

Folgen und Reihen

Agenda. Folgen spielen in den Wirtschaftswissenschaften eine wichtige Rolle und bilden die Grundlage für die Theorie der *Zeitreihen*. Das Lernziel dieses Kapitels ist das Verständnis von Folgen, der Art und Weise sie zu beschreiben: *rekursiv* und *explizit*, und einige wichtige Typen von Folgen kennenzulernen. Die Betrachtung von Summen über eine gewisse Anzahl von Folgengliedern ergibt sich aus einfachen ökonomischen Fragestellungen und führt so auf natürliche Weise zum Konzept der *Reihen*.

Mit Folgen von Zahlen haben wir nahezu täglich zu tun. Viele Statistiken basieren auf einer Folge von Zahlen: beispielsweise Tageshöchsttemperaturen, tägliche Niederschlagsmengen, tägliche Aktienkurse, die quartalsweise Arbeitslosenquote, die jährlichen Kontostände von Giro- und Rentenkonten usw. Betrachten wir beispielsweise die Folge der maximalen Tagestemperatur in Berlin beginnend am 1.1.2011: 3.9° , 1.8° , -0.5° , 0.1° , -2.1° , 4.1° , 7.2° , 9.4° , 9.4° , ... Diese geht theoretisch unendlich weiter, wenn wir einmal die endliche Lebensdauer unseres Planeten vernachlässigen.

2.1 Folgen

Eine *Folge* ist eine unendlich lange Liste $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ von reellen Zahlen, also eine Abbildung $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Dabei nutzen wir die *Indexschreibweise* a_i für $a(i)$. i ist dabei der *Index* von a_i . Die einzelnen Elemente a_i nennen wir *Folgenglieder*. Im Beispiel der maximalen Tagestemperatur wäre also $a_0 = 3.9$, $a_1 = 1.8$, $a_2 = -0.5$ usw.

Wir erlauben Folgen auch mit einem anderen ganzzahligen Index zu beginnen, das heißt wir lassen auch Folgen vom Typ $a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, \dots$ oder $b_7, b_8, b_9, \dots$ zu. Als abkürzende Schreibweise für eine Folge $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ schreiben wir $(a_k)_{k \geq n}$.

Wir können Folgen auch *explizit* mittels ihres Index vollständig definieren. Beispielsweise

$$a_k = 3 \cdot k + 5 \text{ für } k \geq 0.$$

Das ergibt also die Folge 5, 8, 11, 14, 17, 20, ... Oder wir definieren

$$b_k = 7 \cdot 2^k \text{ für } k \geq 0.$$

Damit erhalten wir die Folge 7, 14, 28, 56, 112, 224, ...

Arithmetische Folgen

Die Folge $(a_k)_{k \geq 0}$ gegeben durch $a_k = 3 \cdot k + 5$ für $k \geq 0$ hat die Eigenschaft, dass die Differenz $a_{k+1} - a_k$ zweier aufeinander folgender Folgenglieder konstant ist. Folgen mit dieser Eigenschaft nennen wir *arithmetisch*. Im Beispiel der Folge $a_k = 3 \cdot k + 5$ beträgt die Differenz

$$a_{k+1} - a_k = 3(k+1) + 5 - (3k+5) = 3.$$

Ist $(a_k)_{k \geq 0}$ eine arithmetische Folge mit $a_{k+1} - a_k = d$, so gilt

$$a_k = d \cdot k + a_0 \text{ für alle } k \geq 0.$$

Lineare Verzinsung

Betrachten wir ein Startkapital von x_0 . Dieses soll mit dem Zinssatz i *einfach* bzw. *linear* verzinst werden. Das heißt, dass als Berechnungsgrundlage immer das Startkapital herangezogen wird. Es kommen also jeweils zum Jahresende die Zinsen $i \cdot x_0$ hinzu und es ergibt sich die arithmetische Folge

$$x_n = x_0 + n \cdot i \cdot x_0.$$

Rekursives und explizites Bildungsgesetz

Bei der Beschreibung von Folgen unterscheidet man zwischen rekursiven und expliziten Bildungsgesetzen. Wir haben gesehen, dass eine arithmetische Folge vollständig durch den Wert von a_0 und das *rekursive Bildungsgesetz*

$$a_{k+1} = a_k + d \text{ für alle } k \geq 0$$

gegeben ist. Startet man mit a_0 , so berechnet sich a_1 durch $a_1 = a_0 + d$. Anschließend lässt sich $a_2 = a_1 + d$ bestimmen und so weiter.

Im Gegensatz dazu handelt es sich bei einem *expliziten Bildungsgesetz* um eine Vorschrift zur Berechnung eines beliebigen Folgengliedes ohne alle vorherigen kennen zu müssen. Im Falle der arithmetischen Folgen also um die Vorschrift

$$a_k = d \cdot k + a_0 \text{ für alle } k \geq 0.$$

Es sei bemerkt, dass für viele Folgen weder ein rekursives noch ein explizites Bildungsgesetz existiert.

Geometrische Folgen

Die Folge $(b_k)_{k \geq 0}$ gegeben durch $b_k = 7 \cdot 2^k$ für $k \geq 0$ hat die Eigenschaft, dass der Quotient $\frac{b_{k+1}}{b_k}$ zweier aufeinander folgender Folgenglieder gleich einem konstanten Wert q – in diesem Fall $q = 2$ – ist. Folgen mit dieser Eigenschaft nennen wir *geometrisch*. Ist allgemein $(b_k)_{k \geq 0}$ eine geometrische Folge mit $\frac{b_{k+1}}{b_k} = q$, so gilt das rekursive Bildungsgesetz

$$b_{k+1} = q \cdot b_k \text{ für alle } k \geq 0.$$

Als explizites Bildungsgesetz erhalten wir in diesem Fall

$$b_k = b_0 \cdot q^k \text{ für alle } k \geq 0.$$

Zinseszins

Ein prominentes Beispiel ist das des Zinseszins wie bereits auf Seite 18 diskutiert. Der Kontostand eines jährlich mit dem festen Zinssatz i verzinsten Startkapitals von x_0 berechnet sich im Jahre n durch:

$$x_n = x_0(1 + i)^n.$$

Dies ist eine geometrische Folge mit dem *Zinsfaktor* $q = 1 + i$.

2.2 Partialsummen

Gelegentlich summieren wir die Glieder einer Folge sukzessive auf und erhalten so eine neue Folge: die Folge der Partialsummen. Wenn beispielsweise a_k den Gewinn eines Unternehmens im k -ten Jahr seit seines Bestehens angibt, so entspricht die Summe $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ den bis zum einschließlich n -ten Jahr erwirtschafteten Gesamtgewinn.

Die n -te *Partialsumme* s_n einer Folge $(a_k)_{k \geq 0}$ ist gegeben durch die Summe

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

Wir erhalten also eine neue Folge $(s_n)_{n \geq 0}$. Können wir für diese Folge wieder eine Abbildungsvorschrift finden, die es erlaubt, das n -te Folgenglied s_n direkt zu bestimmen ohne die Summe $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ ausrechnen zu müssen? In einigen einfachen Fällen können wir dies, insbesondere für arithmetische und geometrische Folgen.

Summenschreibweise

Ist $(a_k)_{k \geq 0}$ eine Folge, so schreiben wir für die n -te Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

Das Symbol $\sum_{k=0}^n a_k$ lesen wir als “die Summe von k gleich 0 bis n über a_k ”.

Partialsummen von arithmetischen Folgen

Betrachten wir zunächst die vielleicht einfachste nicht-triviale arithmetische Folge gegeben durch $a_k = k$ für $k \geq 0$, also die Folge $0, 1, 2, 3, \dots$. Die n -te Partialsumme s_n ist also die Summe

$$s_n = 0 + 1 + 2 + \dots + n.$$

Diese Summe können wir mit Hilfe eines Tricks bestimmen. Stellen wir uns ein Schachbrett mit $n \times n$ Feldern vor. Stellen wir einen Turm an den Anfang der ersten Zeile, zwei Türme an den Anfang der zweiten Zeile bis hin zu n Türmen in der n -ten Zeile, so entspricht die Partialsumme s_n doch der Gesamtzahl der Türme auf dem Schachbrett. Betrachten wir eine anzahlmäßig identische Aufstellung an der Diagonalen gespiegelt, so sehen wir durch Summenbildung wie in Abbildung 2.1 gezeigt, dass $2s_n = n^2 + n$, also

$$s_n = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

gilt.

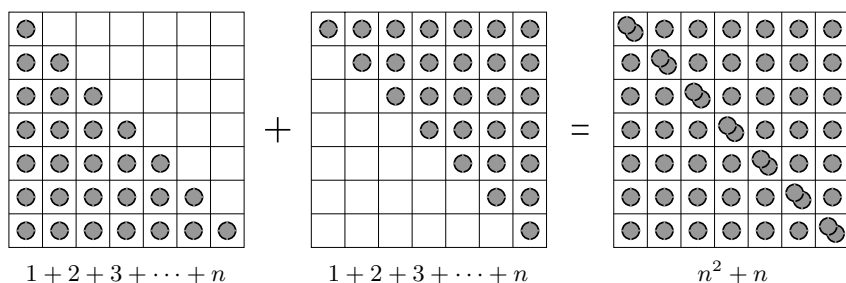


Abb. 2.1. Türme auf einem Schachbrett zeigen $2s_n = n^2 + n$.

Wenden wir uns nun einer allgemeinen arithmetischen Folge $a_k = d \cdot k + a_0$ zu. In diesem Fall ergibt sich

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 + a_1 + \dots + a_n \\ &= (d \cdot 0 + a_0) + (d \cdot 1 + a_0) + \dots + (d \cdot n + a_0) \\ &= d \cdot (0 + 1 + \dots + n) + (n+1)a_0 \\ &= d \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)a_0 \\ &= (n+1) \left(\frac{d \cdot n}{2} + a_0 \right). \end{aligned}$$

Beispiel

Schauen wir uns dies in einem Beispiel an. Sei $a_k = 3 \cdot k + 5$ für $k \geq 0$. Dann beginnt die Folge $(a_k)_{k \geq 0}$ offenbar mit 5, 8, 11, 14, ... und die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n \geq 0}$ demnach mit 5, 13, 24, 38, ... Vergleichen wir dies mit den Werten

$$s_n = (n+1) \left(\frac{3 \cdot n}{2} + 5 \right).$$

Es ergibt sich

$$s_0 = (0+1) \left(\frac{3 \cdot 0}{2} + 5 \right) = 5,$$

$$s_1 = (1+1) \left(\frac{3 \cdot 1}{2} + 5 \right) = 13,$$

$$s_2 = (2+1) \left(\frac{3 \cdot 2}{2} + 5 \right) = 24,$$

$$s_3 = (3+1) \left(\frac{3 \cdot 3}{2} + 5 \right) = 38.$$

Linearer Gewinnzuwachs

Beschreibt die Folge $(a_k)_{k \geq 0}$ den Gewinn eines Unternehmens und gehen wir davon aus, dass der Gewinn jährlich um den Wert d zunimmt, so beträgt der insgesamt erwirtschaftete Gewinn bis zum einschließlich n -ten Jahr

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = (n+1) \left(\frac{d \cdot n}{2} + a_0 \right).$$

Eine kleine Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} s_n &= (n+1) \left(\frac{d \cdot n}{2} + a_0 \right) = \frac{n+1}{2} (d \cdot n + 2a_0) \\ &= \frac{n+1}{2} (d \cdot n + a_0 + a_0) \\ &= \frac{n+1}{2} (a_n + a_0). \end{aligned}$$

Eine Formel, die gelegentlich nützlich sein kann, wenn der Gewinn a_0 zu Beginn und a_n nach n Jahren bekannt ist, ohne dass aber d bekannt ist.

Betrachten wir ein Beispiel: Ein kleines Familienunternehmen habe im Gründungsjahr 2000 einen Gewinn von $a_0 = 75\,000$ Euro erwirtschaftet. Im Jahr 2010 betrage der Gewinn bereits $a_{10} = 135\,000$ Euro. Unter der Annahme eines linearen Gewinnzuwachses wurde in diesem Zeitraum demnach ein Gesamtgewinn von

$$s_{10} = \frac{10+1}{2} (135\,000 + 75\,000) = 1\,155\,000$$

Euro erwirtschaftet.

Partialsummen von Quadratzahlen

Wir haben gesehen, dass

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

gilt. Für die Summe der ersten n Quadratzahlen gibt es die vergleichbar einfache Formel:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

welche ebenfalls durch geschickte mehrfache Anordnung der Zahlen $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2$ hergeleitet werden kann.

Partialsummen von geometrischen Folgen

Sei $a_k = a \cdot q^k$ für $k \geq 0$ und $q \neq 1$ gegeben, wobei $a = a_0$ gilt. Betrachten wir die Partialsumme s_n :

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ &= a \cdot q^0 + a \cdot q^1 + a \cdot q^2 + \cdots + a \cdot q^{n-1} + a \cdot q^n \\ &= a \cdot (q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n). \end{aligned}$$

Nun machen wir die einfache Beobachtung, dass dieser Ausdruck die meisten Terme gemein hat mit $q \cdot s_n$:

$$\begin{aligned} q \cdot s_n &= q \cdot a \cdot (q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n) \\ &= a \cdot (q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q^{n+1}). \end{aligned}$$

Das heißt, die Differenz $q \cdot s_n - s_n$ ist

$$\begin{aligned} q \cdot s_n - s_n &= a \cdot (q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q^{n+1}) \\ &\quad - a \cdot (q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n) \\ &= a \cdot (q^{n+1} - q^0) \\ &= a \cdot (q^{n+1} - 1). \end{aligned}$$

Wir erhalten also mit Hilfe von $q \cdot s_n - s_n = s_n \cdot (q - 1)$:

$$s_n = a \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Schauen wir uns dies am einfachen Beispiel der Folge $a_k = 2^k$ für $k \geq 0$ an. In diesem Fall ist also $a = a_0 = 1$ und $q = 2$. Die Folge $(a_k)_{k \geq 0}$ beginnt

dann mit $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$ und die Folge der Partialsummen entsprechend mit $1, 3, 7, 15, 31, 63, \dots$. Vergleichen wir dies mit

$$s_n = a \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1,$$

so erhalten wir $s_0 = 2^1 - 1 = 1$, $s_1 = 2^2 - 1 = 3$, $s_2 = 2^3 - 1 = 7$ usw.

Aggregierter Zinseszins

Fragen wir uns, wieviel Zinsen auf einem Festgeldkonto nach n Jahren insgesamt hinzugekommen sind, so ist dies in natürlicher Weise eine Partialsummenfrage. Wir wissen, dass der Kontostand im Jahr n durch

$$x_n = x_0(1 + i)^n$$

gegeben ist. Für das Jahr n fallen also Zinsen in Höhe von

$$z_n = i \cdot x_n = i \cdot x_0(1 + i)^n$$

für alle $n \geq 0$ an. Die ist eine geometrische Folge. Nach n Jahren, also im Jahr $n + 1$ ergibt sich für den bis dahin aggregierten Zinseszins also die Partialsumme

$$\begin{aligned} s_n &= z_0 + z_1 + \dots + z_n = i \cdot x_0 \frac{(1 + i)^{n+1} - 1}{(1 + i) - 1} \\ &= i \cdot x_0 \frac{(1 + i)^{n+1} - 1}{i} = x_0(1 + i)^{n+1} - x_0 = x_{n+1} - x_0. \end{aligned}$$

Es stellt sich also – wenig überraschend – heraus, dass die Partialsumme genau dem Kontostand im Jahr $n + 1$ abzüglich des initialen Kontostandes entspricht.

Geometrischer Gewinnzuwachs

Beschreibt die Folge $(a_k)_{k \geq 0}$ den Gewinn eines Unternehmens und gehen wir davon aus, dass der Gewinn jährlich um einen gewissen Prozentsatz i steigt, also mit dem Faktor $q = 1 + i$ zunimmt, so beträgt der insgesamt erwirtschaftete Gewinn bis zum einschließlich n -ten Jahr

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = a_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

2.3 Reihen

Das Paradoxon von Zenon

Wir beginnen das Thema Reihen mit dem Paradoxon von Achilles und der Schildkröte, welches von dem griechischen Philosophen Zenon (ca. 490 v. Chr.

- ca. 430 v.Chr.) stammt. Er beschäftigte sich mit Fragen des Kontinuums und der Teilbarkeit, insbesondere im Zusammenhang mit dem Verhältnis von Raum, Zeit und Bewegung. Das Paradoxon besagt, dass der schnelle Läufer Achilles eine Schildkröte bei einem Rennen niemals einholen könne, sofern ihr ein Vorsprung gewährt werde. Sein Argument beruht darauf, dass Achilles ja zunächst die Strecke zurücklegen müsse, die als Vorsprung gewährt wurde. In dieser Zeit hat die Schildkröte aber bereits einen neuen Vorsprung erlaufen, der wiederum erst einmal von Achilles zurückgelegt werden müsse usw. Das heißt, Zenon kann die Schildkröte niemals einholen.

Versuchen wir dies mathematisch zu fassen. Sagen wir der Einfachheit halber, dass Achilles sich mit 1 m/s und die Schildkröte mit $\frac{1}{2}$ m/s fortbewegt. Ferner habe die Schildkröte einen Vorsprung von 1 m. Berechnen wir die Zeit, die Achilles jeweils braucht, um den letzten Vorsprung einzuholen. Zu Beginn braucht Achilles $a_0 = 1$ Sekunde, um den Startvorsprung der Schildkröte von 1 m einzuholen. In der Zeit bewegt sich die Schildkröte um einen halben Meter fort. Dies ist also ihr neuer Vorsprung. Achilles benötigt nun $a_1 = \frac{1}{2}$ s, um diesen Vorsprung einzuholen. In dieser Zeit ist die Schildkröte $\frac{1}{4}$ m weiter gelaufen. Die Zeiten, die Achilles benötigt, um die folgenden Vorsprünge der Schildkröte einzuholen sind also $a_2 = \frac{1}{4}$ s, $a_3 = \frac{1}{8}$ s usw. Wir haben es also mit der geometrischen Folge $a_k = (\frac{1}{2})^k$ zu tun. Die Zeit, die Achilles für $n+1$ Schritte benötigt, ist also die Partialsumme

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Zenons Paradoxon beruht nun auf der Annahme, dass diese Summe mit steigendem n unbeschränkt wächst – da ja immer wieder etwas positives hinzuaddiert wird – und Achilles dementsprechend die Schildkröte nicht in endlicher Zeit einholen kann.

Wir haben aber indes berechnet, welchen Wert die Summe s_n hat:

$$s_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{1}{2}\right) - 1}.$$

Nun wird für große n der Bruch $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$ immer kleiner und im Grenzwert erhalten wir für die unendliche Summe

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \frac{0 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2.$$

Mit anderen Worten holt Achilles die Schildkröte in 2 Sekunden ein. Das ist wohl richtig, denn in dieser Zeit legt Achilles zwei Meter zurück und die Schildkröte einen Meter. Zusammen mit dem Vorsprung der Schildkröte befinden sich nach 2 Sekunden also beide auf Meter 2 der Rennbahn.

Unendliche Reihen

Sei $(a_k)_{k \geq 0}$ eine Folge. Wir bezeichnen die dazugehörige Folge der Partialsummen $(s_n)_{n \geq 0}$ auch als *unendliche Reihe*. Strebt die Folge $(s_n)_{n \geq 0}$ gegen

einen Wert s , so schreiben wir auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s.$$

Wir sagen, dass die unendliche Reihe *konvergiert*.

Wir kennen ein prominentes Beispiel einer konvergenten Reihe: sei q eine Zahl zwischen -1 und 1 , d.h. es gilt $-1 < q < 1$ und a beliebig. Dann gilt für die Partialsummen der Folge $a_k = a \cdot q^k$:

$$s_n = a \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Für große n wird q^{n+1} wieder beliebig klein und wir erhalten

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a \cdot q^k = \frac{a}{1 - q}.$$

2.4 Aufgaben

Lösungen finden sich ab Seite 211.

- Die Folge $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, 2, 6, 18, \dots$
 - ☐ ist arithmetisch.
 - ☐ ist geometrisch.
 - ☐ folgt dem expliziten Bildungsgesetz $a_k = 3 \cdot k + \frac{2}{9}$.
 - ☐ folgt dem expliziten Bildungsgesetz $a_k = \frac{2}{9} 3^k$.
- Die Bildungsvorschrift $a_k = \frac{1}{4}k + \frac{1}{2}$, $k \geq 0$,
 - ☐ definiert eine arithmetische Folge.
 - ☐ definiert eine geometrische Folge.
 - ☐ ist ein explizites Bildungsgesetz.
 - ☐ ist ein rekursives Bildungsgesetz.
- Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n \geq 0}$ mit den ersten Folgengliedern

$$\frac{25}{16}, \frac{5}{4}, 1, \frac{4}{5}, \frac{16}{25}, \frac{64}{125} \dots$$

und $(b_n)_{n \geq 0}$ mit den ersten Folgengliedern

$$-4.2, -2.4, -0.6, 1.2, 3, \dots$$

und $(c_n)_{n \geq 0}$ mit den ersten Folgengliedern

$$-\frac{49}{9}, \frac{7}{3}, -1, \frac{3}{7}, -\frac{9}{49}, \frac{27}{343}, \dots$$

Angenommen es handelt sich jeweils um arithmetische oder geometrische Folgen.

- a) Welche Folge ist arithmetisch und welche Folge ist geometrisch?
 - b) Geben Sie das jeweilige rekursive Bildungsgesetz an.
 - c) Geben Sie das jeweilige explizite Bildungsgesetz an.
 - d) Welches Monotonieverhalten gemäß der Definition auf Seite 28 weisen die jeweiligen Folgen auf?
4. Angenommen der Kontostand eines Bankkontos betrüge im Ausgangsjahr $x_0 = 1000$ Euro und nach 12 Jahren linearer Verzinsung $x_{12} = 1360$ Euro. Wie groß war der Zinssatz i ?
 5. Angenommen der Kontostand eines Bankkontos betrüge im Ausgangsjahr $x_0 = 1000$ Euro und nach 12 Jahren Verzinsung mit Zinseszins $x_{12} = 1360$ Euro. Wie groß war der (durchschnittliche) Zinssatz i ?
 6. Ein Konto mit einem Ausgangskontostand von $x_0 = 1300$ Euro werde mit einem festen Zinssatz von $i = 3.5\%$ linear verzinst. Nach wieviel Jahren beträgt der Kontostand mindestens den Wert von 2000 Euro?
 7. Ein Konto mit einem Ausgangskontostand von $x_0 = 1300$ Euro werde mit einem festen Zinssatz von $i = 3.5\%$ mit Zinseszins verzinst. Nach wieviel Jahren beträgt der Kontostand mindestens den Wert von 2000 Euro?
 8. Ein Unternehmen verzeichnete im Jahr 1995 einen Gewinn von 1.4 Millionen Euro. Bei linearem Gewinnzuwachs stieg der Gewinn bis zum Jahr 2010 auf 2 910 500 Euro an. Wie groß war der Gesamtgewinn über diesen Zeitraum?
 9. Ein Unternehmen verzeichnete im Jahr 1995 einen Gewinn von 1.4 Millionen Euro. Der Gewinn stieg jährlich um einen festen prozentualen Satz bis auf 2 910 500 Euro im Jahr 2010 an. Um wieviel Prozent stieg der Gewinn jährlich? Wie groß war der Gesamtgewinn über diesen Zeitraum?
 10. Angenommen Sie besitzen einen Bootssteg, an dem sie einzelne Plätze zu einer jährlichen Pacht von 250 Euro verpachten. Eine Pächterin möchte ihren Platz gerne kaufen. Unter der Annahme, dass Sie die Miete in der Zukunft nicht erhöhen und Sie auf Dauer $i = 2\%$ Zinsen am Markt bekommen, wieviel muss die Pächterin wenigstens bieten, um Sie von der Idee zu überzeugen?

Wirtschaftsmathematik einfach erklärt

Eine kurze Einführung in die notwendigen Grundlagen
de Longueville, M.

2018, XV, 264 S. 65 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-10602-7