Stellenwertsysteme und Teilbarkeitsregeln

2

2.1 Frühe Zahlendarstellungen

Die ältesten schriftlichen Zahlendarstellungen sind mindestens 30.000 Jahre alt. Damals haben Menschen Zahlen geschrieben, indem sie die entsprechende Anzahl von Steinchen gelegt haben oder die entsprechende Anzahl von Kerben in einen Ast geschnitten haben. All diese Zeugnisse sind natürlich alle verloren. Glücklicherweise hat man aber Knochen aus dieser Zeit gefunden, die eine große Zahl von Einkerbungen enthalten. Berühmt sind der 30.000 Jahre alte Wolfsknochen aus Dolní Vestonice, einer gut dokumentierten Mammutjägersiedlung in Tschechien, auf dem die Zahlen 25 und 30 dargestellt sind (siehe Abb. 2.1), und der geheimnisvolle Ishango-Knochen (siehe Abschn. 1.6).

Die Darstellung einer Zahl durch die entsprechende Anzahl von Strichen liegt zwar auf der Hand, wird aber bald sehr unübersichtlich. Daher wurde an vielen Stellen der Welt das Prinzip der *Bündelung* erfunden. Man fasst jeweils fünf Zeichen zu einem „Bündel" zusammen. Das kann dadurch geschehen, dass man nach fünf Strichen eine Lücke lässt, oder dadurch, dass man den fünften Strich quer durch die ersten vier zieht, oder dadurch, dass man für fünf Striche ein neues Symbol schreibt. Auch heute ist das Verfahren der Strichlisten noch gängig, sei es zur Auszählung von Stimmen oder zum Festhalten der Anzahl der genossenen Getränke auf einem Bierdeckel.

Die Tatsache, dass man durchgängig Fünferbündelungen findet, hat vermutlich zwei Gründe: Zum einen spielen die fünf Finger an einer Hand eine entscheidende Rolle; denn wenn man mit den Fingern zählt, entsteht nach Fünf automatisch eine Zäsur. Zum anderen ist Fünf eine Zahl von Objekten, die wir Menschen noch auf einen Blick erfassen können, auch wenn die Objekte nicht in einem Muster angeordnet sind.

Eine frühe Erfahrung beim Zählen ist die Zeiterfahrung, insbesondere die Erfahrung von Tagen, Monaten und Jahren. Die Grunderfahrung ist dabei die der Wiederholung. Irgendwann wurde den Menschen bewusst, dass der Sonnaufgang und Sonnenuntergang nicht jedes Mal überraschend kommt, sondern dass diese in vergleichsweise regelmäßigen Rhythmen erfolgen. So entstand die Vorstellung eines Tages.

A. Beutelspacher, *Zahlen, Formeln, Gleichungen*,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-16106-4_2

Abb. 2.1 Der Wolfsknochen. (Foto: Mathematikum Gießen e. V., Fotograf Rolf K. Wegst)

Zu der Zeit, als die ersten Zahlensysteme entstanden sind, also vor vielen tausend Jahren, war der sich wandelnde Mond eine herausragende Erscheinung am Himmel. Es ist naheliegend, die Anzahl der Tage eines Mondzyklus, zum Beispiel von Neumond zu Neumond zu bestimmen.

Etwas aufwändiger, aber auch gut machbar, ist die Bestimmung der Anzahl der Tage eines Jahres. Man beobachtet, an welcher Stelle die Sonne auf- beziehungsweise untergeht. Aber 365 ist eine viel zu große Zahl, als dass man sie über eine Strichliste sinnvoll erfassen kann. Daher lag es nahe, das Jahr mit Hilfe der Mondzyklen („Monate") in Abschnitte einzuteilen. Anders gesagt, man versuchte, die Tage zu noch überschaubaren Einheiten zusammenzufassen.

Die Einbeziehung einer größeren Einheit, der Monate, hat viele, offensichtliche Vorteile, es ergeben sich aber auch neue Herausforderungen. Man muss nämlich das Verhältnis der kleinen und großen Einheiten klären: Wie viele Tage bilden einen Monat? Wie passen die Monate in ein Jahr? An welchem Tag in welchem Monat liegt der 100. Tag des Jahres? Und so weiter. Bei der Erstellung eines Kalenders ist die Herausforderung besonders groß, da man die 365,242 Tage des Jahres nicht sinnvoll auf exakt gleichlange Monate aufteilen kann.

Die Versuche, einen vernünftigen Kalender zu entwickeln, dienten sicher als Motivation für Zahlensysteme. Da dies von Menschen geschaffene Systeme sind, brauchte man dabei keine Rücksicht auf empirische Zahlen nehmen, sondern konnte normativ versuchen, das beste Zahlensystem zu erfinden. Insbesondere konnte man die Einheiten so wählen, dass alles „passt". Bei den Babyloniern (ca. 2000 v. Chr.) bestand die größere Einheit aus 60 kleinen, bei den Maya (spätestens um Christi Geburt) aus 20, und die Inder haben etwa im 3. Jahrhundert das Dezimalsystem erfunden, bei dem die größere Einheit 10 ist.

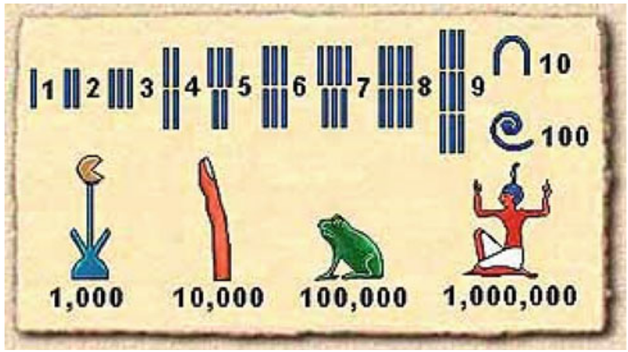


Abb. 2.2 Die ägyptischen Zahlzeichen. (Quelle: http://www.spasslernen.de/geschichte/ges2.htm)

Ägyptische Zahlen

Die Ägypter benutzen spätestens 2000 v. Chr. ein ausgefeiltes Zahlensystem. Es besteht aus Zeichen für die Zahlen 1, 10, 100, 1000, 10.000, 100.000 und 1.000.000 (siehe Abb. 2.2)

Es handelt sich um ein *additives* Zahlensystem. Das bedeutet, dass man die Zahlzeichen zusammenstellt und ihre Werte addiert, um die dargestellte Zahl zu erhalten. Die Zahl 47 wird also als ∩∩∩∩IIIIIII geschrieben.

Die Ägypter verfügten über eine ausgeklügelte Multiplikationsmethode. Sie beruht alleine auf dem Verdoppeln und Addieren. Zum Beispiel ist die Aufgabe $13 \cdot 12$ überliefert. Zunächst verdoppelt man die Zahl 1 so oft, bis man aus den einzelnen Potenzen die erste Zahl zusammensetzen kann:

1	
2	
4	
8	

Die Zahl 13 ergibt sich als Summe der fettgedruckten Zahlen. In der zweiten Spalte verdoppelt man jeweils die zweite Zahl der Aufgabe:

1	**12**
2	24
4	**48**
8	**96**

Das Ergebnis ergibt sich als Summe derjenigen Zahlen der zweiten Spalte, bei denen die Zahlen in der ersten Spalte fett gedruckt sind. In unserem Beispiel ist das Ergebnis also $12 + 48 + 96 = 156$.

Zur Festigung des Gelernten 2.1.1

Berechnen Sie mit dieser Methode $17 \cdot 23$.

Später hat man diese Methode so weiterentwickelt, dass sie rein mechanisch durchzuführen ist. Die (kleine) Schwierigkeit der ägyptischen Methode besteht in der Teil-Aufgabe, die erste Zahl als Summe von Zweierpotenzen darzustellen ($13 = 1 + 4 + 8$). Dies wird bei der folgenden Variante vermieden, die aus mir unerklärlichen Gründen „russische Bauernmultiplikation“ heißt.

In der linken Spalte wird die erste Zahl der Multiplikationsaufgabe so lange halbiert, bis sich 1 ergibt. Dabei gehen wir großzügig vor: Wenn eine ungerade Zahl halbiert wird, runden wir einfach ab. Rechts wird, wie vorher auch, die zweite Zahl verdoppelt. Wir betrachten das Beispiel $13 \cdot 12$:

13	**12**
6	24
3	**48**
1	**96**

Nun schauen wir uns diejenigen Zeilen an, in denen rechts eine *un*gerade Zahl steht, und addieren die entsprechenden Zahlen der linken Spalte. Wie oben ergibt sich als Ergebnis $12 + 48 + 96 = 156$. (Siehe dazu auch: Multiplikation und Dualsystem. In: Bauer (2009).)

Zur Festigung des Gelernten 2.1.2

Berechnen Sie mit der russischen Bauernmethode die Produkte $15 \cdot 16$, $16 \cdot 15$, $18 \cdot 23$ und $19 \cdot 23$.

Griechische Zahlen

Etwa seit dem 4. Jahrhundert v. Chr. entwickelten die Griechen die Idee, Zahlen auf systematische Weise durch Buchstaben darzustellen. Da die Unterscheidung in Einer, Zehner und Hunderter schon geläufig war, lag es nahe, die ersten neun Buchstaben für die Zahlen $1, 2, \ldots, 9$ zu verwenden; also $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ usw. Weitere neun Buchstaben stellen die Zehnerzahlen dar: $\iota = 10$, $\kappa = 20$, $\lambda = 30, \ldots, 90$ und schließlich braucht man noch einmal neun Buchstaben für die Hunderterzahlen: $\rho = 100$, $\sigma = 200$, $\tau = 300, \ldots, 900$. Zum Beispiel $\sigma\lambda\alpha$ die Zahl 231.

Da das griechische Alphabet nur 24 Buchstaben hatte, wurden drei zusätzliche Buchstaben eingeführt: digamma für die Zahl 6, Koppa für die Zahl 90 und Sampi für die Zahl 900.

Römische Zahlen

Die römischen Zahlen sind durch Einkerbungen und deren Abkürzungen, das heißt durch Bündelungen entstanden. Es basiert auf den folgenden sieben Zeichen: I (= 1), V (= 5), X (= 10), L (= 50), C (= 100), D (= 500), M (= 1000).

In der Spätantike kamen dann noch Zeichen für 10.000, 100.000 und 1.000.000 hinzu. Das römische System war zunächst ein rein additives System. Das bedeutet, dass die

Zahl 4 als IIII und die Zahl 9 als VIIII geschrieben wurde. Erst im Mittelalter kam die Abkürzung IV statt IIII hinzu.

Im originalen additiven römischen System kann man die Zahlzeichen beliebig aneinanderfügen, und es entsteht immer die gleiche Zahl. Auf diese Weise ist das Addieren besonders einfach: VI + XII = VIIXII = XVIIII.

Selbst das Addieren wird fast unmöglich, wenn man zur Schreibeweise IV statt IIII übergeht. Denn das Zeichen I bedeutet dann manchmal +1 und manchmal −1.

2.2 Rechnen auf den Linien: Abakus, Rechentisch, Rechentuch

Wie haben die Römer gerechnet? Wie hat man im Mittelalter gerechnet? Sicher nicht so dass man die römischen Zahlzeichen benutzt hat. Im Gegenteil: Man konnte diese Zahlzeichen nur dazu verwenden, die Aufgabenstellung und das Ergebnis zu formulieren. Das eigentliche Rechnen geschah mechanisch mit speziell entwickelten Hilfsmitteln. Die Mittel waren Abakus, Rechentisch und Rechentuch. Diese haben unterschiedliche Erscheinungsformen, basierten aber mathematisch auf dem gleichen Kern. Aus heutiger Sicht sehen wir in all diesen Mechanismen das Dezimalsystem; es gibt aber keinen Hinweis auf eine theoretische Durchdringung der Rechenverfahren bei den Römern oder im Mittelalter.

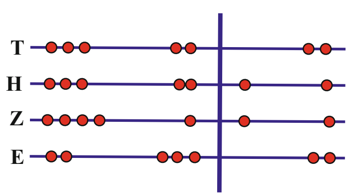
Man könnte von einem „heimlichen Dezimalsystem" sprechen oder von einer „List der Vernunft", denn nur mit diesen Geräten waren komplexe Rechnungen überhaupt möglich.

Abakus

Der Abakus ist eines der ältesten Rechenhilfsmittel. Er wurde vor über 3000 Jahren in China erfunden; die Römer und Griechen rechneten in der Antike damit. Bis heute ist er in China unter dem Namen Suanpan, in Russland als Stschoty und vor allem in Japan unter dem Namen Soroban bekannt und viel benutzt. Die traditionelle chinesische Rechenmethode Zhusuan, die mit dem Suanpan durchgeführt wird, wurde 2013 in die Liste der immateriellen Kulturgüter der UNESCO aufgenommen.

Ein typischer Abakus besteht aus Stangen, auf denen Kugeln angebracht sind. Die unterste Stange stellt die Einer dar, die nächste die Zehner, dann kommen die Hunderter, die Tausender und so weiter. Das Ganze ist in zwei Hälften geteilt, in der linken Hälfte jeder Stange befinden sich fünf Kugeln, im rechten Teil zwei Kugeln.

Die Kugeln werden „aktiviert", indem sie in die Mitte geschoben werden. Jede der „linken" Kugeln ist 1 wert, jede „rechte" Kugel zählt 5. In dem folgenden Bild ist die Zahl 2763 dargestellt.



Die natürliche Verwendung des Abakus ist die Addition von Zahlen. Wenn man zum Beispiel zu $2763 + 2$ berechnen möchte, schiebt man auf der untersten Stange zwei Einerkugeln in die Mitte. Anschließend wird man dann die fünf Einerkugeln auf der untersten Stange wieder nach außen und gleichzeitig eine Fünferkugel in die Mitte schieben. Für die Aufgabe $2763 + 50$ schiebt man auf der zweiten Stange von unten eine Fünferkugel von rechts außen in die Mitte; anschließend schiebt man die zwei Fünferkugeln nach außen und gleichzeitig eine Einerkugel der drittuntersten Stange von links außen in die Mitte.

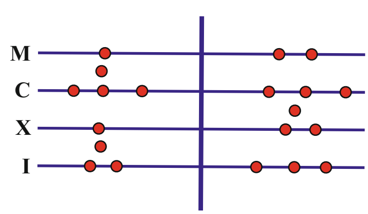
Rechentisch und Rechentuch

Das „Rechnen auf den Linien" war *die* Methode des Rechnens im europäischen Mittelalter. Es fußt auf einer langen Tradition, denn die älteste bekannte Rechentafel ist die so genannte Salaminische Tafel, die etwa aus dem Jahre 300 v. Chr. stammt. Höhepunkt und Abschluss des Rechnens auf den Linien ist das Werk des deutschen Rechenmeisters Adam Ries (1492/93–1559). In seinem Lehrbuch „*Rechnung auff der linihen*" (1518) stellt er das vorschriftliche mittelalterliche Rechnen noch alternativlos dar, während in seinem nur vier Jahre später erschienen Bestseller „*Rechnung auff der linihen und federn ...*", der bereits zu Lebzeiten von Ries 120 Auflagen hatte, das alte „Rechnen auf den Linien" dem zukunftsweisenden „Rechnen mit Federn" gegenübergestellt wurde. Dabei ist mit der „Feder" die Schreibfeder gemeint; mit anderen Worten: es handelt sich um das schriftliche Rechnen.

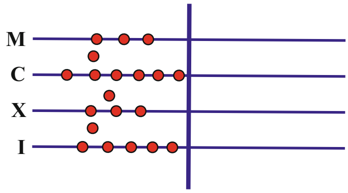
Zum „Rechnen auf den Linien" verwendete man ein System aus waagerechten Linien, die auf einen Tisch eingeritzt oder auf ein Tuch gemalt waren. Diese Linien waren mit I, X, C, M usw. bezeichnet. Auf ihnen wurden Steine oder Münzen, so genannte „Rechenpfennige" gelegt. Eine Münze auf der ersten Linie war 1 wert, eine auf der zweiten Linie zählte 10, ein Rechenpfennig auf der dritten Linie war 100 wert und so weiter. Prinzipiell konnte man beliebig viele Münzen auf eine Linie legen. Da das bald zu Zahlen führt, die man nicht mehr auf einen Blick überschauen konnte, benutzte man auch den Raum zwischen den Linien („spatium"): Eine Münze, die zwischen der Einer- und der Zehnerlinie liegt, ist 5 wert, ein Stein zwischen der Zehner- und der Hunderterlinie gilt 50, und so weiter. So konnte man beliebig große Zahlen darstellen.

Die horizontalen Linien wurden durch eine vertikale in zwei Hälften („Bankier") geteilt, so dass man links und rechts jeweils eine Zahl legen kann. So war es möglich, zum Beispiel die Summe von zwei Zahlen sicher bilden: Nachdem die Zahlen gelegt waren, konnte man diese noch einmal kontrollieren, bevor man anschließend die Steine auf der gleiche Linie beziehungsweise im gleichen Zwischenraum zusammenschob.

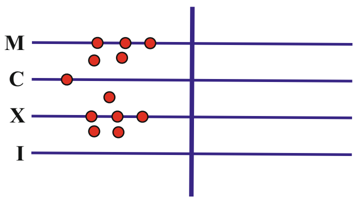
Wir machen uns das an dem Beispiel MDCCCXVII + MMCCCLXXIII = 1817 + 2373 klar. Zunächst legt man beide Zahlen, die eine links, die andere rechts.

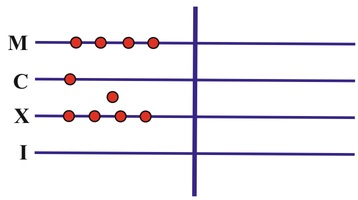


Nun schiebt man alle Steine auf derselben Linie zusammen. Zum Beispiel kann man alles nach links schieben:



Das zeigt uns ein erstes Ergebnis: Die Summe $1817 + 2373$ ist die Zahl, die aus drei Tausendern, einem Fünfhunderter, sechs Hundertern, einem Fünfziger, drei Zehnern, einem Fünfer und fünf Einern besteht. Diese Konstellation von Rechenpfennigen wird jetzt schrittweise in eine Standarddarstellung überführt. Man muss die Situation bereinigen („elevieren"): Fünf Münzen auf einer Linie werden durch eine in dem darüber liegenden Zwischenraum ersetzt; zwei Rechenpfennige in einem Zwischenraum werden in einen Stein der darüber liegenden Linie getauscht.





Das Ergebnis ist MMMMCLXXXX $= 4190$. Wir sehen, dass man so sehr effizient addieren (und subtrahieren) kann.

Zur Festigung des Gelernten 2.2.1

(a) Berechnen Sie $1376 + 685$ mit der Methode des Rechentisches.
(b) Können Sie sich vorstellen, wie auf dem Rechentisch subtrahiert wurde? Versuchen Sie, die Aufgabe $2373 - 1635$ auf dem Rechentisch zu lösen.

Man kann mit dem Rechentisch auch multiplizieren. Dabei ist die Multiplikation mit 10 besonders einfach: Wenn man alle Rechenpfennige von ihrer Linie auf die darüber liegende verschiebt, so hat man den Wert verzehnfacht.

Wir betrachten als Beispiel die Multiplikation einer beliebigen Zahl a mit 23. Dazu legt man die Zahl a zunächst sowohl rechts als auch links mit Rechenpfennigen aus. In der linken Hälfte multiplizieren wir a mit 20, in der rechten mit 3.

Man multipliziert die Zahl a mit 20, indem man zunächst die Anzahlen der Steine auf jeder Linie und in den Zwischenräumen verdoppelt („a mal 2") und dann die erhaltene Zahl als Ganzes um eine Linie nach oben schiebt, so dass jetzt die Steine, die auf der

Einerlinie lagen, auf der Zehnerlinie liegen („2a mal 10“). Insgesamt haben wir dadurch die Zahl a mit $2 \cdot 10$, also 20 multipliziert. Dieses Zwischenergebnis lassen wir in der linken Hälfte stehen.

Nun schauen wir uns die Kopie der ursprünglichen Zahl a in der rechten Hälfte an. Diese multiplizieren wir jetzt mit 3, indem wir die Anzahlen der Steine auf jeder Linie verdreifachen. Das Ergebnis addieren wir zum Zwischenergebnis auf der linken Seite und haben die Ausgangszahl insgesamt mit $20 + 3$ multipliziert.

Zur Festigung des Gelernten 2.2.2

Berechnen Sie mit der Rechentisch-Methode das Produkt $35 \cdot 23$.

Obwohl ein Rechentisch oberflächlich gesehen große Ähnlichkeit mit einem Abakus hat, ist er ihm doch in vielerlei Hinsicht überlegen. Das liegt vor allem an der Flexibilität, die man beim Legen der Rechenpfennige hat:

- Man kann beliebig viele Rechenpfennige auf eine Linie legen.
- Man kann bei Additionen beide Summanden nachkontrollierbar legen.
- Die Multiplikation mit 5 oder 10 ist „trivial“, das heißt besonders einfach.

2.3 Stellenwertsysteme

Vor etwa 4000 Jahren hat irgendein mathematisch begabter Mensch in Mesopotamien einen genialen Gedankenblitz gehabt. Bei allen bis dahin benutzten Zahlensystemen brauchte man für jede neue Größenordnung ein neues Symbol. Zum Beispiel eines für die Einer, eines für die Zehner, eines für die Hunderter und so weiter. Dieser geniale Mesopotamier hatte die Idee, wie man mit einem festen Zeichensatz beliebig große Zahlen darstellen kann. Das kann nur so funktionieren, dass ein Zeichen, je nach dem, an welcher „Stelle“ es steht, eine unterschiedlich große Zahl darstellt.

Uns Heutigen ist dieses Prinzip durch den täglichen Umgang mit dem Dezimalsystem sehr vertraut: Eine 1 an der Einerstelle bedeutet 1, die gleiche 1 an der Hunderterstelle bedeutet 100.

Die Babylonier verwendeten ein System zu Basis 60; sie hatten also die Ziffern 1, $2, \ldots, 59$. Davon sind heute, nach über 4000 Jahren, noch Spuren zu erkennen: Wir messen die Zeit in 60 Minuten pro Stunde und 60 Sekunden pro Minute. Außerdem ist der Vollkreis in 360 Grad (6 mal 60) eingeteilt.

In dem System der Babylonier hat die Stelle ganz rechts den Wert 1, die zweite Stelle von rechts den Wert 60 und die dritte Stelle von rechts den Wert $60 \cdot 60 = 3600$. Die Zahl 1 2 3 im Sechzigersystem hat also den Wert $1 \cdot 3600 + 2 \cdot 60 + 3 = 3723$.

Zur Vorbereitung des Folgenden 2.3.1

Stellen Sie die Anzahl der Sekunden in einer Minute, in einer Stunde und an einem Tag im System zur Basis 60 dar.

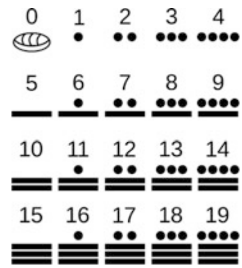


Abb. 2.3 Die Maya-Ziffern. (Quelle: © Bryan Derksen, Wikimedia Commons, CCBY-SA 3.0)

Die Idee des Stellenwertsystems wurde unabhängig von den Babyloniern auch von den Maya entwickelt, und zwar schon zur Zeit des „alten Reichs" (300 v. Chr.–900 n. Chr.). Die Maya verwendeten ein System zur Basis 20, vermutlich weil sie mit Fingern und Zehen zählten. Sie hatten auch schon eine Null, die erste Null der Welt. Diese wurde durch eine kleine Muschel dargestellt. Die Ziffern waren die Zahlen 0, 1, ..., 19 (siehe Abb. 2.3).

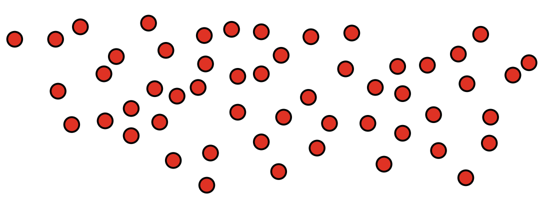
Oberhalb der Einerstelle war die Zwanzigerstelle, darüber hätte eine Stelle mit dem Wert 400 kommen müssen, die Maya gewichteten diese Stelle aber mit 360, was vermutlich in Zusammenhang mit ihrer Kalenderrechnung stand.

Das heute weltweit verwendete Dezimalsystem wurde in Indien erfunden. Genauer gesagt haben die Inder die Null, und damit die Möglichkeit des schriftlichen Rechnens auf Basis der Ziffern erfunden. Der indische Mathematiker Brahmagupta (598–668) behandelte in seinem Werk *Brahmasphutasiddhanta* die Null sehr ausführlich. Er sieht die Null nicht nur als Leerstelle, sondern fasst sie als eine Zahl auf, mit der man rechnen kann. Zum Beispiel benennt er Eigenschaften wie: *Wenn man zu einer Zahl Null addiert oder Null von einer Zahl subtrahiert, bleibt die Zahl unverändert; und wenn man eine Zahl mit Null multipliziert, wird sie selbst Null.* Brahmagupta verstand das Dezimalsystem hervorragend und zeigt, wie effizient man damit rechnen kann.

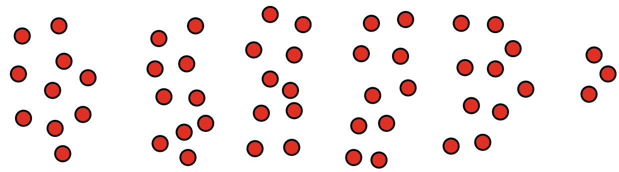
Von Indien aus hat sich das neue Zahlensystem mit der Ausbreitung des Islam im Laufe der darauf folgenden Jahrhunderte in der gesamten damaligen Welt etabliert.

Manche Wissenschaftler sind davon überzeugt, dass das indische Zahlensystem auf einem noch älteren chinesischen Zahlensystem beruht. Dies ist aber historisch noch nicht endgültig geklärt.

Nachdem wir einen Blick in die Geschichte geworfen haben, wollen wir uns nun systematisch klar machen, wie man eine natürliche Zahl im Dezimalsystem beziehungsweise in einem beliebigen „Stellenwertsystem" darstellen kann. Um uns das Prinzip klar zu machen, bestimmen wir zu einer großen Zahl von Punkten ihre Dezimaldarstellung.



Zunächst teilen wir einen möglichst großen Teil der Punkte in „Zehnerpäckchen“ ein:



In unserem Beispiel bleiben drei Punkte übrig. Im Allgemeinen ist dieser Rest eine Zahl zwischen 0 und 9; er ist die Einerziffer.

Nun betrachten wir den Teil der Punkte, die in Zehnerpäckchen eingeteilt wurden. Aus jedem Zehnerpäckchen nehmen wir einen Punkt heraus.

Im Folgenden arbeiten wir nur mit diesen ausgewählten Punkten. Wie vorher teilen wir diese, soweit es geht, in Zehnerpäckchen ein. In unserem Beispiel ergibt sich kein ganzes Zehnerpäckchen mehr, sondern nur der Rest 5. Diese Ziffer ist die Zehnerziffer; also lautet die Zahl der Punkte im Dezimalsystem 53.

Zur Festigung des Gelernten 2.3.2

Nehmen Sie eine Löffelspitze voll Reis und schütten Sie die Reiskörner vor sich auf den Tisch. Bestimmen Sie mit der eben dargestellten Methode die Dezimaldarstellung der Anzahl dieser Reiskörner.

Man kann dieses Verfahren allgemein auch so beschreiben: Zuerst dividieren wir die Zahl n, deren Dezimaldarstellung wir suchen, durch 10; der Rest, der sich dabei ergibt, nennen wir a_0. Dieser bildet die Einerziffer.

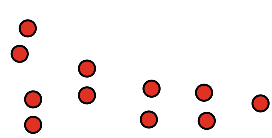
Dann ist die Zahl $n - a_0$ durch 10 teilbar. Sei $n_1 := (n - a_0)/10$. Im obigen Beispiel ist $n - a_0$ der Teil der ursprünglichen Zahl, der in Zehnerpäckchen eingeteilt ist, und n_1 ist die Anzahl dieser Zehnerpäckchen.

Im nächsten Schritt bestimmen wir den Zehnerrest von n_1. Dies ist die Zehnerziffer a_1.

Nun betrachten wir die Zahl $n_2 := (n_1 - a_1)/10$ und teilen diese durch 10. Der Rest, der sich dabei ergibt, ist die Hunderterziffer. Und so weiter.

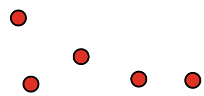
Entsprechend der Erarbeitung der Dezimaldarstellung einer Anzahl von Punkten kann man die Darstellung der Anzahl der Steine in einem Haufen im Binärsystem (auch Dualsystem genannt) bestimmen.

Zunächst fassen wir die Punkte so weit wie möglich zu Zweierpäckchen zusammen.

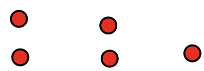


In unserem Fall bleibt der Rest 1. Im Allgemeinen bleibt entweder der Rest 0 („es geht auf“) oder der Rest 1. Dies ist die Einerziffer. Formal berechnen wir a_0 mit $n = 2n_1 + a_0$ und $0 \leq a_0 < 2$.

Nun hebt man von jedem Zweierpäckchen einen Punkt heraus und löscht alle anderen Punkte:



Diese Repräsentanten sortiert man wieder in Zweierpäckchen.



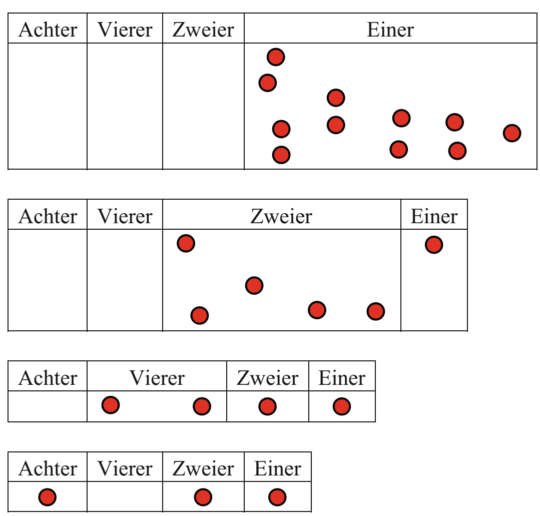
Der Rest, der dabei entsteht (0 oder 1) ist die „Zweierziffer“. Formal berechnet man $n_1 = 2n_2 + a_1$ und $0 \leq a_1 < 2$. In unserem Fall ist der Rest 1.

Nun nimmt man von jedem der jetzigen Zweierpäckchen einen Punkt (den Repräsentanten), vergisst alle anderen Punkte und teilt die Repräsentanten in Zweierpäckchen ein. Der dabei entstehende Rest ist die „Viererziffer“ $a_2 : n_2 = 2n_3 + a_2$ mit $0 \leq a_2 < 2$. In unserem Fall ist $a_2 = 0$.

Der nächste Schritt ist in unserem Beispiel der letzte. Wir wählen aus dem Zweierpäckchen einen Repräsentanten; wenn man diesen einteilt bleibt der Rest 1 übrig. Also ist $a_3 = 1$.

Damit ist die Zahl in binärer Darstellung gleich $a_3\ a_2\ a_1\ a_0 = 1\ 0\ 1\ 1$.

Wir stellen den Ablauf noch einmal in einer Stellentafel dar.



http://www.springer.com/978-3-658-16105-7

Zahlen, Formeln, Gleichungen
Algebra für Studium und Unterricht
Beutelspacher, A.; Beutelspacher, A.; Samuel, L.
2018, XIII, 380 S. 44 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-16105-7