

1 Reflexion

Eine Zielsetzung der vorliegenden Arbeit besteht darin, den Begriff der mathematischen Reflexion in argumentativ geprägten Unterrichtsgesprächen präzise auszuarbeiten und theoretisch zu fundieren. Hierzu werden in diesem ersten Kapitel verschiedene philosophische und mathematikdidaktische Positionen zum Thema Reflexion ausführlich dargestellt und diskutiert. Dies wird es ermöglichen, das in Kapitel 4 dargestellte Verständnis von mathematischer Reflexion in diesen Diskurs differenziert einzuordnen und so theoretisch breit zu fundieren.

Die mathematikdidaktischen Ansätze werden in dieser Arbeit zunächst danach unterschieden, ob sie Reflexion als eine *individuelle Denktätigkeit* auffassen (Kap. 1.1) oder als einen Denktakt, der sich nicht individuell, sondern als *interaktiver Prozess* vollzieht (Kap. 1.2).

Da sich das Verständnis von Reflexion als individueller Denktätigkeit aus der Philosophie, genauer der Erkenntnistheorie, ableitet, wird zunächst auf die dortige Bedeutung des Begriffs Reflexion eingegangen. Kapitel 1.1.1 stellt das Reflexionsverständnis dreier Autoren (Locke, Dewey und Piaget) vor, die Reflektieren mit dem Erwerb neuen Wissens, welcher sich in Auseinandersetzung mit der Umwelt vollzieht, in Verbindung bringen. Am Ende des Kapitels 1.1.1 werden dann vier wesentliche Merkmale von Reflexion herausgearbeitet.

Das individuell geprägte Reflexionsverständnis dominiert die Diskussion über Reflexion im Mathematikunterricht. Dennoch lässt sich keine einheitliche Interpretation des Begriffs ausmachen, was u. a. darauf zurückzuführen ist, dass er häufig ‚unscharf‘ verwendet wird (vgl. Kap. 1.1.2). Mit Rückgriff auf philosophische Ansätze kann geklärt werden, was Reflexion und Reflektieren im Kontext von Mathematikunterricht ausmacht, weil sich die in Kapitel 1.1.1 herausgearbeiteten Reflexionsmerkmale (RM) teilweise oder vollständig in allen mathematikdidaktischen Ansätzen wiederfinden. Die Zusammenfassung in Kap. 1.1.3 stellt für die zuvor thematisierten Positionen, welche Reflexion im Mathematikunterricht als einen individuellen Prozess ansehen, heraus, dass die Reflexionsmerkmale aus Kapitel 1.1.1 als Kennzeichen von Reflexion im Mathematikunterricht angesehen werden können.

Die in Kapitel 1.2 thematisierte Idee von Reflexion als interaktivem Prozess basiert auf der Interpretation reflexiven Denkens als ‚widerspiegelndes Denken‘ (vgl. Freudenthal, 1979, 1983) (Kapitel 1.2.1). Auf der Basis dieses Konzepts wurde das Konstrukt ‚mathematische Reflexion‘ (Schülke, 2013) entwickelt. Dieses wird in Kapitel 1.2.2 gemeinsam mit den Ergebnissen einer zugehörigen Studie von Schülke (2013) vorgestellt.

Kapitel 1.2.3 fasst unter Bezugnahme auf die in Kapitel 1.1 formulierten Reflexionsmerkmale die wesentlichen Elemente des Ansatzes von Freudenthal zusammen und stellt die Vor- und Nachteile des Konstrukts ‚mathematische Reflexion‘ mit Blick auf das Forschungsinteresse der vorliegenden Arbeit heraus.

Dies ermöglicht es, Perspektiven für die theoretische und praktische Weiterentwicklung zu eröffnen, die in den Kapiteln 4 und 5 genauer ausgeführt werden.

Kapitel 1.3 schlägt abschließend die Brücke zu den normativen Vorgaben für den Mathematikunterricht der Grundschule. In der dieser Arbeit zu Grunde liegenden Studie wurde Unterricht entwickelt und umgesetzt, der alle Kinder einer Klasse zu mathematischer Reflexion in argumentativ geprägten Gesprächen anregen soll. Daher werden die offiziellen Vorgaben zur Reflexion über Mathematik als Lernziel für alle Kinder der Grundschule analysiert, um sie dann mit dem Verständnis der vorliegenden Arbeit in Beziehung setzen zu können.

1.1 Reflexion als individueller Denkprozess

„Reflexion“ ist ein alltagssprachlicher Begriff, dessen aktuelle bildungssprachliche Bedeutung mit „Nachdenken, Überlegung, Vertiefen in einen Gedanken-gang“ (Zwahr, 2006b, S. 655) angegeben wird. Somit bezieht sich das Alltagsverständnis von Reflexion auf eine intensive individuelle Denktätigkeit. Das zugehörige Verb ‚reflektieren‘ bedeutet dementsprechend „nachdenken, bedenken“ (Zwahr, 2006b, S. 654). Dieses Begriffsverständnis wurde in der Neuzeit aus demjenigen in der Philosophie entwickelt. Dort bezeichnet es Denken, welches sich auf sich selbst bezieht (vgl. Sandkühler, 1999, S. 1370). Ursprünglich leitet sich der Begriff ‚Reflexion‘ vom lateinischen ‚reflexio‘ (das Zurückbeugen) ab (vgl. Zwahr, 2006b, S. 655)³ und wurde zuerst in der Optik als wissenschaftlicher Fachbegriff verwendet. Dort beschreibt er das Zurückwerfen von Licht an reflektierenden Oberflächen (vgl. Sandkühler, 1999, S. 1370; Zwahr, 2006b, S. 654).

In der Mathematikdidaktik wurde vielfach entweder die philosophische oder die alltagssprachliche Bedeutung der Begriffe ‚Reflexion‘ und ‚reflektieren‘ übernommen, ohne diese Begriffe genauer zu definieren (vgl. Kap. 1.1.2). Aus diesem Grund wird nun zunächst die philosophische Perspektive auf Reflexion genauer betrachtet. Hierzu werden Theorien herangezogen, deren Verständnis von Erkenntnisgewinn dem aktiv-entdeckenden Lernen (Winter, 1989; Wittmann, 1990) nicht grundsätzlich entgegenstehen, da sie den Ursprung von Erkenntnis in der Auseinandersetzung mit der Umwelt sehen. Am Ende des Kapitels 1.1.1 werden vier wesentliche Merkmale von Reflexion als individuellem Denkprozess herausgestellt (Reflexionsmerkmale RM). Kapitel 1.1.2 gibt einen Überblick über die mathematikdidaktische Diskussion zu diesem Thema. Dabei wird immer wieder auf die Reflexionsmerkmale aus Kapitel 1.1.1 Bezug ge-

3 Es werden auch andere lateinische Begriffe als Ursprung angegeben, die jedoch alle aus derselben Wortfamilie stammen, z. B. ‚reflectare‘ (zurückbeugen, umwenden) (Sandkühler, 1999, S. 1370), ‚reflexus‘ (das Zurückbeugen) (Dudenredaktion, 2001, S. 659).

nommen, welche auch in den mathematikdidaktischen Ansätzen in unterschiedlicher Gewichtung zu finden sind. Daher stellen sie nach dem Verständnis dieser Arbeit eine theorieübergreifende Definition von Reflexion als individuellem Denkprozess dar.

1.1.1 Philosophische Perspektive

Im Folgenden werden Konzepte von Locke, Dewey und Piaget vorgestellt, die ‚Reflexion‘ als individuellen Denkprozess genauer definieren. Alle drei Konzepte sind in spezifische Erkenntnistheorien eingebettet, auf die im Rahmen dieses Kapitels nicht ausführlich eingegangen werden kann. Vielmehr sollen theorieübergreifende Merkmale von ‚Reflexion‘ herausgearbeitet werden.

Die Vorstellung beginnt mit Locke (1632-1704), einem „der bedeutendsten und einflussreichsten Philosophen der frühen Neuzeit“ (Thiel, 1997, S. 3). Er gilt als wichtiger Vertreter des Empirismus, der davon ausgeht, „daß Wissen aus der Erfahrung hervorgeht und daß es im Bereich der menschlichen Erfahrung geprüft wird“ (Glaserfeld, 1998, S. 67). Mit dieser Position widerspricht Locke explizit der Auffassung, dass es angeborene ‚Ideen‘ gäbe, über die jeder Mensch unabhängig von seinen Erfahrungen verfüge (vgl. Thiel, 1997), welche beispielsweise noch von Descartes (1596-1650) vertreten wurde (vgl. Sandkühler, 1999, S. 1372). ‚Ideen‘ werden nach Locke vielmehr auf Grund von Erfahrungen entweder durch ‚Sensation‘, d. h. durch Sinneswahrnehmung, oder durch ‚Reflexion‘ aufgebaut.

Nach Dewey (1859-1952) ist ‚Erfahrung‘ ebenfalls die Grundlage jeder Erkenntnis, wobei er ein umfassenderes Konzept von ‚Erfahrung‘ vertritt, als es aus seiner Perspektive beim Empirismus geschieht (vgl. Suhr, 1994, S. 71-74, 87-89). Dewey war vielmehr Vertreter der pragmatischen Erkenntnistheorie, nach der „Erkenntnis [...] all diejenigen Verhaltensdispositionen [umfaßt] die wir bewußt benutzen, um das zu verstehen, was um uns herum geschieht“ (Suhr, 1994, S. 91). Der Aufbau neuer Erkenntnisse bedeutet daher die Entwicklung neuer Verhaltensweisen, die zum Verständnis der Welt beitragen. Dies erfolgt durch ‚reflektierendes Denken‘, auf das in diesem Kapitel gemeinsam mit Deweys Erfahrungsbegriff eingegangen wird.

Piaget (1896-1980) ist insbesondere als Entwicklungspsychologe bekannt geworden, jedoch war sein Hauptanliegen die Erkenntnistheorie, ein Teilgebiet der Philosophie (vgl. Scharlau, 1996, S. 9, 21). Seine „genetische Erkenntnistheorie versucht, Erkennen, insbesondere wissenschaftliches Erkennen, durch seine Geschichte, seine Soziogenese und vor allem die psychologischen Ursprünge der Begriffe und Operationen, auf denen es beruht zu erklären“ (Piaget, 1973, S. 7). Die genetische Erkenntnistheorie befasst sich somit nicht damit, wie Erkenntnisprozesse bei Erwachsenen erfolgen, sondern mit der Entwicklung der Erkenntnisfähigkeit im Laufe der Kindheit und Jugend. Aus dieser Auffassung entwickelten sich erst die entwicklungspsychologischen Untersuchungen, da es

Piaget wichtig war, seine erkenntnistheoretischen Annahmen wissenschaftlich zu untermauern (vgl. Scharlau, 1996, S. 7-11, 75-79). Die ‚reflektierende Abstraktion‘ ist ein Mechanismus, mit dem nach der genetischen Erkenntnistheorie neue Erkenntnis, insbesondere logisch-mathematische, aufgebaut wird.

Sensation und Reflexion (Locke)

‚Reflexion‘ ist nach Locke (1894/1962) eine von zwei Quellen der ‚Ideen‘. Der Begriff ‚Idee‘ steht dabei für das, „was immer, wenn ein Mensch denkt, das *Objekt* des Verstandes ist“ (Locke, 1894/1962, S. 28, Hervorhebung i. O.). Ideen können durch Wörter bezeichnet werden, z. B. „*Weiß, Härte, Süßigkeit, Denken, Bewegung, Mensch, Elefant, Armee, Trunkenheit* und andere mehr“ (Locke, 1894/1962, S. 107, Hervorhebungen i. O.).

Locke vertritt die Auffassung, dass der Mensch *alle* Ideen auf Grund von Erfahrungen aufbaut (vgl. Locke, 1894/1962, S. 107-108; Thiel, 1997, S. 5-6). Indem er zwei Arten der Erfahrung unterscheidet, differenziert Locke zwei Quellen für Ideen. Einerseits können Ideen durch *Sensation*, d. h. durch Sinneswahrnehmung, entstehen. Als Beispiele für solche Ideen nennt er wahrnehmbare Eigenschaften von Gegenständen, beispielsweise Farben, Temperaturen und Geschmacksrichtungen (vgl. Locke, 1894/1962, S. 108). Die zweite Quelle der Ideen ist *Reflexion*, „die Wahrnehmung der Operationen des eigenen Geistes in uns, der sich mit den ihm zugeführten Ideen beschäftigt“ (Locke, 1894/1962, S. 108). Der Begriff Operation ist bei Locke weit gefasst und umfasst sowohl aktive Prozesse als auch passive Zustände wie Zufriedenheit oder Unruhe (vgl. Locke, 1894/1962, S. 109). Durch *Reflexion* werden Ideen wie „*wahrnehmen, denken, zweifeln, glauben, schließen, erkennen, wollen* und all die verschiedenen Tätigkeiten unseres Geistes“ (Locke, 1894/1962, S. 108, Hervorhebungen i. O.) gebildet. Zu diesen geistigen Tätigkeiten entstehen ‚Ideen‘, indem „wir uns ihrer bewußt werden und sie in uns beobachten“ (Locke, 1894/1962, S. 108). ‚Wahrnehmen‘ wird in dem Moment zur ‚Idee‘, in dem man die Tätigkeit des Wahrnehmens bewusst zum Gegenstand des Denkens macht. Dazu ist erforderlich, dass sich „der Verstand innerlich sich selber zuwendet, über seine eigenen Operationen nachdenkt und sie zum Gegenstand der Selbstbetrachtung macht“ (Locke, 1894/1962, S. 111-112).

‚Reflexion‘ bedeutet hier also ein Denken über das eigene Denken, wodurch dieses bewusst wird.

Reflektierendes Denken (Dewey)

Im Gegensatz zu Locke ist Reflexion bei Dewey (1933) nicht über den Gegenstand des Denkens definiert, sondern über die Art und Weise, in der das Denken verläuft. Er beschreibt zwei Phasen des ‚reflektierenden Denkens‘. Ausgangspunkt ist eine Situation, die eine Person plötzlich vor ein Problem stellt, das die-

se zweifeln und zögern lässt, weil sie nicht weiß, wie sie weiter handeln soll. Diese Situation der Unsicherheit und Irritation stellt die erste Phase des reflektierenden Denkens dar (vgl. Dewey, 1933, S. 12-13). Als ein Beispiel hierfür nennt Dewey (1933) einen Reisenden, der in einer ihm unbekannten Gegend unterwegs ist. Wenn er eine Weggabelung erreicht und nicht weiß, welchen Weg er nehmen muss, ist er zunächst verunsichert und die Situation stellt für ihn ein Problem dar. Wenn er dieses Problem durch reflektierendes Denken bewältigen will und z. B. nicht nach dem Prinzip von Versuch und Irrtum, sucht er nach Anhaltspunkten dafür, dass einer der beiden Wege der richtige für ihn ist. Die Suche nach einer Lösung des Problems bestimmt den weiteren Denkprozess (zweite Phase). Hierfür werden zielgerichtet weitere Informationen gesucht oder es wird gezielt auf Erinnerungen zurückgegriffen. So ergeben sich Lösungsvorschläge, die in der Folge überprüft werden können. Der Wanderer im Beispiel könnte nach Hinweisschildern suchen oder auf einen Baum klettern, um die Landschaft weiter zu überblicken (vgl. Dewey, 1933, S. 13-15). ‚Reflektierendes Denken‘ nach Dewey (1933) ist demnach kein Denken über das eigene Denken, sondern vielmehr die sorgfältige Analyse einer problemhaltigen Situation mit dem Ziel, Lösungsansätze zu entwickeln. Das wesentliche Charakteristikum ist nicht vorrangig der Gegenstand des Denkens, sondern die Art und Weise, wie die Gedanken aufeinander folgen und auf welcher Grundlage die entwickelten Lösungsvorschläge bewertet werden. Um dies zu verdeutlichen, grenzt Dewey (1933) reflektierendes Denken explizit von anderen Arten des Denkens ab, nämlich dem Bewusstseinsstrom (1), erfundenen Geschichten (2) und ungeprüften Überzeugungen (3) (vgl. Dewey, 1933, S. 3-9). Diese Abgrenzung wird im Folgenden erläutert. Hierbei ist zu beachten, dass die verschiedenen Arten des Denkens in der Realität ineinander übergehen und nicht so scharf voneinander zu trennen sind, wie es die Gegenüberstellung vermuten lässt (vgl. Dewey, 1933, S. 9).

(1) Beim reflektierenden Denken bauen die Gedanken derart aufeinander auf, dass ein Gedanke immer aus dem vorherigen folgt und sich auf diesen zurückbezieht. Auf diese Weise entsteht eine Gedankenabfolge mit einer inneren Logik. Hierin unterscheidet es sich vom Bewusstseinsstrom, welcher dadurch gekennzeichnet ist, dass Gedanken ungesteuert aufeinanderfolgen (vgl. Dewey, 1933, S. 3-5).

(2) Eine solche innere Logik existiert ebenfalls bei einer erfundenen Geschichte. Diese Logik, die die Geschichte strukturiert, muss jedoch nicht der Realität entsprechen. Reflektierendes Denken bezieht sich hingegen auf die Realität, da es zum Ziel hat, ein reales Problem zu lösen. Hierzu müssen Schlussfolgerungen gezogen werden, die in Form von Lösungsversuchen in der Realität überprüft werden können. Das zu lösende Ausgangsproblem strukturiert beim reflektierenden Denken die Abfolge der Gedanken und bewirkt eine Orientierung an der Realität (vgl. Dewey, 1933, S. 5-6).

(3) Des Weiteren zeichnet sich reflektierendes Denken dadurch aus, dass gezogene Schlussfolgerungen und getroffene Annahmen hinterfragt und entwickelte Lösungsideen durch eigene Nachforschungen und Überlegungen geprüft werden. Dies unterscheidet reflektierendes Denken von (ungeprüften) Überzeugungen, aus welchen sich ebenfalls Schlussfolgerungen über die Realität ableiten lassen, sodass Lösungsvorschläge entwickelt werden können. Sie entstehen jedoch unbewusst und werden nicht durch eigene Überlegungen überprüft (vgl. Dewey, 1933, S. 6-7).

Zusammenfassend lässt sich reflektierendes Denken dadurch charakterisieren, dass erstens verschiedene Gedanken logisch aufeinander aufbauen, da der nächste Gedanke aus dem vorherigen folgt und sich auf diesen zurückbezieht. Zweitens wird es durch das Ziel gesteuert, zu Schlussfolgerungen über die Realität zu gelangen, um ein Problem zu lösen. Drittens überprüft es jede Schlussfolgerung durch eigene Nachforschungen und Überlegungen.

Auf Grund seiner Bedeutung beim Lösen von problemhaltigen Situationen stellt reflektierendes Denken für Dewey die beste Art des Denkens dar (vgl. Dewey, 1933, S. 3) und er betrachtet die Entwicklung der Fähigkeit, reflektierend zu denken, als wesentliches Ziel der Erziehung (vgl. Dewey, 1933, S. 78). Um dies genauer begründen zu können, muss zunächst auf Deweys Begriff der ‚Erfahrung‘ und auf die Bedeutung, die Dewey der Erfahrung beim Lernen zuschreibt, eingegangen werden.

Eine ‚Erfahrung‘ besteht nach Dewey (1916/1993) aus zwei Elementen. Zunächst wirkt eine Person aktiv auf ihre Umwelt ein. Anschließend nimmt sie die Folgen dieses Handelns wahr. Die so gemachte Erfahrung ist für das weitere Leben von Bedeutung, wenn beide Elemente – Handlung und Auswirkungen – durch Denken bewusst in Verbindung gebracht werden (vgl. Dewey, 1916/1993, S. 187). Auf Grund der Verbindung, die zwischen der Handlung und den Auswirkungen hergestellt wird, werden Hypothesen über die Auswirkungen zukünftiger Handlungen gebildet, welche anschließend überprüft werden können (vgl. Dewey, 1916/1993, S. 198-199). Auf diese Weise erlangen die Erfahrungen durch Denken Bedeutung, denn „der Zuwachs an Bedeutung entspricht der vermehrten Wahrnehmung der Beziehungen und Zusammenhänge der Tätigkeiten, in die wir verwickelt sind“ (Dewey, 1916/1993, S. 108).

An dieser Stelle nutzt Dewey (1916/1993) lediglich den Begriff ‚Denken‘ und nicht ‚reflektierendes Denken‘. Bei Betrachtung der Phasen, in denen dieses ‚Denken‘ verläuft, wird jedoch ersichtlich, dass es sich um reflektierendes Denken im oben erläuterten Sinn handelt. So setzt das ‚Denken‘, das Handlungen und Auswirkungen miteinander in Verbindung bringen will, ein, wenn eine Situation unklar ist und dadurch Verwirrung und Zweifel entstehen. Es folgt eine genaue Analyse des Problems und der damit verbundenen Umstände. Anschließend werden Annahmen über die Situation generiert, um einen Plan für das weitere Handeln zu entwickeln. Die zuvor getroffenen Annahmen können dann

durch die Umsetzung dieses Plans überprüft werden (vgl. Dewey, 1916/1993, S. 201). Vergleicht man diese Phasen mit den zwei Phasen reflektierenden Denkens nach Dewey (1933) (s. o.), kann diese Beschreibung des ‚Denkens‘ zur Analyse einer Erfahrung als eine Ausdifferenzierung insbesondere der zweiten Phase aufgefasst werden.

Reflektierendes Denken bringt demnach Erfahrungen in Zusammenhang, sodass durch die Reflexion der Beziehung von Handlung und Auswirkung weitere zielgerichtete Handlungen und somit weitere Erfahrungen ermöglicht werden.

Auf Grund dieser Beziehung von reflektierendem Denken und Erfahrung, die in Abbildung 1.1 zusammenfassend dargestellt ist, wird die große Bedeutung verständlich, die diese Art des Denkens nach Dewey im Zusammenhang von Lernen spielt.

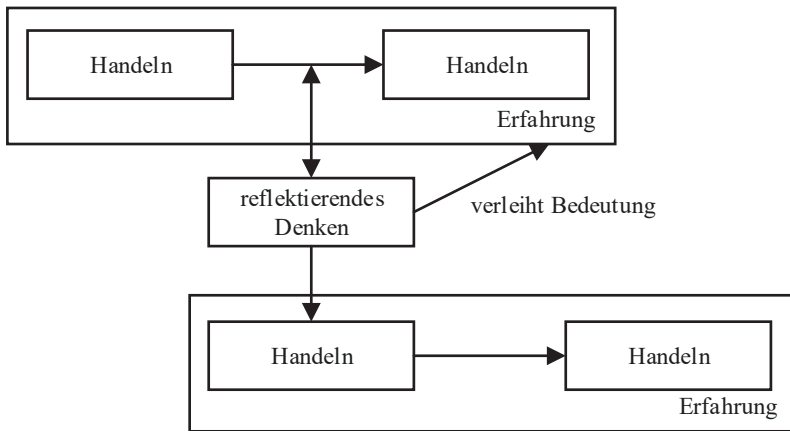


Abbildung 1.1 Zusammenhang von reflektierendem Denken und Erfahrungen nach Dewey (1916/1993, 1933)

Zusammengefasst stellt Reflexion hier ebenso wie bei Locke eine spezifische Denktätigkeit dar, die sich jedoch nicht auf das eigene Denken bezieht, sondern auf die Erfahrungen, die eine Person in der Auseinandersetzung mit der Umwelt macht. Diese Erfahrungen werden bewusst analysiert, sodass Wissen über Beziehungen und Zusammenhänge aufgebaut werden kann.

Reflektierende Abstraktion (Piaget)

Um den Überblick zu vervollständigen, wird abschließend Piagets (1975a, 1975b, 1976, 1977b, 1977c) Verwendung des Begriffs Reflexion dargestellt. Pi-

aget nutzt das Adjektiv ‚reflektierend‘, um Abstraktionsprozesse zu beschreiben. Sie abstrahieren, anders als die empirische Abstraktion, keine wahrnehmbaren Eigenschaften konkreter Objekte, sondern Charakteristika von Handlungen bzw. den diesen Handlungen zu Grunde liegenden Handlungsschemata (vgl. Piaget, 1975b, S. 75).

‚*Empirische Abstraktion*‘ bezieht sich auf die Eigenschaften konkreter Objekte in der Umwelt und die physischen Aspekte der eigenen Handlungen (z. B. Bewegungen, Stöße) (vgl. Piaget, 1977a, S. 345-346; 1977c, S. 5). Sie erfordert, dass sich eine Person bei der Wahrnehmung eines konkreten Gegenstandes auf eine Eigenschaft konzentriert, z. B. die Farbe, und alle anderen, z. B. die Form oder das Gewicht, nicht beachtet (vgl. Piaget, 1975a, S. 87). Dadurch können verschiedene Objekte verglichen werden, sodass eine Verallgemeinerung möglich wird. Beispielsweise können alle Objekte, die die Eigenschaft teilen, weiß zu sein, zu einer allgemeinen Menge der weißen Objekte zusammengefasst werden. Über diese Eigenschaften verfügen die Objekte unabhängig von den Handlungen der abstrahierenden Person (vgl. Piaget, 1975b, S. 74-75).⁴ Empirische Abstraktion bedeutet damit die fortwährende Akkommodation kognitiver Schemata an Eigenschaften äußerer Gegenstände (vgl. Piaget, 1977b, S. 322).

‚*Reflektierende Abstraktion*‘ bezieht sich hingegen gerade auf (kognitive) Handlungen, welche untereinander koordiniert, d. h. in Beziehung gesetzt werden (vgl. Piaget, 1975a, S. 87-88).

Es erfolgt keine Akkommodation von Schemata an die Umwelt, sondern mehrere Schemata werden untereinander koordiniert, d. h. reziprok (wechselseitig) assimiliert und akkommodiert, wobei die reziproke Assimilation überwiegt (vgl. Piaget, 1977b, S. 322; zum Begriff der reziproken Assimilation und Akkommodation s. Piaget, 1976, S. 13-14).

Piaget (1964) gibt hierfür das folgende Beispiel: Ein Kind zählt Kieselsteine, die in einer Reihe liegen, und stellt fest, dass es 10 sind. Dann zählt es die Kieselsteine in umgekehrter Richtung und kommt wieder zum Ergebnis 10. Dies erstaunt das Kind, weshalb es die Kieselsteine noch in einem Kreis und in anderen Konfigurationen anordnet und immer wieder zählt. In dieser Situation entdeckt das Kind, dass die Anzahl der Kieselsteine von ihrer Anordnung unabhängig ist. Dies ist keine Eigenschaft der Steine, die von sich aus weder eine Anordnung haben noch eine bestimmte Zahl darstellen. Das Kind entdeckt

4 Die Wahrnehmung der Gegenstände erfordert nach Piaget auch Handlungen, nämlich die Assimilation der wahrgenommenen Eigenschaften an Schemata. Aus diesem Grund ist empirische Abstraktion immer auf reflektierende Abstraktion angewiesen. Trotzdem lässt sich empirische Abstraktion von der reflektierenden Abstraktion abgrenzen, da bei ersterer die abstrahierten Eigenschaften den Objekten zugeschrieben werden und die Handlungen in den Hintergrund treten (vgl. Piaget, 1975a, S. 88-89; 1977b, S. 322-323).

vielmehr Eigenschaften der Handlungen des Ordnen und der Anzahlbestimmung. Diese abstrahiert es aus den Handlungen, die es mit den Kieselsteinen ausführt (vgl. Piaget, 1964, S. 12; s. auch Beth & Piaget, 1966, S. 233).

Hierbei handelt es sich um eine Abstraktion, weil den Handlungen „gewisse verallgemeinerte Elemente entlehnt [werden], z. B. eine gewisse Reihenfolge der Handlungen“ (Piaget, 1975b, S. 74). Es wird von den konkreten Handlungen mit den konkreten Kieselsteinen abgesehen und erkannt, dass die Tätigkeit der Anzahlbestimmung *grundsätzlich* von der Tätigkeit des Sortierens unabhängig ist (vgl. Piaget, 1964, S. 12). Als das Kind das erste Mal bemerkte, dass sich die Anzahl der Steine beim Umlegen nicht ändert, wurde dieser Erkenntnisprozess ausgelöst, da das Gleichgewicht zwischen den beiden Schemata ‚Anzahl‘ und ‚Sortieren‘ gestört wurde. Durch die reflektierende Abstraktion wird das Gleichgewicht wiederhergestellt, d. h., es erfolgt eine Äquilibration (vgl. Piaget, 1976, S. 16, 27-28).

Die Handlung des Sortierens ist außerdem zu einer reversiblen Operation geworden, denn erst aus der Umkehrbarkeit der Handlung des Umsortierens ergibt sich die Konstanz der Anzahl als logische Notwendigkeit und damit als allgemeine Gesetzmäßigkeit (vgl. Piaget, 1975b, S. 64-67). Hier wird deutlich, dass reflektierende Abstraktion zum einen auf den bisherigen Strukturen aufbaut, diese aber andererseits auch überschreitet. In dieser Weise werden die Stufen der Denkentwicklung konstruiert (vgl. Piaget, 1976, S. 41-42, 167) und insbesondere logisch-mathematische Erkenntnisse aufgebaut (vgl. Piaget, 1975a, S. 87).⁵

Diese Art der Abstraktion nennt Piaget aus zwei Gründen ‚reflektierend‘:

Reflektierend ist sie zunächst im Sinne einer physikalischen oder geometrischen Projektion, das heißt, daß sie immer ein ‚Reflektieren‘ dessen, was einer niedrigeren Stufe entstammt, auf einer höheren Stufe voraussetzt [...]. Weiter enthält diese ‚reflektierende‘ Abstraktion eine ‚Reflexion‘ im Sinne einer geistigen Reorganisation, und zwar notwendig, weil das ‚Reflektieren‘ auf eine höhere Stufe führt, wo zunächst alles das rekonstruiert werden muß, was auf der niedrigeren Stufe abstrahiert worden war, um es der Struktur der höheren Stufe anzupassen. (Piaget, 1975a, S. 88)

Im obigen Beispiel ist die niedrigere Stufe diejenige, auf der das Sortieren noch nicht reversibel und mit der Tätigkeit der Anzahlbestimmung wenig koordiniert ist. Auf der höheren Stufe ist es demgegenüber zu einer reversiblen Operation geworden und mit der Anzahlbestimmung besser koordiniert. Die reflektierende Abstraktion beschreibt nun den Übergang von einer Stufe zur nächsten.

5 Zur Einordnung der reflektierenden Abstraktion in die Theorie Piagets siehe auch Piaget (1973, 1974a, 1976).

Die Zweiteilung in ‚Reflektieren‘ und ‚Reflexion‘ ist eine analytische, da diese beiden Prozesse in Wirklichkeit untrennbar miteinander verbunden sind (vgl. Piaget, 1977b, S. 303). Sie verdeutlicht jedoch, dass die den Handlungen zu Grunde liegenden kognitiven Strukturen zum einen auf eine neue Stufe gehoben und zum anderen auch weiterentwickelt werden, sodass die neuen Strukturen an die früheren anknüpfen und diese dennoch überschreiten. Reflektierende Abstraktion ist somit im Gegensatz zur empirischen Abstraktion konstruktiv, denn sie erzeugt die hierarchischen Stufen der Denkentwicklung (vgl. Piaget, 1976, S. 42) und eröffnet so neue Handlungsmöglichkeiten, die den früheren Handlungen überlegen sind (vgl. Piaget, 1975b, S. 75-76). Dieser so beschriebene Prozess der reflektierenden Abstraktion kann unbewusst oder bewusst verlaufen (vgl. Piaget, 1976, S. 42; 1977b, S. 303).⁶ Im oben angeführten Beispiel ist davon auszugehen, dass die reflektierende Abstraktion bewusst verläuft, da das Kind die Kieselsteine gezielt in unterschiedlichen Konfigurationen anordnet und zählt. Wird ein reflektierender Abstraktionsprozess rückblickend thematisiert und dabei bewusst, handelt es sich um eine ‚reflektierte Abstraktion‘, welche dann das Ergebnis der reflektierenden Abstraktion darstellt (vgl. Piaget, 1975a, S. 91, 97).

Ein weiteres Beispiel für eine potentiell bewusst erfolgende reflektierende Abstraktion im mathematischen Bereich ist das ‚Reflektieren‘ der Handlungen bei der Berechnung von Additionsaufgaben auf die Ebene einer ganzheitlichen Betrachtung der Operation ‚Addition‘, wo durch ‚Reflexion‘, d. h. Rekonstruktion und Reorganisation der Rechenhandlungen, Gesetzmäßigkeiten und Beziehungen erkannt werden können (vgl. Piaget, 1975a, S. 88). Der spätere Übergang von der Arithmetik zur Algebra stellt ebenfalls eine reflektierende Abstraktion dar, nämlich „auf die [Ebene] der abstrakten Systematisierung im Vergleich zum konkreten Denken“ (Piaget, 1974b, S. 327).

Dieses letzte Beispiel zeigt, dass reflektierende Abstraktion von empirischen Objekten prinzipiell unabhängig ist, da die Handlungen, die abstrahiert werden, auch rein kognitiv sein können (vgl. auch Piaget, 1975a, S. 89, 90-91). Durch die ‚Reflexion‘ der zuvor ‚reflektierten‘ Strukturen werden dann nicht wie beim Anfangsbeispiel konkrete Handlungen zu verinnerlichten Operationen, sondern es werden Operationen über Operationen konstruiert (vgl. Piaget, 1976, S. 167, 170, 177). Zu Beginn der logisch-mathematischen Entwicklung muss das Kind jedoch mit konkreten Objekten handeln, um reflektierend abstrahieren

6 Noch Anfang der 1970er Jahre benennt Piaget als ersten Punkt der reflektierenden Abstraktion, „sich eines dieser Akte oder einer dieser Operationen [die reflektierend abstrahiert werden, J.H.] bewußt zu werden“ (Piaget, 1974b, S. 327). Später hebt er hingegen hervor, dass die reflektierende Reflexion, insbesondere in den früheren Phasen der Entwicklung, sowohl unbewusst als auch bewusst erfolgen kann (Piaget, 1977b, S. 303; 1977c, S. 6).

zu können. Das Eingangsbeispiel, bei dem ein Kind Kieselsteine sortiert und zählt, ist eine solche Situation. Ohne konkrete Kieselsteine wäre es nicht möglich gewesen, die Unabhängigkeit von Anzahl und Anordnung zu erkennen. Piaget nennt diese Variante der reflektierenden Abstraktion ‚*pseudoempirische Abstraktion*‘, da sie wie die empirische Abstraktion von konkreten Objekten abhängig ist, obwohl wie bei der reflektierenden Abstraktion Eigenschaften der Handlungen abstrahiert werden und nicht der Objekte (vgl. Piaget, 1975a, S. 90). Mindestens in der pseudoempirischen Variante ist reflektierende Abstraktion in jedem Stadium der Entwicklung zu finden (Piaget, 1977b, 1977c).

Zusammenfassung: vier zentrale Merkmale von Reflexion

Aus den vorgestellten Konzepten lassen sich nun einige Merkmale von Reflexion ableiten, die bei den Autoren in unterschiedlicher Gewichtung zu finden sind. Bereits aus der Wortbedeutung des lateinischen *reflexio* (Zurückbeugung), von dem sich Reflexion ableitet, geht hervor, dass sich Reflexion als Denktätigkeit *auf etwas Vorheriges bezieht* (Reflexionsmerkmal RM1). Abhängig von den theoretischen Grundannahmen des Autors, wie sich Denken vollzieht und Erkenntnis zustande kommt, handelt es sich dabei um Ideen, Denktätigkeiten, Erfahrungen oder reale bzw. mentale Operationen. Reflexion bedeutet demnach *Nachdenken* im Sinne eines sich an etwas Früheres anschließenden Denkens. Der Bezug zur zu Grunde gelegten Erkenntnis- bzw. Lerntheorie entsteht, da Reflexion für alle drei Autoren ein *konstruktiver Prozess* ist (RM2). Nach Locke entstehen neue Ideen, nach Dewey wird Erfahrungen Bedeutung verliehen und nach Piaget werden Operationen auf eine höhere Stufe gehoben und reorganisiert.

Ein weiteres Merkmal, das jedoch nicht bei allen Autoren gleichermaßen enthalten ist, ist *Distanz zu dem, worüber reflektiert wird* (RM3). Dadurch, dass Reflexion einen Rückbezug auf Früheres bedeutet, ist immer eine zeitliche Distanz zum Reflexionsgegenstand gegeben. Lockes Definition geht darüber hinaus, da entsprechend seinem Reflexionsbegriff der Verstand seine eigenen Operationen „zum Gegenstand der Selbstbetrachtung macht“ (Locke, 1894/1962, S. 112). ‚Selbstbetrachtung‘ beinhaltet eine andere Qualität von Distanz als nur den zeitlichen Abstand, da die Betrachtung seiner selbst eine Distanzierung von sich selbst erfordert. Bei Dewey und Piaget wird diese Art der Distanzierung nicht explizit genannt, was mit ihrer theoretischen Ausrichtung zu begründen ist. Dewey sieht den Ursprung der Erkenntnis nicht im Betrachten des eigenen Denkens, sondern in der Reflexion der Erfahrungen, die in Auseinandersetzung mit der Umwelt gemacht werden. Reflektierendes Denken versucht, Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhänge zu ergründen, und betrachtet Erfahrungen bewusst kritisch. In dieser kritischen Situationsanalyse zeigt sich eine distanzierte Haltung gegenüber dem Ausgangsproblem, auch wenn Dewey sie nicht so nennt. Das ‚Reflektieren‘ einer Operation nach Piaget bedeutet, dass diese auf

eine neue Ebene gehoben wird, wobei Charakteristika der Handlungen bzw. Operationen abstrahiert werden. Das Reflektieren *erzeugt* demnach Distanz von den konkreten Handlungen und Operationen.

Das vierte und letzte Merkmal hängt eng mit dem Aspekt der Distanzierung zusammen: *Bewusstsein* (RM4). Nach Locke ist Reflexion ein bewusster Akt, da er davon ausgeht, dass Denken grundsätzlich bewusst verläuft und Reflexion eine Denktätigkeit ist. Auch nach Dewey erfolgt reflektierendes Denken bewusst. Die Ansätze von Locke und Dewey unterschieden sich darin, womit sich der oder die Reflektierende bewusst befasst (s. RM1). Nach Piaget ist die Beziehung zwischen Reflexion und Bewusstsein eine andere. Die reflektierende Abstraktion kann bewusst verlaufen oder zu Bewusstsein über den Abstraktionsprozess und die abstrahierten Operationen führen. Sie kann jedoch auch gänzlich unbewusst bleiben. Hierin unterscheidet sich Piagets Reflexion wesentlich von dem Verständnis der anderen Autoren und auch der alltagssprachlichen Bedeutung als ‚Nachdenken‘ (s. o.).

Insgesamt können vier Merkmale von Reflexion unterschieden werden (s. Abb. 1.2).

Reflexion ...

- RM1 bedeutet einen *Rückbezug* auf vorherige Tätigkeiten oder Ereignisse (Gegenstand der Reflexion),
- RM2 führt zu *neuen Erkenntnissen*,
- RM3 ist durch *Distanzierung* gegenüber dem Gegenstand der Reflexion gekennzeichnet und
- RM4 verläuft bewusst oder führt zu *Bewusstsein*.

Abbildung 1.2 Vier zentrale Merkmale von Reflexion

1.1.2 Mathematikdidaktische Perspektive

In diesem Kapitel wird die Diskussion um die Bedeutung von Reflexion im Mathematikunterricht seit den 1980er-Jahren vorgestellt. Dabei wird immer wieder auf die in Kapitel 1.1.1 herausgearbeiteten Merkmale von Reflexion Bezug genommen.

Im Jahr 1984 hielt Kilpatrick auf dem fünften internationalen Kongress für Mathematikdidaktik (ICME 5) einen Hauptvortrag mit dem Titel „Reflection und Recursion“.⁷ Dieser beeinflusste die mathematikdidaktische Diskussion nachhaltig (vgl. Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007, S. 3; Kaune, 2006, S. 350;

7 Veröffentlicht unter Kilpatrick (1985, 1986).

Schülke, 2013, S. 32). Der Vortrag knüpft an die damalige Diskussion an, ob und wie das Lernen von Mathematik dadurch effektiviert werden kann, dass die Lernenden und Lehrenden ein größeres Bewusstsein über ihre Lern- und Lehrprozesse entwickeln. Hierdurch sollte erreicht werden, dass die am Mathematikunterricht beteiligten Personen ihr eigenes Denken und Handeln besser kontrollieren können (vgl. Kilpatrick, 1986). Kilpatrick (1986) schlägt die Begriffe ‚Reflexion‘ und ‚Rekursion‘ vor, um die in diese Richtung entwickelten Ideen zu ordnen. Er bezeichnet hiermit Prozesse, in denen *Rückbezüge* kognitiver Prozesse auf sich selbst erfolgen, da diese nach seiner Ansicht zu wenig beachtet wurden (RM1 nach Kap. 1.1.1). Auf die Ausführungen zur Rekursion wird im Folgenden nicht weiter eingegangen, sondern ausschließlich auf Kilpatricks Überlegungen zur Reflexion.

Um den Begriff ‚Reflexion‘ mit Inhalt zu füllen, bezieht Kilpatrick (1986) sich vorrangig nicht auf die Verwendung des Begriffs in der Philosophie (s. Kap. 1.1.1), sondern greift auf die mathematische Bedeutung des Begriffs ‚Spiegelung‘ (im Englischen ‚reflection‘) zurück. Er führt aus, dass ‚Spiegelung‘ in der Geometrie eine statische und eine dynamische Konnotation hat. Einerseits beschreibt sie das Verhältnis von symmetrisch angeordneten Punkten, also eine *statische* Beziehung. Andererseits beschreibt ‚Spiegelung‘ auch den Prozess des Spiegeln, d. h. der *dynamischen* Erzeugung der Spiegelpunkte, die symmetrisch zu den Ausgangspunkten liegen. In Kilpatricks Übertragung der Idee der Spiegelung auf Denkprozesse überwiegt dieser dynamische Aspekt. Die Reflexion über eine Idee beschreibt er als „turning it over in one’s mind“ (Kilpatrick, 1986, S. 8). Diese Interpretation von Reflexion ist nach seiner Ansicht „a powerful device for thinking, and for thinking about one’s own thought“ (Kilpatrick, 1986, S. 8). Aus diesem Grund beschäftigt er sich mit den Eigenschaften der Spiegelung, um diese auf Reflexion im Sinne einer Wahrnehmung der eigenen Gedanken zu übertragen. Er führt aus, dass sich bei der Achsen Spiegelung einer ebenen Figur ihre Orientierung umkehrt. Dadurch kann die gespiegelte Figur nicht durch Bewegungen in der Ebene deckungsgleich auf die Ausgangsfigur gelegt werden. Hierzu müsste die zweidimensionale Ebene verlassen, die Figur angehoben und umgeklappt werden. Analog ist es auch bei dreidimensionalen Objekten, die – außer durch eine erneute Spiegelung – innerhalb des dreidimensionalen Raums nicht in ihr Spiegelbild überführt werden können. Kilpatrick folgert hieraus, „that we somehow move into another dimension when we reflect on what we have done. In reflecting on our experience, we move out of the plane of our everyday existence. We give meaning to experience by getting outside the system“ (Kilpatrick, 1986, S. 9). Aus diesem Zitat geht hervor, dass sich die Reflexion auf *zuvor vollzogene Handlungen* bezieht (RM1 nach Kap. 1.1.1). Demnach erfolgt sie aus einer zeitlichen Distanz. Darüber hinaus entsteht *Distanz* dadurch, dass die Ebene des Handelns verlassen wird (RM3 nach Kap. 1.1.1). In Analogie zu den gerade ausgeführten Überle-

gungen zur Spiegelung wird eine neue ‚Dimension‘ erreicht und das bisherige System verlassen. Im geometrischen Bereich bedeutet der Wechsel in den dreidimensionalen Raum, dass die zweidimensionalen Elemente in ganz neue Zusammenhänge gestellt werden können, die zuvor unmöglich waren. Übertragen auf das Denken über die eigenen Handlungen bedeutet das, dass das eigene Denken in einer Weise betrachtet wird, die es erlaubt, neue Bezüge herzustellen und zu sehen. Demgemäß ist Kilpatrick der Ansicht, dass das Verlassen des bisherigen Systems die *Konstruktion von Bedeutung* ermöglicht (RM2 nach Kap. 1.1.1).

Dieses Verständnis steht im Einklang mit jenem, welches in Kapitel 1.1.1 mit Blick auf ausgewählte philosophische Begriffsdefinitionen herausgearbeitet wurde. Dementsprechend findet Kilpatrick (1986) seine Schlussfolgerungen in den Überlegungen von Locke (1894/1962) und Dewey (1933) bestätigt. Unter anderem mit Bezug zu Piaget (1977a) folgert Kilpatrick (1986), dass Reflexion zu *Bewusstsein* über die eigenen kognitiven Strukturen führt (RM 4 nach Kap. 1.1.1). Hiermit schlägt er die Brücke zur eingangs erwähnten Diskussion über Bewusstsein und Metakognition in der Mathematikdidaktik. Nach seiner Auffassung ist ...

... reflection [...], when applied to cognition, [a way] of becoming conscious of, and getting control over, one's concepts and procedures. To turn a concept over in the mind and to operate on a procedure with itself can enable the thinker to think how to think, and may help the learner learn how to learn. (Kilpatrick, 1986, S. 11)

Die hier genannte Bewusstheit über die eigenen Kognitionen und deren bewusste Kontrolle wird unter dem Begriff ‚Metakognition‘ zusammengefasst (vgl. Hasselhorn & Labuhn, 2008), weshalb Kilpatrick (1986) folgern kann, dass Reflexion Metakognition ermöglicht. Unter Bezugnahme auf Forschungen zur Metakognition stellt Kilpatrick daher heraus, dass Metakognition, und somit auch Reflexion, insbesondere *während* eines Lernprozesses relevant ist. In Momenten, in denen Menschen mit neuen Situationen konfrontiert sind, die sie mit dem bereits erworbenen Wissen nicht bewältigen können, muss das Problem bewusst angegangen und unter Hinzuziehung von Metakognition bearbeitet werden (vgl. Kilpatrick, 1986, S. 14).

Seit der ICME 5 tritt vermehrt „die Überlegung in den Vordergrund, Reflexion zu einem zentralen Bestandteil des Mathematikunterrichts zu machen“ (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007, S. 3). Begründet wird dies im Wesentlichen auf zwei Arten. Zum einen soll Reflexion im Mathematikunterricht das inhaltliche Lernen fördern. Dies wird wie bei Kilpatrick (1986) mit der Bedeutung von Metakognition begründet (Bauer, 1990; Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007; Neubrand, 1990a) sowie vor dem Hintergrund weiterer lerntheoretischer Annahmen (z. B. Lernen durch die Reflexion mathematischer Handlungen bei Wheatley (1992) oder durch reflektierende Abstraktion nach Piaget

(1974a) bei Cobb, Boufi, McClain und Whitenack (1997)). Zum anderen soll Reflexion die Entwicklung einer mathematischen Grundbildung unterstützen, wie sie z. B. vom Deutschen PISA-Konsortium (2000) gefordert wird (Lengnink, 2005a; Prediger, 2005).

Vor dem Hintergrund dieser beiden Perspektiven auf den Nutzen von Reflexion im Mathematikunterricht entwickelten sich zahlreiche Ansätze, die sich in ihrem Verständnis von Reflexion teilweise deutlich unterscheiden. Vielfach wird der Begriff auch in wissenschaftlichen Veröffentlichungen sehr vage definiert, z. B. als Nachdenken (Kadunz, 2005; Leuders, 2010; Prediger, 2002, 2005; Schmidt-Thieme, 2002) oder unter Verweis auf Lexikon- und Wörterbucheinträge (Bauer, 1988, 1990; Lengnink, 2005a; Siebel, 2005). Wird Reflexion spezifischer definiert, dann stehen, trotz der Unterschiede im Detail, die Merkmale *Distanzierung*, *Bewusstsein* und *Rückbezug* im Vordergrund (RM1, 3 und 4 nach Kap. 1.1.1) (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007; Lengnink, 2005b; Peschek, 2005; Sjuts, 1999; Wille, 2005; Winkel, 2012). Auch bei Autoren, die das Ziel von Reflexion im inhaltlichen Lernen sehen, wird die Frage, inwieweit diese tatsächlich zu *neuen Erkenntnissen* führt (RM2), nicht thematisiert (zu einzelnen Positionen siehe die Beschreibung der Reflexionsebenen bewusstes Handwerken, Metakognition und Inhaltsreflexion nach Lengnink (2006a, 2006b) unten).

Mehrere Autoren versuchen den Begriff der Reflexion genauer zu fassen, indem sie mit Blick auf den spezifischen Gegenstand und das Ziel der Reflexion im Mathematikunterricht verschiedene Formen von Reflexion unterscheiden. Diese Einteilungen werden entwickelt und genutzt, um andere Begriffe theoretisch weiter auszuschärfen (Bauer, 1988), um eine der gebildeten Kategorien zu beforschen (Lengnink, 2005b, 2006a, 2006b; Skovsmose, 1998), oder um Unterrichtsvorschläge für die Praxis zu formulieren (Bauer, 1990; Kuntze & Prediger, 2005; Lengnink, 2005a; Neubrand, 1990a, 1990b; Peschek, 2005; Peschek, Prediger & Schneider, 2008; Prediger, 2002, 2005; Schmidt-Thieme, 2002, 2003; Siebel, 2005).

Reflexionsebenen nach Lengnink

Lengnink (2006a, 2006b) fasst mehrere Systematiken zusammen und benennt sieben Reflexionsebenen. Sie sieht die verschiedenen Ebenen im Spannungsfeld zwischen Mathematik, Person und Welt. Abbildung 1.3 zeigt, welche Ebenen Lengnink unterscheidet und wie sie diese in Bezug auf die drei Aspekte einordnet. Die Differenzierung der Ebenen orientiert sich an der Bedeutung, die Reflexion im mathematischen Lernprozess haben kann (vgl. Lengnink, 2006a, 2006b).

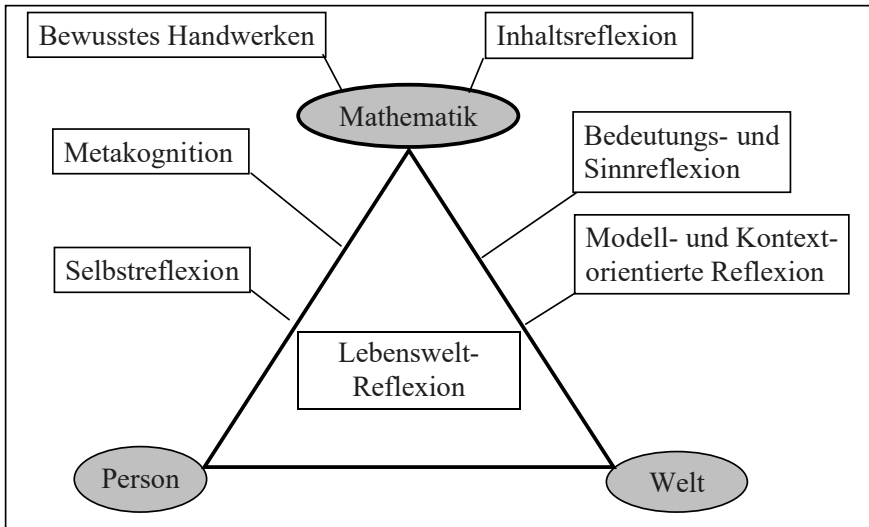


Abbildung 1.3 Reflexionsebenen (Lengnink, 2006a, S. 344)

Entsprechend den oben herausgestellten Zielperspektiven von Reflexion im Unterricht formuliert Lengnink auf übergeordneter Ebene zwei zentrale Funktionen von Reflexion im Mathematikunterricht. Zum einen kann sie das Lernen von Mathematik effektivieren und zum anderen die mathematische Mündigkeit der Schülerinnen und Schüler fördern.

Unter *mathematischer Mündigkeit* versteht Lengnink (2005b) die Einnahme einer kritischen Haltung gegenüber der Verwendung von Mathematik in außermathematischen Kontexten und den daraus folgenden Konsequenzen sowie die Fähigkeit, das Verhältnis von Mathematik und Welt aktiv mitzugestalten. Demnach korrespondiert sie mit Grundbildung im Sinne von PISA (2000):

Mathematische Grundbildung ist die Fähigkeit einer Person, die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens dieser Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürgers entspricht. (Deutsches PISA-Konsortium, 2000, S. 47, Kursivdruck i. O.)

Für die Förderung mathematischer Mündigkeit ist Reflexion, die auf das Verhältnis der eigenen Person zur Mathematik oder auf die Beziehung von Mathematik zur Welt fokussiert, von zentraler Bedeutung (vgl. Lengnink, 2005b).

Gemäß dem Ebenenmodell (Abb. 1.3) gehören hierzu Selbstreflexion, Lebensweltreflexion, Bedeutungs- und Sinnreflexion, sowie modell- und kontextorientierte Reflexion. Da sich die vorliegende Arbeit nicht mit mathematischer Mündigkeit, sondern mit dem Lernen mathematischer Inhalte befasst, wird auf diese Ebenen der Reflexion nicht weiter eingegangen.

Das *Lernen mathematischer Inhalte* wird nach Lengnink (2006a, 2006b) durch bewusstes Handwerken, Metakognition und Inhaltsreflexion unterstützt.

Bewusstes Handwerken

Auf die Ebene des bewussten Handwerks geht Lengnink (2006a, 2006b) nicht weiter ein. Die Bezeichnung lässt vermuten, dass es darum geht, Lösungsverfahren und -strategien *bewusstzumachen* (RM4 nach Kap. 1.1.1). Neubrand (1990b), der Reflektieren im Mathematikunterricht als „Sprechen über Mathematik“ (S. 66) beschreibt, erläutert diese Ebene etwas genauer. Sein Verständnis passt zur obigen Vermutung, denn es „wird über die Hilfsmittel gesprochen die es gestatten, Probleme innerhalb der Objektbereichs anzugehen“ (Neubrand, 1990b, S. 67). Hierzu zählen beispielsweise heuristische Strategien und Beweistechniken (vgl. Neubrand, 1990b).

Metakognition

Der Begriff der ‚Metakognition‘ stammt ursprünglich aus der Kognitionspsychologie und bezeichnet als Sammelbegriff das Wissen um und die bewusste Kontrolle über die eigenen Kognitionen (vgl. Hasselhorn & Labuhn, 2008). Seit dem Anfang der 1980er-Jahre findet das Konzept der Metakognition Eingang in die mathematikdidaktische Forschung, wo sowohl der Wissens- als auch der Kontrollaspekt empirisch untersucht wird (vgl. Schneider & Artelt, 2010).

Wie bereits aus dem Ebenenmodell deutlich wird, steht der Begriff ‚Metakognition‘ in Beziehung zur ‚Reflexion‘. Der enge Zusammenhang zwischen beiden Konzepten entsteht zunächst dadurch, dass sowohl Reflexion als auch Metakognition durch *Distanz* gekennzeichnet sind und als *bewusste Prozesse* aufgefasst werden (können) (RM3 und 4 nach Kap. 1.1.1). Metakognition bezieht sich eindeutig auf die eigenen Kognitionen, was bei der Reflexion über Mathematik der Fall sein kann (vgl. z. B. Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007), aber nicht muss (vgl. z. B. Wheatley, 1992).

Das Verhältnis von Metakognition und Reflexion wird unterschiedlich interpretiert. In der mathematikdidaktischen Literatur sind folgende Konzepte zu finden:

- Metakognition ist eine Ebene der Reflexion.
- Reflexion ermöglicht Metakognition.
- Reflexion ist eine metakognitive Aktivität.

Aus dem Ebenenmodell (vgl. Abb. 1.3) geht hervor, dass Lengnink (2006a, 2006b) *Metakognition als eine Ebene von Reflexion* betrachtet. Allerdings erläutert sie den Begriff im Zusammenhang mit dem Ebenenmodell nicht. An anderer Stelle beschreibt sie Metakognition „als nachdenkliches Zurücktreten in Bezug auf den eigenen Lernprozess“ (Lengnink, 2005a, S. 27). Demnach fasst sie den Aufbau von Wissen über die eigenen Kognitionen und ihre Entwicklung als spezifische Form der Reflexion auf, welche sie Metakognition nennt. Der bewusste Rückblick auf den mathematischen Lösungs- oder Lernprozess wird auch von anderen Autoren, überwiegend im Kontext von konkreten Unterrichtsvorschlägen, als Reflexion bezeichnet (Adhami, 2008; Brandt, 1997; Kuntze, 2005; Schmidt-Thieme, 2003). Hierbei wird jedoch überwiegend kein Bezug zur Metakognition hergestellt.

Wie bereits ausgeführt, ist nach der Auffassung von Kilpatrick (1986) Bewusstheit und damit auch *Metakognition eine Folge von Reflexion*. Ähnlich wie Lengnink (2005a) betrachtet er den Prozess der Entwicklung von Aspekten der Metakognition, hier Bewusstheit und Kontrolle, als Reflexion. Jedoch stellt dieser nach seiner Auffassung noch keine Metakognition dar.

Aus den bisherigen Ausführungen zur Metakognition wird deutlich, dass sich die Definition des Begriffs Metakognition im Detail unterscheiden kann, obwohl grundsätzlich eine große Ähnlichkeit zwischen den Konzepten besteht. Einerseits bedeutet Metakognition hier jeweils ein Bewusstmachen der eigenen Kognitionen oder deren Entwicklung, andererseits wird speziell *Reflexion* in diesem Zusammenhang unterschiedlich definiert und in verschiedener Weise mit Metakognition in Verbindung gebracht.

Eine deutlich klarere Definition des Verhältnisses von Reflexion und Metakognition nehmen Cohors-Fresenborg und Kaune (2007) vor, welche *Reflexion als eine von drei metakognitiven Aktivitäten* (Planung, Monitoring, Reflexion) auffassen. Alle drei metakognitiven Aktivitäten stellen Aspekte der bewussten Kontrolle kognitiver Prozesse dar. Ihr wesentliches Unterscheidungsmerkmal ist das zeitliche Verhältnis zur kognitiven Aktivität, auf die sie sich beziehen. Reflexion ist dadurch definiert, dass sie eine frühere kognitive Aktivität zum Gegenstand hat (vgl. Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007, S. 7-8). Somit wird hier der *Rückbezug* auf eine vorherige Tätigkeit (RM1 nach Kapitel 1.1.1) betont, während *Distanzierung* und *Bewusstsein* (RM3 und 4) für alle drei metakognitiven Aktivitäten kennzeichnend sind.

Neben dieser grundsätzlichen Definition von Reflexion als metakognitivem Rückzug auf frühere Kognitionen wird eine genauere Begriffsbestimmung über die Unterscheidung von Unterkategorien und Teilaspekten erreicht. Diese sind in einem bei Analysen von Unterrichtsgesprächen entwickelten Kategoriensystem aufgeführt. Tabelle 1.1 zeigt die sieben Unterkategorien von Reflexion nach dem für den Mathematikunterricht in der Grundschule angepassten Kategoriensystem von Winkel (2012).

Tabelle 1.1 Sieben Unterkategorien von Reflexion nach Winkel (2012, S. 35, Hervorhebungen durch Fettdruck i. O.)

Reflexion	
R1	Strukturanalyse einer fachspezifischen Darstellung
R2	Reflexion über Begriffe
R3	Ergebnisse eines Reflexionsprozesses ausgedrückt durch bewusste (fachspezifische) Darstellung
R4	Wirkungsweise von fachspezifischen Werkzeugen oder Methoden einschätzen / Angabe eines Werkzeugs , mit dem vorgegebenes Ergebnis erzeugt werden kann
R5	Strukturanalyse einer Argumentation
R6	Reflektierende Einschätzung / Evaluation
R7	Zusammenspiel von Darstellung und Vorstellung thematisieren

Die Unterkategorien geben an, worauf sich Reflexion im mathematischen Diskurs (der Grundschule) beziehen kann. Es handelt sich dabei um frühere Aussagen (R2, R5), eine zuvor entwickelte oder auch vorgegebene Darstellung (R1, R7) oder um (bekannte) Werkzeuge und Methoden (R4). Die Unterkategorie R6 umfasst eine rückblickende Bewertung des Diskurses sowie eine Einschätzung der eigenen Fähigkeiten und des eigenen Verständnisses. Reflexion bezieht sich hier als metakognitive Aktivität nicht nur auf die eigenen Kognitionen, sondern auch auf die anderer Diskursteilnehmer. Diese Ausweitung beruht auf der Grundannahme, dass es möglich ist, aus Äußerungen und Darstellungen auf die Intention zu schließen, mit der diese getätigt bzw. erstellt wurden. Auf diese Weise könne auf die zu Grunde liegenden Kognitionen geschlossen werden (vgl. Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007, S. 11, 19; Kaune, 2001).

Inhaltsreflexion

„Inhaltsreflexion“ befasst sich laut Lengnink (2006b) mit Fragen wie „correctness, clarity and sophistication“ (S. 343). Gemäß diesen als Beispiele angegebenen Stichworte geht es um die Bewertung mathematischer Prozesse oder Produkte auf unterschiedlichen Ebenen, nämlich mit Blick auf Fakten, Verständlichkeit und die Überzeugungskraft. Demnach steht hier der *Rückbezug* auf frühere Prozesse und Produkte, die *bewusst* und *distanziert* betrachtet werden, sodass eine Bewertung möglich ist, im Mittelpunkt (RM1, 3, 4 nach Kap. 1.1.1). Wheatley (1992) betrachtet Reflexion über mathematische Inhalte im Kontext des ‚problem-centered learning‘ und definiert es als „distancing oneself from the action of doing mathematics“ (S. 535). Er fokussiert demnach auf die Einnahme einer *distanzierten Haltung* gegenüber der mathematischen Tätigkeit (RM3 nach Kap. 1.1.1). Diese ist nach Bauer (1988, 1990) für Inhaltsreflexion gerade nicht wesentlich. Er definiert Inhaltsreflexion, die er auch Reflexion im Gegenstand Mathematik nennt, deutlich weiter als Lengnink und Wheatly. Bauer versteht

darunter „ein auf mathematische Gegenstände sich richtendes prüfendes Nachdenken und Überlegen, ein sich Vertiefen in Mathematik, ein verständiges sich Beschäftigen und Umgehen mit Mathematik, ein auf hohem kognitivem Niveau mathematisch Aktivsein“ (Bauer, 1988, S. 183). Die Weite dieser Definition ist sowohl produktiv als auch problematisch. Einerseits macht sie deutlich, dass eine *distanzierte Beschäftigung* mit mathematischen Inhalten im Prozess des Mathematiktreibens möglich und sinnvoll ist (RM1). Hierauf verweisen die Begriffe ‚prüfendes Nachdenken‘ und ‚auf hohem kognitivem Niveau‘. Reflexion bedeutet demnach nicht zwangsläufig, dass die mathematische Tätigkeit zugunsten reflexiver Aktivitäten unterbrochen wird, um so eine zeitliche Distanz zu erzeugen. Andererseits ist es schwierig, Inhaltsreflexion nach Bauers Definition von anderen anspruchsvollen mathematischen Aktivitäten wie Problemlösen oder Beweisen abzugrenzen. Bauer nimmt eine solche Abgrenzung auch nicht vor. Vielmehr ist er der Ansicht, dass man „das Vermögen, in diesem Sinne zu reflektieren, [...] im wesentlichen mit dem Konstrukt ‚mathematische Kompetenz‘ gleichsetzen [kann]“ (Bauer, 1988, S. 183).

1.1.3 Zusammenfassung: Merkmale von Reflexion im Mathematikunterricht

In Kapitel 1.1.1 konnten aus philosophischen Konzepten unterschiedlicher reflektiver Aktivitäten vier zentrale Merkmale von Reflexion als einem individuellen Denkprozess herausgearbeitet werden (s. Abb. 1.4).

Reflexion ...

RM1 bedeutet einen *Rückbezug* auf vorherige Tätigkeiten oder Ereignisse (Gegenstand der Reflexion),

RM2 führt zu *neuen Erkenntnissen*,

RM3 ist durch *Distanzierung* gegenüber dem Gegenstand der Reflexion gekennzeichnet und

RM4 verläuft bewusst oder führt zu *Bewusstsein*.

Abbildung 1.4 Vier zentrale Merkmale von Reflexion

In Kapitel 1.1.2 wurde herausgearbeitet, dass sich auch mathematikdidaktische Konzepte, welche das Ziel von Reflexion in der Förderung des Lernens mathematischer Inhalte sehen, mit diesen Merkmalen charakterisieren lassen. Trotz ihrer Gemeinsamkeit, Reflexion im Wesentlichen durch *Distanzierung*, *Bewusstsein* und den *Rückbezug* auf vorherige mathematische Aktivitäten zu kennzeichnen (RM1, 3 und 4), sind die Konzepte in ihrer konkreten Ausformung sehr vielfältig und können unterschiedlichen Reflexionsebenen (Lengnink,

2006a, 2006b) zugeordnet werden. Für die Förderung des Mathematiklernens sind insbesondere die Reflexionsebenen Metakognition und Inhaltsreflexion von Bedeutung. In der Regel unterscheiden sich diese beiden Ebenen durch den Gegenstand der Reflexion, während die Tätigkeit des Reflektierens durch dieselben Merkmale gekennzeichnet wird. So zeichnet sich Reflexion, wenn sie mit Metakognition in Verbindung gebracht wird, wesentlich dadurch aus, dass eigene oder auch fremde Kognitionen (zunehmend) *bewusst* und *distanziert* betrachtet werden (RM3, RM4). In aktuellen Untersuchungen (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007; Winkel, 2012) wird zudem das Merkmal des *Rückbezugs* zur Definition von Reflexion als metakognitiver Aktivität herangezogen (RM1). Inhaltsreflexion wird in der Regel über dieselben Merkmale definiert, bezieht sich jedoch auf mathematische Inhalte und mathematische Handlungen, welche *bewusst* und *distanziert* betrachtet werden, teilweise im *Rückblick* auf die eigene mathematische Betätigung. Dabei wird vorausgesetzt, dass diese Art zu reflektieren zum Lernen beiträgt. Ob und in welchem Maße im Zuge von Reflexion tatsächlich *neue Erkenntnisse* aufgebaut werden (RM2), wird nicht gezielt in den Blick genommen.

Ein deutlich umfassenderes Verständnis von Inhaltsreflexion vertritt Bauer (1988, 1990). Er fasst sie als Tätigkeit auf, welche eine Distanzierung im Sinne einer Beschäftigung auf einem hohen kognitiven Niveau bedeutet und damit während des Mathematiktreibens erfolgt und die innermathematische Ebene nicht verlässt. Diese Reflexionsebene setzt er jedoch mit ‚mathematischer Kompetenz‘ gleich und grenzt sie somit nicht von anderen mathematischen Tätigkeiten ab. Ein Ziel dieser Arbeit besteht dementsprechend darin, Inhaltsreflexion so zu fassen, dass es sich wie bei Bauer (1988, 1990) um einen Teil von Mathematik als Tätigkeit handelt, der jedoch von anderen (kognitiv anspruchsvollen) mathematischen Denktätigkeiten abgegrenzt werden kann. Grundlage hierfür ist unter anderem die Arbeit von Schülke (2013), die auf einer Idee von Freudenthal (1983) aufbauend mathematische Reflexion als interaktiven Prozess versteht. Beide Konzepte werden im folgenden Kapitel 1.2 vorgestellt und diskutiert. Es thematisiert eine Perspektive auf Reflexion, die diese nicht als rein individuelle Aktivität versteht.

1.2 Reflexion als interaktiver Prozess

Die in Kapitel 1.1 angesprochenen Definitionen von Reflexion betrachten diese als eine individuelle kognitive Aktivität. In diesem Kapitel wird ein Ansatz vorgestellt, nach dem Reflexion im Mathematikunterricht der Grundschule auf Interaktion angewiesen ist, da sie sich als ein interaktiver Prozess vollzieht. Zuvor ist hervorzuheben, dass auch Autoren, die Reflexion grundsätzlich als individuellen Denkprozess verstehen, Interaktion für die Initiierung und Förderung solcher individuellen Reflexionen als bedeutsam erachten. So wird vorgeschlagen,

im Klassenverband gemeinsam zu reflektieren, z. B. im Sinne einer distanzier-ten Betrachtung und expliziten Thematisierung von Handlungen im Gespräch (Cobb et al., 1997; Wheatley, 1992) oder indem auf unterschiedlichen Ebenen explizit über Mathematik gesprochen wird (Neubrand, 1990a, 1990b). Cohors-Fresenborg und Kaune (2003, 2007) und Winkel (2012) gehen darüber hinaus und fördern die Etablierung einer metakognitiv-diskursiven Unterrichtskultur, in welcher „der Prozess des Bewusstmachens eigener Denkvorgänge mit der kritischen Auseinandersetzung (Diederich, 1996) mit Denkvorgängen anderer zur Kultur diskursiven Argumentierens verwoben wird“ (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2003, S. 173). Auf diese Weise sollen die Schülerinnen und Schüler dazu angeregt werden, eigene und fremde Vorstellungen zu reflektieren. Elbers (2003) stellt heraus, dass Gespräche, in denen verschiedene Lösungsideen vorgestellt und diskutiert werden, zu kollektiven Reflexionen werden können. Die Schülerinnen und Schüler würden so angeregt, über ihre Argumente, die sie nutzen, um die Mitschülerinnen und Mitschüler zu überzeugen, nachzudenken. Neben diesen kollektiven Reflexionen erfolgen in Einzelarbeitsphasen auch individuelle Reflexionen, welche Elbers (2003) nicht mit ersteren in Beziehung bringt.

Diese Zusammenstellung zeigt, dass Interaktion, genauer das Gespräch in einer Gruppe, häufig als Möglichkeit angesehen wird, Reflexion über Mathematik im Unterricht anzuregen und zu etablieren. Es besteht dabei die Annahme, dass die Schülerinnen und Schüler hierdurch auch außerhalb dieser Gespräche reflektieren. Dem entgegen steht die Position von Schülke (2013), dass Reflexion über Mathematik grundsätzlich auf Interaktion angewiesen ist (vgl. Schülke, 2013, S. 52). Diese Annahme ergibt sich aus einem fachspezifischen Verständnis ‚mathematischer Reflexion‘. Alle bisher angesprochenen mathematikdidaktischen Überlegungen zur Reflexion gehen von einem fachunabhängigen Reflexionsbegriff aus und stellen den Bezug zum Mathematikunterricht durch den Gegenstand der Reflexion her. Hieraus ergibt sich ein Verständnis von Reflexion als letztlich individueller Aktivität.

Nach Steinbring (2000; 2005; vgl. Kap. 2.1) ist jedoch die Konstruktion neuen mathematischen Wissens in der Grundschule notwendig auf Interaktion angewiesen. Da Schülke (2013) die Entwicklung neuer mathematischer Erkenntnisse als wesentliches Merkmal von Reflexion ansieht (RM2 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3), folgert sie, dass auch mathematische Reflexion in der Interaktion verortet sein muss. Als Grundlage für die Entwicklung eines neuen Konstrukts ‚mathematische Reflexion‘ dient Schülke dabei Freudenthals Verständnis von Reflexion als „Sichwiderspiegeln im anderen“ (Freudenthal, 1983, S. 491).

In diesem Kapitel werden zunächst diese Überlegungen von Freudenthal dargestellt (Kap. 1.2.1), bevor detailliert auf die theoretischen und empirischen Ergebnisse von Schülke eingegangen wird (Kap. 1.2.2).

1.2.1 Reflexion als widerspiegelndes Denken (Freudenthal)

Freudenthal (1983) befasst sich mit der Entwicklung reflexiven Denkens. Den Begriff ‚reflexives Denken‘ verwendet er, um deutlich zu machen, dass er ‚reflektieren‘ nicht mit ‚denken‘ gleichsetzt, wie dies häufig der Fall ist (vgl. Einleitung zu Kap. 1.1). Vielmehr ist mit „reflexivem Denken [...] etwas Ausgeklügelteres [gemeint] als bloßes Denken“ (Freudenthal, 1983, S. 486). Um die Besonderheit reflexiven Denkens herausstellen zu können, greift Freudenthal (1979, 1983) auf die physikalische Bedeutung des Wortes ‚reflektieren‘ als Spiegeln von Licht an einem Spiegel zurück. Analog nennt er ‚reflexives Denken‘ auch „widerspiegelndes Denken“ (Freudenthal, 1983, S. 491). Merkmale des reflexiven Denkens lassen sich dann vom physikalischen Widerspiegeln ableiten. Wesentliches Charakteristikum des Widerspiegelns von Licht mit Hilfe eines Spiegels ist, dass das, was sich vor dem Spiegel befindet, im Spiegel zu sehen ist. Wie dies beim ‚widerspiegelnden Denken‘ zu verstehen ist, wird deutlich, wenn man Freudenthals Überlegungen zum Ursprung des reflexiven Denkens betrachtet. Er geht davon aus, „dass jede Reflexion in sich selber ausgelöst wird durch die Reflexion am anderen“ (Freudenthal, 1983, S. 491). ‚Reflexion am anderen‘ stellt eine Form des ‚widerspiegelnden Denkens‘ dar, weshalb Freudenthal sie auch „Sichwiderspiegeln im anderen“ (Freudenthal, 1983, S. 491) nennt. Mit Blick auf das Widerspiegeln von Licht mit einem Spiegel besteht sie darin, dass man sich selbst im anderen sieht; man versetzt sich in seine Lage. Dies geschieht mit dem Ziel, einen Mitmenschen „zu verstehen, zu durchschauen, auszukundschaften, reinzulegen“ (Freudenthal, 1979, S. 193).⁸ Die ‚Reflexion am anderen‘ erfolgt demnach, um etwas über die zunächst verborgenen Hintergründe der Äußerungen oder Handlungen eines anderen Menschen zu erfahren. Hier ist ein Merkmal von Reflexion zu erkennen, das in Kapitel 1.1.1 und Kapitel 1.1.3 herausgearbeitet wurde: der *Erwerb neuer Erkenntnis* als Folge von Reflexion (RM2). Zur Verdeutlichung wird eines von Freudenthals Beispielen für reflexives Denken angeführt, das ein Gespräch zwischen ihm und seinem Enkel Bastiaan wiedergibt.

Vor ein paar Tagen sahen wir ein großes Lastauto mit dem Nummernschild BB ... (alle Arten von Autos interessieren Bastiaan). Ich mache ihn auf dieses Schild aufmerksam. Irgendwo an dem Lastauto entdeckte er noch ein B3. Ich sagte: „Es sieht wie ein Auto von Bastiaan aus.“ Er fragte: „Warum denkst du, daß es wie ein Auto von mir aussieht?“ Ich antwortete: „Was denkst du, warum ich denke, daß es wie

8 Die Deutung von ‚Sichwiderspiegeln im anderen‘ als Bemühen, diesen zu verstehen und zu durchschauen, wird darauf gestützt, dass im Lateinischen die Begriffe ‚Spiegel‘ (‚speculum‘) und ‚erforschen‘ (‚speculare‘) dieselbe Wurzel haben (‚specus‘: die Augenhöhle) (vgl. Freudenthal, 1983, S. 491).

ein Auto von dir aussieht?“ Er: „Weil so viele B's drauf stehen.“ (Freudenthal, 1983, S. 487)

Bastiaan wird in dieser Szene explizit dazu aufgefordert, eine Vermutung über die Hintergründe der Behauptung seines Großvaters anzustellen, dass das Auto aussähe, als wäre es von Bastiaan, woraufhin er dazu eine Annahme äußert. Die Frage „Was denkst du, warum ich denke, daß es wie ein Auto von dir aussieht?“ hat dazu geführt, dass der Junge versucht, die Motive seines Großvaters zu durchschauen, wozu er sich dazu in seine Lage versetzt, d. h., er spiegelt sich in ihm wider. Demnach wurde hier durch eine Frage reflexives Denken angeregt (vgl. Freudenthal, 1983, S. 487).

Beim Erforschen des anderen, bei dem man sich in ihn hineinversetzt, „erfährt man Menschliches, erfährt man also auch etwas über sich selber“ (Freudenthal, 1979, S. 193). Deshalb folgt aus dem ‚Sichwiderspiegeln im anderen‘ unmittelbar die zweite Form reflexiven Denkens, nämlich die ‚Spiegelung in sich selbst, die Introspektion‘ (Freudenthal, 1983, S. 491)⁹. Nachdem man versucht hat, sich in eine andere Person hineinzusetzen, erforscht man sich selbst, man reflektiert „über sich selber, über das, was man tat, fühlte, sich einbildete, dachte, über das, was man tut, fühlt, sich einbildet, denkt“ (Freudenthal, 1983, S. 491). Die ‚Reflexion am anderen‘ führt demnach zu einer *distanzierten* Betrachtung der eigenen Person (RM3 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3).

In Analogie zum ‚Sichwiderspiegeln im anderen‘ besteht bei der ‚Spiegelung in sich selbst‘ das Ziel darin, etwas über sein eigenes Verhalten und seine Gefühle zu erfahren. Hierbei handelt es sich um Aspekte, die zunächst nicht offensichtlich sind, da ansonsten keine weitere Beschäftigung hiermit erforderlich wäre. Als ein Beispiel hierfür führt Freudenthal die Erkenntnis an, *woher* man etwas weiß, *was* man weiß (vgl. Freudenthal, 1983, S. 491). Auch die Introspektion ist bei Freudenthal (1979, 1983) also wesentlich durch den Wunsch motiviert, zu *neuen Erkenntnissen* zu gelangen (RM2 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3).

Während die ‚Reflexion am anderen‘ zunächst für die Entwicklung des reflexiven Denkens notwendig ist, kann die ‚Spiegelung in sich selbst‘ später auch ohne Interaktion erfolgen (vgl. Freudenthal, 1983, S. 491).

9 Dies zeigen auch qualitative Studien zur sozialen Perspektivübernahme. Sie kommen zu dem Schluss, dass sich die Fähigkeit zur Selbstreflexion entwickelt, wenn sich ein Kind aus der Perspektive eines anderen sehen kann. Hierzu muss es sich in eine andere Person hineinversetzen können (vgl. Selman, Demorest & Krupa, 1984, S. 101-116, 147-153). Reflexives Denken als Betrachtung der eigenen Person aus der Perspektive eines anderen nennt Freudenthal (1983) an späterer Stelle „Reziprokwechsel“ (S. 492; s. auch nächster Abschnitt).

Reflexion als Standpunktwechsel

Die Beschreibung von reflexivem Denken als ‚Sichwiderspiegeln im anderen‘ konkretisiert Freudenthal (1983) als mentalen Standpunktwechsel, „wobei der Standpunkt selbst lokal oder mental sein kann, während der Wechsel in Raum, Zeit oder einer anderen, etwa mentalen Dimension stattfinden kann“ (S. 492). In dieser Aufzählung wird deutlich, dass es qualitativ unterschiedliche Standpunktwechsel gibt. Es kann darum gehen, sich gedanklich zu einer anderen räumlichen Position zu begeben, an der z. B. eine andere Person steht (lokaler Standpunkt, räumlicher Wechsel), oder auch darum, auf die Hintergründe der Äußerung einer anderen Person zu schließen (mentaler Standpunkt, mentaler Wechsel). Freudenthal (1983) beschreibt drei übergreifende Formen des Standpunktwechsels, die für jede der oben angedeuteten Möglichkeiten denkbar sind:

- Wechsel von A nach B, um nach A zurückzublicken
Ich nenne das *Reziprokwechsel*. Oder:
- Wechsel von A nach B, während C betrachtet wird
Das nenne ich *Richtwechsel*. Und schließlich:
- Wechsel der Umgebung von A zu der von B
Das nenne ich *Parallelwechsel*. (S. 492, Hervorhebungen i. O.)

Im Weiteren werden diese drei Arten des Standpunktwechsels näher erläutert.

Das Adjektiv ‚reziprok‘ bedeutet „wechsel-, gegenseitig, aufeinander bezüglich“ (Zwahr, 2006a, S. 75) und leitet sich vom lateinischen ‚reciprocus‘ ab, das mit „auf demselben Weg zurückgehend“ (Zwahr, 2006a, S. 75) übersetzt werden kann. Dementsprechend bezeichnet der Begriff *Reziprokwechsel* Standpunktwechsel, bei denen auf den Ausgangsstandpunkt zurückgeblickt wird. Als Beispiel hierfür nennt Freudenthal den Blick in den Spiegel. Dieser dient dazu herauszufinden, wie man von anderen gesehen wird; d. h., man schaut vom Standpunkt eines anderen auf sich selbst zurück. Auch die Überlegung, welche Fähigkeiten und Kenntnisse man zu einem früheren oder späteren Zeitpunkt im Vergleich zum aktuellen Zustand hatte bzw. haben wird, stellt einen Reziprokwechsel dar (vgl. Freudenthal, 1983). Hierbei erfolgt ein Wechsel in der Zeit, um dann vom zeitlich veränderten Standpunkt auf die aktuellen Fähigkeiten und Kenntnisse zu blicken.

Als eine Form des *Richtwechsels* nennt Freudenthal (1983) die Beschreibung eines Weges durch Zeigen. Allerdings stellt er zuvor heraus, dass es sich hierbei nicht um reflexives Denken handelt. Mit Blick auf die Erläuterungen im ersten Abschnitt zum Begriff des reflexiven Denkens wird deutlich, weshalb es sich hier nicht um Reflexion handelt. Beim Beschreiben eines Weges durch Zeigen wechselt man gedanklich zu einem anderen räumlichen Standpunkt und beschäftigt sich nicht mit den zunächst verborgenen Hintergründen und Motiven anderer Personen. Dies ist vielmehr in Situationen gegeben, in denen man sich

darüber Gedanken macht, wie der mentale Standpunkt einer anderen Person ist. Zeichen hierfür ist z. B. das Stellen vorbereitender Fragen, bevor die Hauptfrage gestellt wird. Die ersten Fragen dienen dazu „herauszufinden, wo er [der andere, J.H.] steht, und zu diesem Zweck ändert man seinen eigenen Standpunkt“ (Freudenthal, 1983, S. 493). Auf Grund dieser ‚Reflexion am anderen‘ kann man seine Hauptfrage reflektieren und infolgedessen abändern oder auch zurückhalten.

Der *Parallelwechsel* ist im Wesentlichen dadurch gekennzeichnet, dass sich die Standpunkte – der eigene und der, zu dem gewechselt wird – in unterschiedlichen *Umgebungen* befinden. Um zu verdeutlichen, was er unter dem Begriff ‚Umgebung‘ versteht, führt Freudenthal (1983) den Generationenwechsel an. Hier sind einerseits Wechsel in der Zeit denkbar (z. B.: Wie hat der Großvater gelebt, als er ein Kind war?) und andererseits mentale Wechsel (z. B.: Inwieweit unterscheidet sich das Leben von Erwachsenen und Kindern?). Zur Konkretisierung wird hier ein Beispiel von Freudenthal (1979, 1983) angeführt.

Er [Bastiaan, J.H.] (3;4) will seinem Grossvater zum Geburtstag etwas schenken. Der Grossvater soll es mit ihm kaufen. Aber was? Er entscheidet: Ein kleines Spielauto. Spielautos sind seine Leidenschaft. Der Grossvater soll das Auto selber im Laden aussuchen, aber der überlässt es dem Buben. Das Geschenk wird gekauft. Ich hatte gedacht, dass er es als Spielzeug für sich meinte. Aber nein. Es steht auf Grossvaters Schreibtisch. In der nächsten Zeit erkundigt er sich immer wieder, ob der Grossvater auch mit dem Auto spiele. Er ist unsicher geworden. (Freudenthal, 1979, S. 191)

Nach der Analyse von Freudenthal (1979) misslingt Bastiaan hier die Reflexion. Betrachtet man die Szene mit Blick auf das Konzept des Standpunktwechsels, so war Bastiaan herausgefordert, einen Parallelwechsel zur ‚Umgebung‘ der Erwachsenen zu vollziehen, in der nicht mit Spielautos gespielt wird. Dieser Wechsel gelingt ihm nicht bzw. er führt nicht dazu, dass der Junge seine Geschenkswahl daran ausrichtet. Erst als das Auto immer auf dem Schreibtisch des Großvaters steht, wird er unsicher, ob das Spielzeugauto ein passendes Geschenk war. Diese Unsicherheit und das Zweifeln, ob der Großvater ebenfalls mit Autos spielt, bezeichnet Freudenthal als „Vorstadium“ (Freudenthal, 1983, S. 487). Es könnte sich insofern um ein Vorstadium reflexiven Denkens handeln, als Bastiaan bewusst wird, dass der Großvater in der ‚Umgebung‘ der Erwachsenen eventuell anderen Aktivitäten nachgeht als Bastiaan in der ‚Umgebung‘ der Kindheit. Erst aus dieser Erkenntnis ergibt sich die Möglichkeit, bei zukünftigen Entscheidungen einen Parallelwechsel zu vollziehen. An diesem Beispiel wird deutlich, dass das Sichwiderspiegeln im anderen bedeutet, sich selbst im anderen zu sehen. Um zu entscheiden, was er seinem Großvater schenkt, überlegt er, was er an der Stelle des Großvaters gern geschenkt bekäme und entscheidet sich für das Spielauto.

Auch der Großvater ist dieser Szene zum Parallelwechsel aufgefordert, aus welchem er falsche Schlüsse zieht. Er stellt Vermutungen über die Schenkabsichten des 3-jährigen Bastiaan an und denkt, „dass er es als Spielzeug für sich meinte“ (Freudenthal, 1979, S. 191). Der Erwachsene versetzt sich in die ‚Umgebung‘ des Kleinkindes und nimmt an, dass sein Enkel nicht wirklich etwas für den Großvater kaufen möchte, sondern für sich selbst. Jedoch stimmt dieser Schluss nicht. Auch der (erwachsene) Großvater kann also nicht wirklich den Standpunkt seines Enkels einnehmen, sondern lediglich vor dem Hintergrund seines eigenen Wissens über seinen Enkel und das Schenken bei Kleinkindern Hypothesen über Bastiaans Standpunkt entwickeln. Diese entsprechen in diesem Beispiel nicht dem tatsächlichen Standpunkt des Jungen.

Die Idee des Standpunktwechsels wird von Freudenthal (1983) nicht auf das Mathematiklernen bezogen. Das Konzept von Reflexion als ‚widerspiegelndem Denken‘ betrachtet er jedoch für das Lernen von Mathematik als sehr relevant. Dies ergibt sich zum einen aus seiner Theorie der Stufen des mathematischen Lernprozesses und zum anderen aus Überlegungen zum Entwickeln von mathematischen Beweisen.

Widerspiegelndes Denken und Mathematiklernen

Das Lernen von Mathematik verläuft nach Freudenthal (1973, 1974, 1978, 1983) in Stufen, bei denen es sich um Stufen des Verständnisses handelt (vgl. Freudenthal, 1974). Das Verhältnis einer höheren Stufe zu vorhergehenden Stufen besteht darin, dass „die auf niedrigerer Stufe *betätigte* Mathematik auf höherer Stufe zur *betrachten* Mathematik wird“ (Freudenthal, 1978, S. 64, Hervorhebungen i. O.). Dieser Rückbezug kann bewusst erfolgen und ist dann für das Lernen besonders fruchtbar (vgl. Freudenthal, 1978, S. 64). Damit der Wechsel von einer Stufe zur nächsten gelingen kann, ist eine heterogene Lerngruppe förderlich (vgl. Freudenthal, 1974, 1978) und die Fähigkeit zur Reflexion erforderlich (vgl. Freudenthal, 1973, S. 123). Die Annahme, dass Reflexion als ‚Sichwiderspiegeln im anderen‘ beginnt, bringt beide Aussagen zusammen. In einer heterogenen Lerngruppe befinden sich „Schüler verschiedener Niveaus, die an *einer* Aufgabe – jeder auf der ihm eigenen Stufe – zusammenarbeiten“ (Freudenthal, 1978, S. 63, Hervorhebung i. O.). In einer solchen Gruppe kann sich eine Schülerin oder ein Schüler höherer Stufe an einer Schülerin oder einem Schüler niedrigerer Stufe reflektieren, sodass „man versteht, wie ein anderer lernt, ahnt, wie man selber gelernt hat, [man] objektiviert die Tätigkeit auf niedrigerer Stufe, um sie bewusster wiederholen zu können, auch wenn man sie inzwischen mechanisiert und algorithmisiert hat“ (Freudenthal, 1978, S. 64). In diesem Zitat ist deutlich das Konzept des widerspiegelnden Denkens zu erkennen. Indem die Schülerinnen und Schüler versuchen, ihre Mitschülerinnen und Mitschüler auf niedrigerer Stufe zu verstehen (‚Sichwiderspiegeln am anderen‘), kommen sie dazu, die eigenen Kompetenzen bewusster zu durchdringen (‚Spie-

gelung in sich selbst'). Auf diese Weise kann der Übergang von der ‚betätigten‘ zur ‚betrachteten Mathematik‘ durch reflexives Denken erfolgen.

Zum einen zeigt dies die Bedeutsamkeit des reflexiven Denkens für das Lernen von Mathematik und zum anderen werden in diesem Zusammenhang zwei weitere Facetten von Reflexion im Sinne Freudenthals deutlich. Sie kann *bewusst verlaufen* und in Auseinandersetzung mit Mitschülerinnen und Mitschülern auf einer niedrigeren Stufe zu *Bewusstsein* über die früheren mathematischen Tätigkeiten führen. Somit findet sich bei Freudenthals Reflexionsbegriff neben den bereits benannten Merkmalen des *Erkenntnisgewinns* und der *distanzierten* Betrachtung der eigenen Person auch die Möglichkeit, dass durch Reflexion im Sinne eines Sichwiderspiegeln ein Rückblick auf frühere Lernprozesse erfolgt, welche dann *bewusst* werden (RM1, 2, 3 und 4 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3).

Ein weiterer Bezug zur „Mathematik als Tätigkeit“ (Freudenthal, 1973, S. 110) und damit auch zum Lernen von Mathematik entsteht dadurch, dass Freudenthal (1979, 1983) Reflexion als Vorstadium des mathematischen Beweisens ansieht, genauer als Zwischenstadium zwischen dem Konstruieren und dem Beweisen. Hintergrund dieser Annahme ist die Auffassung, dass man solche mathematischen Zusammenhänge leichter beweisen kann, von denen man bereits weiß, dass sie gelten (vgl. Freudenthal, 1973, S. 110; 1991, S. 102). Reflexion im Sinne einer ‚Spiegelung in sich selbst‘ bedeutet dann zu erforschen, woher man dies weiß. Man hinterfragt, weshalb man der Ansicht ist, dass der angenommene Zusammenhang tatsächlich gilt, und kann dann daraus einen Beweis entwickeln.

Das Beweisen [...] muss von mehr reflektivem Ursprung sein. Man hat etwas entdeckt oder es von jeher als selbstredend angenommen und mit einem Male fragt man sich: warum glaube ich das, was ich sehe ich in der Figur, das mich überzeugt, wie weiss ich, was ich weiss? (Freudenthal, 1979, S. 194, Hervorhebungen i. O.)

Wenn man diese Fragen beantworten kann, dann ist der Beweis „das *Bewusstmachen* dessen, was sich in der Dämmerung abgespielt hat“ (Freudenthal, 1979, S. 195, Hervorhebung von J.H.), als man wusste, dass die Aussage stimmt (RM4 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3). Der Beweis erwächst somit aus einer Erforschung der persönlichen Interpretation eines mathematischen Sachverhalts, d. h. durch reflexives Denken im Sinne einer ‚Spiegelung in sich selbst‘. Freudenthal geht hier von Situationen aus, in denen an konkreten Beispielen eine mathematische Gesetzmäßigkeit entdeckt und dabei schon eine – noch unbewusste, vielleicht intuitive – Idee entwickelt werden kann, weshalb sie gilt. Dies ist nach Freudenthals Auffassung insbesondere in der Geometrie der Fall (vgl. Freudenthal, 1991, S. 103), weshalb er seine Überlegungen überwiegend auf geometrische Beweise stützt. So stellt er heraus, dass bei den geometrischen Beweisen im alten Griechenland auch offensichtliche Zusammenhänge bewiesen werden, bei

denen bereits vor dem Beweis klar ist, dass sie gelten. Als Beispiel nennt Freudenthal (1983) u. a. den Beweis dafür, dass in einem gleichschenkligen Dreieck die Basiswinkel gleich groß sind. Die Beweise entstanden nach Freudenthals Einschätzung, da ein Mathematiker sich fragte, „ob das, was seine Augen ihm sagten, wahr sei“ (Freudenthal, 1983, S. 485). Somit ist eine Konstruktion, in der man einen geometrischen Zusammenhang intuitiv erkennt, eine Möglichkeit, durch ‚Spiegelung in sich selbst‘ den zugehörigen Beweis zu finden. Es ergibt sich bei der Entwicklung eines Beweises die Abfolge *konstruieren – reflektieren – beweisen*. Diese gilt natürlich nicht nur für streng formal geführte Beweise wie in der euklidischen Geometrie, sondern für jede Form mathematischer Begründungen in allen Inhaltsgebieten der Mathematik, wenn der Begriff des Konstruierens weit genug gefasst wird (vgl. Freudenthal, 1979). Eine besondere Bedeutung schreibt Freudenthal (1979) dem mentalen Konstruieren zu, bei dem mathematische Beziehungen nicht als empirische Fakten abzulesen sind. Dies ist zum Beispiel gegeben, wenn zur Begründung geometrischer Zusammenhänge unsaubere Zeichnungen herangezogen werden, in denen die Beziehung aus diesem Grund gar nicht gilt. Er muss in die Figur hingesehen, d. h. mental konstruiert werden.

Im ersten Teil dieses Kapitels wurde ausführlich dargestellt, dass die ‚Spiegelung in sich selbst‘, die unter anderem die Frage beantworten kann, woher man etwas weiß, ihren Ursprung in der ‚Spiegelung im anderen‘ hat, also in der Interaktion. Im Zusammenhang mit dem Beweisen verweist Freudenthal (1979) darauf, dass die Interaktion Auslöser der Introspektion sein kann. Die kritische Haltung gegenüber selbstverständlichen Annahmen kann dadurch entstehen, dass eine andere Person Rechenschaft verlangt und fragt, woher man weiß, dass eine Gesetzmäßigkeit gilt. Beim nächsten Mal kann man sich „im Andern reflektieren und [sich] selber die Fragen stellen, die er stellen könnte“ (Freudenthal, 1979, S. 194). Die ‚Reflexion am anderen‘ kann also zur Entwicklung eines subjektiven Beweisbedürfnisses (Winter, 1983) führen.

Darüber hinaus ist anzunehmen, dass die ‚Reflexion am anderen‘ helfen kann, eine entdeckte Gesetzmäßigkeit zu beweisen. Wenn man selbst noch keine intuitive Idee hat, weshalb sie gilt, ist es nicht möglich, eine Begründung zu entwickeln, indem man sich diese Intuition bewusst macht. Vielmehr kann die Auseinandersetzung mit den Begründungsideen anderer, d. h. die ‚Reflexion am anderen‘ z. B. in Form eines Standpunktwechsels, helfen, selbst eine Begründung zu entwickeln. Dieser Gedanke wird in Kapitel 4.1 wieder aufgegriffen.

1.2.2 Mathematische Reflexion als Standpunkt- bzw. Perspektivwechsel (Schülke)

Schülke (2007; 2013; vgl. auch Schülke & Steinbring, 2010) greift Freudenthals Ansatz auf, Reflexion als Standpunktwechsel zu verstehen, und entwickelt darauf aufbauend ein Konstrukt ‚mathematische Reflexion‘, das sie klar von ande-

ren Konzepten abgrenzt. Dennoch handelt es sich nicht um einen Gegenentwurf, sondern um eine Erweiterung bestehender Konzepte zur Reflexion im Mathematikunterricht (vgl. Schülke, 2013, S. 53).

Die Besonderheiten des Ansatzes beziehen sich auf die Fachspezifität von Reflexion (1) und die Bedeutung von Interaktion für Reflexion (2), auf die Abgrenzung ‚mathematischer Reflexion‘ gegenüber anderen mathematischen Aktivitäten (3) und auf die Bedeutung der Distanzierung vom mathematischen Inhalt für Reflexion (4).

Zu (1): Wie an der Bezeichnung bereits erkennbar ist, fasst Schülke ‚mathematische Reflexion‘ als eine für Mathematik spezifische Tätigkeit auf, während andere Autoren Reflexion im Mathematikunterricht als Reflexion im fachunabhängigen Sinne mit dem Gegenstand Mathematik interpretieren. Hintergrund ist die Betonung des konstruktiven Charakters von Reflexion bei Schülke (RM2 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3), verbunden mit einem spezifischen Verständnis der Eigenheiten mathematischen Wissens. Daher stellt sie an ein Konzept spezifisch *mathematischer* Reflexion die Anforderung, dass die besonderen epistemologischen Bedingungen der Entstehung neuen mathematischen Wissens (in der Grundschule) (vgl. Steinbring, 2005, s. auch Kap. 2) beachtet werden (vgl. Schülke, 2013, S. 48, 52).

Zu (2) und (3): Auf Grund ihrer Annahmen zur Fachspezifität mathematischer Reflexion folgert Schülke (2013) im Anschluss an Steinbring (2005) und Miller (1986, 2006), dass mathematische Reflexion, die zur Konstruktion neuen mathematischen Wissens führt, Um- und Neudeutungen mathematischer Zeichen und Symbole in sozialer Interaktion enthalten muss. Auf diese Weise kann Reflexion als mathematischer Denkprozess auf höchster Ebene (vgl. Kaune, 2006) verstanden und „von anderen kognitiven Aktivitäten wie z.B. einem ‚erinnernden Nachdenken‘ oder einem Aufrufen und Wiederholen bekannten Wissens, bekannter Inhalte abgegrenzt werden“ (Schülke, 2013, S. 48). Zugleich ist mathematische Reflexion in der Grundschule nach diesem Verständnis an Interaktion gebunden und kann nicht als rein individuelle Tätigkeit angesehen werden.

Zu (4): ‚Mathematische Reflexion‘ bezieht sich auf eine „innermathematische Ebene“ (Schülke, 2013, S. 53) und ist daher der Kategorie ‚Inhaltsreflexion‘ nach Lengnink (2006a, 2006b) und Bauer (1988, 1990) zuzuordnen (s. Kap. 1.1.2). Ebenso wie Bauer versteht Schülke (2013) diese nicht als Distanzierung von der inhaltlichen mathematischen Auseinandersetzung, sondern lokalisiert sie im Prozess des Mathematiktreibens (vgl. Schülke, 2013, S. 53). Auf diese Weise grenzt sie sich von Konzepten ab, die Reflexion als Einnahme eines Meta-Standpunktes ansehen (z. B. Cohors-Fresenborg und Kaune (2007)) (vgl. Schülke, 2013, S. 53-56).

Das theoretische Konstrukt ‚mathematische Reflexion‘

Um nun mathematische Reflexion genauer zu fassen, greift Schülke wie eingangs erwähnt Freudenthals Konzept von Reflexion als Standpunktwechsel (Freudenthal, 1983; s. auch Kap. 1.2.1) auf und definiert ‚mathematische Reflexion‘ als „eine kognitive Aktivität, ein Denkprozess im Sinne eines *Standpunkt- bzw. Perspektivwechsels*, auf dessen Grundlage Umdeutungsprozesse stattfinden“ (Schülke, 2013, S. 52, Hervorhebungen i. O.). Den Begriff ‚Perspektivwechsel‘ verwendet Schülke synonym zum Begriff ‚Standpunktwechsel‘, welcher von Freudenthal übernommen wurde (vgl. Schülke, 2013, S. 52). Beide Begriffe bezeichnen Deutungsveränderungen in Interaktionsprozessen:

Bei der Identifizierung von reflexivem mathematischem Denken geht es daher wesentlich um die Frage, inwieweit in Interaktionsprozessen eine Veränderung der eigenen Sichtweisen bzw. der eigenen Deutungen im Hinblick auf die betrachteten mathematischen Inhalte bzw. Gegenstände deutlich wird. (Schülke, 2013, S. 54)

Schülke nutzt dementsprechend das epistemologische Dreieck „zur fokussierten Darstellung und Verdeutlichung konkreter Sichtweisen und Standpunkte der beteiligten Kinder“ (Schülke, 2013, S. 106). Von zentraler Bedeutung ist dabei die Position ‚Begriff‘. Von einem Standpunktwechsel wird dann ausgegangen, wenn sich die rekonstruierte begriffliche Beziehung ändert (vgl. Schülke, 2013, S. 106-109). Die ‚begriffliche Beziehung‘ stellt eine Differenzierung und Konkretisierung des ‚Begriffs‘ dar, welche bei der Analyse herausgearbeitet wird. Beispielsweise gibt Schülke (2013) bei einer Analyse neben dem Begriff „Position der ‚0‘ am Rechenstrich“ (S. 107, 108, 149, 150), auch die ‚begriffliche Beziehung‘ „feste Positionierung der Ziffernkarte ‚0‘ am Rechenstrich“ (S. 107, 149) an, welche sich in der betreffenden Szene zu einer „flexible[n] Positionierung der Ziffernkarte ‚0‘ am Rechenstrich“ (S. 108, 150) weiterentwickelt. Damit greift sie eine Tendenz in der Nutzung des epistemologischen Dreiecks auf, die Position ‚Begriff‘ differenzierter zu besetzen (vgl. z. B. Nührenbörger, 2009; Steinbring, 2000, 2005; Steinbring & Nührenbörger, 2010).

Das Analyseraster ‚mathematische Reflexion‘

Auf Grundlage des oben beschriebenen Konstrukts mathematische Reflexion führte Schülke eine Interviewstudie mit jahrgangsgemischten Kinderpaaren der flexiblen Schuleingangsstufe durch. Dabei ging es ihr neben einer Klärung des Begriffs ‚mathematische Reflexion‘ darum, konkrete reflexive Fähigkeiten von Kindern zu ermitteln, Ebenen mathematischer Reflexion zu beschreiben, Auslöser reflexiver Umdeutungen zu identifizieren und die Auswirkungen des Rollenwechsels vom jahrgangsjüngeren zum jahrgangsälteren Kind zu untersuchen (vgl. Schülke, 2013, S. 16). Die in der Studie entstandenen Transkripte der videographierten Interviews wurden mit Hilfe interpretativer Verfahren analysiert.

Einen besonderen Stellenwert hatte dabei die epistemologische Analyse (vgl. Steinbring, 2005; s. auch Kap. 2.1), da das epistemologische Dreieck zur Verdeutlichung der eingenommenen Standpunkte diente (vgl. Schülke, 2013, S. 100-109). Die Ergebnisse dieser Analysen werden in dem im Rahmen des Forschungsprojektes entwickelten Analyseraster ‚mathematische Reflexion‘ zusammengefasst (s. Abb. 1.5), das auch die verschiedenen auf Grund der Analysen entwickelten Ebenen mathematischer Reflexion abbildet (vgl. Schülke, 2013, S. 109-110). Die erstellten Analyseraster dienen zur Beantwortung spezifischer Forschungsfragen (vgl. Schülke, 2013, S. 284-305). Im Weiteren wird das Analyseraster gemeinsam mit den zugehörigen Forschungsergebnissen dargestellt.

Bei dem Raster handelt es sich um eine Tabelle mit vier Spalten, die jeweils einen für die Forschungsfragen relevanten Aspekt mathematischer Reflexion in der Interaktion von Grundschulkindern abbilden. Jede dieser vier Kategorien enthält mehrere Unterkategorien. Das Raster stellt ausdrücklich ein offenes System dar, da bei weiteren Analysen eventuell weitere Unterkategorien ergänzt werden müssen (vgl. Schülke, 2013, S. 284).

Die beiden Kategorien ‚Auslöser‘ und ‚Reaktion‘ haben deskriptiven Charakter. Dies bedeutet, dass Äußerungen auf Grund ihrer Form einer der Unterkategorien zugeordnet werden. Hingegen sind die Kategorien ‚Wirkung‘ und ‚reflexive Ebene‘ interpretative Elemente. Die Bestimmung einer der Unterkategorien kann nur interpretativ geschehen (vgl. Schülke, 2013, S. 110).

Bei der Interpretation des Analyserasters ist wichtig, zu beachten, dass es keine zeitliche Reihenfolge abbildet; vielmehr „können sich im Interaktionsgeschehen die einzelnen Unterkategorien überlagern. Eine mathematische Äußerung, die auf der Grundlage ihres sprachlichen Formats beispielsweise der Unterkategorie ‚Rekapitulation‘ zugeordnet wird, kann beispielsweise zugleich einen Hinweis auf einen ‚Moment der Irritation‘ enthalten“ (Schülke, 2013, S. 110). Mit dem Analyseraster werden zudem nicht sämtliche Äußerungen erfasst und kategorisiert, sondern nur diejenigen Aspekte, die sich bei der vorherigen interpretativen Analyse als relevant erwiesen haben (vgl. Schülke, 2013, S. 110).

deskriptives Element	interpretatives Element	deskriptives Element	interpretatives Element
Auslöser	Wirkung	Reaktion	reflexive Ebene
Frage Aufgabenstellung Äußerung (Interviewer / Lehrer)	keine Irritation	keine Äußerung Sich nicht äußern bzw. sich nicht auf mathematische Äußerungen beziehen.	Standpunktwechsel fremde Perspektive Die Sichtweise eines andern auf eine mathematische Aufgabe, einen mathematischen Inhalt durchdenken, prüfen und einnehmen; Deutungen nachvollziehen können oder übernehmen
		Imitation Direkte, nahezu wörtliche Wiederholung von eigenen oder fremden Äußerungen; zuvor angewandte Vorgehensweisen oder Strategien eines Partnerkindes kopieren.	Standpunktwechsel Kontext Mathematische Inhalte in einen anderen Kontext setzen; in einem anderen Kontext betrachten, neu durchdenken, um- bzw. neu deuten.
Frage Entdeckung Vorgehensweise Äußerung (Partnerkind)	Moment der Irritation Eine Aufgabe nicht spontan bearbeiten können; nicht einverstanden sein mit dem bisherigen Ablauf der Bearbeitung oder mit den mathematischen Äußerungen oder Handlungen des Partnerkindes. Irritiert, überrascht sein, Unverständnis äußern.	Rekapitulation Auf bereits im vorangegangenen Kontext angeführtes Wissen zurückgreifen oder bereits erprobte Vorgehensweisen bzw. Äußerungen und Strategien eines Partnerkindes aufgreifen und anführen, mit eigenen Worten wiederholen.	Standpunktwechsel Rückblick Aus einem vorangegangenen Kontext bekanntes mathematisches Wissen, bekannte Vorgehensweisen anführen, in Beziehung setzen zur aktuellen Aufgabe; diese neu durchdenken, um- bzw. neu deuten.
		Konstruktion Mathematisches Wissen anführen, das in den vorangegangenen Kontexten von keinem der an der Interaktion Beteiligten eingebracht wurde.	
eigene Vorgehensweise Äußerung			

Abbildung 1.5 Analyseraster ‚Mathematische Reflexion‘ (Schülke, 2013, S. 111, neu erstellt JH)

Das Element ‚Auslöser‘

Bei der Ermittlung der ‚Auslöser‘ mathematischer Reflexion steht die Frage im Vordergrund, durch welche Person reflexive Prozesse ausgelöst werden. Aus diesem Grund sind ‚Auslöser‘ definiert als „Personen, die durch ihre Äußerungen oder Handlungsweisen bestimmte ‚Reaktionen‘ hervorrufen bzw. reflexive mathematische Prozesse auslösen“ (Schülke, 2013, S. 284).

In den Interviews lösten sowohl die Interviewerin mit ihren Fragen, Aufgabenstellungen und sonstigen Äußerungen reflexive Prozesse aus als auch die Äußerungen des Partnerkindes. Letzteres stellt Schülke als wesentliches Ergebnis der Analysen heraus, zeigt es doch, dass Standpunktwechsel grundsätzlich auch ohne Impulse eines Erwachsenen zustande kommen können. Jedoch war

bei nur 2 der 13 sicher identifizierten Standpunktwechsel die Interviewerin als ‚Auslöser‘ nicht relevant. In den meisten Fällen (8 von 13) stellten sowohl Äußerungen der Interviewerin als auch Äußerungen des Partnerkindes ‚Auslöser‘ dar. In nur 3 Fällen war das Partnerkind nicht als ‚Auslöser‘ beteiligt. Diese Ergebnisse weisen auf die hohe Bedeutung der sozialen Interaktion hin. Dies wird dadurch weiter gestützt, dass kein Fall von mathematischer Reflexion rekonstruiert werden konnte, der auf Grund eigener Vorgehensweisen und Äußerungen zustande kam (vgl. Schülke, 2013, S. 290-292).

Das Element ‚Moment der Irritation‘

Unter einem ‚Moment der Irritation‘ versteht Schülke (2013) nicht nur Situationen, in denen ein Kind Überraschung äußert, sondern auch solche, in denen es eine Aufgabe nicht spontan bearbeiten kann oder mit dem Verlauf der Bearbeitung nicht einverstanden ist. Auch Unverständnis gegenüber den mathematischen Äußerungen und Handlungen des Partnerkindes kann Ausdruck von Irritation sein. Im Vorfeld der Untersuchung bestand die Vermutung, dass diese ‚Momente der Irritation‘ Anlässe darstellen, sich mit alternativen Sichtweisen auseinanderzusetzen, sodass reflexive mathematische Prozesse initiiert werden können (vgl. Schülke, 2013, S. 112, 285). Diese Annahme konnte mit den Analysen gestützt werden. Sie zeigen, dass ein ‚Moment der Irritation‘ ein Indikator für reflexive mathematische Prozesse ist, die direkt im Anschluss oder häufiger mit etwas Abstand folgen. Jedoch stellt ein solcher ‚Moment der Irritation‘ keine Voraussetzung für einen Standpunktwechsel dar. War die Interviewerin als ‚Auslöser‘ beteiligt, konnten auch Standpunktwechsel ohne vorherigen ‚Moment der Irritation‘ identifiziert werden. War hingegen das Partnerkind alleiniger Auslöser, so ging dem Standpunktwechsel immer ein ‚Moment der Irritation‘ voraus. Dieses Ergebnis könnte, so Schülke, dadurch zustande kommen, dass Kinder ihre Kommunikation beenden, wenn keine weiteren Fragen oder Irritationen entstehen. Nur bei Widersprüchen und Uneinigkeiten entstehen in der Interaktion unter Kindern Anlässe zum Standpunktwechsel. Die Interviewerin hingegen kann in den Partnerinterviews das Gespräch zwischen den Kindern anregen, wenn diese ihre Kommunikation eigentlich beendet haben (vgl. Schülke, 2013, S. 292-295).

Das Element ‚Reaktion‘

Das deskriptive Element ‚Reaktion‘ „bezeichnet die verbalen und nonverbalen ‚Reaktionen‘ eines der an der Interaktion Beteiligten auf die Beiträge der auslösenden Person (‚Auslöser‘)“ (Schülke, 2013, S. 286). Diese Kategorie ist für die Analyse mathematischer Reflexion relevant, da die Art der ‚Reaktion‘ darüber entscheidet, ob eine weitere Analyse der ‚reflexiven Ebene‘ sinnvoll ist (vgl. Schülke, 2013, S. 286). Äußert sich ein Kind als Reaktion auf den ‚Auslöser‘

nicht bzw. nicht mathematisch oder ohne Bezug zu aktuellen Fragestellungen oder den mathematischen Inhalten, so wird dies der Unterkategorie ‚Keine Äußerung‘ zugeordnet. Schülke konnte keinen Standpunktwechsel rekonstruieren, der ausschließlich mit dieser Kategorie von ‚Reaktion‘ einherging. Dies gilt ebenso für die Unterkategorie ‚Imitation‘. Hiermit werden ‚Reaktionen‘ bezeichnet, die darin bestehen, dass ein Kind die Äußerung seines Partnerkindes (fast) wörtlich wiederholt oder bekannte Strategien und Vorgehensweisen des Partnerkindes kopiert. Auch wenn Kinder ihrem Partnerkind widerspruchsfrei zustimmen, wird dies dieser Unterkategorie zugeordnet (vgl. Schülke, 2013, S. 113, 286-287).

In die Unterkategorie ‚Rekapitulation‘ fallen ‚Reaktionen‘, bei denen Kinder auf bereits angeführtes Wissen oder erprobte Vorgehensweisen zurückgreifen. Auch das Wiederholen der Äußerungen und Strategien des Partnerkindes *mit eigenen Worten* gilt als ‚Rekapitulation‘. Bringen Kinder mathematisches Wissen ein, das in den bisherigen Interviews nicht geäußert wurde, wird dies als ‚Konstruktion‘ bezeichnet (vgl. Schülke, 2013, S. 113, 287). ‚Rekapitulation‘ war die häufigste ‚Reaktion‘, während ‚Imitation‘ und ‚Konstruktion‘ nahezu gleich oft auftraten. Alle von Schülke identifizierten Standpunktwechsel standen im Zusammenhang mit ‚Rekapitulation‘ und/oder ‚Konstruktion‘. Bei zwei Standpunktwechseln war zudem die Reaktion ‚Imitation‘ relevant (vgl. Schülke, 2013, S. 296-298).

Das Element ‚reflexive Ebene‘

Im Analyseraster werden drei ‚reflexive Ebenen‘ unterschieden (vgl. Schülke, 2013, S. 114-115, 288-289). Das Verhältnis der drei Ebenen beschreibt Schülke wie folgt:

Ein wesentlicher gemeinsamer Aspekt der drei Ebenen von Standpunktwechseln besteht in der Um- bzw. Neudeutung einer mathematischen Aufgabe, eines mathematischen Inhalts, eines mathematischen Zeichens. Eine Unterscheidung wird ausschließlich getroffen im Hinblick auf die verschiedenen *Möglichkeiten bzw. Arten*, den eigenen Standpunkt zu wechseln. (Schülke, 2013, S. 114, Hervorhebung i. O.)

Den Standpunkt zu wechseln, bedeutet dabei nicht, den eigenen Standpunkt aufzugeben, sondern „dass man in der Lage ist, einen anderen Standpunkt einzunehmen“ (Schülke, 2013, S. 288).

Es besteht die Möglichkeit, dass es sich um eine ‚fremde Perspektive‘ einer anderen Person handelt, die „durchdacht, geprüft bzw. eingenommen wird“ (Schülke, 2013, S. 288). Hieraus folgt eine Umstrukturierung, durch die „die eigene zuvor eingenommene Sichtweise ergänzt oder überlagert und ersetzt“ (Schülke, 2013, S. 114) wird. Diese Art des Standpunktwechsels ist durch die

Gestaltung des Partnerinterviews angelegt, da die Kinder explizit zu den Sichtweisen des Partnerkinds befragt werden (vgl. Schülke, 2013, S. 288).

Im Gegensatz zum Standpunktwechsel ‚fremde Perspektive‘ wird beim Standpunktwechsel ‚Kontext‘ keine zuvor geäußerte Deutung nachvollzogen, sondern es wird „eine neue *lokale* Perspektive ermöglicht, die konkrete *neue* Deutung muss dann jedoch noch erfolgen und eigenständig eingenommen werden“ (Schülke, 2013, S. 114, Hervorhebungen i. O.). Dies gelingt, indem die mathematische Aufgabe bzw. der mathematische Inhalt in einen anderen Kontext gesetzt wird, beispielsweise durch eine äußere Handlung. So erlangte in einem Interview ein Kind durch das Drehen eines Arbeitsblattes mit geometrischen Darstellungen eine neue Sichtweise. Allerdings ist die Identifikation eines Standpunktwechsels ‚Kontext‘ schwierig, denn „die Art des Kontextwechsels variiert in den einzelnen Interviews, ist abhängig von der konkreten Aufgabenstellung und stellt sich auf vielfältige Weise dar“ (Schülke, 2013, S. 288).

Beim Standpunktwechsel ‚Rückblick‘ wird bewusst auf bekanntes Wissen und vertraute Vorgehensweisen zurückgegriffen. Hiervon geht Schülke bei der Analyse nur dann aus, „wenn in einer Äußerung der an der Interaktion Beteiligten eine Vorgehensweise, ein mathematischer Inhalt als bekannt dargestellt und in Beziehung zur aktuellen Aufgabe gesetzt wird“ (Schülke, 2013, S. 115). Der Standpunktwechsel ‚Rückblick‘ trat in den Interviews nur einmal alleine auf. Ansonsten erfolgte er entweder kombiniert mit einem Standpunktwechsel ‚Kontext‘ oder mit einem Standpunktwechsel ‚fremde Perspektive‘. Da die Kinder in den Interviews den Bezug zu früherem Wissen häufig nicht explizit äußerten, konnten Standpunktwechsel ‚Rückblick‘ auch nur selten eindeutig identifiziert werden, obwohl sie deutlich häufiger vermutet wurden. Dieses Problem sowie der Umstand, dass die Auswahl der Szenen nicht repräsentativ war, erlauben keine sicheren Aussagen hinsichtlich der Häufigkeitsverteilung der drei reflexiven Ebenen (vgl. Schülke, 2013, S. 299-300).

Beim qualitativen Vergleich der Anforderungen, die mit den jeweiligen Standpunktwechseln verbunden sind, können Unterschiede festgestellt werden. Während der Standpunktwechsel ‚fremde Perspektive‘ darin besteht, eine zuvor geäußerte Perspektive nachzuvollziehen, muss bei den Standpunktwechseln ‚Kontext‘ und ‚Rückblick‘ eine bisher noch nicht erklärte Sichtweise eigenständig entwickelt werden (vgl. Schülke, 2013, S. 300).

Mit Blick auf einen möglichen Zusammenhang zwischen der auslösenden Person und der Art des Standpunktwechsels ist zu erwähnen, dass die Interviewerin als alleinige Auslöserin ausschließlich den Standpunktwechsel ‚Kontext‘ initiiert hat. Er kann demnach ausgelöst werden, ohne dass eine andere Perspektive geäußert werden muss. Schließlich war die Interviewerin darauf bedacht, keine eigenen Standpunkte einzubringen. Dies unterstreicht, dass bei diesem Standpunktwechsel neue Deutungsweisen konstruiert werden müssen (vgl. Schülke, 2013, S. 300-301).

Über einen möglichen Zusammenhang zwischen dem Schulbesuchsjahr eines Kindes und der Häufigkeit von Standpunktwechseln kann Schülke keine gesicherten allgemeinen Aussagen machen, da die Datengrundlage zu gering ist. An einem Fallbeispiel zeigt sie jedoch auf, dass von der Schülerin Sarah im zweiten Schuljahr (vermutlich) mehr Standpunktwechsel vollzogen wurden als im ersten Schuljahr. Da sie dazu neben den detaillierten Analysen auch Oberflächenanalysen hinzugezogen hat, ist aber auch dies nicht vollständig gesichert. Stimmt ihr Eindruck jedoch, so vollzog Sarah im ersten Untersuchungsjahr ausschließlich den Standpunktwechsel ‚fremde Perspektive‘, während im zweiten Untersuchungsjahr auch die Standpunktwechsel ‚Rückblick‘ und ‚Kontext‘ zu erkennen sind (vgl. Schülke, 2013, S. 302-305).

‚Mathematische Reflexion‘ im Mathematikunterricht

Bereits aus der theoretischen Konzeption von ‚mathematischer Reflexion‘ lassen sich Annahmen über die Bedingungen, unter denen mathematische Reflexion gefördert werden kann, ableiten. Von wesentlicher Bedeutung ist das gemeinsame Gespräch über Entdeckungen und Vorgehensweisen der Kinder. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler angeregt werden, nicht nur über ihre eigenen Entdeckungen und Vorgehensweisen zu sprechen, sondern auch über die anderer Kinder. Auf diese Weise können im Rahmen von Interviews Standpunkt- und Perspektivwechsel gezielt angeregt werden, da die Kinder herausgefordert sind, sich mit anderen Entdeckungen und Vorgehensweisen aktiv auseinanderzusetzen (vgl. Schülke, 2013, S. 272-279, 288). Schülke (2013) regt an, Elemente der Interviewkonzeption für den Unterricht zu adaptieren (vgl. Schülke, 2013, S. 307). Welche dies sind und wie eine Adaption für den Klassenunterricht erfolgen könnte, wird in Kapitel 5.4.1 ausgeführt.

Aus den Untersuchungsergebnissen, die auf Grund der Analysen mit dem Analyseraster gewonnen wurden, kann eine weitere Forderung für den Mathematikunterricht abgeleitet werden. Aus der Bedeutung des ‚Momentes der Irritation‘ für das Zustandekommen mathematischer Reflexion folgert Schülke (2013), dass es im Unterricht wichtig sei, *„auftretende Widersprüche und Irritationen nicht nur zuzulassen, sondern sogar hervorzuheben“* (S. 306, Hervorhebungen i. O.). Auf diese Weise kann ihrer Ansicht nach mathematische Reflexion und damit Mathematiklernen gefördert werden.

1.2.3 Zusammenfassung und Diskussion

In diesem Kapitel wurde aufgezeigt, inwiefern ‚Reflektieren‘ nicht nur als individuell erfolgreicher Denkprozess verstanden werden kann, sondern als einer, der sich gerade in der Interaktion durch die Auseinandersetzung mit dem Denken anderer vollzieht. Im Anschluss an die Bedeutung von Reflexion als Widerspiegeln von Licht kann reflexives Denken als ‚widerspiegelndes Denken‘ begriffen

werden, welches sich darin äußert, dass man sich in ein Gegenüber hineinversetzt, um Hypothesen über die zunächst verborgenen Hintergründe der Äußerungen oder Handlungen eines anderen Menschen aufzustellen (Freudenthal, 1979, 1983) (vgl. Kap. 1.2.1). Hieraus ergibt sich die ‚Spiegelung in sich selbst‘, d. h. die *distanzierte* Betrachtung der eigenen Person, um das eigene Verhalten und die eigenen Gefühle zu erforschen (*Erkenntnisgewinn*, RM2 und 3). Da sich die Reflexion über die eigene Person aus der Reflexion über andere Personen ergibt, ist für die Entwicklung widerspiegelnden Denkens Interaktion erforderlich.

Das ‚Sichwiderspiegeln im anderen‘ kann als ‚mentaler Standpunktwechsel‘ beschrieben werden. Dieser kann darin bestehen, dass mental zu einem anderen Standpunkt gewechselt wird, um auf den Ursprungsstandort zurückzublicken (*Reziprokwechsel*). Außerdem kann es darum gehen, aus einer anderen Richtung, unter einem anderen Blickwinkel auf einen Sachverhalt zu blicken und dafür einen anderen Standpunkt einzunehmen (*Richtwechsel*). Befinden sich die Standpunkte, zwischen denen gewechselt wird, in parallelen ‚Umgebungen‘, handelt es sich um einen *Parallelwechsel* (Freudenthal, 1983).

Für das Lernen von Mathematik ist widerspiegelndes Denken und damit auch das Widerspiegeln im anderen relevant, weil auf diese Weise ein Kind in einer heterogenen Lerngruppe im *Rückblick* das eigene mathematische Handeln reflektieren kann, sodass es *bewusst* wird und der Schüler bzw. die Schülerin eine neue Stufe im Lernprozess erreicht (RM1 und 4 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3) (vgl. Freudenthal, 1974, 1978). Zudem kann Reflexion im Sinne einer ‚Spiegelung in sich selbst‘ als Zwischenstadium zwischen dem Konstruieren mathematischer Phänomene und dem Beweis des zu Grunde liegenden mathematischen Zusammenhangs angesehen werden. Durch Introspektion wird *bewusst*, welche Strukturen intuitiv in die Konstruktion hineingesehen werden (RM4 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3) (Freudenthal, 1979). Die Interaktion mit anderen kann nach Freudenthal (1979) eine solche Introspektion, welche dazu führt, dass neue allgemeine Strukturen explizit *erkannt* werden, auslösen (RM2 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3). Darüber hinaus ist auch denkbar, dass ein ‚Sichwiderspiegeln am anderen‘ dazu führen kann, dass fremde Begründungsideen nachvollzogen werden und so ein eigener Beweis entwickelt wird (s. Kap. 4.1). Das ‚Sichwiderspiegeln im anderen‘ weist also dieselben Charakteristika auf, die auch für die individuell gedachte Reflexion anderer Autoren kennzeichnend sind. Allerdings hat der Erwerb neuer Erkenntnisse eine deutlich größere Bedeutung. Nach Freudenthal ist der Wunsch oder die Notwendigkeit, zu neuen Erkenntnissen zu gelangen, gerade Auslöser und Antrieb des reflexiven Denkens. Verglichen mit den in Kapitel 1.1.2 vorgestellten Positionen beschreibt das Konzept des ‚widerspiegelnden Denkens‘ Reflexion stärker als einen Prozess, dessen Verlauf beschrieben und rekonstruiert werden kann. Daher stellt es, konkretisiert im ‚Standpunktwechsel‘, einen tragfähigen Ansatz dar, um mathematische Reflexion als

interaktiven Prozess zu beschreiben. Dementsprechend wurde die Idee des Standpunktwechsels in den letzten Jahren von Autoren aufgegriffen, die den Aufbau neuen mathematischen Wissens als interaktiven Prozess verstehen (Nührenbörger & Schwarzkopf, 2010b; Schülke, 2007, 2013; Schülke & Steinbring, 2010). Die differenzierteste Ausarbeitung eines Konzepts von mathematischer Reflexion als Standpunktwechsel stammt von Schülke (2013) (vgl. Kap. 1.2.2). Sie fasst die *Konstruktion neuen Wissens* als wesentliches Ziel mathematischer Reflexion auf (vgl. Schülke, 2013, S. 52) (RM2 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3). Nach Steinbring (2000, 2005) und Miller (1986, 2006) kann wirklich neues mathematisches Wissen nur aufgebaut werden, wenn in Interaktion Um- und Neudeutungen mathematischer Zeichen vorgenommen werden (vgl. Kap. 3.2.1). Aus diesem Grund eignet sich nach Schülke (2013) Freudenthals Konzept des Standpunktwechsels, um spezifisch mathematische Reflexion zu beschreiben. In der Übertragung von Freudenthals Ansatz auf die theoretischen Überlegungen von Steinbring (2000, 2005) werden Standpunkte mit Hilfe des epistemologischen Dreiecks als Deutungen analysiert. Einen Standpunktwechsel zu vollziehen bedeutet, dass (vorübergehend) eine andere Deutung vorgenommen wird. Hieraus ergibt sich die Veränderung der Ausgangsdeutung im Sinne einer Um- und Neudeutung des bisherigen Wissens. Hieraus folgt, dass mathematische Reflexion immer von einer zuvor eingenommenen Deutung ausgeht, welche dann als Folge des Standpunktwechsels verändert wird. Die Beschreibung des Standpunktwechsels ‚fremde Perspektive‘, bei dem zum Standpunkt eines anderen gewechselt wird, zeigt, dass dabei ein *Rückbezug* zum Ausgangsstandpunkt *erfolgen kann, aber nicht muss* (RM1 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3). So folgt aus einem Standpunktwechsel ‚fremde Perspektive‘, dass die „zuvor eingenommene Sichtweise ergänzt oder überlagert und ersetzt wird“ (Schülke, 2013, S. 114). Dies bedeutet, dass nach dem Wechsel zu einem anderen Standpunkt kein Rückbezug zur vorherigen, eigenen Deutung erfolgen muss, da diese aufgegeben werden kann und nicht mit der fremden Perspektive in Beziehung gesetzt werden muss. Vermutlich sind es solche Prozesse, welche Schülke (2013) als ‚Neudeutung mathematischen Wissens‘ bezeichnet. Diese können auch Folge der Standpunktwechsel ‚Kontext‘ und ‚Rückblick‘ sein.

Die drei reflexiven Ebenen ‚fremde Perspektive‘, ‚Kontext‘ und ‚Rückblick‘ wurden auf Grund von Transkriptanalysen entwickelt und nicht aus den von Freudenthal (1983) benannten Arten des Standpunktwechsels (vgl. Kap. 1.2.1) abgeleitet. Dennoch ist zwischen beiden Einteilungen eine Ähnlichkeit feststellbar. So besteht eine Analogie zwischen dem Standpunktwechsel ‚fremde Perspektive‘ und dem Richtwechsel sowie zwischen den Standpunktwechseln ‚Rückblick‘ und ‚Kontext‘ und dem Parallelwechsel. Ein Unterschied zu Freudenthal (1983) besteht darin, dass beim Standpunktwechsel ‚Kontext‘ ein neuer Standpunkt konstruiert werden muss, der dann im Sinne eines Standpunkt- bzw. Perspektivwechsels eingenommen wird. Das bedeutet, dass der

Standpunktwechsel nicht zu einem zuvor in die Interaktion eingebrachten Standpunkt erfolgt.

Alle drei Arten des Standpunktwechsels fasst Schülke (2013) explizit nicht als eine *Distanzierung* im Sinne der Einnahme eines Meta-Standpunktes auf (vgl. Schülke, 2013, S. 53-55). Vielmehr bedeutet ‚mathematische Reflexion‘ einen „Wechsel des Standpunktes innerhalb einer innermathematischen Ebene“ (Schülke, 2013, S. 53), wodurch es sich um ein breites Konstrukt einer ‚mathematischen Reflexion‘ handelt. Eine *Distanzierung* von der eigenen mathematischen Deutung, welche die innermathematische Ebene nicht verlassen muss (RM3 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3), ist durch das Konzept des Standpunktwechsels bei Freudenthal (1983) bereits angelegt (vgl. Kap. 1.2.1), wird von Schülke (2013) jedoch nicht thematisiert.

Über die Rolle des *Bewusstseins* bei der Einnahme von Standpunkten bzw. Perspektiven oder beim Standpunkt- bzw. Perspektivwechsel kann Schülke auf Grund ihres theoretischen und methodischen Rahmens keine Aussagen machen (RM4 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3). Nach den Grundannahmen der epistemologisch orientierten Interaktionsanalyse nach Steinbring (2000, 2005) ist es nicht möglich, auf Grund von Äußerungen direkt auf die kognitiven Aktivitäten zu schließen (vgl. Kap. 2).

Es zeigt sich, dass das theoretische Konstrukt ‚mathematische Reflexion‘ den Schwerpunkt auf den *konstruktiven Charakter* von Reflexion legt (RM2 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3) und damit eine Lücke in der Mathematikdidaktik bearbeitet. Durch die Definition mathematischer Reflexion als Standpunkt- bzw. Perspektivwechsel wird es möglich, Weiterentwicklung mathematischer Deutungen als Ergebnis reflexiver Prozesse zu rekonstruieren.

Auf Grund der Einschränkung der Notwendigkeit eines *Rückbezugs* auf frühere Deutungen stellt sich jedoch die Frage, ob nach Auffassung von Schülke (2013) alle Deutungsveränderungen, die durch die Auseinandersetzung mit einer fremden Deutung, einem anderen Kontext oder durch einen Rückgriff auf frühere Deutungen erfolgen, als Folge mathematischer Reflexion aufzufassen sind. Hieraus würde folgen, dass ein großer Teil der mathematischen Wissenskonstruktionen durch mathematische Reflexion erfolgt und somit ‚Reflektieren‘ nur schwer von ‚Lernen‘ abzugrenzen ist. Die Definition des Begriffs ‚Standpunkt- bzw. Perspektivwechsel‘ ist so offen, dass reflexive Lernprozesse nicht klar von nicht-reflexiven abgrenzbar sind. Das hier deutlich werdende Problem könnte gelöst werden, indem das Merkmal des *Rückbezugs* auf die bisherige individuelle Deutung stärker betont wird. Dies bedeutet eine Einschränkung des Reflexionsbegriffs, welche jedoch zugleich eine Weiterentwicklung und Präzisierung darstellt. Dies wird in Kapitel 4 genauer erläutert. Dort werden zudem Freudenthals Annahmen über den Zusammenhang von reflexivem Denken und dem Entwickeln mathematischer Begründungen auf das Konstrukt ‚mathematische Reflexion‘ bezogen, wodurch eine Eingrenzung auf Gespräche erfolgt, in denen

Begründungen gesucht oder formuliert werden. Das Reflexionsverständnis dieser Arbeit baut in dieser, in Kapitel 4 genauer dargestellten Weise auf dem Konstrukt ‚mathematische Reflexion‘ von Schülke (2013) auf und schränkt die darin enthaltene Weite ein. Die Ergebnisse der zugehörigen Interviewstudie sind für diese Arbeit dennoch interessant, da sie sich im Wesentlichen darauf beziehen, wie die Auseinandersetzung mit einer anderen Deutung angeregt werden kann. Dies ist auch nach dem Verständnis der vorliegenden Arbeit Voraussetzung für mathematische Reflexion (vgl. Kap. 4).

Die Studie von Schülke (2013) hat die theoretische Annahme bestätigt, dass Interaktion für die Initiierung von mathematischer Reflexion sehr bedeutsam ist, da kein Standpunktwechsel rekonstruiert werden konnte, der auf Grund eigener Vorgehensweisen oder Äußerungen zustande kam. Des Weiteren spielen Momente der Irritation eine wichtige Rolle. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die Reflexion nur durch ein Partnerkind ausgelöst wurde und die Interviewerin nicht beteiligt war. Aus diesen Erkenntnissen lassen sich im Anschluss an Schülke (2013) folgende Schlüsse für die Förderung mathematischer Reflexion im Unterricht ziehen:

- Es sollte eine Gesprächskultur entwickelt werden, in der sich die Kinder aufeinander beziehen. Bei ihrer Etablierung kommt der Lehrkraft eine Vorbildfunktion zu. Anschließend sollte sie sich zunehmend zurücknehmen und Gespräche durch kurze, stereotype Fragen moderieren.
- Die Lehrkraft sollte auftretende Irritationen und Widersprüche nicht vorschnell auflösen, sondern diese vielmehr bewusst hervorheben.

Wie sich diese Folgerungen im Design und in den Ergebnissen der in dieser Arbeit vorgestellten Studie wiederfinden, wird im Kapitel 5.4.1 und im Kapitel 7.3 dargestellt.

1.3 Reflektieren als Zielvorgabe für den Mathematikunterricht der Grundschule

Die Kultusministerkonferenz (KMK) formuliert für den Mathematikunterricht an Grundschulen in Deutschland Kompetenzen, welche Schülerinnen und Schüler am Ende der 4. Klasse erreicht haben sollen (KMK, 2004). Diese Standards werden von den Bundesländern in den jeweiligen Lehrplänen weiter ausdifferenziert. Darüber hinaus beschreibt die KMK (2004) drei Anforderungsbereiche (vgl. Abb. 1.6). Diese verdeutlichen die „Bandbreite unterschiedlicher Anforderungen“ (KMK, 2004, S. 13), die im Rahmen eines differenzierenden Mathematikunterrichts der Grundschule an die Schülerinnen und Schüler gestellt werden sollen. Zur Verdeutlichung der Anforderungsbereiche werden Aufgaben angegeben, die „Kinder am Ende von Klasse 4 bewältigen sollten“ (KMK, 2004, S. 12). Die Zuordnung der Anforderungsbereiche zu speziellen Aufgaben kann je-

doch nicht immer eindeutig getroffen werden und ist vorläufig, da sie noch nicht empirisch validiert wurde (vgl. KMK, 2004).

Anforderungsbereich „Reproduzieren“ (AB I) Das Lösen der Aufgabe erfordert Grundwissen und das Ausführen von Routinetätigkeiten.
Anforderungsbereich „Zusammenhänge herstellen“ (AB II) Das Lösen der Aufgabe erfordert das Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen.
Anforderungsbereich „Verallgemeinern und Reflektieren“ (AB III) Das Lösen der Aufgabe erfordert komplexe Tätigkeiten wie Strukturieren, Entwickeln von Strategien, Beurteilen und Verallgemeinern.

Abbildung 1.6 Anforderungsbereiche zur Charakterisierung von Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule (KMK, 2004, S. 13)

Reflektieren als Anforderung, die durch geeignete Aufgaben an die Kinder gestellt werden soll, kennzeichnet also den höchsten der drei Anforderungsbereiche (vgl. KMK, 2004; s. auch Abb. 1.6). Demnach geht Reflektieren über das Reproduzieren von Grundwissen und von Routinetätigkeiten (AB I) sowie das Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen (AB II) hinaus. Zur weiteren Verdeutlichung des AB III werden beispielhaft vier ‚komplexe Tätigkeiten‘ genannt, nämlich „Strukturieren, Entwickeln von Strategien, Beurteilen und Verallgemeinern“ (KMK, 2004, S. 13). In den Kapiteln 1.1 und 1.2 ist deutlich geworden, dass Reflektieren durchweg als eine anspruchsvolle Tätigkeit gilt und somit die Beschreibung als ‚komplex‘ hierzu passt.

An der angeführten Liste von Tätigkeiten ist auffällig, dass ‚Reflektieren‘ im Gegensatz zum ‚Verallgemeinern‘ nicht erneut genannt wird. Stattdessen werden unterschiedliche und beispielhafte Aktivitäten genannt, bei denen zunächst nicht klar ist, ob sie insgesamt ‚Reflektieren‘ darstellen, ‚Reflektieren‘ erfordern oder teilweise doch dem ‚Verallgemeinern‘ zuzurechnen sind.

Strukturieren, Strategieentwicklung und Beurteilen haben gemeinsam, dass sie *bewusst* erfolgen können und zu *Bewusstsein* über Strukturen, Strategien oder über die Qualität des zu Beurteilenden führen (RM4 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3). Zudem bedeuten sie eine *Distanzierung* vom konkreten Berechnen von Aufgaben o. Ä., jedoch ohne dass hierzu auch eine zeitliche Distanz hergestellt werden müsste (RM3 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3). Nur beim Beurteilen ist ein expliziter *Rückbezug* auf Früheres nötig (RM1 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3). Strukturieren und Strategieentwicklung können demgegenüber im Bearbeitungsprozess erfolgen und sich dort auf den aktuellen Arbeitsstand beziehen. Jedoch können sie auch einen bewussten Rückbezug auf einen Bearbeitungsprozess erforderlich

machen. Der Erwerb *neuer Erkenntnisse* kann die Folge aller vier aufgezählten Tätigkeiten sein, also auch des Verallgemeinerns (RM2 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3).

Im Vergleich dieser Analyse mit den in Kapitel 1.1.2 vorgestellten mathematikdidaktischen Positionen wird deutlich, dass auch bei der KMK (2004) die Merkmale *Distanzierung* und *Bewusstsein* (RM3 und 4) überwiegen. Ein *Rückbezug* ist bei den beispielhaft aufgezählten Tätigkeiten möglich, jedoch nicht durchweg nötig (RM1). Mit Blick auf den Ursprung des Wortes Reflexion im lateinischen Wort für ‚Zurückbeugen‘ (vgl. Zwahr, 2006b, S. 655; s. Einführung zu Kap. 1.1) kann der Rückbezug jedoch als ein sehr wesentliches Merkmal von Reflexion angesehen werden, zumal auch Verallgemeinern bewusst erfolgt, eine Distanzierung von konkreten Beispielen bedeutet und zu neuen Erkenntnissen führt. Darüber hinaus kann es den Rückbezug zu vorherigen Überlegungen oder konkreten Beispielen erfordern. Daher wird gefolgert, dass alle Tätigkeiten, die zur Illustration des AB III angegeben werden, Reflexion *erfordern* können und somit geeignet sind, um Schülerinnen und Schüler zum Reflektieren anzuregen.

Dies wird bei der Analyse der von der KMK (2004) angegebenen Beispielaufgaben ebenfalls deutlich. Auch wenn es sich um eine vorläufige und nicht validierte Zuordnung handelt, lassen sich über die Analyse der Aufgaben Aussagen über die Vorstellungen der KMK (2004) über diesen Anforderungsbereich machen. Die als Aufgaben des AB III gekennzeichneten Aufgabenstellungen stellen entweder gegenüber den anderen Teilaufgaben eigenständige Aufgabenstellungen dar (z. B. 4. Teilaufgabe der großen Aufgabe „Würfel“ (KMK, 2004, S. 18)) oder setzen diese fort (z. B. 4. Teilaufgabe der großen Aufgabe „Zahlen zerlegen“ (KMK, 2004, S. 15)). Letzteres verdeutlichen Walther, van den Heuvel-Panhuizen und Granzer (2011) an dem folgenden Beispiel (Abb. 1.7), bei dem Aufgabenstellungen mit unterschiedlichen Anforderungen aufeinander aufbauen können.

a) $4000 + 2$	b) $1000 + 20$	c) $500 + 50$	d) $250 - 6$	e) $2000 - 10$
$4000 - 2$	$1000 - 20$	$500 - 50$	$250 + 6$	$2000 + 10$

Abbildung 1.7 Aufgabenbeispiel aus Walther et al. (2011, S. 16)

Zunächst werden die Aufgaben berechnet und die Ergebnisse eines Pärchens addiert (AB I: Reproduzieren). Anschließend können die Schülerinnen und Schüler entdecken, dass die Summe immer „das Doppelte der jeweils ersten Zahl ist“ (Walther et al., 2011, S. 17) (AB II: Zusammenhänge herstellen). Sollen die Schülerinnen und Schüler eigene Zahlenpärchen oder solche mit einer vorgegebenen Ergebnisumme finden, entspreche dies dem Anforderungsbereich III, denn es sei „zusätzlich Reflektieren auf die bisherige Arbeit und dabei das Be-

wusstmachen des zugrundeliegenden Musters sowie Verallgemeinern erforderlich“ (Walther et al., 2011, S. 18). Demnach wird AB III von Walther et al. (2011) neben dem Verallgemeinern durch zwei Tätigkeiten charakterisiert, die in der als Beispiele angegebenen Liste von KMK (2004) nicht enthalten sind (s. o.). Hierzu gehört erstens das „Reflektieren auf die bisherige Arbeit“ (Walther et al., 2011, S. 18), d. h., die Reflexion bezieht sich hier nicht direkt auf die Aufgabe, sondern auf die Bearbeitung vorheriger Aufgaben (Ergebnisse berechnen, Muster entdecken und evtl. erklären) (RM1 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3). Sie ist für das Finden von Zahlenpärchen (zweitens) notwendig, weil dabei das zugrundeliegende Muster bewusst gemacht wird (RM4 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3). Das Bewusstmachen des zugrundeliegenden Musters stellt die zweite zusätzliche Tätigkeit dar und ermöglicht das Verallgemeinern.

Neben dem Anforderungsbereich III beschreibt ‚Reflektieren‘ auch eine von der KMK (2004) benannte Teilkompetenz der allgemeinen Kompetenz ‚Kommunizieren‘. Es wird gefordert, dass Schülerinnen und Schüler am Ende der 4. Jahrgangsstufe ...

... eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und *gemeinsam darüber reflektieren* (KMK, 2004, S. 8, Hervorhebung von J.H.)

Reflektieren als Kompetenzerwartung an jedes Kind am Ende der Grundschulzeit wird also als eine Tätigkeit dargestellt, die gemeinsam mit anderen erfolgt und sich auf zuvor thematisierte Vorgehensweisen und Lösungswege bezieht. Die Reflexion erfolgt also im *Rückbezug* auf das bisherige Gespräch (RM1 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3). Zudem handelt es sich um eine gemeinsame und keine individuelle Aktivität. Was dieses Reflektieren darüber hinaus auszeichnet, ist den Ausführungen nicht zu entnehmen. Nach der Interpretation von Walther et al. (2011) kann es darin bestehen, dass „die individuellen Ansätze [...] verglichen bzw. voneinander abgegrenzt [werden]“ (S. 30). Demnach bedeutet Reflexion, dass Gemeinsamkeiten und Unterschiede individuell entwickelter Lösungsideen herausgearbeitet werden. Als Folge können die Schülerinnen und Schüler ihr Strategienrepertoire ergänzen und weiterentwickeln. Ein solches Vorgehen erfordert einen *Rückbezug* zur vorherigen Bearbeitung und bedeutet eine *Distanzierung* von der konkreten Aufgabenlösung, welche, sobald der Vergleich explizit gemacht wird, *bewusst* verlaufen kann und dann zu einem größeren *Bewusstsein* über mögliche Lösungswege führt (RM1, 3 und 4 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3). Kommt es zu einer Weiterentwicklung des Strategienrepertoires, bedeutet dies einen *Erkenntniszuwachs* (RM2 nach Kap. 1.1.1 & 1.1.3).

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass Reflexion als spezifisch auf den Mathematikunterricht bezogene Anforderung, sowohl im Sinne eines Anforderungsbereichs als auch als allgemeine Kompetenz, durchweg der Inhaltsreflexion im Sinne Bauers (1988, 1990) zuzuordnen ist. Dabei handelt es sich um eine anspruchsvolle, komplexe Tätigkeit, welche in unterschiedlicher

Gewichtung durch die in Kapitel 1.1 analysierten Reflexionsmerkmale charakterisiert werden kann. Diese kann sowohl alleine als auch in einer Gruppe gemeinsam vollzogen werden. Als gemeinsame Aktivität stellt sie eine verbindlich bis zum Ende der Grundschule zu erreichende allgemeine Kompetenz dar.

Hieraus kann gefolgert werden, dass eine sich auf mathematische Inhalte richtende und in Interaktion mit anderen erfolgende Reflexion eine legitime Anforderung an *alle* Kinder einer Grundschulklasse darstellt.

Mathematische Reflexion in argumentativ geprägten
Unterrichtsgesprächen

Eine empirisch-interpretative Untersuchung im 3. und
4. Grundschuljahr

Hartkens, J.

2018, XII, 399 S. 125 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-18839-9