

# Capitolo 2

## Esercizi

### 2.1 Successioni

1. Sia  $a_0, a_1, a_2, \dots$  la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_0 = 2, & a_1 = 3; \\ a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{6} & \text{per } n \geq 1. \end{cases}$$

(i) Dimostrare che per ogni  $n \geq 2$  si ha  $a_n = b_n/6^{n-1}$  con  $b_n \equiv -1 \pmod{6}$ .

(ii) Per  $n \geq 0$ , sia  $c_n = 5a_n + (-1)^n 4/3^{n-1}$ . Dimostrare che per ogni  $n \geq 0$  si ha  $c_n = 22 \cdot 2^{-n}$ .

2. Sia  $a_0, a_1, a_2, \dots$  la successione definita da

$$\begin{cases} a_0 = 0, & a_1 = 1; \\ a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1} & \text{per } n \geq 1. \end{cases}$$

Dimostrare che

(i)  $(a_n, 6) = 1$  per ogni  $n > 0$ ;

(ii)  $5 \mid a_n$  se e solo se  $n$  è pari.

3. Sia  $a_1, a_2, a_3, \dots$  la successione definita da

$$\begin{cases} a_1 = 1, & a_2 = 2; \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + a_{n-1} & \text{per } n \geq 2. \end{cases}$$

(i) Dimostrare che  $a_{n+1} \geq a_n$  per ogni  $n \geq 1$ .

(ii) Dimostrare che  $a_{2n+2} = 9a_{2n}/4 - a_{2n-2}$  per ogni  $n \geq 2$ .

4. Si consideri la successione  $a_0, a_1, a_2, \dots$  definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_0 = 2, & a_1 = 1; \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} & \text{per } n \geq 1. \end{cases}$$

Dimostrare che

- (i)  $a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2 = a_n a_{n+1} + 2$  per ogni  $n \geq 0$ ;
- (ii)  $a_n$  è pari se e solo se  $n \equiv 0 \pmod{3}$ .

**5.** Sia  $k > 0$  un numero naturale. Dimostrare che esiste un'unica successione di numeri reali  $a_0, a_1, a_2, \dots$  che soddisfa le condizioni

$$\begin{cases} a_0 = 0, & a_k = 1; \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} & \text{per } n \geq 1 \end{cases}$$

e dimostrare che per questa successione si ha  $a_1 = 1/F_k$ , dove  $F_k$  è il  $k$ -esimo numero di Fibonacci.

**6.** Sia  $a_0, a_1, a_2, \dots$  la successione definita da

$$\begin{cases} a_0 = 9, & a_1 = 12, & a_2 = 38; \\ a_{n+2} = 7a_n - 6a_{n-1} & \text{per } n \geq 1. \end{cases}$$

- (i) Determinare per quali valori di  $n$  si ha  $3 \mid a_n$ .
- (ii) Determinare per quali valori di  $n$  si ha  $a_{n+1} > a_n$ .

**7.** Definiamo induttivamente  $a_0 = 31$ ,  $a_{n+1} = a_n^3$  per  $n \geq 0$ . Si dimostri che esiste un intero positivo  $k$  tale che, per ogni  $n$ ,  $a_{n+k} \equiv a_n \pmod{44}$  e si determini il minimo valore possibile per  $k$ .

**8.** Sia  $k \in \mathbb{N}$  e sia  $a_1, a_2, a_3, \dots$  la successione di numeri naturali definita da

$$\begin{cases} a_1 = k, \\ a_{n+1} = a_n + (202, a_n) & \text{per } n \geq 1. \end{cases}$$

Dimostrare che esiste un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n \geq n_0$  si ha  $202 \mid a_n$ .

**9.** Sia  $a$  un numero intero non divisibile per 3 e sia  $a_0, a_1, a_2, \dots$  la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_0 = 1, & a_1 = a; \\ a_{n+1} = 5a_n + 3a_{n-1} & \text{per } n \geq 1. \end{cases}$$

Dimostrare che  $(a_{n+1}, a_n) = 1$  per ogni  $n \geq 1$ .

**10.** Per ogni intero  $n \geq 0$ , sia  $a_n = 3^n + 5^n$ .

- (i) Determinare dei numeri reali  $h, k$  tali che  $a_{n+1} = ha_n + ka_{n-1}$  per ogni  $n \geq 1$ .
- (ii) Determinare se esistono degli interi positivi  $n$  tali che  $7 \mid a_n$ .

**11.** Sia  $a_0, a_1, a_2, \dots$  la successione definita da

$$\begin{cases} a_0 = 2, & a_1 = 3, & a_2 = 5; \\ a_{n+1} = a_n - a_{n-1} + 2a_{n-2} & \text{per } n \geq 2. \end{cases}$$

Dimostrare che  $a_n < a_{n+1}$  per ogni  $n \geq 0$ .

**12.** Siano  $h, k$  numeri interi con  $(h, k) = 1$  e sia  $a_0, a_1, a_2 \dots$  la successione definita da

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 1; \\ a_{n+1} = ha_n + ka_{n-1} \quad \text{per } n \geq 1. \end{cases}$$

(i) Dimostrare che  $(a_n, a_{n+1}) = 1$  per ogni  $n \geq 0$ .

(ii) Posto  $h = 35$  e  $k = 71$ , determinare il massimo comune divisore di tutti i numeri dell'insieme  $\{a_n^2 - 1 \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ .

**13.** Indicata con  $F_n$  la successione dei numeri di Fibonacci dimostrare che, per ogni  $n \geq 0$ ,

(i)  $\binom{n}{0}F_1 + \binom{n}{1}F_2 + \dots + \binom{n}{n-1}F_n + \binom{n}{n}F_{n+1} = F_{2n+1};$

(ii)  $\binom{n}{1}F_1 + \binom{n}{2}F_2 + \dots + \binom{n}{n-1}F_{n-1} + \binom{n}{n}F_n = F_{2n}.$

**14.** Si consideri la successione  $a_1, a_2, a_3, \dots$  di numeri naturali così definita

$$\begin{cases} a_1 = 1, a_2 = 4; \\ a_{n+1} = a_n + 3a_{n-1} \quad \text{per } n \geq 2. \end{cases}$$

(i) Dimostrare che esistono delle costanti reali  $\alpha, \beta$  tali che, per ogni  $n \geq 1$ ,

$$a_n = \alpha \left( \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right)^n + \beta \left( \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \right)^n.$$

(ii) Determinare tutti i valori di  $n$  per cui  $a_n$  è un numero pari.

## 2.2 Combinatoria

**15.** Sia  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ .

(i) Calcolare il numero di terne ordinate  $(A, B, C)$  di sottoinsiemi di  $X$  a due a due disgiunti con  $A \cup B \cup C = X$ .

(ii) Dimostrare che il numero di terne ordinate  $(A, B, C)$  di sottoinsiemi di  $X$  tali che  $A \cup B \cup C = X$  è  $7^n$ .

**16.** Sia  $X$  l'insieme delle coppie  $(m, n)$  di interi primi tra loro con  $1 \leq m, n \leq 100$ . Dimostrare che  $|X| + 1 = 2 \sum_{k=1}^{100} \phi(k)$ .

**17.** Determinare la cardinalità dell'insieme  $X = \{1 \leq n \leq 10000 \mid (n, 18) = 6 \text{ e } n \equiv 2 \pmod{7}\}$ .

**18.** Determinare il numero dei divisori positivi di  $3^{40} \cdot 5^{25}$  che sono congrui ad 1 modulo 7.

**19.** Determinare tutti gli interi positivi  $n$  per i quali  $\phi(n) = 12$ .

**20.** Determinare il numero delle terne di interi  $(x, y, n)$  con  $0 \leq x, y < 50, n \in \mathbb{N}$  tali che  $x + y = n^2$ .

**21.** Determinare tutti gli interi positivi  $n$  per cui

$$\phi(n) = \frac{2}{5}n.$$

**22.** Per ogni intero positivo  $n$ , sia  $d(n)$  il numero dei divisori positivi di  $n$ .

- (i) Dimostrare che  $d(n) + \phi(n) \leq n + 1$  per ogni intero positivo  $n$ .
- (ii) Caratterizzare tutti gli interi positivi  $n$  per i quali  $d(n) + \phi(n) = n$ .

**23.** Determinare tutti i numeri naturali  $n \leq 120$  tali che  $(n, \phi(n)) = 3$ .

**24.** Determinare il numero di terne ordinate  $(a, b, c)$  di numeri interi che soddisfano simultaneamente le seguenti proprietà:  $1 \leq a, b, c \leq 60$ , esattamente due fra i numeri  $a, b, c$  sono pari e esattamente uno fra i numeri  $a, b, c$  è divisibile per 3.

**25.** Per ogni intero positivo  $m$ , sia  $\omega(m)$  il numero dei fattori primi distinti di  $m$ . Dimostrare che

$$\frac{\phi(m)}{m} \geq \frac{1}{\omega(m) + 1}.$$

**26.** Determinare il numero degli interi  $n$  che soddisfano simultaneamente le seguenti proprietà:  $1000 < n < 10000$ , nessuna delle cifre decimali di  $n$  è uguale a 9 e almeno due tra le cifre decimali di  $n$  sono uguali.

**27.** Per ogni numero intero  $n > 0$  sia  $S_n$  l'insieme delle permutazioni di  $\{1, \dots, n\}$ .

- (i) Determinare la cardinalità dell'insieme

$$\{f \in S_n \mid f(i) \leq i + 1 \text{ per } 1 \leq i \leq n\}.$$

- (ii) Dimostrare che la cardinalità di

$$\{f \in S_n \mid i - 1 \leq f(i) \leq i + 1 \text{ per } 1 \leq i \leq n\}$$

è uguale all'  $(n + 1)$ -esimo numero di Fibonacci.

**28.** Sia  $X = \{1, 2, \dots, 100\}$ .

(i) Determinare il numero dei sottoinsiemi di  $X$  con 3 elementi, almeno due dei quali congrui tra loro modulo 5.

(ii) Contare le applicazioni  $f : X \rightarrow X$  tali che  $f(n) \equiv n + 1 \pmod{5}$  per ogni  $n \in X$ .

**29.** Sia  $X = \{1, 2, \dots, 100\}$ . Calcolare la cardinalità dei seguenti insiemi

- (i)  $\{(x, y) \in X^2 \mid (xy, 6) = 1\}$ ;
- (ii)  $\{(x, y) \in X^2 \mid x < y + 6\}$ .

**30.** Sia  $X = \{1, 2, \dots, 100\}$ . Calcolare la cardinalità dei seguenti insiemi

- (i)  $A = \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ è iniettiva e } f^2(x) \equiv f(x) \pmod{2} \forall x \in X\}$ ;
- (ii)  $B = \{f : X \rightarrow X \mid f^2(x) = 1 \forall x \in X\}$ .

**31.** Calcolare la cardinalità dei seguenti insiemi

- (i)  $X = \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid 144000 \text{ e } d \text{ ha un numero pari di divisori}\}$ ;
- (ii)  $Y = \{d \in \mathbb{N} \mid d \mid 144000 \text{ e } d \text{ è un quadrato ma non è un cubo}\}$ .

Esercizi scelti di Algebra

Volume 1

Chirivì, R.; Del Corso, I.; Dvornicich, R.

2017, XII, 230 pagg. 1 figg., Softcover

ISBN: 978-88-470-3960-5