wird. Er wird häufig im logarithmischen Maß als *Dämpfungsgang* angegeben:

$$a_{\text{dB}}(\omega) = -20 \cdot \log_{10} |H(j\omega)| \text{ dB}.$$

Zur Unterscheidung wird die Pseudoeinheit *Dezibel*¹⁰ (dB) angehängt. Wird die Dämpfung in dB angegeben, spricht man vom *Dämpfungsmaß*. Um Verwechslungen vorzubeugen, können bei Formeln die Größen, für die Werte im logarithmischen Maß einzusetzen sind, durch den Index dB kenntlich gemacht werden.

Die Anwendung der Logarithmusfunktion hat zwei praktische Vorteile. Zum Ersten werden bei der Multiplikation von Betragsgängen, z. B. bei Hintereinanderschaltung von Filtern, die Werte des Dämpfungsmaßes einfach addiert. Zum Zweiten lässt die grafische Darstellung der Dämpfung in dB die Bereiche des Betragsgangs mit kleinen Werten, z. B. im Sperrbereich von Filtern, vergrößert erscheinen.

¹⁰ Zusammensetzung von „Dezi“ für den Zehnerlogarithmus und „bel“ vom Namen Bell. *Alexander Graham Bell* (1847–1922), US-amerikanischer Physiologe, Erfinder und Unternehmer schottischer Abstammung; erhält 1876 in den USA ein Patent für das Telefon.

Anmerkung

- Aus der Physik ist bekannt, dass reale elektrische Netzwerke mit Widerständen, Spulen und Kondensatoren gut durch die idealen Bauelemente R , L und C und den zugehörigen Beziehungen zwischen Strömen und Spannungen beschrieben werden können. Will man den Zusammenhang zwischen den Strömen und Spannungen in einem RLC-Netzwerk berechnen, so resultieren lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, wie z. B. beim Schwingkreis. Lässt man jedoch als Erregung nur sinusförmige Spannungs- oder Stromquellen zu, vereinfachen sich die Differenzialgleichungen mit dem Exponentialansatz der Operatormethode zu algebraischen Gleichungen. Wie im Beispiel des Reihenschwingkreises erhält man Gleichungen mit Polynomen in s , die dann relativ einfach gelöst werden können. Die komplexe Frequenz s deutet hier den Zusammenhang mit der Laplace-Transformation und der Übertragungsfunktion an. Im Sonderfall $\sigma = 0$ ergibt sich mit $s = j\omega$ die bekannte komplexe Wechselstromrechnung. Um im Rahmen einer Einführung zu bleiben, wird hier der Themenkomplex Laplace-Transformation und Übertragungsfunktion nicht weiter vertieft.

2.5.3 Frequenzgang des RC-Glieds

Im Beispiel des RC-Glieds in Abb. 2.15 erhalten wir aus der erweiterten Spannungsteilerregel für das Verhältnis der komplexen Amplituden an Aus- und Eingang

$$\frac{U_a}{U_e}|_{\omega \text{ fix}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

und daraus für den Frequenzgang des RC-Glieds

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \cdot R \cdot C}.$$

Die Bedeutung der Frequenzgänge des Betrags bzw. der Dämpfung wird in Abb. 2.19 deutlich. Eine kurze Zwischenrechnung ergibt für den Betragsgang

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2}}$$

und den Dämpfungsgang

$$a_{\text{dB}}(\omega) = -20 \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2}} \right) \text{ dB} = 10 \cdot \log_{10} (1 + \omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2) \text{ dB}.$$

Zur grafischen Darstellung der Frequenzgänge ist hier die Frequenznormierung $\Omega = \omega \cdot R \cdot C$ günstig. Dann hängt der Frequenzgang nur noch von der normierten Kreisfrequenz Ω ab, ist also in den Grafiken unabhängig von der konkreten Dimensionierung des

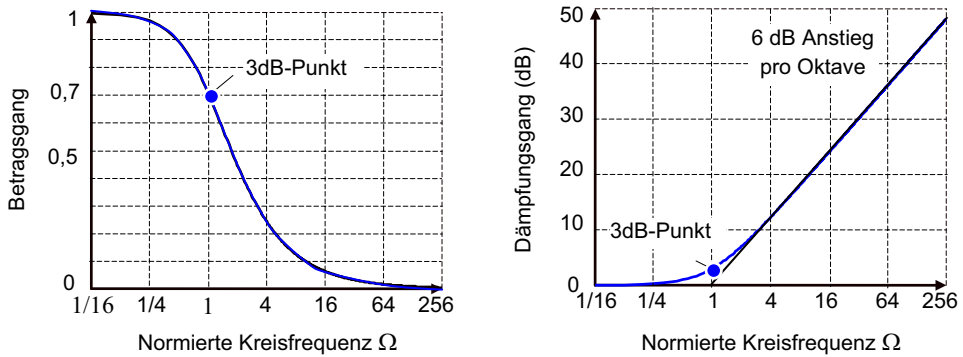


Abb. 2.19 Betragsgang und Dämpfungsgang des RC-Tiefpasses über der normierten Kreisfrequenz

Widerstands und der Kapazität. Und weil der Betragsgang eines RLC-Netzwerks stets eine gerade Funktion ist, genügt die Darstellung für positive Frequenzen. Darüber hinaus wird meist nur von der Frequenz gesprochen.

Der Betragsgang des RC-Glieds besitzt bei der Frequenz null sein Maximum und fällt bei wachsender Frequenz monoton. Das heißt, eine Gleichspannung am Eingang wird ohne Änderung übertragen, während sinusförmige Eingangsspannungen mit zunehmender Frequenz immer schwächer am Systemausgang, an der Kapazität, erscheinen. Im Grenzfall sehr hoher Frequenz wirkt die Kapazität wie ein Kurzschluss und die (normierte) Ausgangsspannung geht gegen null.

Der Frequenzgang der Dämpfung beginnt für die Frequenz null (Gleichspannung) mit dem Wert null und wächst mit der Frequenz monoton gegen unendlich (Kurzschluss der Kapazität). Für größere Frequenzen nimmt die Dämpfung bei jeder Frequenzverdoppelung um 6 dB zu. Dies entspricht in Abb. 2.19 einem linearen Dämpfungsverlauf mit einem Anstieg von 6 dB pro Oktave, was sich für große Frequenzen durch eine Abschätzung der Dämpfung mit der Logarithmusfunktion erklären lässt.

Der Dämpfungsgang zeigt insgesamt ein für einen *Tiefpass* charakteristisches Verhalten. Sinusförmige Signale (Frequenzkomponenten) bei relativ niedrigen Frequenzen passieren nahezu ungeschwächt das System, während solche bei relativ hohen Frequenzen so stark gedämpft werden, dass sie am Systemausgang keine Rolle mehr spielen. Man spricht in diesem Zusammenhang von einem (elektrischen) *Filter* oder auch einer *Siebschaltung*.

Zur groben Abschätzung des selektiven Verhaltens elektrischer Filter wird oft die *3 dB-Grenzfrequenz* $f_{3\text{ dB}}$ bzw. die 3 dB-Grenzkreisfrequenz $\omega_{3\text{ dB}}$ angegeben. Sie ist die (Kreis-)Frequenz, bei der die Dämpfung 3 dB bezogen auf den Maximalwert des Betragsgangs H_{max} beträgt:

$$a_{\text{dB}}(\omega_{3\text{ dB}}) = -20 \cdot \log_{10} \left(\frac{|H(j\omega_{3\text{ dB}})|}{H_{\text{max}}} \right) \text{ dB} = 3 \text{ dB}.$$

Die 3 dB-Grenzfrequenz gibt die Frequenz an, bei der die Leistung eines sinusförmigen Signals nur noch zur Hälfte übertragen wird. Die Amplitude wird in diesem Fall vom System mit dem Faktor $1/\sqrt{2}$ bewertet:

$$|H(j\omega_{3\text{ dB}})| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot H_{\max}.$$

Streng genommen gilt damit $-10 \cdot \log_{10}(1/2) \text{ dB} \approx 3,0103 \text{ dB}$, was aber in Überschlags- und Beispielsrechnungen i. d. R. der Rundung zum Opfer fällt.

Im Beispiel des RC-Glieds liegt der 3 dB-Punkt bei der normierte Kreisfrequenz $\Omega = 1$. Die 3 dB-Grenzfrequenz ergibt sich demnach zu

$$f_{3\text{ dB}} = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C} = \frac{1}{2\pi \cdot \tau}.$$

Man beachte, die 3 dB-Grenzfrequenz und die Zeitkonstante stehen in reziprokem Zusammenhang. Wie in Abschn. 2.6.4 noch gezeigt wird, ist der reziproke Zusammenhang zwischen der Zeitdauer eines Vorgangs und seiner Bandbreite von grundlegender Natur und hat weitreichende Konsequenzen.

2.5.4 Rechnen mit Frequenzgang und komplexer Fourier-Reihe

Alternativ zur trigonometrischen Form der Fourier-Reihe kann mit der komplexen Form gerechnet werden. Jede Frequenzkomponente wird mit dem Frequenzgang gewichtet (Abb. 2.20). Dabei wird ohne Unterschied mit positiven und negativen Frequenzen gerechnet. Das Ausgangssignal ist somit allgemein

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(jk\omega_0) \cdot c_k e^{jk\omega_0 t}.$$

Anders als bei der komplexen Wechselstromrechnung erübrigt sich hier der Ansatz mit der Realteilbildung. Diese ist schon in der Symmetrie der komplexen Fourier-Koeffizienten und des Frequenzgangs der RLC-Netzwerke enthalten. Für *reellwertige Systeme*, also

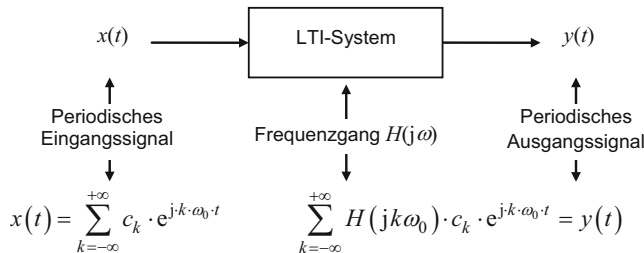


Abb. 2.20 Berechnung des Ausgangssignals eines LTI-Systems bei periodischem Eingangssignal

Systeme die auf ein reelles Eingangssignal mit einem reellen Ausgangssignal antworten, gilt nämlich für den konjugiert komplexen Frequenzgang die Symmetrie

$$H^* (j\omega) = H (-j\omega) .$$

Der Betragsgang ist demzufolge eine gerade

$$|H (j\omega)| = |H (-j\omega)|$$

und der Phasengang eine ungerade Funktion

$$b (\omega) = -b (-\omega) .$$

Fasst man nun im Ausgangssignal die Terme zu k und $-k$, also für positive und negative Frequenzen, paarweise zusammen

$$y (t) = H (0) \cdot c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [H (-jk\omega_0) \cdot c_{-k} e^{-jk\omega_0 t} + H (jk\omega_0) \cdot c_k e^{jk\omega_0 t}]$$

und benützt die Symmetrie der Fourier-Koeffizienten reeller Signale und des Frequenzgangs reellwertiger Systeme, so treffen jeweils zwei konjugiert komplexe Summanden paarweise aufeinander:

$$y (t) = H (0) \cdot c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [H^* (jk\omega_0) \cdot c_k^* \cdot e^{-jk\omega_0 t} + H (jk\omega_0) \cdot c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}] .$$

Es resultiert stets das Zweifache des Realteils, wobei $H(0)$ und c_0 für reelle Systeme bzw. reelle Signale stets rein reell sind:

$$y (t) = H (0) \cdot c_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \text{Re} [H (jk\omega_0) \cdot c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}] .$$

Periodischer Rechteckimpulszug am RC-Tiefpass

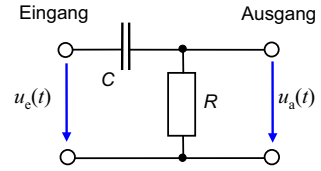
Im Beispiel des periodischen Rechteckimpulszugs bestimmen wir die komplexen Fourier-Koeffizienten des Eingangssignals mit der Umrechnungsformel aus den Fourier-Koeffizienten der trigonometrischen Form

$$c_0 = A \cdot \frac{T}{T_0} \quad \text{und} \quad c_k = A \cdot \frac{T}{T_0} \cdot \text{si} \left(\frac{\omega_0 T}{2} \cdot k \right) \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

Und für den Frequenzgang des RC-Tiefpasses gilt

$$H (jk\omega_0) = \frac{1}{1 + jk\omega_0 RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (k\omega_0 RC)^2}} \cdot e^{-j \arctan(k\omega_0 RC)} .$$

Im Beispiel erhalten wir aus obigem Ausgangssignal $y(t)$ in komplexer Form nach kurzer Zwischenrechnung wieder die reelle Spannung am Ausgang des RC-Glieds wie nach der Methode der Ersatzspannungsquellen in Abschn. 2.4.

Abb. 2.21 RC-Hochpass

2.5.5 Beispiel: RC-Hochpass

Das RC-Glied in Abb. 2.21 stellt einen Hochpass dar, wie anhand von physikalischen Überlegungen schnell nachgeprüft wird: Für niedrige Frequenzen, im Grenzfall für eine Gleichspannung, wirkt die Kapazität wie ein Leerlauf. Es fließt kein Strom und die Spannung am Widerstand, das Ausgangssignal, ist null. Dagegen kann für hohe Frequenzen die Kapazität als ein Kurzschluss angesehen werden. Eine entsprechende Eingangsspannung fällt fast vollständig am Widerstand ab, die Ausgangsspannung ist dann näherungsweise gleich der Eingangsspannung.

Der Frequenzgang des *RC-Hochpasses* bestimmt sich aus der erweiterten Spannungsteilerregel

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}.$$

Für die weitere Rechnung ist es günstig, ihn nach Betrag und Phase darzustellen:

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad \text{und} \quad b(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right).$$

Die oben diskutierte Hochpasseigenschaft erschließt sich schnell aus dem Betragsgang, wenn man die Grenzfälle ω gegen 0 und ∞ betrachtet und berücksichtigt, dass der Betragsgang monoton ist. Im ersten Fall ist $H(0) = 0$ und im zweiten Fall gilt $H(\infty) = 1$.

Als Signalbeispiel verwenden wir wieder den periodischen Rechteckimpulszug aus dem vorhergehenden Beispiel (Abb. 2.15). Im Fall der komplexen Fourier-Reihe wird jede Frequenzkomponente mit dem Frequenzgang gewichtet (Abb. 2.20), wobei hier zu beachten ist, dass der Gleichanteil nicht übertragen wird. Ganz entsprechend zum Beispiel des RC-Tiefpasses berechnet sich das Signal am Ausgang des RC-Hochpasses:

$$y(t) = 2A \cdot \frac{T}{T_0} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \text{si}\left(\frac{k\omega_0 T}{2}\right) \cdot \frac{k\omega_0 RC}{\sqrt{1 + (k\omega_0 RC)^2}} \cdot \cos\left(k\omega_0 t + \arctan\left(\frac{1}{k\omega_0 RC}\right)\right).$$

Abschließend werden Resultate für den RC-Tiefpass und den RC-Hochpass grafisch verglichen. Zunächst ist in Abb. 2.22 das Eingangssignal dargestellt. Zu sehen sind links zwei Perioden des Eingangssignals. Für die numerische Berechnung wurde die Fourier-Reihe des periodischen Rechteckimpulszugs bei $k = 99$ abgebrochen, womit das gibsche Phänomen deutlich zu erkennen ist. Rechts sind der Gleichanteil und die ersten sieben

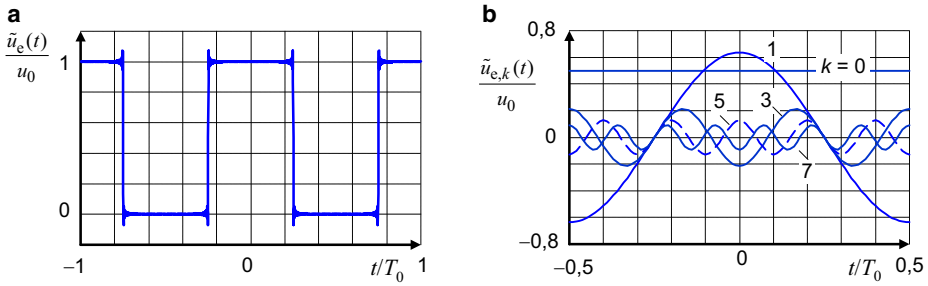


Abb. 2.22 Eingangssignal: Abgebrochene Fourier-Reihe des periodischen Rechteckimpulzugs mit dem Tastverhältnis $T/T_0 = 0,5$ (a) und der Gleichanteil und die ersten sieben Harmonischen (b)

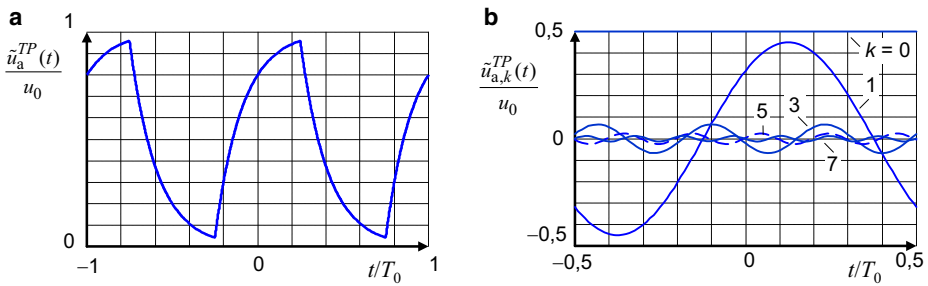


Abb. 2.23 Ausgangssignal des RC-Tiefpasses mit der Zeitkonstanten $\tau = T_0/(2\pi)$ (a) und der Gleichanteil und die ersten sieben Harmonischen (b)

Harmonischen abgebildet. Man beachte auch, dass wegen des Tastverhältnisses $T/T_0 = 1/2$ alle Harmonischen geradzahlicher Ordnung verschwinden.

Das Ausgangssignal des RC-Tiefpasses ist in Abb. 2.23 zu sehen. Es ergibt sich der bekannte exponentielle Verlauf der Spannung an der Kapazität während des Lade- und Entladevorgangs. Mit der gewählten Zeitkonstanten $\tau = T_0/(2\pi)$ ist die 3 dB-Grenzfrequenz des Tiefpasses gleich der Frequenz der 1. Harmonischen des Eingangssignals. Im rechten Teilbild werden wieder die ersten sieben Glieder der Fourier-Reihe dargestellt. Der Gleichanteil wird unverändert übertragen. Man erkennt deutlich, wie unterschiedlich die Harmonischen durch den Tiefpass gedämpft und in ihren Phasen verschoben werden. Die Amplituden der Harmonischen werden mit zunehmender Frequenz (k) stärker gedämpft. Dadurch wird das Signal insgesamt geglättet, da die Signalkomponenten, die die schnellen Änderungen repräsentieren, unterdrückt werden. Im Ausgangssignal treten keine Sprünge mehr auf. Die glättende Wirkung ist typisch für Tiefpässe.

Das Ausgangssignal des RC-Hochpasses zeigt Abb. 2.24. Mit der gewählten Zeitkonstanten $\tau = T_0/(2\pi)$ ist die 3 dB-Grenzfrequenz des Hochpasses gleich der Frequenz der 1. Harmonischen. Im rechten Teilbild werden die ersten sieben Glieder der Fourier-Reihe dargestellt. Insbesondere wird der Gleichanteil vollständig unterdrückt. Die verschiedenen

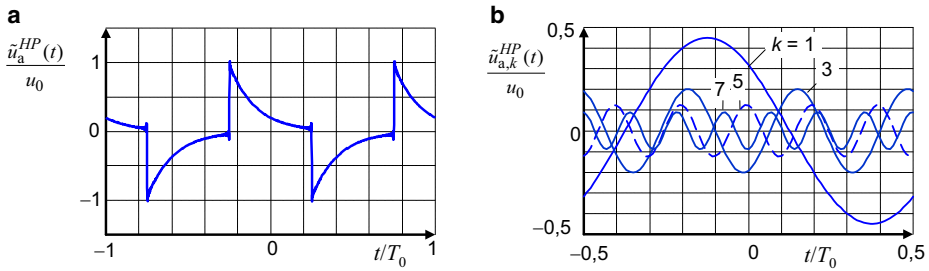
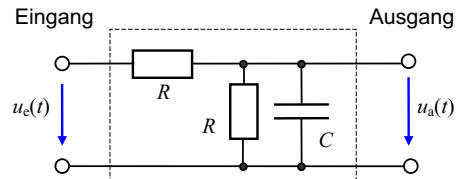


Abb. 2.24 Ausgangssignal des RC-Hochpasses mit der Zeitkonstanten $\tau = T_0/(2\pi)$ (a) und der Gleichanteil und die ersten sieben Harmonischen (b)

Abb. 2.25 RC-Schaltung



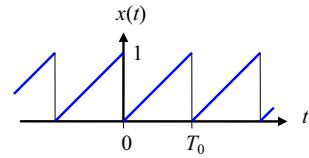
Dämpfungen und Phasenverschiebungen der Harmonischen durch den Hochpass werden deutlich sichtbar. Die Amplituden der 3., 5. und 7. Harmonischen werden durch den Hochpass weniger stark gedämpft als beim Tiefpass. Dies gilt erst recht für die Spektralkomponenten bei höheren Frequenzen. Insgesamt wird durch den Hochpass der Einfluss der Harmonischen mit höheren Frequenzen auf den Signalverlauf stärker. Signaländerungen werden betont, wie sich deutlich im linken Teilbild zeigt. Da beim RC-Hochpass am Ausgang der Spannungsabfall am Widerstand abgegriffen wird, ist das Ausgangssignal proportional zum bekannten Verlauf des Lade- bzw. Entladestroms der Kapazität und wechselt insbesondere das Vorzeichen. Man beachte auch hier wieder das gibbsche Phänomen an den Sprungstellen des Signals aufgrund der numerischen Berechnung mit der abgebrochenen Fourier-Reihe.

Aufgabe 2.1

Betrachten Sie die RC-Schaltung in Abb. 2.25.

- Geben Sie den Frequenzgang analytisch an. Verwenden Sie die Zeitkonstante $\tau = R \cdot C/2$.
- Bestimmen Sie den Frequenzgang der Dämpfung im logarithmischen Maß.
- Skizzieren Sie den Frequenzgang der Dämpfung im logarithmischen Maß und tragen Sie die Dämpfung bei der 3 dB-Grenzfrequenz ein.
Hinweis: Wählen Sie eine geeignete Einteilung der Frequenzachse.
- Um welche Art von Frequenzgang handelt es sich?
- Berechnen Sie die 3 dB-Grenzfrequenz für $R = 50 \, \Omega$ und $C = 796 \, \text{nF}$.

Abb. 2.26 Periodische Sägezahn-schwingung



Aufgabe 2.2

Skizzieren Sie das Amplitudenspektrum, d.h. den Betrag der Fourier-Koeffizienten in einseitiger Form, der in Abb. 2.26 gezeigten periodischen Sägezahn-schwingung mit der Fourier-Reihe

$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\omega_0 t)}{k}.$$

Hinweis: Beachten Sie die Zusammenhänge und die Symmetrie der Fourier-Koeffizienten; $1/\pi \approx 0,32$.

Aufgabe 2.3

Die periodische Sägezahn-schwingung in Abb. 2.26 erregt ein System mit idealem Bandpassverhalten mit den Grenzfrequenzen $f_{0u} = 300 \text{ Hz}$ und $f_{0o} = 4,1 \text{ kHz}$. Die Periode des Signals ist $T_0 = 1 \text{ ms}$.

- Geben Sie die Reaktion am Ausgang des Systems im eingeschwungenen Zustand an.
- Skizzieren Sie das Amplitudenspektrum (einseitiges Betragsspektrum) des Ausgangssignals.

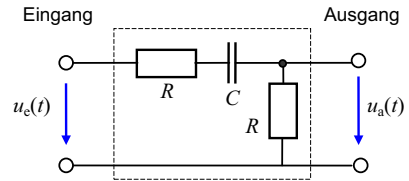
Aufgabe 2.4

- Erklären Sie den Begriff des Spektrums.
- Warum ist die harmonische Analyse im Zusammenhang mit elektrischen RLC-Netzwerken wichtig?
- Welche Bedeutung hat die Parsevalsche Gleichung?
- Erklären Sie den Begriff der Bandbreite.
- Welche Eigenschaft muss ein Signal haben, damit ein Linienspektrum entsteht?
- In welchem Zusammenhang stehen Bandbreite und zeitliche Dauer eines Signals?

Aufgabe 2.5

Gehen Sie von der RC-Schaltung in Abb. 2.27 aus mit $R = 100 \, \Omega$ und $C = 796 \text{ nF}$.

- Geben Sie den Frequenzgang analytisch an. Verwenden Sie dabei die Zeitkonstante $\tau = 2 \cdot R \cdot C$.
- Geben Sie den Frequenzgang der Dämpfung in dB an.

Abb. 2.27 RC-Schaltung

- c) Skizzieren Sie den Frequenzgang der Dämpfung in dB und tragen Sie den Wert der Dämpfung bei der 3 dB-Grenzfrequenz ein.
- d) Um welche Art von Frequenzgang handelt es sich?
- e) Berechnen Sie die 3 dB-Grenzfrequenz.

2.6 Fourier-Transformation und lineare Filterung

Am Beispiel von RLC-Netzwerken wurde gezeigt, wie die Fourier-Reihe vorteilhaft benutzt wird, um die Reaktion von LTI-Systemen auf periodische Signale zu bestimmen. Periodische Signale spielen zwar in der Nachrichtentechnik eine wichtige Rolle, z. B. als Test- und Trägersignale, beinhalten jedoch als deterministische Signale keine eigentliche Information. Deshalb wird im Folgenden die Analyse auf aperiodische Signale erweitert. Ein Anwendungsbeispiel liefert die Übertragung des ASCII-Zeichens in Abb. 2.5. Je nach codierendem Zeichen erhält man einen anderen Signalverlauf. Gemeinsam bleibt jedoch die Grundstruktur, die jedes Bit durch einen Rechteckimpuls darstellt, mit positivem Vorzeichen für die logische Null (0) und negativem Vorzeichen für die logische Eins (1). Damit rückt der Rechteckimpuls als Grundelement des binären Signals in den Mittelpunkt des Interesses. Seine Beschreibung im Frequenzbereich ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.

2.6.1 Fourier-Transformation

Zunächst betrachten wir nochmals den periodischen Rechteckimpulszug und sein Spektrum in Abb. 2.7 bzw. Abb. 2.18. Letzteres zeigt das typische Linienspektrum mit dem Frequenzabstand $f_0 = 1/T_0$. Wir stellen uns nun vor, die Periode T_0 des Rechteckimpulszugs würde bei gleicher Impulsdauer T immer größer, sodass die Periodizität immer weniger ins Gewicht fällt. Da für die Abstände der Spektrallinien $f_0 = 1/T_0$ gilt, rücken dabei die Spektrallinien immer dichter aneinander. Für $T_0 \rightarrow \infty$ ergibt sich mit $f_0 \rightarrow 0$ ein kontinuierliches Spektrum für einen einzelnen Rechteckimpuls. Mathematisch gesehen findet der Übergang von der Fourier-Reihe auf das Fourier-Integral statt. Um den Rahmen einer Einführung nicht zu überschreiten, verzichten wir auf die Herleitung der Fourier-Transformation und stellen nur die im Weiteren benötigten Zusammenhänge vor.

Durch die *Fourier-Transformation* werden zwei Funktionen miteinander verbunden. Man spricht von einem *Fourier-Paar*

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$

mit der *Fourier-Transformierten*, auch kurz (Fourier-)Spektrum genannt,

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

und der inversen Fourier-Transformierten, hier auch kurz Zeitfunktion (Originalfunktion) genannt

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \cdot e^{+j\omega t} d\omega.$$

Anmerkungen

- Eine Funktion, die in jedem endlichen Teilintervall die dirichletschen Bedingungen erfüllt und absolut integrierbar ist, besitzt eine Fourier-Transformierte. Eine ausführliche Antwort auf die Frage nach der Existenz und den Eigenschaften der Fourier-Transformation entnehme man den einschlägigen Lehrbüchern.
- Die Formel für die Fourier-Transformation wird auch als Fourier-Integral bezeichnet. Da das Integral, wie die Summe, eine lineare Operation darstellt, ist die Fourier-Transformation eine lineare Transformation. Addiert man zwei Signale im Zeitbereich, so addieren sich ebenso die Spektren im Frequenzbereich.
- Der Vergleich des Fourier-Integrals und der Gleichungen zur Berechnung der Koeffizienten der Fourier-Reihe zeigt unter Berücksichtigung der eulerschen Gleichung die enge Verwandtschaft zwischen dem Fourier-Spektrum und den Fourier-Koeffizienten. Tatsächlich stellt die Berechnung der Fourier-Koeffizienten einen Sonderfall des Fourier-Integrals dar. Entsprechend kann für die inverse Fourier-Transformation argumentiert werden.
- Bei der Fourier-Transformation spricht man auch von der Analysegleichung (Spektralanalyse) und bei der inversen Transformation von der Synthesegleichung (Erzeugung des Zeitsignals).
- Ist $x(t)$ eine Funktion der elektrischen Spannung, d. h. $[x(t)] = V$, so hat die Fourier-Transformierte die Dimension $[X(j\omega)] = Vs = V/Hz$. In der Systemtheorie wird für gewöhnlich mit dimensionslosen Größen gerechnet, indem alle Größen auf die üblichen Einheiten, wie beispielsweise V, A, Ω , W, m, s etc., normiert werden. In der Literatur wird die Fourier-Transformation manchmal in leicht modifizierten Schreibweisen angegeben. Wegen der festen Kopplung $\omega = 2\pi \cdot f$ ist auch $X(f)$ für das Spektrum, insbesondere bei grafischen Darstellungen des Betragsspektrums,

üblich. Die im Buch gewählte Form betont den Zusammenhang mit der Laplace-Transformation und ist in der deutsch- und englischsprachigen Literatur weit verbreitet.

Fourier-Transformierte des Rechteckimpulses

Anhand des Rechteckimpulses lassen sich Ähnlichkeiten und Unterschiede der Fourier-Transformation und der Fourier-Reihe gut verdeutlichen. Die Fourier-Transformation des Rechteckimpulses $x_T(t)$ mit Amplitude eins in Abb. 2.7 liefert

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) \cdot e^{-j\omega t} dt &= \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} \cdot \underbrace{\left[e^{-j\omega T/2} - e^{j\omega T/2} \right]}_{-2j \cdot \sin(\omega T/2)} \\ &= \frac{-2j \cdot \sin(\omega T/2)}{-j\omega} = T \cdot \frac{\sin(\omega \cdot T/2)}{\omega \cdot T/2} = T \cdot \text{si} \left(\omega \cdot \frac{T}{2} \right). \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer führt auf die Sinusfunktion und kann mit der si-Funktion kompakter geschrieben werden. Der Rechteckimpuls und die si-Funktion bilden ein Fourier-Paar:

$$x_T(t) \leftrightarrow T \cdot \text{si} \left(\omega \cdot \frac{T}{2} \right).$$

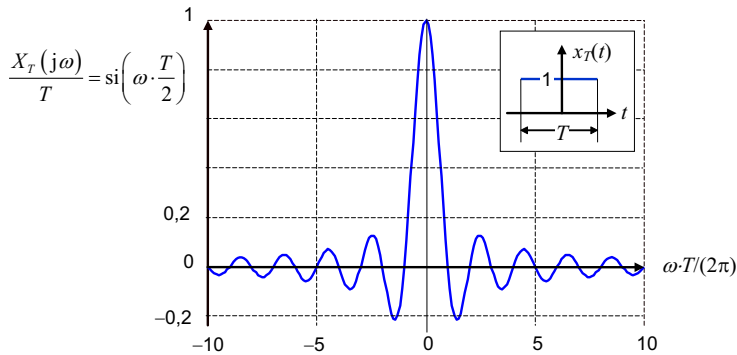
Die inverse Fourier-Transformation

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} T \cdot \text{si} \left(\omega \cdot \frac{T}{2} \right) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

übernimmt die Rolle der Fourier-Reihe in der Signalsynthese. Vergleichen wir das Ergebnis mit der Fourier-Reihe des periodischen Rechteckimpulszugs, erkennen wir einen prinzipiell ähnlichen Verlauf. Die Impulsdauer T nimmt die Stelle des Tastverhältnisses T/T_0 ein und statt der diskreten Kreisfrequenzen $k \cdot \omega_0$ tritt die kontinuierliche Kreisfrequenz ω auf.

Abgesehen von einem Skalierungsfaktor interpoliert die Fourier-Transformierte des Rechteckimpulses in Abb. 2.28 das Linienspektrum der Fourier-Koeffizienten in Abb. 2.18. Damit können wir den Grenzübergang vom periodischen zum aperiodischen Fall wieder anschaulich deuten. Mit zunehmender Periode T_0 nimmt der Abstand der Spektrallinien, die Frequenzschrittweite, $f_0 = 1/T_0$ immer mehr ab. Im Grenzfall $T_0 \rightarrow \infty$ entsteht schließlich das Frequenzkontinuum.

Auffällig ist auch der Einfluss der Impulsdauer T auf das Spektrum. Die erste Nullstelle des Spektrums für $f > 0$ liegt bei $f_0 = 1/T$. Beträgt die Impulsdauer beispielsweise 1 ms, so liegt die erste Nullstelle im Spektrum bei der Frequenz 1 kHz.

**Abb. 2.28** Spektrum des Rechteckimpulses**Parsevalsche Formel**

Ganz entsprechend zur Fourier-Reihe gilt für ein Fourier-Paar die *parsevalsche Formel*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$

Die parsevalsche Formel gibt an, wie die Signalenergie auch im *Frequenzbereich* bestimmt werden kann. Insbesondere kann das Betragsquadrat des Spektrums als Energiebelegung auf der Frequenzachse angesehen werden. Man spricht von der *Energiedichte* des Signals. Integriert man die Energiedichte $|X(j\omega)|^2$ über ein bestimmtes Frequenzintervall, so erhält man die Gesamtenergie der darin enthaltenen Frequenzkomponenten.

Ganz entsprechendes gilt für Leistungssignale, wobei dann vom *Leistungsdichtespektrum* gesprochen wird, also der Verteilung der mittleren Leistung auf die Frequenzkomponenten.

Die Fourier-Transformation ist in der Nachrichtentechnik und anderen naturwissenschaftlich-technischen Disziplinen von großer Bedeutung. Meist werden wenige Standardsignale benutzt, deren Fourier-Transformierte bekannt und in Tabellen gängiger mathematischer Formelsammlungen oder einschlägiger Lehrbücher der Systemtheorie zu finden sind. Die Bedeutung der Fourier-Transformation in der Nachrichtentechnik gründet sich auf die Tatsache, dass grundlegende Konzepte mit ihr hergeleitet und einfach formuliert werden, beispielsweise die Filterung und die Modulation von Signalen. Damit wird es möglich, Zusammenhänge zu verstehen und quantitative Aussagen ohne lange Rechnungen zu treffen. In den beiden folgenden Abschnitten werden – ohne mathematische Herleitungen – einige dieser Zusammenhänge vorgestellt und angewendet.

Anmerkungen

- In manchen Tabellenwerken wird die Fourier-Transformation in die Kosinus- und Sinustransformation zerlegt. Mit der eulerschen Formel lässt sich die komplexe Form bestimmen.
- In der modernen Nachrichtentechnik (Messtechnik, Mustererkennung, Spracherkennung, Funkkommunikation usw.) ist die besonders für Digitalrechner geeignete numerische Fourier-Transformation, die diskrete Fourier-Transformation (DFT) bzw. schnelle Fourier-Transformation (FFT), nicht mehr wegzudenken. Wir werden sie in Kap. 3 näher kennenlernen.

2.6.2 Lineare Filterung

In Abschn. 2.4 wurde die Methode der Ersatzspannungsquellen mit der Fourier-Reihe zur Berechnung des Ausgangssignals von RLC-Netzwerken vorgestellt. Mit der Fourier-Transformation kann die Methode direkt auf aperiodische Signale erweitert werden. Das allgemeine Verfahren ist auf alle LTI-Systeme mit Frequenzgang anwendbar.

Lineare Filterung im Frequenzbereich

Zunächst wird das Spektrum des Eingangssignals durch Fourier-Transformation bestimmt. Dann wird es mit dem Frequenzgang multipliziert. Man erhält das Spektrum des Ausgangssignals aus der *Eingangs-Ausgangsgleichung* im Frequenzbereich:

$$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega).$$

Der Vorteil der Methode ist offensichtlich: Der Einfluss des Systems wird durch einfache Multiplikation im Frequenzbereich berücksichtigt. Die Berechnung der Fourier-Transformation und ihrer Inversen kann jedoch im Einzelfall schwierig sein. In der Regel greift man auf Korrespondenztafeln für Fourier-Paare zurück. Auch eine numerische Lösung kann für eine konkrete Aufgabe hilfreich sein.

Die analytische Berechnung des Ausgangssignals ist jedoch eher untypisch. Im Vordergrund steht vielmehr das sich aus der Eingangs-Ausgangsgleichung unmittelbar ergebende Konzept der *linearen Filterung*. Ist der Frequenzgang für eine Frequenz oder ein Frequenzband null, so ist das Spektrum am Systemausgang für diese Frequenz oder dieses Frequenzband ebenfalls null. Die entsprechende Frequenzkomponente im Eingangssignal wird im System vollständig herausgefiltert. Solche Systeme, die gewisse Frequenzkomponenten mehr oder weniger unterdrücken, werden kurz (selektive) Filter genannt.

Entsprechendes gilt auch für die Verteilung der mittleren Leistung auf die Frequenzkomponenten, dem Leistungsdichtespektrum stochastischer Signale (Prozesse). Liegt am Filtereingang ein Signal mit einem bestimmten Leistungsdichtespektrum an, so werden die Amplituden der Frequenzkomponenten durch das Filter jeweils mit $|H(j\omega)|$ gewichtet. In das Leistungsdichtespektrum am Ausgang geht der Betragsgang deshalb quadra-

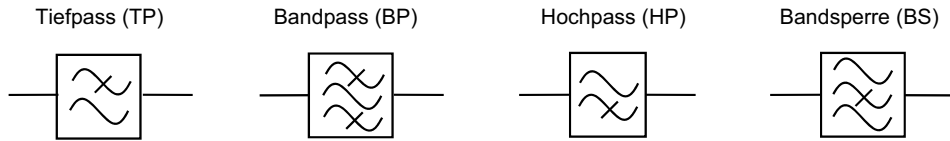


Abb. 2.29 Schaltsymbole elektrischer Filter

tisch ein. Man bezeichnet demzufolge die Funktion $|H(j\omega)|^2$ auch als *Leistungsübertragungsfunktion* des Systems.

In der Nachrichtentechnik genügt es für das Verständnis vieler Verfahren, das Konzept der Filter in abstrakter, idealisierter Form anzuwenden. Die Abb. 2.29 zeigt die Schaltsymbole der vier idealtypischen Filter: den *Tiefpass*, den *Bandpass*, den *Hochpass* und die *Bandsperre*. Die Funktionen erklären sich aus den Bezeichnungen. Beispielsweise unterdrückt die Bandsperre alle Frequenzkomponenten in einem bestimmten Frequenzband.

Selektive Filter

Ein wichtiger Anwendungsbereich selektiver elektrischer Filter ist die Frequenzmultiplextechnik, wie in Abschn. 5.2 noch näher erläutert wird. Dort werden verschiedene Signale in jeweils nicht überlappenden Frequenzbändern (Kanälen) gleichzeitig übertragen. Ein weiteres Beispiel für die Frequenzmultiplextechnik ist der Kabelanschluss für Rundfunk und Fernsehen mit seinen verschiedenen Programmen. Um eine hohe Auslastung der Übertragungsmedien zu erreichen, werden die benutzten Frequenzbänder möglichst nahe aneinandergelegt, sodass zur Signaltrennung im Empfänger besondere Filter eingesetzt werden müssen. Diese werden mit speziellen mathematischen Methoden, Standardapproximationsverfahren genannt, entworfen. Die Butterworth¹¹-, Chebyshev¹²- und Cauer¹³-Filter sind typische Beispiele. Ihre Behandlung ist Gegenstand der Netzwerk- und Filtersynthese. Wir beschränken uns hier darauf, die charakteristischen Frequenzgänge und die prinzipielle Realisierbarkeit anzusprechen.

Anmerkungen

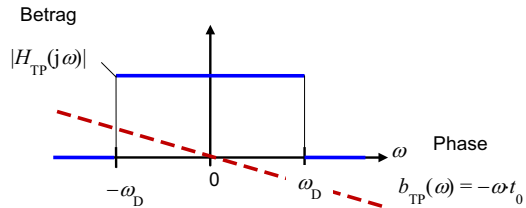
- Zum Filterentwurf stehen heute auf dem PC leistungsfähige Programme zur Verfügung. Dabei können in den Realisierungen auftretende parasitäre Effekte bereits vorab mit berücksichtigt werden.
- Butterworth- und Cauer-Filter werden entsprechend der analytischen Lösungen auch Potenzfilter bzw. elliptische Filter genannt.

¹¹ *Stephen Butterworth* (1885–1958), britischer Physiker und Ingenieur.

¹² *Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow* (englisch Chebyshev; 1821–1894), russischer Mathematiker, bedeutende Beiträge zur Approximations-, Integrations- und Wahrscheinlichkeitstheorie.

¹³ *Wilhelm Cauer* (1900–1945), deutscher Physiker, bedeutende Arbeiten zur theoretischen Nachrichtentechnik.

Abb. 2.30 Frequenzgang des Betrags und der Phase des idealen Tiefpasses

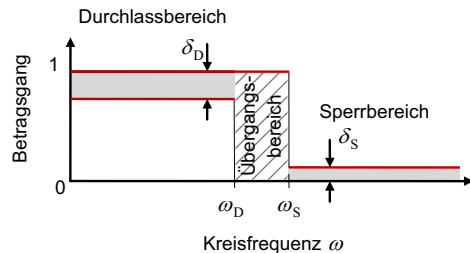


Der Frequenzgang des *idealen Tiefpasses* in Abb. 2.30 steht für die Wunschvorstellung. Sein Betragsgang entspricht einem Rechteckimpuls und sein Phasengang ist linear. Bis zur Grenzkreisfrequenz ω_D , der Durchlasskreisfrequenz, passieren alle sinusförmigen Signale bzw. Frequenzkomponenten das System unverändert bis auf eine in der Frequenz lineare Phasenverschiebung. Alle Signale bzw. Frequenzkomponenten bei höheren Frequenzen werden gesperrt. Der lineare Phasenverlauf im Durchlassbereich erfüllt die Forderung der verzerrungsfreien Übertragung, wie später noch erläutert wird.

Die Aufgabe *Filterentwurf* besteht folglich darin, ein RLC-Netzwerk so anzugeben, dass der zugehörige Frequenzgang den Wunschvorstellungen möglichst entspricht. Weil der Frequenzgang eines RLC-Netzwerks aufgrund der physikalischen Randbedingungen nicht völlig frei gewählt werden kann, sind Kompromisse notwendig.

Wie am Beispiel des Reihenschwingkreises in Abschn. 2.2.1 gezeigt wurde, liefert die Operatormethode für die infrage kommenden Admittanzen und Impedanzen Polynome in s bzw. in $j\omega$. Polynome charakterisieren jedoch distinkte Nullstellen und können damit nicht abschnittsweise konstant sein. Konsequenterweise ist der Betragsgang eines idealen selektiven Filters nicht real darstellbar. Der Frequenzgang des idealen Tiefpasses kann durch ein reales System nur angenähert werden. Eine sinnvolle Filterentwurfsaufgabe muss deshalb anders gestellt werden. Für den Filterentwurf ist vielmehr festzulegen, welche Abweichungen in der konkreten Anwendung tolerierbar sind. Dies geschieht typischerweise mit dem *Toleranzschema* in Abb. 2.31. Im Toleranzschema wird die Frequenz, bis zu der die Signalanteile durchgelassen werden sollen, die *Durchlassfrequenz*, und die Frequenz, ab der sie gesperrt werden sollen, die *Sperrfrequenz*, festgelegt. Dazwischen liegt der *Übergangsbereich*, für den keine weiteren Vorgaben, als üblicherweise ein monotoner Übergang, gemacht werden. Ebenso wichtig sind die (maximal) zulässigen Abweichungen vom idealen Betragsgang, die *Durchlasstoleranz* und die *Sperrtoleranz*. Der

Abb. 2.31 Toleranzschema des Betragsgangs zum Tiefpassentwurf (*zulässiger Bereich hinterlegt*) mit der Durchlasskreisfrequenz ω_D , der Durchlasstoleranz δ_D , der Sperrkreisfrequenz ω_S und der Sperrtoleranz δ_S



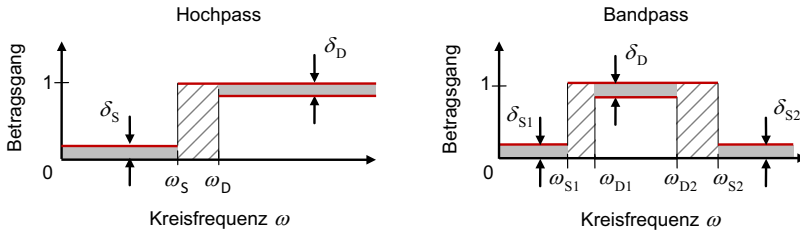


Abb. 2.32 Toleranzschema der Betragsgänge für einen Hochpass und einen Bandpass (zulässige Bereiche hinterlegt)

Realisierungsaufwand eines elektrischen Filters steigt allgemein, je kleiner die Durchlass- und die Sperrtoleranz und je schmäler der Übergangsbereich vorgegeben werden.

Entsprechend definiert man das Toleranzschema zu einem *Hochpass* bzw. einem *Bandpass* in Abb. 2.32. Durch geeignete Kombinationen von Tief- und Hochpass ergeben sich auch *Bandsperren*, die jeweils ein bestimmtes Frequenzband unterdrücken.

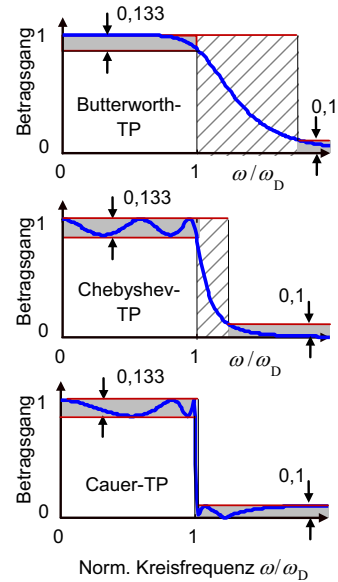
Anmerkungen

- In der Netzwerk- und Filtersynthese wird der Filterentwurf häufig nur bezüglich des Betragsgangs vorgenommen und vorausgesetzt, dass das resultierende Filter einen tolerierbaren Phasenverlauf im Durchlassbereich aufweist.
- Mit Bandpässen lassen sich bestimmte Signale (Rundfunk- oder Fernsehprogramme) auswählen. Der Übergangsbereich der Filter entspricht den Frequenzabständen zweier benachbarter Signale. Je schmäler der Übergangsbereich, desto mehr Signale lassen sich gleichzeitig übertragen.
- Schmalbandige Störsignale werden oft mit Bandsperren unterdrückt.

Abschließend werden realistische Betragsgänge für einfache Butterworth-, Chebyshev- und Cauer-Tiefpässe vorgestellt. Um einen aussagekräftigen Vergleich zu ermöglichen, sind die Durchlass- und Sperrtoleranzen und die Filterordnung, d. h. der Grad des Nennerpolynoms in s , für die drei Beispiele in Abb. 2.33 gleich. Als Filterordnung wurde fünf vorgegeben. Die Frequenzachsen sind auf die Durchlasskreisfrequenz gleich eins normiert.

Der augenfälligste Unterschied zeigt sich in den Breiten der Übergangsbereiche. Betrachtet man zunächst den *Butterworth-Tiefpass*, so erkennt man einen flachen Verlauf aus $H(0) = 1$ heraus. Diesem Verhalten liegt ein bestimmter mathematischer Zusammenhang zugrunde. Butterworth-Tiefpässe werden deshalb maximal flach genannt. Der Betragsfrequenzgang biegt schließlich nach unten ab, berührt (idealerweise) die untere Toleranzgrenze bei der Durchlassfrequenz und fällt weiter monoton. Dabei erreicht er (idealerweise) die Sperrtoleranz bei der Sperrfrequenz. Dieses (Wunsch-)Verhalten bildet die Grundlage zur Dimensionierung der Butterworth-Tiefpässe. Der Butterworth-Tiefpass mit kleinster Filterordnung, der Filterordnung eins, ist der RC-Tiefpass.

Abb. 2.33 Standardapproximationen für Tiefpässe
(Toleranzbereiche unterlegt)



Im Gegensatz dazu schöpft der *Chebyshev-Tiefpass* die zulässige Toleranz im Durchlassbereich aus. Der Betragsfrequenzgang alterniert zwischen den Toleranzgrenzen. Dabei ist die Zahl der lokalen Extrema im Durchlassbereich gleich der Filterordnung. Das Ausschöpfen der Durchlasstoleranz wird durch einen im Vergleich zum Butterworth-Tiefpass schmalen Übergangsbereich belohnt. Alternativ zu Abb. 2.33 (mittig) kann auch ein Ausschöpfen des Toleranzintervalls im Sperrbereich gewählt werden. Zur Unterscheidung spricht man dann von einem Chebyshev-II-Tiefpass oder vom inversen Chebyshev-Verhalten.

Im Fall des *Cauer-Tiefpasses* werden die Toleranzen im Durchlass- und im Sperrbereich genutzt. Man erhält in Abb. 2.33 den schmalsten Übergangsbereich mit der steilsten Filterflanke.

Anmerkungen

- Für eine weitergehende Diskussion und insbesondere für eine Darstellung der Phasengänge wird auf Schüßler (1988) verwiesen. Dort findet man auch zwei Beispiele für Tiefpässe, die nach Vorschriften bezüglich der Phase, d. h. im Durchlassbereich möglichst konstante Gruppenlaufzeit, entworfen wurden, ein Bessel-Tiefpass und ein Chebyshev-Laufzeitfilter.
- Die vorgestellten Zusammenhänge für RLC-Netzwerke gelten auch für digitale Filter, sodass sich die Ergebnisse in Abb. 2.33 auch in der digitalen Signalverarbeitung wichtig sind (Kap. 3).

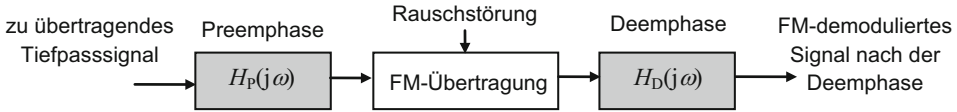
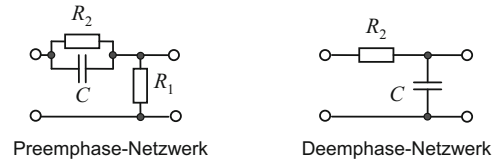


Abb. 2.34 Blockdiagramm der Anwendung der Preemphase und Deemphase im UKW-Rundfunk mit FM-Übertragung

Abb. 2.35 Preemphase- und Deemphase-Netzwerk für den UKW-Rundfunk



Preemphase- und Deemphase-Netzwerke für den UKW-Rundfunk

Im Beispiel betrachten wir eine praktische Anwendung einfacher elektrischer Schaltungen als Filter im UKW-Rundfunk. Der technische Hintergrund wird später noch genauer erläutert. Hier ist wichtig, dass im UKW-Rundfunk die Frequenzmodulation (FM) eingesetzt wird. Bei der FM-Übertragung steigt die Leistung des additiven Rauschens mit zunehmender Frequenz an. Somit werden die Frequenzkomponenten des Nachrichtensignals mit zunehmender Frequenz stärker gestört. Hier setzt die Kombination aus Preemphase- und Deemphase-Netzwerk an. Die *Preemphase* hat die Aufgabe, die höherfrequenten Spektralanteile des Nachrichtensignals vor der FM-Modulation leistungsmäßig anzuheben. Die *Deemphase* senkt sie nach der FM-Demodulation wieder so ab, dass beide Systeme sich in ihren Wirkungen aufheben (Abb. 2.34). Weil das erst bei der FM-Übertragung hinzukommende Rauschsignal durch das Deemphase-Netzwerk ebenfalls gedämpft wird, verringert sich die Störung. Modellrechnungen für den UKW-Rundfunk im Monobetrieb zeigen, dass die Anwendung der hier vorgestellten Kaskade von Preemphase- und Deemphase-Netzwerk die Rauschleistung auf etwa ein Sechstel absenkt.

Im *UKW-Rundfunk* werden aus Kostengründen relativ einfache Schaltungen eingesetzt. Die Abb. 2.35 zeigt den verwendeten Hochpass und Tiefpass. Deren Frequenzgänge werden mit den aus der komplexen Wechselstromrechnung bekannten erweiterten kirchhoffschen Regeln bestimmt:

$$H_P(j\omega) = \frac{R_1 \cdot (1 + j\omega R_2 C)}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C} \quad \text{und} \quad H_D(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega R_2 C}.$$

In der Rundfunktechnik ist es üblich, die Frequenzgänge in normierter Form anzugeben. Mit

$$r = \frac{R_1}{R_1 + R_2}; \quad \Omega = \omega \cdot R_2 \cdot C$$

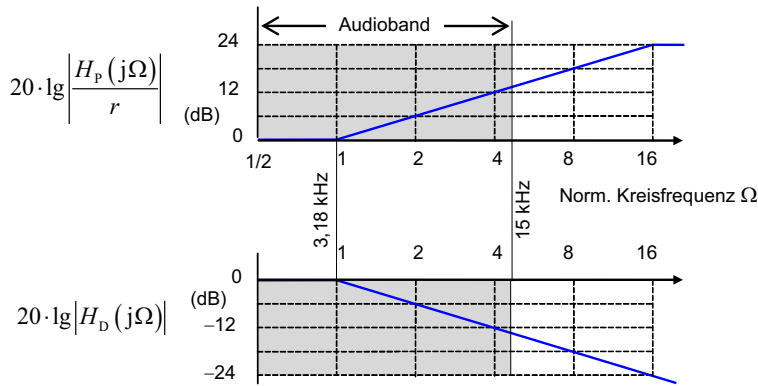


Abb. 2.36 Betragsgänge (Bode-Diagramme) zur normierten Kreisfrequenz Ω der Preemphase- und Deemphase-Netzwerke für den UKW-Rundfunk

erhält man

$$H_P(j\Omega) = r \cdot \frac{1 + j\Omega}{1 + j\Omega} \quad \text{und} \quad H_D(j\Omega) = \frac{1}{1 + j\Omega}.$$

Verwendet werden die Parameter

$$r = \frac{1}{16}, \quad \Omega_{3\text{ dB}} = 1 \quad \text{und} \quad R_2 \cdot C = 50 \mu\text{s}.$$

Daraus resultiert die 3 dB-Grenzfrequenz des Deemphase-Tiefpasses

$$f_{3\text{ dB}} = \frac{1}{2\pi \cdot R_2 C} = 3,18 \text{ kHz}.$$

Das ist ungefähr ein Fünftel der Grenzfrequenz des UKW-Audiosignals von 15 kHz. Die zugehörigen Frequenzgänge sind in Abb. 2.36 in Form von Bode-Diagrammen skizziert. Dabei werden die Beträge der Frequenzgänge stückweise durch Geraden angenähert, s. auch Abb. 2.19.

Anmerkung

- Die Preemphase und Deemphase wird auch bei der Magnetbandaufzeichnung und in der analogen Fernsehtechnik für die Farbinformation eingesetzt. Dort werden höhere Preise für die Geräte gezahlt und deshalb können aufwendigere Schaltungen mit höheren Gewinnen als hier gezeigt verwendet werden.

2.6.3 Verzerrungsfreie Übertragung

In der Nachrichtentechnik soll das informationstragende Signal durch ein System (Kanal) möglichst ohne Verzerrung übertragen werden. Die Übertragung ist dann *verzerrungsfrei*,

wenn das Ausgangssignal bis auf einen Amplitudenfaktor a und einer tolerierbaren zeitlichen Verschiebung t_0 dem Eingangssignal gleicht:

$$y(t) = a \cdot x(t - t_0).$$

Der Amplitudenfaktor a entspricht einer Dämpfung und die zeitliche Verschiebung t_0 einer Laufzeit beim Durchgang des Signals durch das System. Der Frequenzgang eines verzerrungsfreien Systems hat somit eine konstante Amplitude und einen linearen Phasenverlauf:

$$H(j\omega) = a \cdot e^{-j\omega t_0}.$$

Dies zeigt man am einfachsten durch inverse Fourier-Transformation des postulierten Frequenzgangs. Mit $a = 1$ erhält man den *Verschiebungssatz* der Fourier-Transformation

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}.$$

Soll das Übertragungssystem ein RLC-Netzwerk sein, folgt aus der Polynomdarstellung des Frequenzgangs, dass eine verzerrungsfreie Übertragung nicht realisiert werden kann. Schränkt man die Forderung auf das interessierende Frequenzband ein, wird eine verzerrungsfreie Übertragung näherungsweise möglich.

In der Nachrichtentechnik bezeichnet man die Verzerrungen, die durch ein LTI-System entstehen, als *lineare Verzerrungen*. Man spricht von *Dämpfungsverzerrungen* und *Phasenverzerrungen*, je nachdem, ob die Amplituden oder die Phasen der Frequenzkomponenten des Nachrichtensignals betroffen sind. Da die Wirkungen von Phasenverzerrungen nicht so offensichtlich sind, aber durchaus gravierend sein können, werden sie im Folgenden anhand eines Beispiels sichtbar gemacht.

Phasenverzerrungen

Wir betrachten der Anschauung halber den Gleichanteil und die ersten elf Harmonischen des periodischen Rechteckimpulszuges in Abb. 2.37 oben als Eingangssignal eines LTI-Systems mit dem Frequenzgang mit konstantem Betrag gleich eins und linearer Phase.

Für das Signal am Ausgang ergibt sich aus der Fourier-Reihe des Rechteckimpulszuges und der Bewertung mit dem idealen Frequenzgang nach kurzer Zwischenrechnung

$$y_1(t) = 2A \cdot \frac{T}{T_0} \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{11} \text{si} \left(\pi k \cdot \frac{T}{T_0} \right) \cos \left(\frac{2\pi k}{T_0} \cdot [t - t_0] \right) \right].$$

Das Signal wird unverzerrt übertragen, wie Abb. 2.37 in der Mitte augenfällig zeigt. Weil sich die Phasenverschiebungen der Frequenzkomponenten durch das System linear mit der Kreisfrequenz ändern, stellt sich nach Ausklammern für alle Komponenten die gleiche *Signalverzögerung* $t_0 = 0,05 \cdot T_0$ ein.

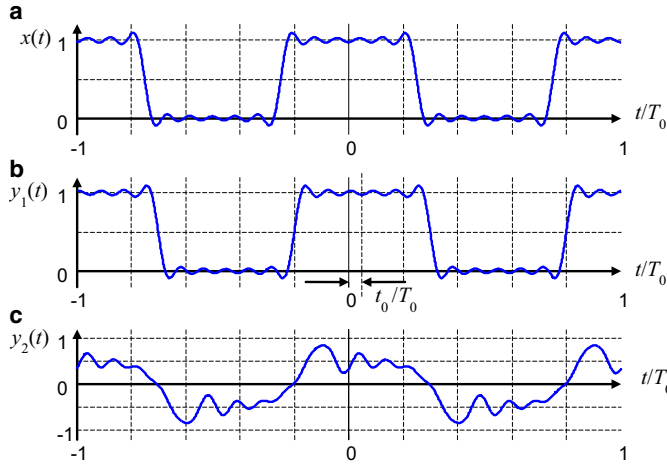


Abb. 2.37 Eingangssignal (a), Ausgangssignal des Systems mit linearer Phase (b) und des Systems mit quadratischer Phase (c)

Für die störende Wirkung von Phasenverzerrungen wählen wir ein System mit quadratischem Phasenterm

$$H_2(j\omega) = \exp(-j \cdot \operatorname{sgn}(\omega) \cdot \omega^2 \cdot t_0^2).$$

Die Signumfunktion $\operatorname{sgn}(\omega)$ sorgt als Vorzeichenfunktion dafür, dass der Phasenfrequenzgang, wie bei den reellwertigen RLC-Netzwerken gefordert, eine ungerade Funktion ist. In diesem Fall ergibt sich das Ausgangssignal

$$y_2(t) = 2A \cdot \frac{T}{T_0} \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{11} \operatorname{si} \left(\pi k \cdot \frac{T}{T_0} \right) \cos \left(\frac{2\pi k}{T_0} \cdot \left[t - \frac{2\pi k}{T_0} \cdot t_0^2 \right] \right) \right].$$

Die Laufzeiten in den Argumenten der Kosinusfunktionen wachsen jetzt mit steigender Frequenz (k) linear. Damit erfahren die Frequenzkomponenten unterschiedliche Phasenverschiebungen, die in Abb. 2.37 anschaulich zu einem „Zerfließen“ der Rechteckimpulse führen. Obwohl alle Frequenzkomponenten noch mit gleicher Amplitude, d. h. auch Leistung, vorhanden sind. Das ursprüngliche Signal ist nicht mehr zu erkennen.

In der Nachrichtentechnik wird zur Beurteilung der Phasenverzerrungen durch LTI-Systeme die *Gruppenlaufzeit* als Ableitung der Phase herangezogen:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d}{d\omega} b(\omega).$$

Man beachte die Definition der Gruppenlaufzeit mit negativem Vorzeichen. In der Literatur wird manchmal das negative Vorzeichen bereits in der Phase eingeführt und entfällt dann hier.

Ein phasenverzerrungsfreies System hat eine konstante Gruppenlaufzeit. Phasenverzerrungen machen sich besonders bei Audio- und Bildsignalen störend bemerkbar. Bei Bildern führen Phasenverzerrungen zu räumlichen Verschiebungen der Bildinhalte. Telefonsprache zeigt sich hingegen relativ unempfindlich gegen Phasenverzerrungen, da es hierbei v. a. auf die Verständlichkeit ankommt.

Klirrfaktor

Bei der Nachrichtenübertragung werden meist auch nichtlineare Komponenten eingesetzt, wie beispielsweise Verstärker oder Modulatoren. In diesem Fall treten *nichtlineare Verzerrungen* auf, die im Gegensatz zu den linearen Verzerrungen neue Frequenzkomponenten verursachen. Ein besonders in der Audiotechnik verbreitetes Maß zur Beurteilung von nichtlinearen Verzerrungen ist der *Klirrfaktor* d (Total Harmonic Distortion, THD). Er ist gleich dem Quotienten aus der Wurzel der Summe der Leistungen der störenden Oberschwingungen (Effektivwert der Oberschwingungen) durch die Wurzel aus der Gesamtleistung (Effektivwert des Gesamtsignals):

$$d = \frac{\text{Effektivwert der Oberschwingungen}}{\text{Effektivwert aller Harmonischen}}.$$

In der Audiotechnik wird der Klirrfaktor meist anhand des Eintonsignals mit der Frequenz von 1 kHz gemessen, da bei etwa dieser Frequenz auch das menschliche Gehör am empfindlichsten ist.

In der Übertragungstechnik können bei Vorhandensein von mehreren frequenzmäßig getrennten Signalen, z. B. Rundfunksignale verschiedener Frequenzkanäle, nichtlineare Kennlinien zur Intermodulation und im Sonderfall auch zur Kreuzmodulation führen. In der Telefonie kann es zum Übersprechen, d. h. dem unbeabsichtigten Mithören fremder Telefonate, kommen.

- Bei einer *unverzerrten* Übertragung wird das Signal nur zeitlich verschoben und/oder mit einem konstanten Faktor bewertet, ändert also seine Form nicht. Wird die Übertragungsstrecke als LTI-System modelliert, treten durch den Frequenzgang *lineare Verzerrungen* im Signal auf, die *Dämpfungs-* und/oder *Phasenverzerrungen*. Am Ausgang treten keine neuen Frequenzkomponenten auf. Enthält die Übertragungsstrecke nichtlineare Komponenten, treten *nichtlineare Verzerrungen* auf. Es entstehen neue Frequenzkomponenten.

2.6.4 Zeitdauer-Bandbreite-Produkt

Bandbreite

Unter der *Bandbreite* eines Signals versteht man die Breite des Bereichs im Spektrum, in dem die wesentlichen Frequenzkomponenten liegen. Was unter wesentlich zu verstehen ist, wird durch die jeweilige Anwendung bestimmt. Im Beispiel der Sprachtelefonie

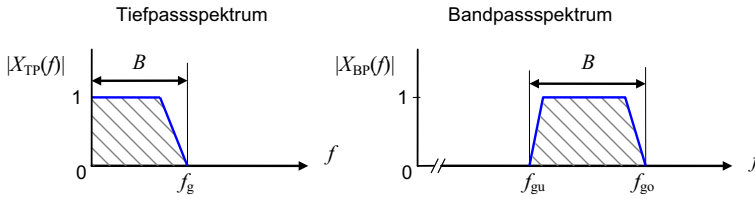


Abb. 2.38 Absolute Bandbreite B von Tiefpass- und Bandpassspektren

liefert die Verständlichkeit das Kriterium, bei Audiosignalen, zum Beispiel Musik, ist es der Höreindruck. Häufig sind jedoch auch rein technische Aspekte, wie Systemspezifikationen oder Koexistenz mit anderen Signalen, ausschlaggebend. In früheren Beispielen haben wir die Bandbreite mit der ersten Nullstelle im Spektrum (für positive Frequenzen) abgeschätzt. Zwei gebräuchliche Definitionen sind die absolute und die 3 dB-Bandbreite.

Anmerkung

- Grafische Darstellungen der Spektren beschränken sich oft auf den Betrag für positive Frequenzen, weil der Betrag der Spektren der üblichen reellen Signale eine gerade Funktion ist. Häufig wird die verkürzte Schreibweise $|X(f)|$ statt $|X(2\pi f)|$ oder $|X(j\omega)|$ verwendet. Darüber hinaus werden in den Beschriftungen manchmal auch die Betragsstriche weggelassen, wenn die Darstellungen symbolisch gemeint sind.
- Bei den eher seltenen, maßstäblichen Zeichnungen werden die Amplituden der Betragsgänge bezüglich der Frequenz f in der Literatur gelegentlich mit dem Faktor 2π normiert (Lüke 1995).
- Meist werden Darstellungen des Betragsspektrums bzw. des Betragsgangs auf den jeweiligen Maximalwert normiert. Dann heben sich die Skalierungsfaktoren weg. Typisch sind Darstellungen im logarithmischen Maß mit dem Maximum bei 0 dB.

Eine strikte Bandbegrenzung liegt vor, wenn das Spektrum für Frequenzen größer gleich der Grenzfrequenz f_g null ist. Im Fall des *Tiefpassspektrums* in Abb. 2.38 spricht man von der absoluten Bandbreite $B = f_g$. Liegt ein *Bandpassspektrum* vor, so ist die Bandbreite $B = f_{go} - f_{gu}$.

Im Beispiel von mit dem RC-Tiefpass gefilterten Signalen oder des Spektrums des Rechteckimpulses liegt keine strikte Bandbegrenzung vor. Die Bandbreite kann aber wie in Abb. 2.39 durch die 3 dB-Grenzfrequenz abgeschätzt werden. Beim RC-Tiefpass ist die 3 dB-Grenzfrequenz $B = f_{3\text{dB}} = 1/(2\pi RC)$, s. Abschn. 2.5.3. Die 3 dB-Grenzfrequenz der si-Funktion ist $B = f_{3\text{dB}} \approx 0,44/T = 0,44 \cdot f_0$.

Einige typische Bandbreiten von Signalen in der Nachrichtentechnik sind in Tab. 2.1 zusammengestellt. Darin ist deutlich der wachsende Bandbreitenbedarf für die moderne Kommunikation zu erkennen. Genügte für die Sprachtelefonie noch etwa 4 kHz, so sind

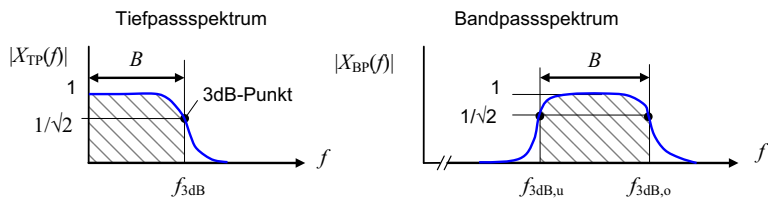


Abb. 2.39 3 dB-Bandbreite B von Tiefpass- und Bandpassspektren

Tab. 2.1 Ungefähre Bandbreiten einiger Nachrichtenübertragungskanäle

Anwendung	Kanalbandbreite
Fernsprechen (analog)	4 kHz
Audio für UKW-Rundfunk	15 kHz
Audio für Compact Disc (CD)	20 kHz
UKW-Rundfunk (Funksignal)	180 kHz
Global System for Mobile Communications ^a (GSM)	200 kHz
Digitaler Teilnehmeranschluss ^b (ADSL2+)	2,2 MHz
Schnurlostelefonie ^c (DECT)	1,8 MHz
Universal Mobile Telecommunication System ^d (UMTS)	5 MHz
Fernseh-Rundfunk (analog)	5,5–7 MHz
Wireless Local Area Network ^{e,f,g} (WLAN)	20 und 40 MHz
Power Line Communication ^h (PLC)	bis 40 MHz
Global Positioning System ⁱ (GPS)	2 und 20 MHz
Long Term Evolution ^j (LTE)	1,25–20 MHz

^a Frequenzkanal für die gleichzeitige unidirektionale Übertragung von 8/16 Full-/Half-Rate-Telefongesprächen;

^b Asymmetric Digital Subscriber Line,

^c Frequenzkanal für die gleichzeitige bidirektionale Übertragung von 12 Telefongesprächen;

^d Frequenzkanal im Codemultiplex für Sprache und Daten;

^e IEEE 802.11a/b/g;

^f IEEE 802.11n mit Kanalbündelung;

^g IEEE 802.11ac bis 160 MHz;

^h IEEE P1901;

ⁱ L1- bzw. L2-Träger der Satellitensignale;

^j Übertragung von Sprache und Daten im Multiplex mit OFDM

es für das moderne WLAN oder die vierte Mobilfunkgeneration LTE bis zu 40 MHz und mehr.

- Die Bandbreite eines Signals gibt die Breite des Bereichs im Spektrum an, der durch die wesentlichen Frequenzkomponenten des Signals belegt wird. Sie wird i. d. R. anwendungsspezifisch durch Angabe der unteren und oberen Grenzfrequenz festgelegt.

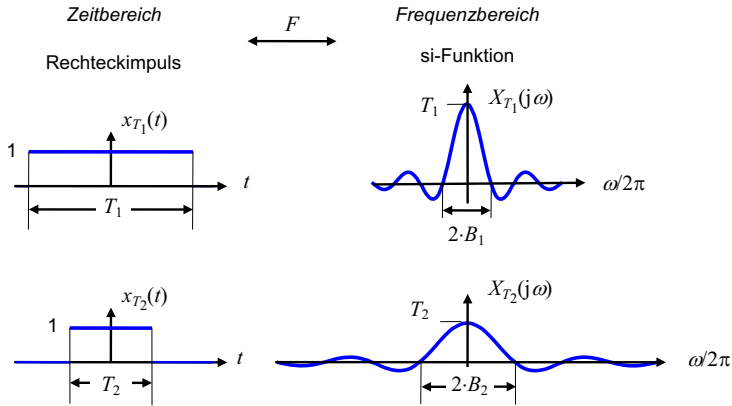


Abb. 2.40 Zeitdauer-Bandbreite-Produkt am Beispiel des Rechteckimpulses

Zeitdauer-Bandbreite-Produkt

Ein wichtiges physikalisches Phänomen ist der Zusammenhang zwischen der Dauer und der Bandbreite eines Signals. Wir veranschaulichen uns das anhand des Rechteckimpulses und seines Spektrums in Abb. 2.40. Mit der Impulsdauer T und der Bandbreite $B = f_0$, d. h. wir wählen die erste Nullstelle im Spektrum als Maß, erhält man das konstante *Zeitdauer-Bandbreite-Produkt* $B \cdot T = 1$. Demzufolge stehen die Zeitdauer eines Vorgangs und die Breite des Spektrums in reziprokem Zusammenhang. Halbiert man wie in Abb. 2.40 unten die Impulsdauer, so verdoppelt sich die Bandbreite. Bei der binären Datenübertragung mit Rechteckimpulsen bedeutet das: Soll die Zahl der pro Zeiteinheit gesendeten Impulse (Nutzen) verdoppelt werden, so ist die doppelte Bandbreite (Kosten) zur Verfügung zu stellen.

Die Theorie der Fourier-Transformation zeigt, dass zeitbegrenzte Signale nicht strikt bandbegrenzt sein können und umgekehrt. Eine Definition des Zeitdauer-Bandbreite-Produkts für nicht zeit- bzw. bandbegrenzte Signale im Sinn einer effektiven Dauer und effektiven Bandbreite gelingt mit den Varianzen des Signals bzw. seiner Dauer und seines Spektrums (Werner 2008).

- Die effektive Dauer und die Bandbreite eines Signals stehen in reziprokem Zusammenhang. Je kürzer ein Impuls und je steiler ein Signalübergang, umso größer die Bandbreite.

2.7 Charakterisierung von LTI-Systemen

Zur Eingangs-Ausgangsgleichung im Frequenzbereich fehlt bisher das Gegenstück im Zeitbereich. In diesem Abschnitt wird der Kreis vom Frequenzbereich zurück in den Zeitbereich geschlossen. Dem Frequenzgang wird die Impulsantwort an die Seite gestellt.

Wurde bisher der Anschauung halber direkter Bezug auf die physikalisch interpretierbaren RLC-Netzwerke genommen, so soll in diesem Abschnitt mit Blick auf die grundlegenden Eigenschaften von zeitkontinuierlichen LTI-Systemen, die Linearität und die Zeitinvarianz, ein allgemeiner Standpunkt eingenommen werden. Die theoretischen Zusammenhänge werden durch ausführliche Rechenbeispiele nachvollziehbar gemacht. Dabei gelten die Definitionen für dimensionslose Größen. Physikalische Größen sind deshalb vorab geeignet zu normieren, wie beispielsweise die Spannungen in Volt, die Zeit in Sekunden usw.

2.7.1 Impulsfunktion und Impulsantwort

Wir beginnen mit einer Messaufgabe: Ein im Wesentlichen bandbegrenzt LTI-System mit der Grenzfrequenz f_g soll mit einem Signal so erregt werden, dass am Ausgang der Frequenzgang direkt beobachtet werden kann. Aus der Eingangs-Ausgangsgleichung im Frequenzbereich (s. Abschn. 2.6.2 lineare Filterung) schließen wir, dass das Spektrum des erregenden Signals im interessierenden Frequenzband konstant sein muss. Wie könnte folglich das Signal $x(t)$ aussehen?

Beispielsweise wie ein Rechteckimpuls mit entsprechend kurzer Dauer T . Wählt man nämlich T so, dass für die Bandbreite gilt $B = 1/T \gg f_g$, dann ist das Spektrum am Systemausgang näherungsweise proportional zum gesuchten Frequenzgang.

Betrachten wir nun ein System mit doppelter Grenzfrequenz, ist für die Messung die Dauer des Rechteckimpulses zu halbieren. Ist das System nicht strikt bandbegrenzt, müsste die Signalbandbreite $B \rightarrow \infty$ und damit die Dauer des Rechteckimpulses $T \rightarrow 0$ gehen. Wie in Abb. 2.40 zu sehen ist, geht jedoch ebenso die Amplitude des Spektrums gegen null, da ja nun praktisch keine Signalenergie mehr aufgewendet wird.

Das kleine Gedankenexperiment zeigt das Problem auf – und deutet die Lösung an. Mit Blick auf die parsevalsche Formel ist festzustellen: Ein Signal, dessen Spektrum ungleich null und konstant für alle Frequenzen ist, würde unendliche Energie aufweisen und kann deshalb nicht physikalisch existieren. Es ist jedoch möglich, im Sinn eines Grenzübergangs, ein derartiges Signal als mathematische Idealisierung zu konstruieren.

Impulsfunktion

Dazu betrachten wir in Abb. 2.41a die endliche Folge von gewichteten Rechteckimpulsen, die bei konstanter eingeschlossener Fläche für wachsendes n immer schmäler und höher werden:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n \cdot x_{1/n}(t) dt = 1 \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Die zugehörigen Spektren sind ebenfalls in Abb. 2.41b skizziert. Im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ strebt das Spektrum für alle Kreisfrequenzen gegen eins, da die erste positive und die erste negative Nullstelle sich nach $+\infty$ bzw. $-\infty$ verschieben. Jedoch strebt zugleich die Breite

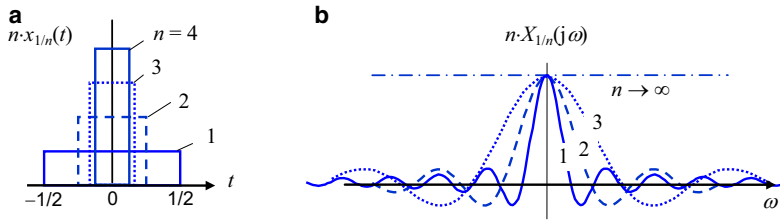


Abb. 2.41 Folge von flächennormierten Rechteckimpulsen und die zugehörigen Spektren

des Rechteckimpulses gegen 0 und die Höhe gegen ∞ . Die Flächennormierung bedeutet, dass die Energie der Rechteckimpulse dann gleich n ist, und somit ebenfalls gegen ∞ strebt.

Es ist offensichtlich, dass im Grenzfalle das Integral oben im herkömmlichen Sinn nicht mehr existiert. Gut, dass das mathematische Problem des Grenzübergangs hier für sich genommen nicht relevant ist. Denn für die Messaufgabe werden ein Signal und seine Wirkung auf ein System gesucht. Es interessiert hier stets die Anwendung auf eine weitere Funktion $x(t)$, die später den Einfluss des zu untersuchenden Systems widerspiegeln wird. Wir machen uns das durch eine kurze Überlegung deutlich.

Ist die (zu testende) Funktion $x(t)$ um $t = 0$ stetig und beschränkt, so erwarten wir gemäß dem Mittelwertsatz der Integralrechnung für n genügend groß aber endlich für das Testergebnis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot n \cdot x_{1/n}(t) dt \approx x(0).$$

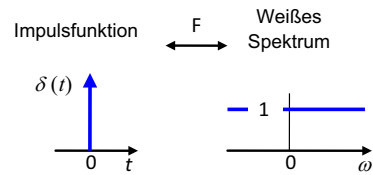
Es ist deshalb vorteilhaft, den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ im Sinn einer Abbildung aufzufassen, die der Funktion $x(t)$ ihren Wert an der Stelle $t = 0$ zuweist. Wir schreiben formal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t) dt = x(0)$$

mit der *Impulsfunktion* oder diracschen¹⁴ Delta-Funktion $\delta(t)$.

Die Impulsfunktion ist keine Funktion im herkömmlichen Sinn, sondern eine verallgemeinerte Funktion, auch Distribution genannt. Sie und das obige Integral werden im Rahmen der Distributionentheorie erklärt. Mit anderen Worten, das Integral wird nicht durch Einsetzen der Funktionen und herkömmliches Integrieren gelöst, sondern ist als Definitionsgleichung der Impulsfunktion aufzufassen. Man spricht von der *Ausblendeigenschaft* der Impulsfunktion, da sie den gesamten Funktionsverlauf von $x(t)$ bis auf den Wert $x(0)$ an der Stelle $t = 0$ ausblendet.

¹⁴ Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984), britischer Physiker, Nobelpreis 1933.

Abb. 2.42 Impulsfunktion und weißes Spektrum**Anmerkungen**

- In der Literatur wird die Impulsfunktion auch als Dirac-Stoß, Dirac-Impuls oder Delta-Funktion bezeichnet.
- Es sei noch angemerkt, dass in der Distributionentheorie der Grenzübergang nicht mit einem Rechteckimpuls, sondern mit einer unbegrenzt oft differenzierbaren Funktion, wie z. B. der gaußschen Glockenkurve, gearbeitet wird. Dadurch wird es möglich, auch Ableitungen, sog. Derivierte, der Impulsfunktion sinnvoll zu definieren und die Impulsfunktion zur Lösung von Differenzialgleichungen heranzuziehen, wie sie in Physik und Technik typisch sind.

Die Impulsfunktion wird, wie in Abb. 2.42 gezeigt, als nadelförmiger Impuls dargestellt. Falls hilfreich, wird ihr Gewicht, die Impulsstärke, an die Spitze geschrieben. Ihre Fourier-Transformierte ist eine Konstante, wie man durch Einsetzen in das Fourier-Integral und Anwenden der Ausblendeigenschaft schnell zeigt:

$$\begin{aligned}\delta(t) &\leftrightarrow 1 \quad \forall \omega \\ 1 \quad \forall t &\leftrightarrow 2\pi \cdot \delta(\omega).\end{aligned}$$

In Anlehnung an die additive Farbmischung in der Optik wird ein konstantes Spektrum auch vereinfachend *weißes Spektrum* genannt. Der Ausdruck weißes Spektrum wird insbesondere im Zusammenhang mit Zufallsprozessen mit konstanten Leistungsdichtespektren gebraucht. In Anlehnung an die Audiotechnik spricht man dann bei den entsprechenden Prozessen vom weißen Rauschen, dessen Musterfunktionen sich ähnlich wie rauschendes Wasser anhören.

In der Technik und der Physik nützt man die formale Übereinstimmung mit den gewohnten Rechenregeln.

- Die Impulsfunktion ist die mathematische Idealisierung eines Signals sehr kurzer Dauer und sehr hoher Energie. Definiert wird sie über die Ausblendeigenschaft. Das Spektrum der Impulsfunktion ist konstant für alle Frequenzen.

Impulsantwort

Mit der Impulsfunktion als mathematische Idealisierung für ein Signal mit hoher Energie und kurzer Dauer lassen sich zur Systembeschreibung wichtige Zusammenhänge ableiten.

Erregt man das zunächst energiefreie LTI-System mit der Impulsfunktion, so ist das Spektrum am Ausgang gleich dem Frequenzgang des LTI-Systems, siehe lineare Filterung. Im Zeitbereich erhält man dazu, wie der Name sagt, die *Impulsantwort*. Die Impulsantwort und der Frequenzgang bilden ein Fourier-Paar:

$$h(t) \leftrightarrow H(j\omega).$$

Beide Systemfunktionen liefern die gleiche Information über das LTI-System, da sie mit der Fourier-Transformation ineinander umgerechnet werden können.

Anmerkung

- Hierbei wird die Existenz des Frequenzgangs als Fourier-Transformierte der Impulsantwort vorausgesetzt. Ein hinreichendes Kriterium dafür ist, wie später gezeigt wird, die absolute Integrierbarkeit der Impulsantwort.

Impulsantwort des RC-Tiefpasses

Am Beispiel des RC-Tiefpasses lassen sich die bisherigen Überlegungen anhand bekannter Ergebnisse aus der Physik überprüfen. Wir betrachten dazu den RC-Tiefpass in Abb. 2.15 mit der Zeitkonstanten τ und setzen ohne Beschränkung der Allgemeinheit im Folgenden stets voraus, dass die Kapazität sich anfangs im ungeladenen Zustand befindet, also das System zu Beginn energiefrei ist. Wir starten mit dem Übergang des Eingangssignals vom Rechteckimpuls zur Impulsfunktion. Zunächst wird die Ausgangsspannung $u_a(t)$ bei Erregung mit einem Rechteckimpuls $x_T(t)$ bestimmt:

$$u_e(t) = U_q \cdot x_T(t).$$

Aus der kirchhoffschen Maschenregel und dem Zusammenhang zwischen Strom und Spannung an der Kapazität resultiert für die Ausgangsspannung die inhomogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{d}{dt}u_a(t) + \frac{1}{\tau} \cdot u_a(t) = \frac{1}{\tau} \cdot u_e(t).$$

Die Lösung der Differenzialgleichung für eine rechteckförmige Eingangsspannung mit dem Einschaltzeitpunkt $t = 0$ ist aus der Physik bekannt oder kann mit der Methode der Variation der Konstanten berechnet oder durch einfache Überlegungen erraten werden (Abb. 2.17):

$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ U_q \cdot (1 - e^{-t/\tau}) & \text{für } 0 \leq t < T \\ U_q \cdot (1 - e^{-T/\tau}) \cdot e^{-(t-T)/\tau} & \text{für } t \geq T \end{cases}.$$

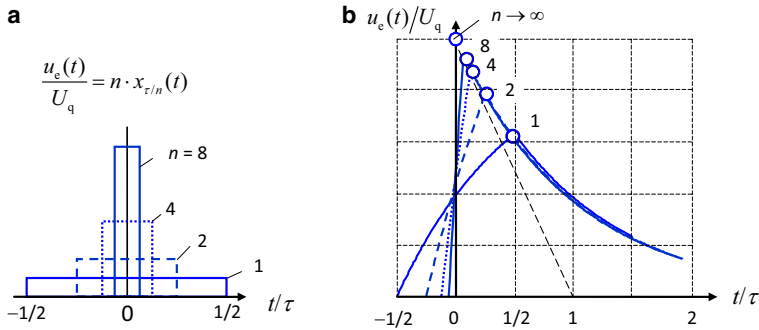


Abb. 2.43 Reaktion des RC-Tiefpasses mit der Zeitkonstanten $\tau = R \cdot C$ auf flächennormierte Rechteckimpulse der Dauer $T = \tau/n$

In Abb. 2.43b wird die Ausgangsspannung für verschiedene Rechteckimpulse (links) als Eingangsspannung dargestellt. Man sieht deutlich die zuerst wachsende Spannung an der Kapazität im Ladevorgang und anschließend deren fallenden Verlauf beim Entladen. Betrachtet man die Folge von Rechteckimpulsen, so erkennt man für wachsendes n , dass sich der Ladevorgang immer mehr verkürzt und sich der Endwert der Spannung im Ladevorgang dem Wert U_q annähert. Im Grenzfall $n \rightarrow \infty$, d. h. bei Erregung mit der Impulsfunktion, scheint die Spannung an der Kapazität auf den Wert U_q zu springen und es beginnt sofort der Entladevorgang.

Selbstredend ist für $n \rightarrow \infty$ eine derartige physikalische Spannungsquelle nicht realisierbar. Die mathematische Idealisierung ist jedoch von großem praktischem Wert. Bei jedem physikalischen Experiment ist man auf Beobachtungen, hier die Messungen der Zeit und der Spannung, angewiesen. Die Messgenauigkeit ist jedoch stets beschränkt. Unterschreitet man die Messauflösung, so ist der Unterschied zwischen Experiment und Idealisierung nicht mehr festzustellen.

In Einklang mit den physikalischen Überlegungen ist die Impulsantwort des RC-Tiefpasses

$$h_{\text{RC-TP}}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}.$$

Abschließend verifizieren wir die gefundene Impulsantwort und die zugrunde liegenden theoretischen Zusammenhänge:

- Die Impulsantwort und der Frequenzgang bilden ein Fourier-Paar.
- Man erhält die Impulsantwort, wenn in der systembeschreibenden Differenzialgleichung die Impulsfunktion als Erregung eingesetzt wird.

Zu a): Zunächst wird die obige Impulsantwort des RC-Tiefpasses transformiert und mit dem früher bestimmten Frequenzgang des RC-Tiefpasses in Abschn. 2.5.3 verglichen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{\text{RC-TP}}(t) \cdot e^{-j\omega t} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-[1/\tau + j\omega]t} dt \\ &= \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{1/\tau + j\omega} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = H_{\text{RC-TP}}(j\omega). \end{aligned}$$

Zu b): Nun wird die Impulsantwort als Lösungsansatz in die obige Differenzialgleichung für $t \geq 0$ mit Impulserregung eingesetzt

$$\frac{d}{dt} \frac{a}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} + \frac{a}{\tau^2} \cdot e^{-t/\tau} = \frac{U_q}{\tau} \cdot \delta(t)$$

mit der positiven reellen Konstanten a . Die Integration vereinfacht die Gleichung

$$\frac{a}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} + \frac{a}{\tau^2} \cdot \underbrace{\int_{-0}^t e^{-x/\tau} dx}_{-\tau \cdot [\exp(-t/\tau) - 1]} = \frac{U_q}{\tau} \cdot \underbrace{\int_{-0}^t \delta(x) dx}_1.$$

Wie zu zeigen war, erhält man mit $a = U_q$ das Ausgangssignal

$$u_a(t) = U_q \cdot h_{\text{RC-TP}}(t) = U_q \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{für } t > 0.$$

Anmerkungen

- Die untere Integrationsgrenze -0 soll den Grenzübergang von links an 0 symbolisieren, sodass die Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion angewendet werden kann. In der Literatur sind auch Definitionen für den Grenzübergang mit rechtsseitigen Rechteckimpulsen zur Impulsfunktion zu finden, die jedoch an anderer Stelle eine entsprechende Interpretation verlangen.
 - Man beachte, dass hier eine einfache Dimensionskontrolle nicht zulässig ist, da mit dimensionslosen Größen gerechnet wird. Würde man mit Dimensionen rechnen, so wäre die Formel für die Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion zu modifizieren. Da eine Integration über der Zeit vorliegt, müsste das Resultat die Dimension der Zeit aufweisen.
- Die Reaktion eines energiefreien LTI-Systems auf die Impulsfunktion heißt Impulsantwort. Die Impulsantwort und der Frequenzgang eines LTI-Systems bilden ein Fourier-Paar.

2.7.2 Lineare Filterung und Faltung

Mit der Impulsantwort kann die Eingangs-Ausgangsgleichung eines LTI-Systems im Zeitbereich angegeben werden. Die Impulsantwort ist darüber hinaus die zentrale Systemfunktion für die Systemeigenschaften. Die grundsätzliche Idee der Beschreibung von LTI-Systemen besteht darin, zunächst die Systemreaktion auf die Impulsfunktion, die Impulsantwort, zu bestimmen. Lässt sich später das Eingangssignal als Linearkombination von gewichteten und verzögerten Impulsfunktionen darstellen, so folgt aufgrund der Linearität und der Zeitinvarianz des LTI-Systems, dass das Ausgangssignal eine Linearkombination von ebenso gewichteten und verzögerten Impulsantworten sein muss. Diesen grundsätzlichen Zusammenhang wollen wir jetzt erfassen.

Anmerkung

- Die nachfolgend verwendeten mathematischen Interpretationen von Linearität und Zeitinvarianz können auch im Sinn einer Definition verstanden werden.

Im ersten Schritt wird mit dem Systemoperator $T\{\cdot\}$ die Impulsantwort definiert und dabei ihre Existenz vorausgesetzt:

$$h(t) = T\{\delta(t)\}.$$

Der Systemoperator bedeutet nichts weiter, als dass die Funktion in der geschweiften Klammer das Eingangssignal ist und das Ausgangssignal als Ergebnis der Abbildung (Transformation) durch das System zugewiesen wird. Wie diese Abbildung wirklich aussieht, hängt von dem jeweils betrachteten System ab. Voraussetzung ist hier nur, dass die Funktionen sinnvoll existieren und die Abbildung linear und zeitinvariant ist.

Im zweiten Schritt wird zunächst das Eingangssignal als Überlagerung von Impulsfunktionen dargestellt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = x(t) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) d\tau}_1 = x(t).$$

Da, wegen der Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion, das linke Integral nur dann einen von null verschiedenen Wert liefert wenn $t = \tau$, darf im Integral auch $x(t)$ geschrieben werden; $x(t)$ ist jedoch unabhängig von der Integrationsvariablen τ , weshalb $x(t)$ vor das Integral gestellt wird. Es verbleibt die Integration über die Impulsfunktion, die definitionsgemäß den Wert eins hat. Das linke Integral gleicht somit dem Eingangssignal.

Mit dieser Vorbereitung ergibt sich die Eingangs-Ausgangsgleichung eines Systems auf ein weitestgehend beliebiges Eingangssignal

$$y(t) = T \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau \right\}.$$

Man beachte, die Zeitvariablen t betrifft die Abbildung durch das System und die Integrationsvariable τ die Darstellung des Eingangssignals als Überlagerung von gewichteten Impulsfunktionen. Nun kann die Linearität genutzt werden, weil der Systemoperator nur bezüglich der Variablen t angewendet wird. Vertauscht wird die Reihenfolge aus linearer Abbildung des Signals bezüglich der Zeitvariablen t durch das System und linearer Abbildung durch das Integral bezüglich der Integrationsvariablen τ :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot T\{\delta(t - \tau)\} d\tau.$$

Ist das System zeitinvariant, so hängt das Ausgangssignal, die (System-)Reaktion, bis auf eine zeitliche Verschiebung aufgrund des Einschaltzeitpunkts, hier τ , nicht vom Zeitpunkt der Erregung ab. Man erhält die zeitlich um τ verschobene Impulsantwort

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau.$$

Damit ist die gesuchte *Eingangs-Ausgangsgleichung* für den Zeitbereich gefunden. Man bezeichnet das Integral als Faltungsintegral, oder kurz als *Faltung*, und schreibt mit dem Faltungsstern „*“ ebenso kurz

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau.$$

Die Faltung erhält ihren Namen daher, dass eine der Funktionen im Integranden mit negativer Integrationsvariablen vorkommt. Das entspricht einem Umfalten (Spiegelung) der Funktion an der Ordinate. Die Faltung ist kommutativ, wie noch gezeigt wird.

Zunächst verifizieren wir die Faltung als Eingangs-Ausgangsgleichung. Wir führen die Fourier-Transformation durch und Vergleichen des Ergebnis mit der Eingangs-Ausgangsgleichung im Frequenzbereich eins.

Anmerkung

- Die folgende Herleitung stellt ein typisches Beispiel für die Anwendung der Fourier-Transformation und der Impulsfunktion in der Nachrichtentechnik dar. Die Anwendung beruht – abgesehen von einem gewissen Vertrautwerden mit den Zusammenhängen – auf einfachen Rechenregeln. Die Gültigkeit der Regeln wird

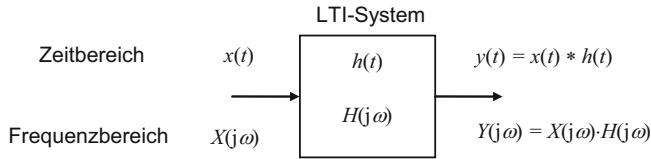


Abb. 2.44 Eingangs-Ausgangsgleichungen für LTI-Systeme in Zeit- und Frequenzbereich mit der Impulsantwort $h(t)$ und dem Frequenzgang $H(j\omega)$

stillschweigend vorausgesetzt, was durch die physikalischen Randbedingungen und den praktischen Erfahrungen in den technischen Anwendungen motiviert ist und durch die Distributionentheorie mathematisch abgesichert wird.

Vertauschen der Integrationsreihenfolge, also der Zeitvariablen t der Fourier-Transformation mit der Faltungsvariablen τ , liefert nach einfacher Substitution der Variablen den Frequenzgang und den Faktor $e^{-j\omega\tau}$. Dieser Zusammenhang wird auch als *Zeitverschiebungssatz* der Fourier-Transformation bezeichnet:

$$\begin{aligned}
 x(t) * h(t) &\leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \right] \cdot e^{-j\omega t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) \cdot e^{-j\omega t} dt \right]}_{H(j\omega) \cdot \exp(-j\omega\tau)} d\tau = H(j\omega) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau}_{X(j\omega)}.
 \end{aligned}$$

Da der Frequenzgang bezüglich der Integration nach τ als konstant anzusehen ist, darf er vor das Integral gezogen werden und es verbleibt die Fourier-Transformation des Eingangssignals. Damit ist gezeigt, dass die Fourier-Transformation die Faltung zweier Funktionen im Zeitbereich in das Produkt ihrer Fourier-Transformierten im Frequenzbereich überführt. Aus der Faltung des Eingangssignals mit der Impulsantwort wird das Produkt des Eingangsspektrums mit dem Frequenzgang

$$x(t) * h(t) \leftrightarrow X(j\omega) \cdot H(j\omega).$$

Aus der Kommutativität des Produkts im Frequenzbereich darf auf die Kommutativität der Faltung im Zeitbereich geschlossen werden. Die Eingangs-Ausgangsgleichungen von LTI-Systemen im Zeit- und im Frequenzbereich ist in Abb. 2.44 zusammengestellt. Es sei nochmals betont, dass die Eingangs-Ausgangsgleichungen nur die sinnvolle Existenz der Impulsantwort des Systems und dessen Linearität und Zeitinvarianz voraussetzen. Wegen der Sparsamkeit der Voraussetzungen kann eine breite Anwendung der Theorie erwartet werden.

Wichtige Eigenschaften von LTI-Systemen werden nachfolgend nochmals zusammengestellt. Die sinnvolle Wahl von Funktionen und Konstanten in den Gleichungen wird vorausgesetzt.

Linearität

Sind zwei beliebigen Eingangssignalen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ jeweils die Ausgangssignale $y_1(t)$ bzw. $y_2(t)$ zugeordnet, so folgt für *lineare Systeme* für jede Linearkombination mit beliebigen Konstanten c_1 und c_2

$$T \{c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x(t)\} = c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t).$$

Diese Eigenschaft muss im erweiterten Sinn auch für konvergente Funktionenfolgen, wie Fourier-Reihen und Integrale gelten.

Zeitinvarianz

Ein System ist *zeitinvariant*, wenn für einen beliebigen Einschaltzeitpunkt t_0 gilt

$$T \{x(t)\} = y(t) \quad \text{und} \quad T \{x(t - t_0)\} = y(t - t_0).$$

Kausalität

Man beachte im Beispiel der Impulsantwort des RC-Tiefpasses, dass die Impulsantwort für $t < 0$ gleich null ist. Signale mit dieser Eigenschaft werden als rechtsseitige Signale bezeichnet. Ist die Impulsantwort eines Systems rechtsseitig, spricht man von einem *kausalen System*. In diesem Fall erfolgt die Reaktion zeitgleich mit oder erst nach der Erregung und steht somit im Einklang mit der physikalischen Erfahrung der Reihenfolge von Ursache und Wirkung.

Ist das System kausal, so kann die Rechtsseitigkeit der Impulsantwort in den Grenzen des Faltungsintegrals berücksichtigt werden:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_0^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau.$$

BIBO-Stabilität

Ein System mit absolut integrierbarer Impulsantwort

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

bezeichnet man als *BIBO-stabil*. BIBO steht für Bounded-Input – Bounded-Output und bedeutet, dass für jedes amplitudenbeschränkte Eingangssignal $|x(t)| \leq M$ auch das

Ausgangssignal in seiner Amplitude beschränkt bleibt:

$$\begin{aligned}
 |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau) \cdot h(t-\tau)| d\tau \\
 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|x(\tau)|}_{\leq M} \cdot |h(t-\tau)| d\tau \leq M \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)| d\tau < \infty.
 \end{aligned}$$

Ist die Impulsantwort absolut integrierbar, existiert der Frequenzgang.

Zum Abschluss betrachten wir zwei Beispiele für die Faltung: den Rechteckimpuls am RC-Tiefpass und die Faltung zweier Rechteckimpulse. Für das erste Beispiel kennen wir das Ergebnis, z. B. aus der Physik, und können so nochmals die Zusammenhänge überprüfen. Im zweiten Beispiel geben wir eine grafische Lösung an und erhalten ein wichtiges Ergebnis aus der Nachrichtenübertragungstechnik.

Rechteckimpuls am RC-Tiefpass

Beispielhaft berechnen wir die Reaktion eines zunächst energiefreien RC-Tiefpasses bei Erregung mit einem konstanten normierten Spannungsimpuls:

$$u_e(t) = \begin{cases} U_q & \text{für } t \in [0, T] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Kausalität des Systems, die Rechtsseitigkeit der Impulsantwort, wird in den Integrationsgrenzen der Faltung berücksichtigt. Da auch das Eingangssignal rechtsseitig ist, kann die Systemantwort erst für $t \geq 0$ erfolgen. Das Integral ist nur für $t > 0$ zu lösen:

$$\begin{aligned}
 u_a(t) &= u_e(t) * h_{\text{RC-TP}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_e(\alpha) \cdot h_{\text{RC-TP}}(t-\alpha) d\alpha \\
 &= \int_0^t u_e(\alpha) \cdot \frac{1}{\tau} e^{-\frac{(t-\alpha)}{\tau}} d\alpha = \frac{1}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} \cdot \int_0^t u_e(\alpha) \cdot e^{\frac{\alpha}{\tau}} d\alpha.
 \end{aligned}$$

Wegen des Rechteckimpulses ist eine Fallunterscheidung notwendig. Für $0 < t < T$ liegt die Spannung U_q an und man erhält die Spannung an der Kapazität im Ladevorgang:

$$u_a(t) = \frac{U_q}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} \cdot \underbrace{\int_0^t e^{\alpha/\tau} d\alpha}_{\tau \cdot \exp(\alpha/\tau) \Big|_0^t} = U_q \cdot (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{für } 0 < t < T.$$

Für $t > T$ ist die Eingangsspannung null, die Kapazität entlädt sich. Aus dem Ansatz mit der Faltung wird

$$u_a(t) = \frac{U_q}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} \cdot \underbrace{\int_0^T e^{\alpha/\tau} d\alpha}_{\tau \cdot \exp(\alpha/\tau)|_0^T} = U_q \cdot e^{-t/\tau} \cdot (e^{-T/\tau} - 1) \quad \text{für } t > T$$

und somit das bekannte Ergebnis aus dem Beispiel in Abschn. 2.7.1.

Man beachte auch die Stetigkeit der Spannung an der Kapazität für $t = 0$ und $t = T$. Da Kapazitäten und Induktivitäten Energiespeicher sind, können sich ihre Spannungen bzw. Ströme aus physikalischen Gründen nicht sprunghaft ändern. Die Ausnahme von dieser Regel ist die mathematische Idealisierung der impulsförmigen Erregung.

Faltung eines Rechteckimpulses mit sich selbst

In der Nachrichtenübertragungstechnik werden im Empfänger oft auf das Sendesignal angepasste Filter, sog. Matched-Filter, verwendet, um die Signale bei additiver Rauschstörung gut detektieren zu können (Kap. 4). Dort liegt eine ähnliche Situation vor wie im folgenden Beispiel.

In manchen Fällen lässt sich die Faltung auf grafischem Weg veranschaulichen. Hierzu betrachten wir das Beispiel zweier rechtsseitiger Rechteckimpulse

$$x(t) = x_T \left(t - \frac{T}{2} \right).$$

Die Faltung

$$y(t) = x(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau$$

lässt sich grafisch durchführen. Die Methode wird nachfolgend erläutert und in Abb. 2.45 illustriert.

Für einen beliebigen, aber fest vorgegebenen Wert t ist im Integranden das Produkt aus $x(\tau)$ und $x(t - \tau)$ zu bilden. Hierzu sind in Abb. 2.45 die beiden Signale für verschiedene Werte von t gezeigt. Für $t = 0$ erhält man für $x(-\tau)$ wegen des Minuszeichens im Argument den an der Ordinate gespiegelten Rechteckimpuls. Die Spiegelung wird im Bild durch ein kleines Dreieck angedeutet.

Im Integranden ist das Produkt aus dem Rechteckimpuls und dessen gespiegelter und verschobener Replik, $x(\tau) \cdot x(t - \tau)$, zu bilden. Im Beispiel werden vier Fälle unterschieden:

(i) $t < 0$

Der Integrand ist für $t < 0$ identisch null, da sich $x(\tau)$ und $x(t - \tau)$ nicht überlappen. Demzufolge liefert die Faltung den Wert null, wie in der rechten Bildhälfte gezeigt wird.

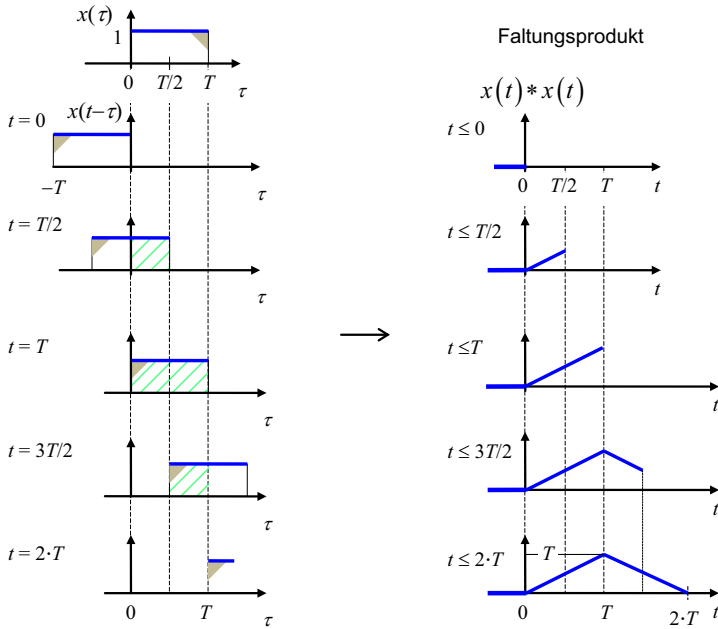


Abb. 2.45 Faltung eines Rechteckimpulses mit sich selbst

(ii) $0 \leq t < T$

Für wachsendes t schiebt sich der Rechteckimpuls $x(t - \tau)$ mehr und mehr unter den Rechteckimpuls $x(\tau)$. Da es sich um Rechteckimpulse handelt, nimmt die vom Produkt der beiden Rechteckimpulse eingeschlossene Fläche linear zu.

(iii) $T \leq t < 2 \cdot T$

Für $t = T$ decken sich die Rechteckimpulse vollständig. Die Faltung liefert jetzt den Maximalwert.

Allgemein gilt: Die Faltung eines reellen spiegelsymmetrischen Signals der Dauer T mit sich selbst ergibt zum Zeitpunkt T die Energie des Signals. Die Energie ist auch gleich dem Maximum des Faltungsprodukts.

Mit wachsendem t schiebt sich $x(t - \tau)$ aus dem Abszissenbereich des Rechteckimpulses $x(\tau)$. Die von den beiden Rechteckimpulsen gemeinsam eingeschlossene Fläche nimmt linear ab.

(iv) $2 \cdot T \leq t$

Für $t \geq 2 \cdot T$ ist der Integrand und damit das Ergebnis der Faltung identisch null.

Das Faltungsprodukt ist in Abb. 2.45 unten rechts gezeigt. Es resultiert ein Dreieckimpuls mit der Breite $2 \cdot T$ und der Höhe T .

Aufgabe 2.6

Eine Signalanalyse ergibt die näherungsweise Darstellung

$$u(t) \approx 2 \text{ V} \cdot \cos(\omega_0 t) + 0,1 \text{ V} \cdot \cos(2\omega_0 t) - 0,04 \text{ V} \cdot \cos(3\omega_0 t)$$

Berechnen Sie den Klirrfaktor. Geben Sie den Wert in Prozent an.

Aufgabe 2.7

- Skizzieren Sie einen Rechteckimpuls $x(t) = A$ für $t \in [-T, T]$ und 0 sonst.
- Geben Sie die Fourier-Transformierte zu $x(t)$ analytisch an.
- Skizzieren Sie das Spektrum zu $x(t)$.
- Geben Sie die erste Nullstelle im Spektrum ($f > 0$) an, wenn die Impulsdauer $1 \mu\text{s}$ beträgt.

Aufgabe 2.8

- Nennen Sie die drei Standardapproximationen für Tiefpassfilter.
- Ordnen Sie die Standardapproximationen in a) nach steigender Breite des Übergangsbereichs bei gleicher Filterordnung.
- Nennen Sie die vier Prototypen für selektive Filter.

Aufgabe 2.9

Skizzieren Sie das Toleranzschema zum Entwurf eines Tiefpasses. Tragen Sie alle relevanten Parameter ein und benennen Sie die Parameter und die Bereiche des Toleranzschemas.

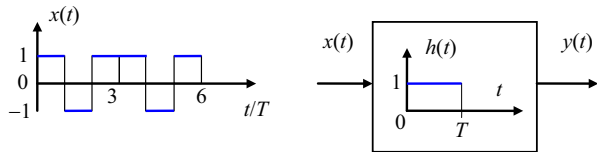
Aufgabe 2.10

- Welche grundlegenden Eigenschaften charakterisieren ein LTI-System?
- Was bedeutet es, wenn ein System linear ist?
- Nennen Sie die beiden (System-)Funktionen mit denen das Übertragungsverhalten eines LTI-Systems beschrieben wird. In welchem Zusammenhang stehen die beiden Funktionen?
- Wie wird bei einem LTI-System das Eingangssignal auf das Ausgangssignal abgebildet?
- Wie hängt bei einem LTI-System das Spektrum am Ausgang mit dem Spektrum am Eingang zusammen?

Aufgabe 2.11

- Welche Bedeutung hat der Frequenzgang bei sinusförmiger Erregung eines LTI-Systems?
- Wann ist eine Übertragung verzerrungsfrei?

Abb. 2.46 Filterung eines Basisbandsignals



- c) Was bedeutet es, wenn ein System mit einem Eintonsignal mit 1 kHz erregt wird und am Ausgang zwei Signalkomponenten bei der Frequenz 0 bzw. 2 kHz gemessen werden?

Aufgabe 2.12

- Was versteht man unter der Ausblendeigenschaft der Impulsfunktion?
- Wie kann man sich die Wirkung der Impulsfunktion anschaulich erklären?
- Was ist das Ergebnis, wenn man eine Funktion $x(t)$ mit einer verschobenen Impulsfunktion $\delta(t-t_0)$ faltet?

Aufgabe 2.13

In Abb. 2.46 wird das Basisbandsignal $x(t)$ auf das System mit der Impulsantwort $h(t)$ gegeben. Skizzieren Sie das Ausgangssignal $y(t)$.

Hinweis: Keine Rechnung

Aufgabe 2.14

In Abb. 2.2 findet sich eine Übersicht über dieses Kapitel in Form einer Mindmap. Mindmaps besitzen eine Baumstruktur, die thematische Querverbindungen nicht berücksichtigt. Alternativ bieten sich sog. kognitive Karten („cognitive maps“) an, die auch Querverbindungen zulassen.

Gehen Sie anhand der Übersicht in Abb. 2.2 nochmals im Uhrzeigersinn durch die Themen des Kapitels und ergänzen Sie schrittweise die Zusammenhänge (Voraussetzungen, Bedingungen, Entwicklungen). Erstellen Sie sich selbst eine kognitive Karte, beispielsweise indem Sie sich Ihre Gedanken beim Weg durch die Mindmap laut vorsprechen. (Auch als Gruppenarbeit geeignet.)

2.8 Zusammenfassung

Die wesentlichen Schritte von der Gleichstromrechnung zur Theorie der linearen zeitinvarianten Systeme sind in Abb. 2.47 von unten nach oben zusammengestellt. Den Ausgangspunkt bilden unten die Gleichströme bzw. -spannungen als Signale in Widerstandsnetzen. Die interessierenden Zweigströme und Zweigspannungen werden mit dem ohmschen Gesetz und den kirchhoffschen Regeln berechnet.

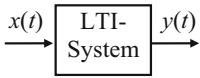
Signale	Systeme	Methoden
<p>Aperiodische Quelle $x(t)$</p> <p>Spektrum</p> $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$ <p>Inverse Fourier-Transformation</p> $x(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$	<p>LTI-System mit Impulsantwort $h(t)$</p> <p>Kausalität</p> $h(t) = 0 \quad \forall t < 0$ <p>BIBO-Stabilität</p> $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt < \infty$ <p>Frequenzgang</p> $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$	<p>Eingangs-Ausgangsgleichung</p> <p>– im Zeitbereich mit der Impulsantwort</p> $y(t) = h(t) * x(t)$ <p>– im Frequenzbereich mit dem Frequenzgang</p> $Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega)$
<p>Periodische Quelle $x(t)$ mit der Grundkreisfrequenz ω_0</p> $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$		<p>Eingangs-Ausgangsgleichung mit Frequenzgang und Fourier-Reihe</p> $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\omega_0) \cdot c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$
<p>Wechselspannungsquelle</p> $u_q(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ <p>Wechselstromquelle</p> $i_q(t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$	<p>RLC-Netzwerk</p> <p>– Widerstand R</p> <p>– Induktivität L</p> <p>– Kapazität C</p>	<p>Komplexe Wechselstromrechnung mit erweitertem ohmschen Gesetz und den kirchhoffschen Regeln für komplexe Amplituden</p>
<p>Gleichspannungsquelle U_q</p> <p>Gleichstromquelle I_q</p>	<p>Widerstandsnetzwerk</p> <p>– Widerstand R</p>	<p>Gleichstromrechnung mit dem ohmschen Gesetz und den kirchhoffschen Regeln</p>

Abb. 2.47 Von der Gleichstromlehre (*unten*) zur Theorie der LTI-Systeme (*oben*)

Durch die Elemente Kapazität und Induktivität wird die Betrachtung auf die RLC-Netze erweitert. Mit der komplexen Wechselstromrechnung lassen sich die Zweigströme und Zweigspannungen für sinusförmige Quellen berechnen.

RLC-Netzwerke sind ein Beispiel für lineare zeitinvariante Systeme. Deren Übertragungsverhalten kann vorteilhaft im Frequenzbereich durch den Frequenzgang beschrieben werden. Damit lassen sich insbesondere in Verbindung mit der Fourier-Transformation die Systemreaktionen auch für nichtperiodische Signale bestimmen.

Die Beschreibung der Signale und Systeme im Frequenzbereich liefert wichtige neue Einblicke. Verbreitete Konzepte und Kenngrößen nehmen im Beispiel anschauliche For-

men an, wie das Spektrum, die Bandbreite, das Zeitdauer-Bandbreite-Produkt, der Tiefpass oder die Bandsperre etc.

Mit der Definition der Impulsfunktion als mathematische Idealisierung eines sehr kurzen aber energiereichen Signals und der allgemeinen Betrachtung der LTI-Eigenschaften, Linearität und Zeitinvarianz, wird die Impulsantwort als die wesentliche Systemfunktion eingeführt. Wichtige Systemeigenschaften, wie die Kausalität und die Stabilität, lassen sich an ihr erkennen. Mit der Faltung der Impulsantwort mit dem Eingangssignal erhält man die Eingangs-Ausgangsgleichung im Zeitbereich. Die Systemfunktionen Impulsantwort und Frequenzgang bilden ein Fourier-Paar.

Ausblick Die vorgestellten Begriffe und Zusammenhänge lassen sich in ihren Bedeutungen unverändert in das Zeitdiskrete übertragen. Für zeitdiskrete Signale kann ebenfalls die harmonische Analyse mit der Fourier-Transformation vorgenommen werden. Die Begriffe Frequenzkomponenten, Spektrum, Bandbreite und Zeitdauer-Bandbreite-Produkt finden zeitdiskrete Entsprechungen. An die Stelle der Systembeschreibung mit Differenzialgleichungen treten bei zeitdiskreten LTI-Systemen Differenzengleichungen. Es existieren Impulsantworten und Frequenzgänge mit Eingangs-Ausgangsgleichungen im Zeit- und im Frequenzbereich, die denen in Abb. 2.47 oben entsprechen.

Die digitale Signalverarbeitung macht von diesen Analogien ausgiebig Gebrauch und hat die analoge Signalverarbeitung in vielen Anwendungen verdrängt. Im nächsten Kapitel wird ein kurzer Blick auf die digitale Signalverarbeitung geworfen. Beispielhaft werden digitale Filter und die Kurzzeit-Spektralanalyse mit der DFT/FFT (Discrete Fourier Transform/Fast Fourier Transform) vorgestellt. Der DFT/FFT kommt in der Nachrichtentechnik eine wichtige Rolle zu und ihr soll deshalb entsprechend Platz eingeräumt werden.

Mit den hier vorgestellten Begriffen und Zusammenhängen werden auch Grundlagen für eine zügige Einarbeitung in die digitale Signalverarbeitung gelegt.

2.9 Lösungen zu den Aufgaben

Lösung 2.1

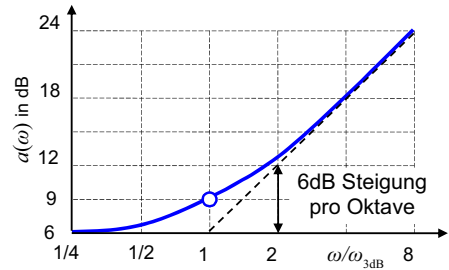
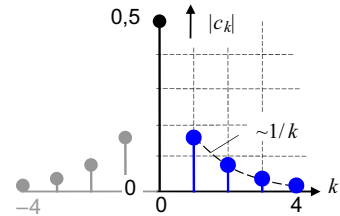
a) Frequenzgang

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C + 1/R}}{R + \frac{1}{j\omega C + 1/R}} = \frac{1}{2 + j\omega CR} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + j\omega CR/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

b) Dämpfungsgang

$$a_{\text{dB}}(\omega) = -20 \cdot \lg |H(j\omega)| \text{ dB} = 10 \cdot \lg (1 + \omega^2 \tau^2) \text{ dB} + 6 \text{ dB}$$

c) Skizze des Dämpfungsganges in Abb. 2.48 mit der 3 dB-Grenzkreisfrequenz $\omega_{3 \text{ dB}} = 1/\tau$

Abb. 2.48 Dämpfungsgang**Abb. 2.49** Amplitudenspektrum

Hinweis:

- Die 3 dB-Grenzfrequenz bezieht sich auf das Maximum des Betragsgangs, s. Abb. 2.19.

d) Tiefpass

e) 3 dB-Grenzfrequenz

$$f_{3\text{dB}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{RC/2} \approx 8 \text{ kHz}$$

Lösung 2.2

Amplitudenspektrum (Betrag der Fourier-Koeffizienten) zur periodischen Sägezahn-schwingung in Abb. 2.49

Hinweis: Ergänzend sind die Werte auf der linken Seite, $k < 0$, eingetragen, um die gerade Symmetrie hervorzuheben.

Lösung 2.3

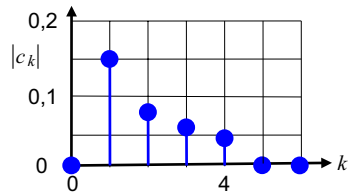
a) Reaktion am Ausgang des Bandpasses mit $\omega_0 = 2\pi \cdot 1 \text{ kHz}$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^4 \frac{\sin(k\omega_0 t)}{k} \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{4} \sin(4\omega_0 t) \right] \end{aligned}$$

b) Skizze des Amplitudenspektrums (einseitig) in Abb. 2.50

Ergänzung: Reaktion des Bandpasses, s. Ausgangssignal in Abb. 2.51

Abb. 2.50 Amplitudenspektrum des Ausgangssignals



Lösung 2.4

- a) Die Fourier-Transformierte eines Signals bezeichnet man als (Fourier-)Spektrum. Das Betragsquadrat des Spektrums gibt die Verteilung der (Signal-)Energie über der Frequenz an.

Ist das Signal periodisch mit der Periode T , so erhält man aus der harmonischen Analyse eine Fourier-Reihe mit Gleichanteil bei der Frequenz null und Harmonischen bei ganzzahligen Vielfachen der Grundkreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi/T$. Es ergibt sich ein Linienspektrum.

Bei periodischen Signalen wird zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten eine Periode betrachtet. Man erhält die Energie pro Periode, also die mittlere Leistung, s. auch Leistung der Ersatzspannungsquellen.

- b) In RLC-Netzwerken lassen sich für sinusförmige Quellenströme und Quellenspannungen die Zweigströme und die Zweigspannung im eingeschwungenen Zustand mithilfe der komplexen Wechselstromrechnung bestimmen.

Die harmonische Analyse liefert eine mathematische Darstellung periodischer Ströme und Spannungen durch sinusförmige Ersatzquellen, sodass die bekannten Beziehungen der komplexen Wechselstromrechnung, die verallgemeinerten Kirchhoffschen Regeln, angewendet werden können.

- c) Die Parsevalsche Gleichung stellt die Verbindung zwischen der Energie bzw. der Leistung des Zeitsignals und dem Betragsquadrat seines Spektrums her. Damit können Energie- und Leistungsbetrachtungen äquivalent sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich durchgeführt werden.

- d) Unter der Bandbreite eines Signals versteht man die Breite des Bereiches im Spektrum, kurz (Frequenz-)Band genannt, in dem sich die wesentlichen Frequenzkomponenten des Signals befinden. Liegt eine strikte Bandbegrenzung vor, so besitzt das Signal keine Frequenzkomponente außerhalb des Bands.

Abb. 2.51 Ausgangssignal des Bandpasses

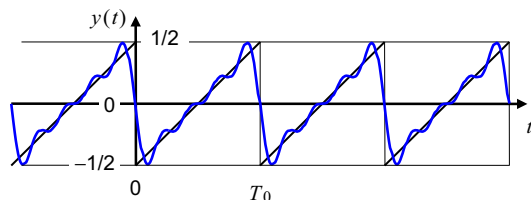
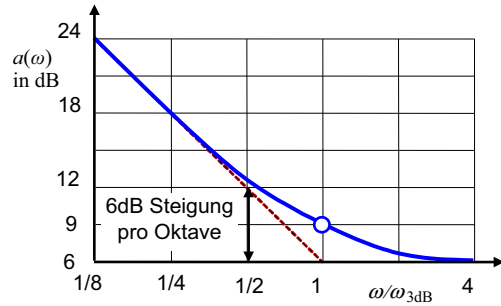


Abb. 2.52 Dämpfungsgang

- e) Einem periodischen Signal mit der Periode T ist eine Fourier-Reihe und damit ein Linienspektrum zugeordnet. Die Frequenzkomponenten finden sich bei der Frequenz null für den Gleichanteil und den ganzzahligen Vielfachen der Grundkreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi/T$ für die Harmonischen.
- f) Die zeitliche Dauer eines Signals und dessen Bandbreite stehen in reziprokem Zusammenhang. Je schneller sich ein Signal ändert, umso größer ist seine Bandbreite.

Lösung 2.5

- a) Frequenzgang

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{j\omega CR}{1 + j\omega C \cdot 2R} = \frac{1}{2} \cdot \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

- b) Frequenzgang der Dämpfung

$$a_{\text{dB}}(\omega) = -20 \cdot \lg\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\omega^2\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2}}\right) \text{ dB} = 10 \cdot \lg\left(\frac{1 + \omega^2\tau^2}{\omega^2\tau^2}\right) \text{ dB} + 6 \text{ dB}$$

- c) Skizze des Frequenzgangs der Dämpfung mit der 3 dB-Grenzkreisfrequenz
- $\omega_{3\text{dB}} = 1/(2RC)$

- d) Hochpass

- e) 3 dB-Grenzfrequenz

$$f_{3\text{dB}} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2RC} \approx 1 \text{ kHz}$$

Lösung 2.6

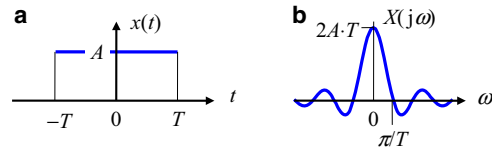
$$\text{Klirrfaktor } d = \sqrt{\frac{0,1^2 + 0,04^2}{2^2 + 0,1^2 + 0,04^2}} \approx 0,054 \hat{=} 5,4 \%$$

Lösung 2.7

- a) Siehe Abb. 2.53a

- b)
- $x(t) \leftrightarrow X(j\omega) = 2A \cdot T \cdot \text{si}(\omega T)$

Abb. 2.53 Rechteckimpuls und sein Spektrum



- c) Siehe Abb. 2.53b
- d) $f_0 = 1/(2T) = 500 \text{ kHz}$

Lösung 2.8

- a) Butterworth- (Potenz-), Chebyshev- und Cauer- (Elliptische) Filter
- b) Cauer-, Chebyshev- und Butterworth-Filter
- c) Tiefpass-, Hochpass-, Bandpassfilter und Bandsperre

Lösung 2.9

Siehe Abb. 2.31

Lösung 2.10

- a) LTI-Systeme sind linear (L) und zeitinvariant (TI).
- b) Ist ein System linear, so erhält man bei einer Linearkombination von Eingangssignalen (Erregungen) die gleiche Linearkombination der zugehörigen Ausgangssignale (Reaktionen).
- c) Das Übertragungsverhalten eines LTI-Systems wird durch die Impulsantwort und den Frequenzgang (bzw. Übertragungsfunktion) beschrieben. Impulsantwort und Frequenzgang bilden ein Fourier-Paar.
- d) Das Eingangssignal wird mit der Impulsantwort zum Ausgangssignal gefaltet.
- e) Das Eingangsspektrum wird mit dem Frequenzgang zum Ausgangsspektrum multipliziert.

Lösung 2.11

- a) Der Frequenzgang charakterisiert die Übertragungseigenschaften des LTI-Systems im Frequenzbereich. Stellt man, wie in der komplexen Wechselstromrechnung, das sinusförmige Eingangssignal als komplexe Amplitude dar, so ergibt sich die komplexe Amplitude des Ausgangssignals aus der komplexen Amplitude am Eingang mal dem Wert des Frequenzgangs bei der entsprechenden Kreisfrequenz. Damit ist die Amplitude des sinusförmigen Ausgangssignals proportional zum Betrag des Frequenzgangs bei der entsprechenden Kreisfrequenz. Die Phase des Frequenzgangs bei der entsprechenden Kreisfrequenz tritt im Ausgangssignal als Phasenverschiebung in Erscheinung.

Aufgrund des multiplikativen Zusammenhangs können im Ausgangssignal keine Frequenzkomponenten auftreten, die nicht im Eingangssignal vorhanden sind.

- b) Eine Übertragung ist verzerrungsfrei, wenn das Empfangssignal dem Sendesignal bis auf einen konstanten Amplitudenfaktor und einer konstanten Zeitverschiebung gleicht.
- c) Am Systemausgang liegen neue Frequenzkomponenten vor. Das Signal wird nichtlinear verzerrt. Das System ist nichtlinear. (Für diese Aussage muss die Zeitinvarianz vorausgesetzt werden.)

Im Zahlenwertbeispiel ist mit

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot [1 - \cos(2\alpha)] \quad \text{und} \quad \cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot [1 + \cos(2\alpha)]$$

zu vermuten, dass das System ein Quadrier ist, wie er beispielsweise zur Modulation benutzt wird.

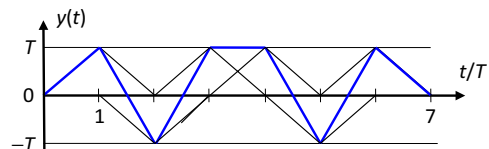
Lösung 2.12

- a) Die Impulsfunktion stellt die mathematische Idealisierung eines sehr kurzen und sehr energiereichen Signals dar. Am Beispiel der Aufladung der Kapazität eines RC-Glieds kann man sich die Impulsfunktion als Spannungsimpuls vorstellen, der die Kapazität so schnell lädt, dass im Rahmen der Messgenauigkeit der Ladevorgang selbst nicht mehr beobachtet werden kann.
- b) Die Wirkung der Impulsfunktion ist unmittelbar mit ihrer Definition über die Ausblendeigenschaft verknüpft. Wird die Impulsfunktion auf ein (im Ursprung stetiges) Signal angewendet, erhält man den Signalwert im Ursprung. Der restliche Signalverlauf wird ausgeblendet.
- c) Man erhält die Funktion entsprechend verschoben, d. h. es resultiert $x(t - t_0)$

Lösung 2.13

Das Signal $x(t)$ kann in eine Folge von Rechteckimpulsen der Dauer T zerlegt werden. Wegen der Linearität der Faltung, darf jeder einzelne Rechteckimpuls für sich mit $h(t)$ gefaltet werden. Es ergeben sich jeweils Dreieckimpulse der Dauer $2T$ und Höhe T , s. Abb. 2.54. Das Ergebnis $y(t) = x(t) * h(t)$ setzt sich aus der Überlagerung der Dreieckimpulse zusammen.

Abb. 2.54 Ausgangssignal



2.10 Abkürzungen und Formelzeichen

Abkürzungen

ADU	Analog-Digital-Umsetzer
DAU	Digital-Analog-Umsetzer
dB	Dezibel
LTI	Linear Time-Invariant (linear zeitinvariant)
THD	Total Harmonic Distortion
TP	Tiefpass

Formelzeichen – Parameter, Konstanten und Variablen

a_k, b_k	Fourier-Koeffizienten zu den Kosinus- bzw. Sinusfunktionen
B	Bandbreite
C	Kapazität
C_k	Komplexe Fourier-Koeffizienten zu den Harmonischen
d	Klirrfaktor
δ_D, δ_S	Durchlass- bzw. Sperrtoleranz
E	(Signal-)Energie
f	Frequenzvariable
$f_{3\text{ dB}}$	3 dB-Eckfrequenz/Grenzfrequenz
f_g, f_{go}, f_{gu}	Grenzfrequenz, obere und untere
H_{\max}	Maximum des Betragsgangs
L	Induktivität
n	Normierte Zeitvariable
ω	Kreisfrequenz
ω_0	Grundkreisfrequenz periodischer Signale
ω_D, ω_S	Durchlass- bzw. Sperrkreisfrequenz
P	(Signal-)Leistung
R	Widerstand
$s = \sigma + j\omega$	Komplexe Frequenz
$\tau = R \cdot C$	Zeitkonstante des RC-Glieds
t	Zeitvariable
T	Impulsdauer
T_A	Abtastintervall
T_0	Periode

Formelzeichen – Funktionen, Signale und Operatoren

$a(\omega)$	Dämpfungsgang
$b(\omega)$	Phasengang
$\delta(\cdot), \delta[\cdot]$	Impulsfunktion bzw. Impulsfolge
$*$	Faltungssymbol/-stern
$h(t)$	Impulsantwort
$H(j\omega)$	Frequenzgang
$\text{sgn}(\cdot)$	Signumfunktion
$\text{si}(\cdot)$	si-Funktion
$T\{\cdot\}$	Allgemeiner Systemoperator
$\tau_g(\omega)$	Gruppenlaufzeit
$x(t), x[n]$	Allgemeine/s Funktion/Signal, zeitkontinuierlich bzw. zeitdiskret
$x_T(t)$	Rechteckimpuls
$X(j\omega)$	Allgemeines (Fourier-)Spektrum, Fourier-Transformierte
$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$	Fourier-Paar

Literatur

- Lüke H.D. (1995) Signalübertragung. Grundlagen der digitalen und analogen Nachrichtenübertragungssysteme. 6. Aufl., Berlin, Springer
- Schüßler H.W. (1988) Netzwerke, Signale und Systeme, Band I: Systemtheorie linearer elektrischer Netzwerke. 2. Aufl., Berlin, Springer
- Werner M. (2008) Signale und Systeme. Ein Lehr- und Arbeitsbuch. 3. Aufl., Wiesbaden, Vieweg+Teubner

Weiterführende Literatur

- Brigola R. (1997) Fourieranalysis, Distributionen und Anwendungen. Braunschweig/Wiesbaden, Vieweg
- Bronstein I.N., Semendjajew K.A., Musiol G., Mühlig H. (1999) Taschenbuch der Mathematik. 4. Aufl., Frankfurt am Main, Harri Deutsch
- Frey Th., Bossert M. (2008) Signal- und Systemtheorie. 2. Aufl., Wiesbaden, Vieweg+Teubner
- Girod B., Rabenstein R., Stenger A. (2007) Einführung in die Systemtheorie. Signale und Systeme in der Elektrotechnik und Informationstechnik. 4. Aufl., Stuttgart, B.G. Teubner
- Karrenberger U. (2012) Signale, Prozesse, Systeme. Eine multimediale und interaktive Einführung in die Signalverarbeitung. 6. Aufl., Berlin, Springer
- Kaufhold B., Kreß D. (2010) Signale und Systeme verstehen und vertiefen. Denken und Arbeiten im Zeit- und Frequenzbereich. Wiesbaden, Vieweg+Teubner
- Kiencke U., Jäkel H. (2008) Signale und Systeme. 4. Aufl., München/Wien, Oldenbourg
- Mertins A. (2010) Signaltheorie. Grundlagen der Signalbeschreibung, Filterbänke, Wavelets, Zeit-Frequenz-Analyse, Parameter- und Signalschätzung. 2. Aufl., Wiesbaden, Vieweg+Teubner
- Meyer M. (2008) Signalverarbeitung. Analoge und digitale Signale, Systeme und Filter. 5. Aufl., Wiesbaden, Vieweg+Teubner
- Ohm J-R., Lüke H.D. (2010) Signalübertragung. Grundlagen der digitalen und analogen Nachrichtenübertragungssysteme. 11. Aufl., Heidelberg, Springer

- Scheithauer R. (2005) Signale und Systeme. Grundlagen für die Mess- und Regelungstechnik und Nachrichtentechnik (2. Aufl.). Wiesbaden: B.G. Teubner
- Schüßler H.W. (1991) Netzwerke, Signale und Systeme, Band II: Theorie kontinuierlicher und diskreter Signale und Systeme. 3. Aufl., Berlin, Springer
- Schüßler H.W. (b. v. G. Dehner, R. Rabenstein und P. Steffen) (2010) Digitale Signalverarbeitung 2. Entwurf diskreter Systeme. Berlin, Springer
- Shannon C.E. (1948) A mathematical theory of communication. Bell Sys Tech J 27:379–423 und 623–656
- Unbehauen R. (1993) Netzwerk- und Filtersynthese: Grundlagen und Anwendungen. 4. Aufl., München/Wien, Oldenbourg
- Unbehauen R. (1998) Systemtheorie 2: Mehrdimensionale, adaptive und nichtlineare Systeme. 7. Aufl., München/Wien, Oldenbourg
- Unbehauen R. (2002) Systemtheorie 1: Allgemeine Grundlagen, Signale und lineare Systeme im Zeit- und Frequenzbereich. 8. Aufl., München/Wien, Oldenbourg Verlag
- Wangenheim L. (2010) Analoge Signalverarbeitung. Systemtheorie, Elektronik, Filter, Oszillatoren, Simulationstechnik. Wiesbaden, Vieweg+Teubner
- Wiener N. (1948) Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machine. Paris, Hermann
- Wiener N. (1963) Regelung und Nachrichtenübertragung in Lebewesen und in der Maschine. Düsseldorf/Wien, Econ



<http://www.springer.com/978-3-8348-2580-3>

Nachrichtentechnik

Eine Einführung für alle Studiengänge

Werner, M.

2017, XIV, 717 S. 416 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-8348-2580-3