Vorwort

Eine *Zeitreihe* besteht aus zeitlich angeordneten Beobachtungen oder Messungen; dabei ist die Information nicht nur in den einzelnen Beobachtungswerten, sondern auch in deren zeitlicher Anordnung enthalten. Die *Zeitreihenanalyse* beschäftigt sich mit der Gewinnung und Konzentration von Information aus Zeitreihen und ist so gesehen ein Teilgebiet der Statistik. Wie in der Statistik im Allgemeinen liegt ein Schwerpunkt der Zeitreihenanalyse in der datengetriebenen Modellierung, wobei die den Daten unterlegten Modelle stochastisch sind. In der Zeitreihenanalyse sind diese Modelle „naturgemäß" oft dynamisch, d. h. sie beschreiben die *zeitliche* Entwicklung der untersuchten Größen. Die so gewonnenen Modelle können etwa zur Analyse, zur Prognose, zur Filterung oder zur Regelung verwendet werden. Die datengetriebene Modellierung ist aber nicht der einzige Zweig der Zeitreihenanalyse, so sind etwa die (nicht modellbasierte) Entstörung von Signalen oder die Extraktion von „features", wie etwa von verborgenen Zyklen, wichtige Teilgebiete.

Die Geschichte der Zeitreihenanalyse, genauer der Entwicklung und Anwendung von Methoden in der Zeitreihenanalyse (die über die Betrachtung mit dem „freiem Auge" hinausgehen), reicht bis zur Wende vom achtzehnten ins neunzehnte Jahrhundert zurück und wurde ausgelöst durch die Frage, ob in den Planetenbahnen (durch das Mehrkörperproblem erklärbare) Abweichungen von der elliptischen Form feststellbar sind. Das in diesem Zusammenhang entwickelte, sogenannte Periodogramm wurde dann auch bereits im neunzehnten Jahrhundert als Instrument zur Analyse von Konjunkturdaten verwendet. Moving-Average-(MA) und autoregressive (AR)-Prozesse wurden in den zwanziger Jahren des vorigen Jahrhunderts von G.U. Yule eingeführt. Die Theorie (vorerst univariater) stationärer Prozesse wurde in den dreißiger und vierziger Jahren des vorigen Jahrhunderts vor allem durch A.N. Kolmogorov, H. Cramér, N. Wiener und K. Karhunen entwickelt und dann für den multivariaten Fall z. B. durch Y.A. Rozanov fortgeführt. Diese Theorie stellt bis heute eine wesentliche Basis für die Analyse von Zeitreihen dar.

Ein Merkmal der Zeitreihenanalyse ist, dass ihre Entwicklung in unterschiedlichen Bereichen, wie der Ökonometrie, der Kontroll- und Systemtheorie, der Signalverarbeitung und der Statistik vorangetrieben wurde. Zu den wesentlichen Entwicklungen der letzten 75 Jahre gehören:

- Die in der Cowles Commission erfolgte Analyse des Problems der Identifizierbarkeit und der Maximum-Likelihood-Schätzung in multivariaten, „strukturellen" ARX-Systemen.
- Die vor allem von J. Tukey entwickelte nichtparametrische Spektralschätzung.
- Die Analyse von AR- und ARMA-Systemen (bzw. ARX und ARMAX) vor allem durch T.W. Anderson und E.J. Hannan. Das Buch von G.E. Box und G.M. Jenkins leitete dann eine große Verbreitung dieser Systeme in der Praxis ein. Anschließend erfolgte die entsprechende Erweiterung auf den multivariaten Fall. Dies ist in den Büchern von E.P. Caines, E.J. Hannan und M. Deistler, L. Ljung, H. Lütkepohl und G.C. Reinsel dargestellt.
- Die Analyse von Zustandsraumsystemen und damit in Verbindung das Kalman-Filter, vor allem durch R.E. Kalman.
- Die Einführung und Analyse von Verfahren zur Ordnungsschätzung, etwa durch H. Akaike und J. Rissanen.
- In der Ökonometrie erlangte in den letzten 30 Jahren die Analyse von integrierten und ko-integrierten (d. h. von speziellen nicht stationären) Prozessen eine große Bedeutung. Wichtige Beiträge hierzu stammen von C.W.J. Granger, R.F. Engle, P.C.B. Phillips und S. Johansen.
- Modelle zur Prognose bedingter Varianzen zur Risikoabschätzung mit Finanzzeitreihen (z. B. ARCH- und GARCH-Modelle) wurden von R.F. Engle eingeführt.
- Das große Gebiet der nichtlinearen Zeitreihenmodelle und ihrer Schätzung (siehe z. B. [36]) hat sich in den letzten 25 Jahren sehr stark entwickelt.

Das vorliegende Buch ist weit davon entfernt, alle wichtigen Teilgebiete der Zeitreihenanalyse zu behandeln. Es beschreibt Modelle der Zeitreihenanalyse und hier die wichtigste Teilklasse der linearen Modelle. Insbesondere werden stationäre Prozesse sowie Teilklassen, wie AR- und ARMA-Prozesse dargestellt. Der Schwerpunkt unserer Analyse liegt dabei im multivariaten Fall. Die „lineare" Theorie schwach stationärer Prozesse sowie lineare dynamische Systeme bilden auch heute noch den Kernbereich der Grundlagen der Zeitreihenanalyse, obwohl Nichtstationarität und Nichtlinearität von großer Bedeutung sind. Es ist ein Spezifikum der Zeitreihenanalyse – im Gegensatz zu anderen Bereichen der Statistik – dass eine genaue Analyse der Modelle für die statistische Analyse im engeren Sinne wichtig ist.

Unser Ziel ist, dass die Kenntnis des dargestellten Stoffes dem Leser eine solide Grundlage vermittelt, die es ihm ermöglicht, weite Teile der laufenden Literatur auf dem Gebiet der Zeitreihenanalyse zu verstehen – das Buch soll also in gewissem Sinne das hierzu erforderliche Kernwissen vermitteln.

Dieses Buch ist primär für Mathematiker und fortgeschrittene Studierende der Mathematik geschrieben. Wir meinen aber, dass es ebenso für Forscher aus den Feldern Ökonometrie, Finanzmathematik, Regeltechnik oder Signalverarbeitung zugänglich und nützlich ist. Vorausgesetzt werden Kenntnisse aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie und linearer Algebra sowie Basiskenntnisse aus Funktionalanalysis (Theorie der Hilbert-Räume) und Funktionentheorie.

Die Gliederung des Stoffes ist wie folgt: Kap. 1 gibt die grundlegenden Definitionen von (schwach) stationären Prozessen, deren Einbettung in den Hilbert-Raum der quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen sowie die Definition der entsprechenden Kovarianzfunktionen; letztere enthalten für viele Problemstellungen die wesentliche Information über den zugrunde liegenden stationären Prozess. Am Ende dieses Kapitels werden spezielle, wichtige Modellklassen für stationäre Prozesse diskutiert.

Das Kap. 2 beschäftigt sich mit der linearen Kleinst-Quadrate-Prognose stationärer Prozesse. Das zentrale Resultat ist hier die Wold-Zerlegung, die eine wesentliche Einsicht in die Struktur allgemeiner stationärer Prozesse erlaubt.

Während die Beschreibung stationärer Prozesse in den Kap. 1 und 2 im Zeitbereich erfolgt, behandelt Kap. 3 den Frequenzbereich. Zentrale Resultate sind hier die Spektraldarstellung der Kovarianzfunktion sowie des zugehörigen stationären Prozesses, die beide Fourier-Darstellungen sind. Aus den Spektraldarstellungen erhalten wir die spektrale Verteilungsfunktion bzw. die spektrale Dichte, die beide die gleiche Information über den zugrunde liegenden Prozess wie die Kovarianzfunktion enthalten. Lineare dynamische Transformation von stationären Prozessen entsprechen durch diese Fourier-Darstellungen einer Multiplikation von Funktionen und sind daher oft einfacher darzustellen und zu interpretieren. Dieses Kapitel ist das mathematisch anspruchsvollste und die Resultate werden in den folgenden Kapitel verwendet. Ein Verständnis der Folgekapitel ist jedoch auch dann möglich, wenn die Beweise der Spektraldarstellungen nicht in allen Details durchgearbeitet werden.

Das nächste Kap. 4 beschreibt lineare, dynamische Transformationen stationärer Prozesse im Zeit- und Frequenzbereich sowie die entsprechende Transformation der zweiten Momente. Solche linearen Transformationen sind wichtige Modelle für reale Systeme und dienen zur Konstruktion von Klassen stationärer Prozesse wie z. B. AR- und ARMA-Prozesse. In diesem Zusammenhang werden auch die Lösungen von linearen stochastischen Differenzengleichungen behandelt. Schließlich wird noch das Wiener-Filter diskutiert, das es erlaubt, einen stationären Prozess durch eine lineare Transformation eines zweiten Prozesses im Kleinst-Quadrate-Sinne möglichst gut zu approximieren.

Kap. 5 behandelt AR-Systeme und AR-Prozesse, die wichtigste Modellklasse der Zeitreihenanalyse. Sie erlauben es, jeden regulären Prozess beliebig genau mit endlich vielen Parametern zu beschreiben und ihre Schätzung und ihre Prognose sind besonders einfach. Über den stationären Fall hinaus sind AR-Systeme auch Modelle für integrierte und kointegrierte Prozesse, die in der Ökonometrie eine große Bedeutung erlangt haben.

In Kap. 6 erörtern wir ARMA-Modelle und ARMA-Prozesse. Wir zeigen, dass die Klasse der ARMA-Prozesse genau die Klasse der stationären Prozesse mit rationaler spektraler Dichte ist. Wie im AR-Fall kann jeder reguläre, stationäre Prozess beliebig genau durch einen ARMA-Prozess approximiert werden. Dabei sind ARMA-Prozesse flexibler, sodass oft weniger Parameter zur Approximation notwendig sind. Allerdings ist die Struktur der Klasse der ARMA-Prozesse erheblich komplexer als im AR-Fall. Es tritt ein sogenanntes Identifizierbarkeitsproblem auf und die Beziehung zwischen den zweiten Momenten und den ARMA-Parametern ist i. Allg. nicht, wie im AR-Fall, durch ein lineares Gleichungssystem gegeben. Daher ist die Schätzung der ARMA-Parameter (die hier nicht behandelt wird) weitaus diffiziler als im AR-Fall.

Kap. 7 behandelt Zustandsraumsysteme, die z. B. in der Regeltechnik von zentraler Bedeutung sind. Lineare Zustandsraumsysteme mit weißem Rauschen als Input sind eine alternative Darstellung von ARMA-Prozessen. Es wird gezeigt, dass unter geeigneten Voraussetzungen ARMA- und Zustandsraumsysteme die Klasse aller Prozesse mit rationalen Spektren beschreiben. Beide Darstellungen führen auch unmittelbar zur Wold-Darstellung. Der letzte Abschnitt diskutiert das Kalman-Filter, einen ausgesprochen wichtigen Algorithmus, speziell für die Approximation des unbeobachteten Zustandes, sowie zur Prognose und Filterung.

Wie schon zuvor erwähnt, werden in diesem Buch wichtige Problemkreise nicht angesprochen. Es fehlen wichtige „lineare" Modelle, bei denen zusätzlich beobachtete Inputs vorliegen, wie z. B. ARX-Modelle. Ferner fehlt die Analyse von strukturellen Modellen, bei denen durch eine zugrunde liegende Theorie bestimmte A-priori-Restriktionen an die Parameter vorliegen, wie z. B. strukturelle AR-Modelle (SVAR), die gegenwärtig in der Ökonometrie intensiv diskutiert werden. Es fehlen Modelle der linearen dynamischen Faktoranalyse und dynamische kanonische Korrelationen, grafische Zeitreihenmodelle sowie eine Behandlung der Granger-Kausalität. Auch auf die große Klasse der nichtlinearen Modelle, wie z. B. nichtlineare AR(X)-Modelle oder ARCH/GARCH-Modelle gehen wir in diesem Buch nicht ein.

Das Buch beschränkt sich auf Modell- und Strukturtheorie, die für die Zeitreihenanalyse von großer Wichtigkeit sind, behandelt aber nicht die Schätzung und Inferenz im engeren Sinne. Insbesondere behandeln wir weder die Schätzung von Erwartungswert, der Kovarianzfunktion, der spektralen Dichte noch die Schätzung von AR-, ARMA- oder Zustandsraumsystemen.

Als Motivation für den Leser des vorgelegten Buches mag die Tatsache dienen, dass die Zeitreihenanalyse ein faszinierendes Gebiet mit weit gestreuten Anwendungen und einer mathematisch höchst nichttrivialen Theorie ist. Zu den Anwendungen zählen etwa die Prognose oder die Saisonbereinigung ökonomischer Variablen, das Design von Reglern, etwa für chemische Prozesse, die Übertragung und Entstörung von Sprachsignalen, die Analyse von Signalen aus der Radioastronomie oder die Analyse von Elektroenzephalogrammen.

Teile des Buches basieren auf Vorlesungen, die wir an der TU Wien, am Institut für höhere Studien Wien und am CERGE in Prag gehalten haben. Wir danken auch den Kollegen Otmar Scherzer (Universität Wien) und Rafael Kawka, Oliver Stypka und Martin Wagner (TU Dortmund) für wertvolle Kommentare.

http://www.springer.com/978-3-319-68663-9

Modelle der Zeitreihenanalyse
Deistler, M.; Scherrer, W.
2018, X, 159 S. 10 Abb., 9 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-319-68663-9
A product of Birkhäuser Basel