2 Fachliche Fokussierungen

In diesem Kapitel wird der Lerngegenstand der linearen, proportionalen und antiproportionalen Funktionen auf formaler und situativer Fokussierungsebene mit seinen jeweiligen lokalen Bedeutungsstrukturen im Rahmen einer didaktisch-orientierten Analyse je spezifiziert und strukturiert (vgl. Hußmann & Prediger 2016). Ziel ist es, relevante Merkmale dieser elementaren funktionalen Zusammenhänge für die Analysen im empirischen Teil dieser Arbeit so auf- und vorzubereiten, dass ein ganzheitlicher und differenzierter Vergleich zwischen diesen Typen aus konventionaler und individueller Perspektive bei der Identifizierung von Situationen mit mathematischen Begriffen stattfinden kann.

Auf der formalen Fokussierungsebene (Kap. 2.1) wird zunächst der Funktionsbegriff aus konventionaler Perspektive spezifiziert, woran sich die formal-mathematischen Charakterisierungen linearer, proportionaler und antiproportionaler Funktionen anschließen. Diese ermöglichen eine Strukturierung hinsichtlich einer Differenzierung der Funktionstypen.

Zur Klärung lokaler Bedeutungen aus formaler Perspektive (Kap. 2.2) wird das Konzept der Grundvorstellungen, zusammen mit den Darstellungen für Funktionen und ihren Eigenschaften beschrieben. In Anknüpfung und Ausdifferenzierung der Erkenntnisse der formalen Fokussierungsebene werden die Bedeutungsstrukturen linearer, proportionaler und antiproportionaler Funktionen abgebildet und schließlich für eine semantische Unterscheidung der Funktionstypen strukturiert.

Auf der situativen Fokussierungsebene (Kap. 2.3) werden typische Kontexte, zusammen mit spezifisch funktionalen Aspekten von Situationen für eine Strukturierung von linearen, proportionalen und antiproportionalen Situationsklassen genutzt.

Für eine Bestimmung lokaler Bedeutungen aus situativer Perspektive (Kap. 2.4) wird die Tragweite funktionaler Abhängigkeit als fundamentale Idee in Abgrenzung zum Ansatz der Kernideen geklärt. Letzteres wird zusammen mit den zuvor spezifizierten Grundvorstellungen der Funktionstypen genutzt, um inferentielle Relationen zwischen den Begriffen Linearität, Proportionalität und Antiproportionalität und ihren Eigenschaften aus konventionaler Perspektive zu verbalisieren und wiederum zu strukturieren. Die sprachlich formulierten Eigenschaften als konkretisierte Ideen der fokussierten Begriffe lassen sich aus konventionaler Sicht nutzen, um die Beziehungen zwischen voneinander abhängigen Größen sowohl auf situativer als auch formaler Fokussierungsebene zu identifizieren. Sie dienen als Folie für den Vergleich mit den individuellen Identifizierungen im Auswertungsteil.

S. Heiderich, *Zwischen situativen und formalen Darstellungen mathematischer Begriffe*, Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts 30, DOI 10.1007/978-3-658-18870-2_2

Empirische Einsichten (Kap. 2.5) sollen zusammen mit einem genaueren Blick auf die Bildungsstandards und typische Lernwege in Lehr-/Lernwerken sowohl auf situativer und formaler Ebene vertiefte Einblicke gewähren, als auch im Zuge der abschließenden Diskussion, mit dem Fokus auf das nun fachlich spezifizierte Analyseschema in seinen Kategorien, zur Ableitung der anvisierten Forschungsfragen führen (Kap. 2.6).

2.1 Formale Fokussierungsebene

Zu Beginn der formalen Fokussierungsebene wird eine Definition des Funktionsbegriffs in Anbetracht der in der Literatur verschieden akzentuierten Konkretisierungen herausgearbeitet, um eine formale Grundlegung für die sich anschließenden konkreten Typen von Funktionen zu schaffen (Kap. 2.1.1). Die spezifischen Typen linearer (Kap. 2.1.2), proportionaler (Kap. 2.1.3) und antiproportionaler (Kap. 2.1.4) Funktionen werden je aus unterschiedlichen Blickwinkeln definiert, um mithilfe der formalen Äquivalenzen zwischen diesen, kennzeichnende Besonderheiten aufzudecken. Diese lassen eine Präzisierung mathematischer Sätze hinsichtlich charakteristischer Eigenschaften zu. Die formulierten Charakterisierungen sollen schließlich eine formale Unterscheidung zwischen diesen elementaren Funktionen ermöglichen und Komplexitätsebenen in ihrer gegenseitigen Unterscheidung zum Vorschein bringen (Kap. 2.1.5).

2.1.1 Der Begriff der Funktion

Der Funktionsbegriff wird in der Literatur unterschiedlich artikuliert. Aus diesem Grund wird eine formale Abgrenzung zu Begriffen erarbeitet, die im Rahmen der Definitionen zu Funktionen einerseits synonym und andererseits als Erklärungsmittel verwendet werden. Dabei wird das Ziel verfolgt, einen zwar ganzheitlichen, jedoch auf seine Kernelemente reduzierten Funktionsbegriff zu bestimmen.

„Wenn x und y zwei variable Größen sind und wenn sich [jedem; S.H.] gegebenen x-Wert genau ein y-Wert zuordnen läßt, dann nennt man y eine Funktion von x und schreibt $y = f(x)$.

Die veränderliche Größe x heißt *unabhängige Variable* oder *Argument* der Funktion y. Alle x-Werte, denen sich y-Werte zuordnen lassen, bilden den *Definitionsbereich D* der Funktion $f(x)$. Die veränderliche Größe y heißt *abhängige Variable*; alle y-Werte bilden den *Wertebereich W* der Funktion $f(x)$. […] Wenn Definitions- und Wertebereich nur reelle Zahlen enthalten, dann nennt man $y = f(x)$ eine *reelle Funktion* einer r*eellen Veränderlichen*“ (Bronstein et al. 2013 S. 49, Hervorh. i. Orig.).

Der Funktionsbegriff beinhaltet eine Abhängigkeit zweier Größen, deren Zusammenhang auf einer eindeutigen Zuordnung beruht. Eine Zuordnung muss per Definition nicht zwangsläufig eindeutig sein (bspw. Alter → Körpergröße).

Erst durch das Charakteristikum der Eindeutigkeit wird sie zur Funktion (vgl. Wittmann 2008, S. 11). „Abhängigkeiten, bei denen eine Größe schon aufgrund der anderen Größe eindeutig festliegt, nennt man funktionale Abhängigkeiten“ (Lengnink 2005, S. 16). Wenn zwei Argumente einer Funktion gleich sind, so folgt die Gleichheit ihrer Funktionswerte (vgl. Lehmann & Schulz 2007, S. 86). Das bedeutet aber nicht, dass umgekehrt aus der Gleichheit zweier Funktionswerte auch die Gleichheit ihrer Argumente folgt. Symbolisch liefert $y = f(x)$ eine explizite Form der symbolischen Darstellung von Funktionen (vgl. Bartsch 2007, S. 357).

Der Begriff der Abbildung wird über diese charakteristische Eigenschaft einer eindeutigen Zuordnung synonym definiert. Definitions- und Wertebereich werden dabei eher mit den Begriffen Urbild- und Bildbereich belegt, wobei das Argument dem Urbild und der Funktionswert dem Bild entspricht (vgl. bspw. Bartsch 2007, S. 356, Bronstein et al. 2013, S. 50). Bei der Reduzierung abstrakter Größenbereiche einer Abbildung (bspw. eine Abbildung des $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$, wobei f einer (m x n) - Matrix entspricht) auf den reellen Bereich hat sich der Funktionsbegriff etabliert (vgl. Bronstein et al. 2013, S. 50). Aus diesem Grund wird im Folgenden der Begriff der Funktion verwendet, da sich die empirischen Betrachtungen dieser Arbeit auf den reellen Größenbereich reduzieren.

Funktionen werden seit dem Ende des 19. Jahrhunderts auf formaler Ebene im Rahmen der Mengenlehre definiert. Der Begriff der Menge verallgemeinert dabei die oben genannten Begriffe Definitions- und Wertebereich für Funktionen und Urbild- und Bildbereich für Abbildungen:

„Mengentheoretisch: Die eindeutige Relation zwischen einer Menge *X* und einer Menge *Y*, dargestellt als Menge $f \subseteq X \times Y$ der (geordneten) Paare (x, y) heißt *Funktion*, auch *Abbildung* von *X* **in** *Y*.

Jedem Argument $x \in X$ ist genau ein Funktionswert $y \epsilon Y$ zugeordnet“ (Bartsch 2007, S. 355, Hervorh. i. Orig.).

Der Zusammenhang des in Definitionen häufig verwendeten Begriffs der Relation zu dem der Funktion wird durch nachfolgende Versprachlichung deutlicher:

„Im folgenden seien *X* und *Y* zwei nichtleere Mengen. Eine *Relation zwischen X* und *Y* ist eine Teilmenge des cartesischen Produkts $X \times Y$. […] Eine *Funktion f* von *X* in *Y* ist eine spezielle Relation zwischen *X* und *Y*, nämlich eine, für die gilt: Für alle $x \in X$ gibt es genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$. Dieses eindeutig bestimmte *y* bezeichnet man mit $f(x)$ und schreibt die Funktion *f* in der Form: $x \mapsto f(x)$ (Timmann 2003, S. 14, Fehler i. Orig., Hervorh. i. Orig.).

Da die Funktion eine spezielle Relation repräsentiert, wird der Funktions- durch den Relationsbegriff verallgemeinert. Das kartesische Produkt gibt dabei die Menge aller geordneten Paare (x, y) an. Die Funktion betrachtet dabei als Teilmenge nur diejenigen Tupel, die eine linkstotale (zu jedem Argument gibt es mindestens einen Funktionswert) und rechteindeutige (zu jedem Argument gibt es höchstens einen Funktionswert) Relation widerspiegeln. Die Definition der Funktion über den Relationsbegriff liefert neben der Kerneigenschaft der Eindeutigkeit zwischen der Abhängigkeit zweier Größen durch das Zusammenfassen zu einer Teilmenge eines kartesischen Produkts einen zusätzlichen Fokus auf die Gesamtheit dieser Paare, die *jedem* Argument der Definitionsmenge eindeutig einen Funktionswert der Wertemenge zuordnen. Jedoch muss der komplexere Begriff der Relation nicht notwendig definiert werden, um den Funktionsbegriff zu fassen. Folgende Definition soll diesen zusätzlichen Aspekt mit aufgreifen bzw. deutlicher betonen und als grundlegende Charakterisierung des reellen Funktionsbegriffs für die sich anschließenden Spezifizierungen der linearen, proportionalen und antiproportionalen Funktionen gelten.

Definition:
Unter einer **reellen Funktion** $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ versteht man eine eindeutige Zuordnung, die <u>jedem</u> Argument x (unabhängige Größe) des Definitionsbereichs D genau einen Funktionswert y (abhängige Größe) mit $y \in \mathbb{R}$ zuweist. Man schreibt $y = f(x)$ und nennt die Menge aller angenommenen Funktionswerte Wertebereich.

Eine Funktion als eindeutige Zuordnung muss nicht durch einen konkreten Term als allgemeine Vorschrift, die für alle Wertepaare Geltung hat, symbolisch dargestellt werden können (bspw. SchülerIn → Körpergröße).

Nachfolgend werden die spezifischen **Funktionstypen** der linearen, proportionalen und antiproportionalen Funktionen charakterisiert. Einer Definition schließen sich jeweils äquivalente Aussagen hinsichtlich ihres Änderungsverhaltens an. Je anknüpfend werden weitere besondere Eigenschaften formal herausgearbeitet. Diese Typen von Funktionen werden jeweils auf ihrem maximal möglichen Definitionsbereich betrachtet.

2.1.2 Der Begriff der linearen Funktion

Definition:
Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **lineare Funktion**, wenn feste $a, b \in \mathbb{R}$ existieren mit $f(x) = a \cdot x + b$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Satz (*Äquivalenz linearer Charakterisierungen*):
Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(L1) f ist eine lineare Funktion.
(L2) Es gibt ein festes $a \in \mathbb{R}$, so dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit $f'(x) = a$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
(L3) Es gibt ein festes $a \in \mathbb{R}$, so dass für beliebige x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ gilt: Ist $\Delta x \coloneqq x_2 - x_1$ und $\Delta f \coloneqq f(x_2) - f(x_1)$, so ist $\Delta f = a \cdot \Delta x$.

Beweis:
(L1) ⇒ (L2):
Es gebe feste $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x + b$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt für beliebiges $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h) + b - (a \cdot x + b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a \cdot h}{h} = a.$$

Also gibt es ein festes $a \in \mathbb{R}$, so dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar[1] ist mit

$$f'(x) = a$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(L2) ⇒ (L3):
Es gebe ein festes $a \in \mathbb{R}$, so dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit $f'(x) = a$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (vgl. Forster 2013, S. 178) existiert für jedes beliebige offene Intervall $(x_1, x_2) \subset \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ und $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Daraus folgt

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

Schreibe $\Delta f \coloneqq f(x_2) - f(x_1)$ und $\Delta x \coloneqq x_2 - x_1$. Dann gibt es ein festes $a \in \mathbb{R}$ mit

$$\Delta f = a \cdot \Delta x$$

für beliebige x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$.

(L3) ⇒ (L1):

1 *f heißt in x_0 differenzierbar, wenn der Grenzwert $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ existiert. Dieser bestimmt die Ableitung von f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.*

Es gebe ein festes $a \in \mathbb{R}$, so dass für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt: Ist $\Delta x := x_2 - x_1$ und $\Delta f := f(x_2) - f(x_1)$, so ist $\Delta f = a \cdot \Delta x$.
Nach Voraussetzung gibt es ein festes $a \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x_2) - f(x_1) = a \cdot (x_2 - x_1)$$

für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Damit gilt

$$f(x_2) = a \cdot x_2 + f(x_1) - a \cdot x_1.$$

Wähle $x_1 := 0$, setze $x := x_2$ und wähle $b := f(0) \in \mathbb{R}$. Dann ist für feste $a, b \in \mathbb{R}$

$$f(x) = a \cdot x + b$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Also gilt (L1) ⇔ (L2) ⇔ (L3).

Eine lineare Funktion (L1) wird über ihre explizite Form in der symbolischen Darstellung definiert (vgl. Engel 2010, S. 46, Wittmann 2008, S. 49). Dabei sei $\boldsymbol{a}$ mit dem Begriff des **festen Faktors** und $\boldsymbol{b}$ als **additive Konstante** bezeichnet: Der Funktionswert ergibt sich aus der Summe des Produkts aus festem Faktor und Argument mit der additiven Konstanten. Der feste Faktor hat dabei einen direkten, die additive Konstante einen indirekten Einfluss auf das Argument.

Der Monotoniebegriff soll an dieser Stelle definiert werden, da sich dieser einerseits zur Spezifizierung der symbolischen Besonderheiten der einzelnen konkreten Typen eignet und andererseits ein erstes Beschreibungsmittel für Änderungen in den anderen Darstellungsarten zu Funktionen (siehe Kap. 2.2) bietet:

„Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt **monoton wachsend bzw. monoton fallend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ bzw. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Die Funktion f heißt **streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$“

(Strampp 2012, S. 78; Hervorh. S.H.).

Der feste Faktor lässt sich nun mithilfe dieser Definition spezifizieren (vgl. Bronstein et al. 2013, S. 51):

Satz (*Monotonieverhalten linearer Funktionen*):
Für eine lineare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt für feste $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x + b$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dass f für $a > 0$ streng monoton wächst, für $a < 0$ streng monoton fällt und für $a = 0$ konstant ist.

Beweis:
Es seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$.
Dann gilt für feste $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$:
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow ax_1 < ax_2 \Leftrightarrow ax_1 + b < ax_2 + b \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2),$$
d.h. f wächst streng monoton.
Dann gilt für feste $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < 0$:
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow ax_1 > ax_2 \Leftrightarrow ax_1 + b > ax_2 + b \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2),$$
d.h. f fällt streng monoton.
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt für ein festes $b \in \mathbb{R}$ und $a = 0$:
$$f(x) = b,$$
d.h. f ist konstant.

(L2) charakterisiert Linearität über ihre konstante Ableitung (vgl. Walz et. al. 2011, S. 231f). Die Gleichung gibt an, dass die Funktion f an *jeder* Stelle x dieselbe konstante, lokale Änderungsrate (vgl. Picher 2011, S. 151) besitzt, die über die Existenz des Grenzwerts des Differenzenquotienten definiert wird (vgl. Danckwerts & Vogel 2008, S. 88). Die Implikation zwischen (L1) und (L2) verdeutlicht, dass dabei der Wert des festen Faktors der Änderungsrate entspricht und dieser weder von b noch von x abhängt.

(L3) formuliert das so genannte **Linearitätsprinzip** (vgl. Suarez 1977, S. 59). Es beschreibt die Auswirkungen einer Änderung des Arguments ($\Delta x = x_2 - x_1$) auf die Änderung des Funktionswerts ($\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$) (vgl. Wittmann 2008, S. 59), nämlich die Vervielfachung von Δx um a: Die Differenz zweier Funktionswerte ergibt sich aus dem Produkt des festen Faktors mit der Differenz der zugehörigen Argumente. Die Implikation zwischen (L2) und (L3) bringt hervor, dass dabei nur der feste Faktor a (bzw. die feste lokale Änderungsrate) relevant ist und die additive Konstante b und das Argument x keinen Einfluss nehmen, da Δx unabhängig von diesen ist. Als Alternative zur Betrachtung von Differenzen beim Linearitätsprinzip lässt sich dieses Phänomen ebenso additiv ausdrücken:

Satz (*Allgemeine additive Änderung linearer Funktionen*):
Für eine lineare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt für ein festes $a \in \mathbb{R}$: Ist $\Delta x := x_2 - x_1$ für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, so ist $f(x_2) = f(x_1 + \Delta x) = f(x_1) + a \cdot \Delta x$.

Beweis:
Mit (L1) gilt mit festen $a, b \in \mathbb{R}$ und mit $\Delta x := x_2 - x_1$ für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
$$f(x_1 + \Delta x) = a \cdot (x_1 + \Delta x) + b = a \cdot x_1 + b + a \cdot \Delta x = f(x_1) + a \cdot \Delta x.$$

Eine additive Zunahme des Arguments um Δx bewirkt eine additive Zunahme des Funktionswerts um $a \cdot \Delta x$ oder verkürzt: „gleiche Zunahme der Argumente bewirkt gleiche Zunahme (Abnahme) der Funktionswerte“ (Malle 2002, S. 83), aber nicht zwangsläufig *die* gleiche Zunahme, nur für $a = 1$. Eine Abnahme ergibt sich entsprechend bei negativem a. Die Unabhängigkeit der Veränderung des Arguments und damit des zugehörigen Funktionswerts ist eine Eigenart und damit Besonderheit linearer Funktionen.

Aus dem Zusammenhang in (L3) zusammen mit der *allgemeinen additiven Änderung* lassen sich nun zwei weitere Charakteristika des festen Faktors a neben seiner Bedeutung der lokalen Änderungsrate und seiner Aussagekraft über das *Monotonieverhalten* ableiten (vgl. Wittmann 2008, S. 60):

Satz (*Additive Änderung pro Schritt linearer Funktionen*):
Für eine lineare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt für ein festes $a \in \mathbb{R}$ $f(x+1) = f(x) + a$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis:
Folgt direkt aus dem Satz zur *allgemeinen additiven Änderung*.

Pro Schritt verändert sich der Funktionswert um a. Der feste Faktor a fungiert hier als additive Veränderung des Funktionswerts, wenn das Argument um 1 erhöht wird. Eine weitere Rolle des festen Faktors wird durch folgenden Zusammenhang explizit:

Satz (*Differenzquotienteneigenschaft linearer Funktionen*):
Für eine lineare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt für ein festes $a \in \mathbb{R}$ $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = a$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \neq x_2$.

Beweis:
Folgt direkt aus (L3).

Der Quotient aus der Differenz zweier Funktionswerte und der Differenz der zugehörigen Argumente ist konstant. Der feste Faktor a nimmt hier nun die Rolle des konstanten Verhältnisses zwischen der Änderung des Funktionswerts und der Änderung des Arguments ein. Im Vergleich zu (L2) wird hier der Fokus durch den Differenzenquotienten auf die diskrete (vgl. Picher 2011, S.151) oder mittlere (vgl. Büchter & Henn 2010, S. 45) Änderungsrate zwischen zwei Punkten gelegt, die jedoch auch für zwei verschiedene, beliebig gewählte Punkte stets dem festen Faktor entspricht. Lokale und mittlere Änderungsraten entsprechen bei linearen Funktionen also stets dem festen Faktor a.

Neben den Ausdifferenzierungen des festen Faktors folgen weitere Eigenschaften, die das Linearitätsprinzip hinsichtlich der Betrachtung gleicher Abstände zwischen Argumenten und des Mittelwerts zweier Argumente zulässt:

Satz (*Abstandseigenschaft linearer Funktionen*):
Für eine lineare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: Ist $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, 4$, so ist $f(x_2) - f(x_1) = f(x_4) - f(x_3)$.

Beweis:
Es sei

$$x_2 - x_1 = x_4 - x_3$$

mit $x_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1,2,3,4$. Daraus folgt für feste $a, b \in \mathbb{R}$

$$a \cdot (x_2 - x_1) + b - b = a \cdot (x_4 - x_3) + b - b.$$

Daraus folgt

$$a \cdot x_2 + b - (a \cdot x_1 + b) = a \cdot x_4 + b - (a \cdot x_3 + b).$$

Mit (L1) folgt

$$f(x_2) - f(x_1) = f(x_4) - f(x_3)$$

für $x_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1,2,3,4$.
Aus der Gleichheit von Abständen zwischen zwei Argumenten folgt die Gleichheit der Abstände zwischen den zugehörigen Funktionswerten.

Satz (*Mittelwerteigenschaft linearer Funktionen*):
Für eine lineare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Beweis:
Für feste $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \overset{(L1)}{=} a \cdot \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + b = \frac{a \cdot x_1}{2} + \frac{a \cdot x_2}{2} + \frac{2b}{2} = \frac{a \cdot x_1 + b + a \cdot x_2 + b}{2} \overset{(L1)}{=} \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Der Funktionswert zum Mittelwert zweier Argumente ist der Mittelwert der beiden zugehörigen Funktionswerte (bzgl. der *Differenzquotienten-, Abstands-* und *Mittelwerteigenschaft* vgl. Fricke 1987, S. 112ff).

Die proportionale Funktion ist ein Spezialfall der linearen Funktion. Sie soll im Folgenden näher spezifiziert werden, da sie durch die Reduzierung ihrer symbolischen Form um die additive Konstante neue Eigenschaften in sich trägt.

2.1.3 Der Begriff der proportionalen Funktion

Satz (*Äquivalenz proportionaler Charakterisierungen*):
Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(P1) f ist eine proportionale Funktion.
(P2) Es gibt ein festes $a \in \mathbb{R}$, so dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit $f'(x) = a$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(0) = 0$.
(P3) Mit f stetig und für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt: Ist $\Delta x \coloneqq x_2 - x_1$, so ist $f(x_2) = f(x_1 + \Delta x) = f(x_1) + f(\Delta x)$.
(P4) Für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt $f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis:
(P1) ⇒ (P2):
Spezialfall von (L1) ⇒ (L2) für ein festes $a \in \mathbb{R}$, $b = 0$ und $f(0) = a \cdot 0 = 0$.
Also gibt es ein festes $a \in \mathbb{R}$, so dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit
$$f'(x) = a$$
für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(0) = 0$.

(P2) ⇒ (P1):
Es gebe ein festes $a \in \mathbb{R}$, so dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar sei mit $f'(x) = a$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und es sei $f(0) = 0$. Die Stetigkeit[2] von f folgt aus ihrer Differenzierbarkeit. Durch Integrieren folgt, dass $f(x)$ von der Form $f(x) = a \cdot x + b$ für ein festes $a \in \mathbb{R}$, beliebige $b \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Mit der Voraussetzung $f(0) = 0$ folgt, dass $b = 0$ ist. Also gibt es ein festes $a \in \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = a \cdot x$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.

(P1) ⇒ (P3):
Es gebe ein festes $a \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. f ist stetig auf $\mathbb{R}$. Wähle $\Delta x \coloneqq x_2 - x_1$ für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt für ein festes $a \in \mathbb{R}$
$$f(x_2) = f(x_1 + \Delta x) = a \cdot (x_1 + \Delta x) = a \cdot x_1 + a \cdot \Delta x = f(x_1) + f(\Delta x).$$
Also ist f stetig und für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und mit $\Delta x \coloneqq x_2 - x_1$ gilt
$$f(x_2) = f(x_1 + \Delta x) = f(x_1) + f(\Delta x).$$

(P3) ⇒ (P1):
Es sei f stetig und es gelte für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$: Ist $\Delta x \coloneqq x_2 - x_1$, so ist $f(x_2) = f(x_1 + \Delta x) = f(x_1) + f(\Delta x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Implikation zu (P1) folgt, da die Funktionen der Form $f(x) = a \cdot x$ für festes $a \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$

2 *$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

die stetigen Lösungen der Cauchyschen Funktionalgleichung (vgl. u.a. Ilse 1995, S. 17f) aus (P3) sind. Also gibt es ein festes $a \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = a \cdot x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

<u>(P1) ⇒ (P4):</u>

Es gebe ein festes $a \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $r \in \mathbb{R}$

$$f(r \cdot x) = a \cdot r \cdot x = r \cdot a \cdot x = r \cdot f(x).$$

Also ist für alle $r \in \mathbb{R}$

$$f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

<u>(P4) ⇒ (P1):</u>

Für alle $r \in \mathbb{R}$ gelte $f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt dies auch für $r = \frac{1}{x}$, falls $x \neq 0$. Es folgt, dass

$$f(r \cdot x) = f(1) = \frac{1}{x} \cdot f(x).$$

Wähle $a \coloneqq f(1) \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$a = \frac{1}{x} \cdot f(x).$$

Dann folgt für ein festes $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = a \cdot x$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Sei $x = 0$. Dann ist

$$f(r \cdot x) = r \cdot f(x) \Leftrightarrow f(0) = r \cdot f(0).$$

Dies gilt nur dann für alle $r \in \mathbb{R}$, falls $f(0) = 0$ ist.
Da $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$, folgt

$$f(0) = f(1) \cdot 0 = a \cdot 0.$$

Also gilt $f(x) = a \cdot x$ mit $a = f(1)$ auch für $x = 0$.
Also gibt es ein festes $a \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = a \cdot x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Also gilt (P1) ⇔ (P2) ⇔ (P3) ⇔ (P4).

(P1) wird wieder über die explizite Form einer proportionalen Funktion in der symbolischen Darstellung definiert (vgl. Wittmann 2008, S. 51): Der Funktionswert ergibt sich aus dem Produkt aus festem Faktor und Argument. Da (P1) einen speziellen Fall mit $b = 0$ von (L1) darstellt, gelten die Sätze zum *Mono-*

tonieverhalten, zur *allgemeinen additiven Änderung*, *additiven Änderung pro Schritt*, *Differenzquotienten-*, *Abstands-* und *Mittelwerteigenschaft* ebenso für proportionale Funktionen.

(P2) fokussiert erneut das Kriterium der konstanten Ableitung, welches aber um die Stelle $f(0) = 0$ ergänzt werden muss, da die Stammfunktion einer konstanten Funktion eine beliebige, lineare Funktion darstellen kann. Die Implikation zwischen (P1) und (P2) zeigt auch hier, dass der Wert des festen Faktors a der lokalen Änderungsrate entspricht und diese nicht von x abhängt.

(P3) stellt die additive Änderung einer proportionalen Funktion heraus: Eine additive Zunahme des Arguments um Δx bewirkt eine additive Zunahme des Funktionswerts um $f(\Delta x)$. Im Vergleich zu den linearen Funktionen ergibt sich folgender Zusammenhang für das Linearitätsprinzip:

Satz (*Linearitätsprinzip proportionaler Funktionen*):
Für eine proportionale Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt für ein festes $a \in \mathbb{R}$: Ist $\Delta x \coloneqq x_2 - x_1$ und $\Delta f \coloneqq f(x_2) - f(x_1)$ für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, so ist $f(x_2) = f(x_1 + \Delta x) = f(x_1) + f(\Delta x)$ äquivalent zu $\Delta f = a \cdot \Delta x$.

Beweis:
Es sei $\Delta x \coloneqq x_2 - x_1$ und $\Delta f \coloneqq f(x_2) - f(x_1)$ für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt für ein festes $a \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
& f(x_2) = f(x_1 + \Delta x) = f(x_1) + f(\Delta x) \\
\overset{(P1)}{\Leftrightarrow}\; & a \cdot (x_2 - x_1) = a \cdot (x_1 + \Delta x) - a \cdot x_1 \\
\Leftrightarrow\; & a \cdot x_2 - a \cdot x_1 = a \cdot x_1 + a \cdot \Delta x - a \cdot x_1 \\
\overset{(P1)}{\Leftrightarrow}\; & f(x_2) - f(x_1) = a \cdot \Delta x \\
\Leftrightarrow\; & \Delta f = a \cdot \Delta x
\end{aligned}
$$

Die proportionale Funktion leistet hier also im Vergleich zur linearen Funktion formal etwas mehr, dadurch, dass die additive Veränderung des Arguments um Δx nicht nur eine additive Veränderung des Funktionswerts um $a \cdot \Delta x$ beschreibt, sondern dass diese Veränderung aufgrund der additiven Konstanten – die den Wert Null hat – zur Funktion $f(\Delta x)$ zusammengefasst werden kann. Proportionale Funktionen sind demnach *additive* Funktionen, die die Struktur der Addition erhalten. In Kapitel 2.1.5 werden die Konsequenzen dieses Unterschieds näher betrachtet.

Die Fokussierung auf die ***Additivität*** (**P3**) proportionaler Funktionen auf Basis zweier konkreter Argumente (im Vergleich zu einem Argument und einem Abstand von diesem Argument) liefert folgendes Theorem:

Satz (*Summeneigenschaft proportionaler Funktionen*):
Für eine proportionale Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Beweis:
Folgt direkt aus (P3).

Addiert man zwei Argumente, so addieren sich auch ihre Funktionswerte. Hingegen dieser additiven Betrachtungsweise macht (P4) eine Aussage über den Einfluss der multiplikativen Änderung des Arguments auf den Funktionswert (vgl. Engel 2010, S. 44): Eine Ver-r-fachung des Arguments bewirkt eine Ver-r-fachung des Funktionswerts. Dieser Zusammenhang wird als ***Vervielfachungseigenschaft*** bzw. *Homogenität* benannt (vgl. Blum 1987, Jordan et al. 2004).

Bei proportionalen Funktionen übernimmt der feste Faktor ebenfalls die Rolle eines festen Verhältnisses, allerdings ist durch die additive Konstante gleich Null keine Betrachtung von Differenzen mehr notwendig:

Satz (*Quotientengleichheit proportionaler Funktionen*):
Für eine proportionale Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt für ein festes $a \in \mathbb{R}$ $\frac{f(x)}{x} = a$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Beweis:
Folgt direkt aus (P1).

Der Quotient aus Funktionswert und zugehörigem Argument ist stets identisch. Durch Umstellen dieser Gleichung für zwei verschiedene Argumente und deren Funktionswerte ($\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2} = a$) ergibt sich folgende Eigenschaft:

Satz (*Verhältnisgleichheit proportionaler Funktionen*):
Für eine proportionale Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{x_1}{x_2}$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_2 \neq 0$ und $f(x_2) \neq 0$.

Beweis:
Folgt direkt aus dem Satz zur *Quotientengleichheit*.

Das Verhältnis zwischen zwei Funktionswerten ist gleich dem Verhältnis ihrer Argumente (bzgl. der Eigenschaften vgl. Blum 1987, Jordan et al. 2004).
Proportionale werden zu *anti*proportionalen Funktionen, indem die Operation zwischen a und dem Argument in ihrer expliziten Form umgekehrt wird. Für

einen guten Vergleich und eine weitreichende Unterscheidung sollen die antiproportionalen Funktionen ebenso wie die linearen und proportionalen Funktionen aus verschiedenen Perspektiven im Rahmen des Änderungsverhaltens charakterisiert werden.

2.1.4 Der Begriff der antiproportionalen Funktion

Definition:
Eine Funktion $f: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ heißt **antiproportionale Funktion**, wenn ein festes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ existiert mit $f(x) = \frac{a}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Satz (*Äquivalenz antiproportionaler Charakterisierungen*):
Es sei $f: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(A1) f ist eine antiproportionale Funktion.
(A2) Mit f ungerade und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ gibt es ein festes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, so dass f auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ differenzierbar ist mit $f'(x) = -\frac{a}{x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
(A3) Mit f ungerade und für ein festes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt: Ist $\Delta x \coloneqq x_2 - x_1$ und $\Delta f \coloneqq f(x_2) - f(x_1)$ für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, so ist $\Delta f = -\frac{a}{x_1 \cdot x_2} \cdot \Delta x$.
(A4) Für alle $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt $f(r \cdot x) = \frac{1}{r} \cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

<u>Beweis:</u>
<u>(A1) ⇒ (A2):</u>
Es gebe ein festes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $f(x) = \frac{a}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. f ist ungerade, da $f(-x) = \frac{a}{-x} = -\frac{a}{x} = -f(x)$. Für ein festes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a}{x} = 0$. Ferner ist

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{a}{x+h} - \frac{a}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ax - a(x+h)}{(x+h)\cdot x \cdot h} = \lim_{h\to 0} \frac{-a}{x^2 + \underbrace{h \cdot x}_{\to 0}} = -\frac{a}{x^2}.$$

Also ist f ungerade, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ und für ein festes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ differenzierbar mit

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
<u>(A2) ⇒ (A1):</u>

Es sei f ungerade, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ und es gebe ein festes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, so dass f auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ differenzierbar ist mit $f'(x) = -\frac{a}{x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Durch Integrieren folgt, dass $f(x)$ von der Form $f(x) = \frac{a}{x} + b$ für beliebige $b \in \mathbb{R}$ ist. Mit f ungerade, also $f(-x) = -f(x)$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ folgt für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, dass $b = 0$ ist. Also gibt es ein festes $a \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$ mit

$$f(x) = \frac{a}{x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

<u>(A1) ⇒ (A3):</u>

Es gebe ein festes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $f(x) = \frac{a}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. f ist ungerade, da $f(-x) = \frac{a}{-x} = -\frac{a}{x} = -f(x)$. Weiter gilt für ein festes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{a}{x_2} - \frac{a}{x_1} = \frac{a \cdot x_1}{x_1 \cdot x_2} - \frac{a \cdot x_2}{x_1 \cdot x_2} = -\frac{a}{x_1 \cdot x_2} \cdot (x_2 - x_1).$$

Setze $\Delta x \coloneqq x_2 - x_1$ und $\Delta f \coloneqq f(x_2) - f(x_1)$ für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann gilt für ein festes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$\Delta f = -\frac{a}{x_1 \cdot x_2} \cdot \Delta x.$$

<u>(A3) ⇒ (A1):</u>

Es sei f ungerade und es gelte für ein festes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$: Ist $\Delta x \coloneqq x_2 - x_1$ und $\Delta f \coloneqq f(x_2) - f(x_1)$ für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, so ist $\Delta f = -\frac{a}{x_1 \cdot x_2} \cdot \Delta x$. Setze $x \coloneqq x_2$ und $-x \coloneqq x_1$. Dann folgt

$$f(x) - f(-x) = -\frac{a}{-x^2} \cdot 2 \cdot x = 2 \cdot \frac{a}{x}.$$

Da f ungerade ist, gilt

$$f(-x) = -f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und damit gilt

$$f(x) - f(-x) = 2 \cdot f(x).$$

Daraus folgt

$$2 \cdot f(x) = 2 \cdot \frac{a}{x}.$$

Also gibt es ein festes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit

$$f(x) = \frac{a}{x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

<u>(A1) ⇒ (A4):</u>

Es gebe ein festes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $f(x) = \frac{a}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann ist für alle $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$f(r \cdot x) = \frac{a}{r \cdot x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{a}{x} = \frac{1}{r} \cdot f(x).$$

Also gilt für alle $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$f(r \cdot x) = \frac{1}{r} \cdot f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

(A4) ⇒ (A1):

Für alle $r \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gelte $f(r \cdot x) = \frac{1}{r} \cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.Dies gilt insbesondere für $r := \frac{1}{x}$. Damit folgt $f(1) = x \cdot f(x)$, also $f(x) = \frac{f(1)}{x}$. Wähle $a := f(1)$. Dann folgt für ein festes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$f(x) = \frac{a}{x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Also gilt (A1) ⇔ (A2) ⇔ (A3) ⇔ (A4).

(A1) beinhaltet wieder die Definition über die explizite Form (vgl. Bronstein et al. 2013, S. 67): Der Funktionswert ergibt sich aus dem Quotienten von a und dem Argument.

Satz (*Monotonieverhalten antiproportionaler Funktionen*):
Für eine antiproportionale Funktion $f: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt für ein festes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $f(x) = \frac{a}{x}$, dass f auf $\mathbb{R}^+$ (bzw. $\mathbb{R}^-$) für $a > 0$ streng monoton fällt und für $a < 0$ streng monoton wächst.

Beweis:

Es seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$(bzw. $\mathbb{R}^-$) mit $x_1 < x_2$.
Dann gilt für ein festes $a > 0 \in \mathbb{R}$:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{a}{x_1} > \frac{a}{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

d.h. f fällt streng monoton.
Dann gilt für ein festes $a < 0 \in \mathbb{R}$:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{a}{x_1} < \frac{a}{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

d.h. f wächst streng monoton.

a soll hier den Begriff **feste Gesamtmenge** tragen, da seine Bedeutung aufgrund des veränderten, operativen Zusammenhangs im Vergleich zur linearen und damit auch proportionalen Funktion eine andere ist. Sie wird durch folgende Eigenschaft deutlich:

Satz (*Produktgleichheit antiproportionaler Funktionen*):
Für eine antiproportionale Funktion $f: \mathbb{R}\backslash\{0\} \rightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt für ein festes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $x \cdot f(x) = a$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Beweis:
Folgt direkt aus (A1).

Das Produkt aus Argument und Funktionswert ist stets gleich der festen Gesamtmenge. a bekleidet hier die Rolle eines konstanten Produkts.
(A2) zeigt die Ableitung einer antiproportionalen Funktion. Die Implikation zwischen (A1) und (A2) zeigt, dass sich die lokale Änderungsrate quadratisch verhält und sich das Vorzeichen umkehrt.

(A3) bringt das nicht konstante Verhältnis zwischen der Änderung des Arguments und der Änderung des Funktionswerts hervor. Die Implikation zwischen (A2) und (A3) bringt dabei die Abhängigkeit von den konkreten Werten der Argumente hervor.

(A4) beschreibt die multiplikative Änderung (vgl. Engel 2010, S. 49): Wenn man das Argument ver- r -facht, dann ver- $\frac{1}{r}$ -facht sich der Funktionswert. Dabei ist der Wert von a irrelevant ((A1) ⇒ (A4)). Im Vergleich zu proportionalen Funktionen kann man hier von der *reziproken Vervielfachungseigenschaft* sprechen. Eine weitere Eigenschaft proportionaler lässt sich in umgekehrter Operation auf antiproportionale Funktionen übertragen:

Satz (*Reziproke Verhältnisgleichheit antiproportionaler Funktionen*):
Für eine antiproportionale Funktion $f: \mathbb{R}\backslash\{0\} \rightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt für ein festes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{x_2}{x_1}$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Beweis:
Folgt direkt aus dem Satz zur *Produktgleichheit* mit festem $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit

$$f(x_1) \cdot x_1 = f(x_2) \cdot x_2 = a$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Das Verhältnis zwischen zwei Funktionswerten ist gleich dem Verhältnis ihrer reziprok angeordneten Argumente. Neben der Betrachtung einer multiplikativen ist der Blick auf die additive Änderung auch für antiproportionale Funktionen hinsichtlich einer angestrebten Unterscheidung der Funktionstypen lohnenswert:

Satz (*Additive Änderung pro Schritt antiproportionaler Funktionen*):
Für eine antiproportionale Funktion $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt für ein festes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ $f(x+1) = f(x) \cdot \frac{x}{x+1}$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $x + 1 \neq 0$.

Beweis:
Für ein festes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt

$$f(x+1) \overset{(A1)}{=} \frac{a}{x+1} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{x+1} \overset{(A1)}{=} f(x) \cdot \frac{x}{x+1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $x + 1 \neq 0$.

Eine additive Veränderung des Arguments um 1 bewirkt eine *multiplikative* Veränderung des Funktionswerts um den Quotienten aus dem Argument und des um Eins vergrößerten Arguments. Für größer werdende Argumente nähert sich der Quotient $\frac{x}{x+1}$ immer mehr der 1 an. Die feste Gesamtmenge a hat dabei keinen Einfluss auf diese Änderung. Eine Verallgemeinerung der additiven Veränderung auf alle Fälle führt zu folgender Charakterisierung:

Satz (*Allgemeine additive Änderung antiproportionaler Funktionen*):
Für eine antiproportionale Funktion $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt für ein festes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$: Ist $\Delta x := x_2 - x_1$, so ist $f(x_2) = f(x_1 + \Delta x) = f(x_1) \cdot \frac{x_1}{x_1 + \Delta x} = f(x_1) \cdot \frac{x_1}{x_2}$ für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Beweis:
Folgt direkt aus dem Satz zur *Produktgleichheit* mit festem $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $\Delta x := x_2 - x_1$ mit

$$f(x_2) \cdot x_2 = f(x_1 + \Delta x) \cdot (x_1 + \Delta x) = f(x_1) \cdot x_1 = a$$

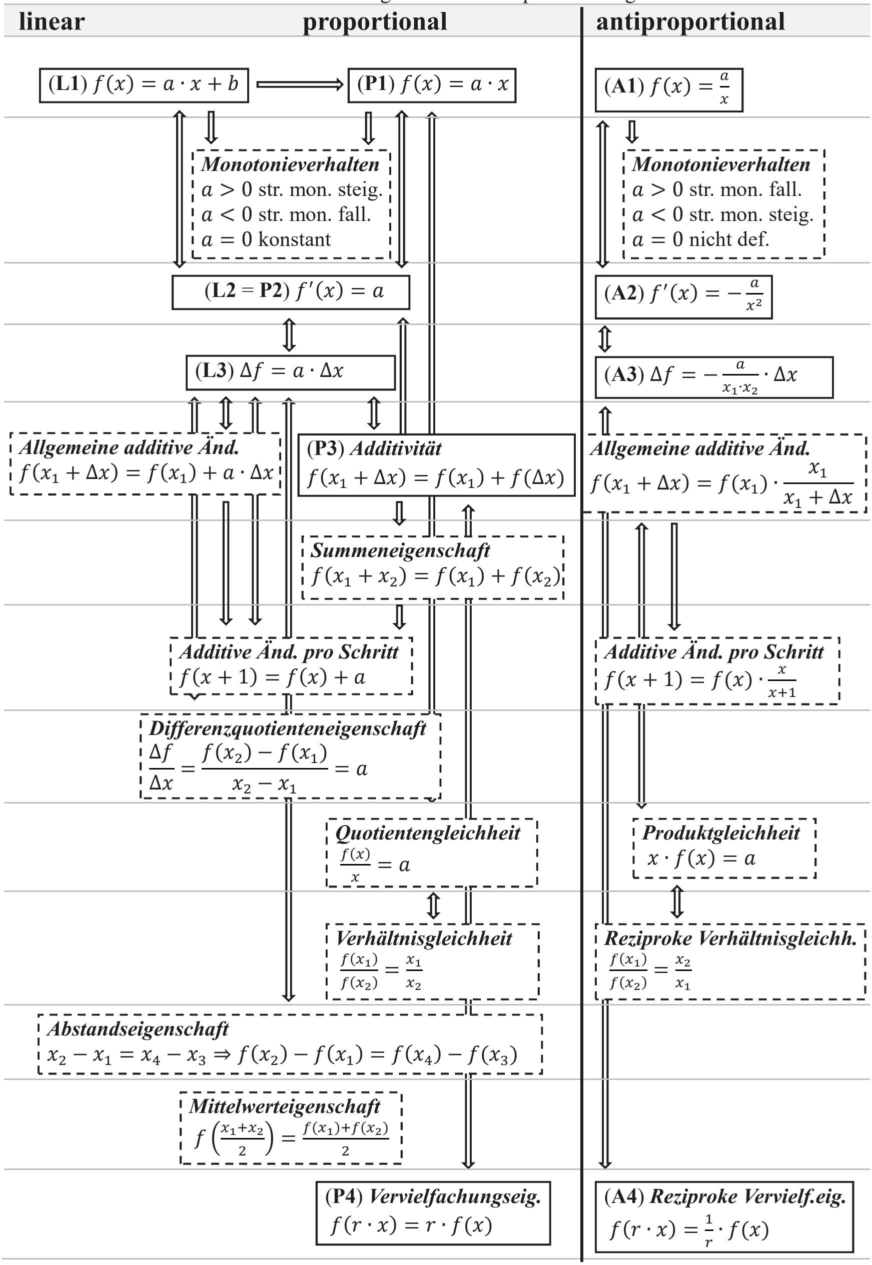
für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Aus der additiven Veränderung des Arguments resultiert eine multiplikative Veränderung des Funktionswerts. Die Annäherung dieses Änderungsfaktors an 1 bedeutet, dass die Differenz (Abnahme) zwischen aufeinander folgenden Funktionswerten für $a > 0$ für positive (negative) Argumente kontinuierlich schrumpft (wächst), für $a < 0$ entsprechend umgekehrt. Darüber hinaus wird deutlich, dass dieser Änderungsfaktor konkret von den Argumenten x_1 und x_2 abhängt und somit an jeder Stelle verschieden ist (siehe auch (A2)).

2.1.5 Strukturierung der formalen Klassen

In Tabelle 1 werden die formalen Charakterisierungen linearer, proportionaler und antiproportionaler Funktionen in der beschriebenen Reihenfolge zusammengefasst und gleichsam gegenübergestellt.

Tabelle 1: Strukturierte Zusammenfassung der formalen Spezifizierungen



Die Anordnung ist dabei so zu lesen, dass antiproportionale Funktionen aus formaler Sicht im Rahmen formaler Klassen einen gänzlich anderen Funktionstyp darstellen als lineare und proportionale Funktionen. Dahingegen sind die Eigenschaften linearer Funktionen ebenfalls Charakterisierungen ihrer Unterklasse der proportionalen Funktionen (deshalb werden diese Eigenschaften zentriert positioniert), aber nicht umgekehrt. Gezeigte Äquivalenzen zwischen den Charakterisierungen werden durch entsprechende Pfeile gekennzeichnet. Wenn bspw. zwischen (L1) und (L2) und zwischen (L2) und (L3) je eine Äquivalenz angegeben wird, dann wurde aus
Gründen der Übersichtlichkeit darauf verzichtet, die ebenso bestehende Äquivalenz zwischen (L1) und (L3) zu markieren. Folgepfeile weisen auf Charakterisierungen hin, die Spezialfälle von anderen angeben.

Auf Grundlage der Tabelle 1 werden im Folgenden einzelne Bereiche zur weiteren Differenzierung lokal fokussiert und weiter ausgearbeitet. Dazu werden zunächst die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen linearen und proportionalen und schließlich zwischen linearen und antiproportionalen Funktionen erarbeitet. Im Zuge dessen werden in der Tabelle 1 Querverbindungen hergestellt, die für beide Vergleiche formal-kritische Bereiche herausstellen.

Linear vs. proportional

Obwohl die proportionalen spezielle linerare Funktionen sind, entstehen gerade durch diese Einschränkung erweiterte (*Additivität* und *Summeneigenschaft*) bzw. neue Eigenschaften (*Quotientengleichheit*, *Verhältnisgleichheit* und *Vervielfachungseigenschaft*). Hierbei könnte bereits die Schwierigkeit aufkommen, zu verstehen, dass jede proportionale eine lineare Funktion (als formale Unterklasse), umgekehrt aber nicht jede lineare eine proportionale Funktion ist. In beiden Betrachtungsrichtungen bleibt die Rolle des festen Faktors a erhalten. Er liefert auf identische Weise das *Monotonieverhalten*, gibt bei beiden die konstante, lokale Änderung an (P2+L2), und fungiert als additive Änderung, wenn x um 1 erhöht wird (*Additive Änderung pro Schritt*).

Lineare Differenzen vs. proportionale Verhältnisse

Der feste Faktor nimmt bei beiden Typen auch die Rolle eines konstanten Verhältnisses an.

Bei der Proportionalität wird dabei jedoch der Fokus auf einen Punkt durch den Quotienten zwischen Funktionswert und Argument gelegt (*Quotientengleichheit*). Bei der Linearität muss hingegen der Differenzenquotient zwischen zwei Punkten betrachtet werden (*Differenzquotienteneigenschaft*), um eine mögliche, additive Konstante ungleich Null zu eliminieren. Für $\Delta x \neq 0$ gilt:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{a \cdot x_2 + b - (a \cdot x_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

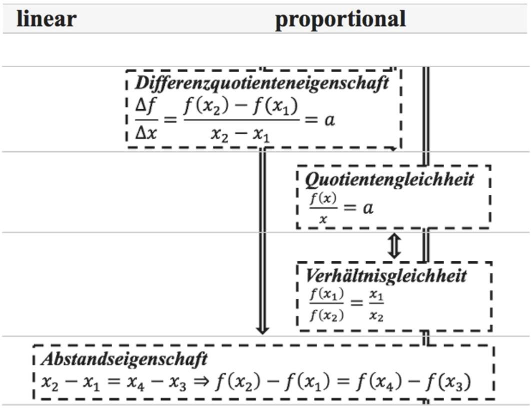


Abbildung 2.1: Lineare Differenzen vs. proportionale Verhältnisse

Bei der *Abstandseigenschaft* wird die additive Konstante ebenso durch das Bilden von Differenzen heraussubtrahiert. Die Existenz oder Nichtexistenz der additiven Konstanten erzeugt genau die Unterscheidungsproblematik zwischen linearen und proportionalen Funktionen. Eine Übertragung bzw. Anwendung der proportionalen (aber nicht linearen) Eigenschaften auf lineare Funktionen bringt die formalen Diskrepanzen beim Übergang von proportionalen zu linearen Funktionen zum Vorschein. Bei der *Quotientengleichheit* verhindert die additive Konstante das Kürzen des Arguments *zu* a. Für $x_{1,2} \neq 0$ gilt:

$$\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{a \cdot x_1 + b}{x_1} \neq \frac{a \cdot x_2 + b}{x_2} = \frac{f(x_2)}{x_2}$$

Bei der *Verhältnisgleichheit* verhindert die additive Konstante das Kürzen *um* a. Für $x_2, f(x_2) \neq 0$ gilt:

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{a \cdot x_1 + b}{a \cdot x_2 + b} \neq \frac{x_1}{x_2}$$

Eigenschaften mit formalen Differenzbetrachtungen funktionieren demnach für alle linearen Funktionen.

Im Gegenzug zu den Differenzen fällt auf, dass es sowohl Gemeinsamkeiten, aber auch Unterschiede hinsichtlich der additiven Strukturen gibt.

Linear-additive Änderung vs. proportionale Additivität

Obwohl das *Linearitätsprinzip* (L3) und die *additive Änderung pro Schritt* für alle lineare Funktionen gültig sind, muss im Rahmen der additiven Änderung auf allgemeineren Fällen differenziert werden (*Allgemeine additive Änderung* im Vergleich zur *Additivität* (P3) und *Summeneigenschaft*).

Die formale Anwendung der proportionalen Eigenschaften auf lineare Funktionen liefert auch hier wieder weitere Einsichten.

(P3):

$$f(x_1 + \Delta x) = a \cdot (x_1 + \Delta x) + b = a \cdot x_1 + b + a \cdot \Delta x$$
$$\neq a \cdot x_1 + b + a \cdot \Delta x + b = f(x_1) + f(\Delta x)$$

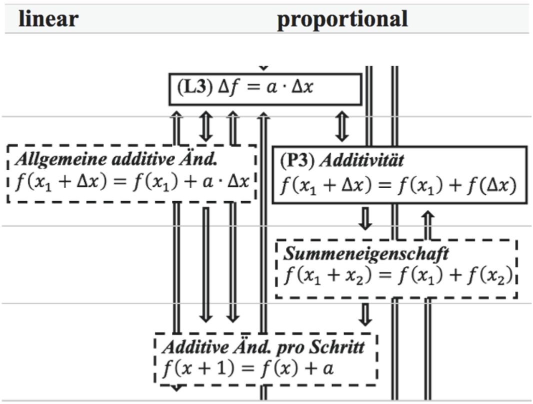


Abbildung 2.2: Linear-additive Änderung vs. proportionale Additivität

Spezialfall (*Summeneigenschaft*):

$$f(x_1 + x_2) = a \cdot (x_1 + x_2) + b = a \cdot x_1 + b + a \cdot x_2$$
$$\neq a \cdot x_1 + b + a \cdot x_2 + b = f(x_1) + f(x_2)$$

Die additive Konstante würde bei der additiven Änderung des Arguments beim Funktionswert ein Mal zu oft berücksichtigt werden, deshalb müsste eine formale Anpassung für lineare Funktionen folgendermaßen aussehen:

$$(\mathbf{L3_y})\ f(x_1 + \Delta x) = f(x_1) + f(\Delta x) - b$$
$$(\boldsymbol{Summeneigenschaft_y})\ f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) - b$$

Aus diesem Grund verbirgt sich hinter linearen Funktionen mit $b \neq 0$ keine strukturerhaltende, additive Funktion. Diesen Unterschied (um b) kann man schon gut an einfachen, konkreten Argumenten ($x = 0, x = 1$) beobachten:

$$f_{lin}(0) = b \;\rightarrow f_{prop}(0) = 0$$
$$f_{lin}(1) = a + b \;\rightarrow\; f_{prop}(1) = a$$

Neben der obigen Anpassung des Funktionswerts ist es hier ebenfalls denkbar, das Argument entsprechend zu verändern, um die additive Struktur zu erhalten:
(P3):

$$f\left(x_1 - \frac{b}{a} + \Delta x\right) = a \cdot \left(x_1 - \frac{b}{a} + \Delta x\right) + b = a \cdot x_1 - b + a \cdot \Delta x + b$$
$$= a \cdot x_1 + a \cdot \Delta x = f(x_1) + f(\Delta x)\ (\mathbf{L3_x})$$

Das Argument muss um $\frac{b}{a}$ vermindert werden, damit die additive Konstante gekürzt werden kann. Diese Änderung scheint jedoch komplexer als die einmalige Subtraktion von b ($L3_y$).

Eine weitere, lohnenswerte Ergänzung zur Unterscheidung ergibt sich durch den Blick auf die multiplikative Änderung.

Keine linear-multiplikative vs. proportional-multiplikative Änderung

linear	**proportional**
	(P4) ***Vervielfachungseig.*** $f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$

Abbildung 2.3: Keine linear-multiplikative vs. proportional-multiplikative Änderung

Die Anwendung der Vervielfachungseigenschaft auf lineare Funktionen ergibt:
(P4):

$$f(r \cdot x) = a \cdot (r \cdot x) + b = r \cdot a \cdot x + b$$
$$\neq r \cdot a \cdot x + r \cdot b = r \cdot (a \cdot x + b) = r \cdot f(x)$$

Die additive Konstante würde bei der multiplikativen Struktur $(r-1)$-mal zu oft berücksichtigt werden. Eine formale Anpassung für lineare Funktionen liefert folgender Zusammenhang:

$$(\mathbf{L4_y})\ f(r \cdot x) = r \cdot f(x) - (r-1) \cdot b$$

Für die Anpassung des Arguments ergibt sich:
(P4):

$$f\left(r\cdot(x-\frac{b}{r\cdot a})\right)=a\cdot\left(r\cdot\left(x-\frac{b}{r\cdot a}\right)\right)+b=r\cdot a\cdot x-b+b$$
$$=r\cdot a\cdot x=r\cdot f(x)\ (\mathbf{L4_x})$$

Zur Erhaltung der multiplikativen Änderung muss das Argument um $\frac{b}{r\cdot a}$ verkleinert werden. Die Veränderung des Funktionswerts liefert auch hier im Vergleich zur Anpassung des Arguments einfachere, formale Zusammenhänge.

Eine Besonderheit bildet die *Mittelwerteigenschaft*. Sie funktioniert trotz additiver und multiplikativer Betrachtungen auch für lineare Funktionen, da sich die additive Konstante gerade durch die Kombination beider Operationen (erst Addition der beiden Argumente, dann Multplikation und insbesondere die Multplikation mit $\frac{1}{2}$) mit 2 erweitern lässt und so für jeden der beiden Funktionswerte wieder eine additive Konstante abfällt:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=a\cdot\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+b=\frac{a\cdot x_1}{2}+\frac{a\cdot x_2}{2}+\frac{\mathbf{2b}}{2}$$
$$=\frac{a\cdot x_1+\mathbf{b}+a\cdot x_2+\mathbf{b}}{2}=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

Betrachtet man formal den (Lern-)Pfad vom Speziellen (Proportionalität) zum Allgemeinen (Linearität), so muss erkannt werden, dass gewisse der bekannten Eigenschaften proportionaler Funktionen in ihrer derartigen Form keine Gültigkeit mehr besitzen oder dass diese Eigenschaften in oben beschriebener Weise für lineare Funktionen formal angeglichen werden müssen. Erfolgt umgekehrt der formale Blick vom Allgemeinen (Linearität) zum Speziellen (Proportionalität), so lassen sich gewisse Eigenschaften (*Additivität, Summeneigenschaft, Quotientengleichheit, Verhältnisgleichheit* und *Vervielfachungseigenschaft*) nicht unmittelbar von den bekannten ableiten.

Linear vs. antiproportional

Lineare und antiproportionale Funktionen bilden disjunkte, formale Klassen, die sich dennoch hinsichtlich einiger Eigenschaften ähneln und wiederum bei anderen Charakteristika stark voneinander abgrenzen.

Konstanter fester Faktor vs. feste Gesamtmenge

Mit Blick auf das *Monotonieverhalten* kehrt sich dieses bei antiproportionalen Funktionen für positives und negatives a um, jedoch gibt es für $a=0$ eine Definitionslücke. Die Monotonie gilt bei antiproportionalen Funktionen nur bei Betrachtung des Definitionsbereichs $\mathbb{R}^+$ oder $\mathbb{R}^-$. Hier ergibt sich eine formal notwendige Unterscheidung zwischen linearen (proportionalen) und antiproportionalen Funktionen. Für $a=0$ hätte die Funktionsgleichung $f(x)=$

$\frac{a}{x}$ zwar aus formaler Sicht Gültigkeit, sie wäre dann allerdings eine konstante, proportionale (und damit auch lineare) Funktion.

Dies ist nicht damit zu verwechseln, dass die antiproportionale Funktion für $x = 0$ nicht definiert ist, da sich hier aus mathematischer Sicht eine undefinierbare Lücke (Division durch Null) ergibt.

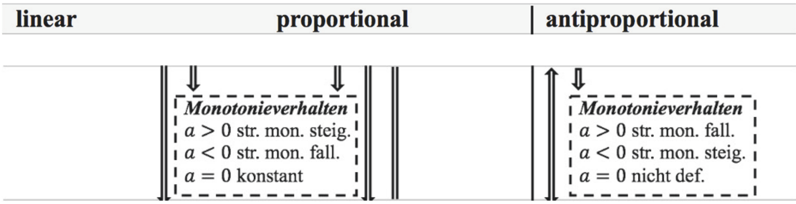


Abbildung 2.4: Konstanter fester Faktor vs. feste Gesamtmenge

Proportional-multiplikative vs. antiproportional-reziprok-multiplikative Strukturen

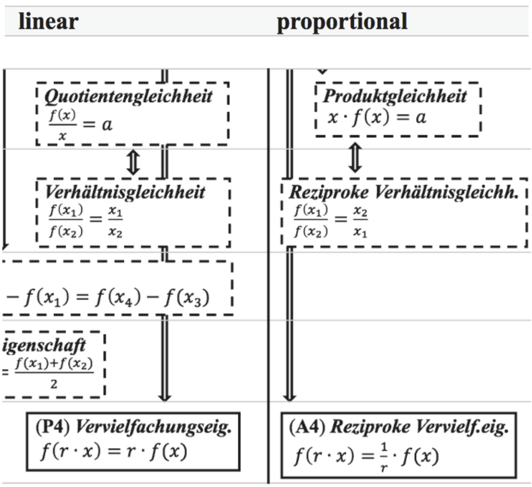


Abbildung 2.5: Proportional-multiplikative vs. antiproportional reziprok-multiplikative Strukturen

Schaut man auf die *Quotientengleichheit*, *Verhältnisgleichheit* und *Vervielfachungseigenschaft* proportionaler Funktionen, so ergeben sich proportionale und antiproportionale Eigenschaften aus operationalen Umkehrungen. Während bei der *Quotientengleichheit* der Quotient aus Funktionswert und Argument gebildet wird, betrachtet die *Produktgleichheit* nun das Produkt aus diesen beiden. In Umkehrung zur *Verhältnisgleichheit* wird bei der *reziproken Verhältnisgleichheit* der Kehrwert der Argumente geformt. Ebenso wird bei der multiplikativen Änderung in der *Vervielfachungseigenschaft* ein Kehrwert des Vervielfachungsfaktors erzeugt (*reziproke Vervielfachungseigenschaft*). Hier besteht die Gefahr des Eindrucks, dass sich die antiproportionalen Eigenschaften stets aus einer operativen Umkehrung der proportionalen Eigenschaften ergeben. Fokussiert man hingegen die additiven Änderungen, so zeigen sich beträchtliche Unterschiede.

Linear-additive vs. antiproportional-additive Änderung

Die additive Veränderung des Arguments bewirkt bei linearen und proportionalen Funktionen eine konstante, additive Veränderung des Funktionswerts, bei der nur der feste Faktor und der betrachtete Abstand Δx relevant sind und das Argument x keine Rolle spielt. Dahingegen bewirkt die additive Veränderung des Arguments antiproportionaler Funktionen eine ständige, sich ändernde, multplikative Veränderung des Funktionswerts, bei der sowohl das Argument als auch der betrachtete Abstand relevant sind, jedoch die feste Gesamtmenge keine Rolle spielt.

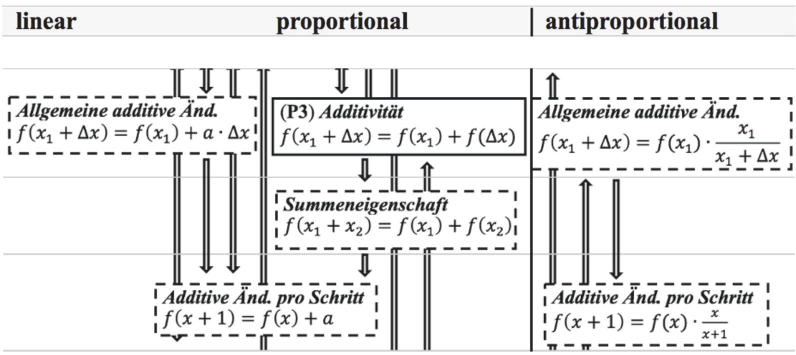


Abbildung 2.6: Linear-additive vs. antiproportional-additive Änderung

Die lokalen (L2/P2 ↔ A2) und mittleren (L3 ↔ A3) Änderungsraten unterstreichen diesen Unterschied zusätzlich. Diese werden in den folgenden Ausführungen jedoch nicht näher betrachtet, die sie im Rahmen der empirischen Erhebungen dieser Arbeit in der Sekundarstufe I unbekannte Begriffe darstellen.
Aus additiver Sicht unterscheiden sich lineare (proportionale) und antiproportionale Funktionen erheblich. Durch die multiplikativen Ähnlich-

keiten (s.o.) besteht eine Gefahr der Übertragung der operativen Umkehrung bei den multiplikativen auf die additiven Änderungen.

Die hier zunächst ausführlich fokussierten, sechs Bereiche werden im Folgenden zu drei Kernbereichen formaler Fokussierungsaspekte verbunden, indem vergleichbare Phänomene zwischen linearen – proportionalen und linearen – antiproportionalen Funktionen formal-inhaltlich zusammengefasst werden. Dies soll einer vereinfachten Übersichtlichkeit in Anbetracht folgender Ausführungen und der Darlegung der empirischen Ergebnisse dienen:

1. Rolle von a

- Lineare Differenzen vs. proportionale Verhältnisse
- Konstanter fester Faktor vs. feste Gesamtmenge

2. Additive Änderungen

-Linear-additive Änderung vs. proportionale Additivität
-Linear-additive vs. antiproportional-additive Änderung

3. Multiplikative Änderungen

-Keine linear-multiplikative vs. proportional-multiplikative Änderung
-Proportional-multiplikative vs. antiproportional-reziprok-multiplikative Strukturen

2.2 Lokale Bedeutungen aus formaler Perspektive

Auf dieser semantischen Ebene werden Aspekte hinsichtlich der spezifischen Bedeutungen linearer, proportionaler und antiproportionaler Funktionen aus einer formal gestellten Perspektive erarbeitet. Zunächst werden Konzepte aus übergeordneter Sichtweise hinsichtlich des Funktionsbegriffs geklärt, indem Grundvorstellungen und Darstellungen bezogen auf den Begriff der Funktion beschrieben und diskutiert werden (Kap. 2.2.1). Daran anknüpfend erfolgen die spezifischen Bedeutungszuweisungen hinsichtlich der linearen, proportionalen und antiproportionalen Funktionen im Zuge der zuvor strukturierten, drei Kernbereiche zur Rolle von a, den additiven und multiplikativen Änderungen (Kap. 2.2.2 - 2.2.4). Abschließend wird eine strukturierte Übersicht zu den unterschiedlichen Bedeutungsmerkmalen linearer, proportionaler und antiproportionaler Funktionen, zusammen mit ihren konkretisierten Grundvorstellungen und Darstellungen zusammengefasst (Kap. 2.2.5).

2.2.1 Grundvorstellungen und Darstellungen

In der deutschsprachigen Literatur verleiht das Konzept der **Grundvorstellungen** (vgl. vom Hofe 1995a) dem Funktionsbegriff lokal strukturierende Bedeutungen (vgl. Kap. 1.2.2). „Grundvorstellungen beschreiben Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung“ (vom Hofe 1995b, S. 6).

Die Spezifizierungen hinsichtlich des Gegenstands der Funktionen aus konventionaler Perspektive sind die **Zuordnung** mit dem Fokus auf die eindeutige Zuordnung und Abhängigkeit zwischen zwei Größen, die **Kovariation**, mit dem Fokus auf die Änderung der unabhängigen Größe in Beziehung zu dessen Einfluss auf die abhängige Größe und die **Funktion als Ganzes**, mit dem Fokus auf die Menge aller Zuordnungen und damit der Funktion als Objekt (vgl. Vollrath 1989, S. 9ff, Malle 2000, S. 8f, vom Hofe 2003, S. 6). Confrey und Smith (1991) beschreiben in der englischsprachigen Literatur die Zuordnung (‚correspondence‘) und die Kovariation (‚covariation‘) als zwei Traditionen in der historischen Entwicklung des Funktionsbegriffs, die zwei verschiedene Perspektiven auf den Begriff des funktionalen Zusammenhangs eröffnen.

„Functions were viewed as:

1) the covariation between quantities. […] Thus, if one can describe how x_1 changes to x_2 and how y_1 changes to y_2 then one has described a functional relationship between x and y;
2) a correspondence between values of two quantities. If one can describe how to find y (or f(x)) given a particular value for x, then one has described a functional relationship“ (Confrey & Smith 1991, S. 57).

Verkörpert werden die Grundvorstellungen zu bzw. Perspektiven auf Funktionen durch die **Darstellungen**, die als ‚Ausdrucksmittel‘, nicht als ‚Hilfsmittel zur Veranschaulichung‘ fungieren (vgl. Vollrath 1989, S. 11f). Hierin verbirgt sich die Problematik des Zusammenhangs zwischen mathematischen Begriffen und ihren Darstellungsformen (vgl. Kap. 1.2.1).

„Mathematical objects [hier verstanden als Begriffe; S.H.] must never be confused with the semiotic representations used, although there is no access to them other than using semiotic representation“ (Duval 2006, S. 126).

Dadurch, dass die einzelne Darstellung dem mathematischen Begriff nicht entspricht, werden durch sie möglicherweise (nur) gewisse Merkmale des Begriffs aktiviert. Folgende Darstellungsformen haben sich zum Explizitmachen des Funktionsbegriffs auf perzeptiver Ebene bewährt. Auf die konkreten Darstellungen in der angefügten Klammer beschränkt sich diese Arbeit: **Numerische (Tabelle), graphische (Graph), symbolische (Term) und verbal-situative Darstellungsform (Worte/Texte, Bilder)** (vgl. Swan 1985, Hußmann & Prediger 2016).

Vollrath (1989), der den Begriff des funktionalen Denkens nach den Meraner Vorschlägen von 1905 um Felix Klein wieder aufgegriffen und in seinem gleichnamigen Aufsatz konkretisiert hat, ordnet die Grundvorstellungen und verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen einer charakterisierenden

Sicht funktionalen Denkens zu (vgl. S. 6ff). Ein weiteres Element funktionalen Denkens beschreibt er durch eine phänomenologische Sicht, die funktionale Situationen nach Phänomenen kategorisiert (weitere Ausführungen siehe Kap. 2.3.2).

Die verschiedenen Darstellungen können die Funktionsaspekte in Anlehnung an die Grundvorstellungen unterschiedlich gut betonen. Grundsätzlich verfolgen die Grundvorstellungen Zuordnung und Funktion als Ganzes eine statische, die Kovariation eine dynamische Sichtweise auf Funktionen. Sfard (1991) unterscheidet einen eher strukturellen oder operationalen Kern von Darstellungen. Der mathematische Begriff in Gestalt des Graphen oder des Terms (als Relation zwischen zwei Größen) betont mehr seinen strukturellen, die Tabelle und der Term (im Sinne einer Rechenaufforderung) mehr den operationalen Aspekt (vgl. Sfard 1991, S. 6).

Schaut man auf die verschiedenen Grundvorstellungen in den Darstellungen, so lassen sich weitere Merkmale konkretisieren: Die Tabelle eignet sich ebenfalls für eine exakte, jedoch diskret-beschränkte Zuordnung, woran die Vorstellung der Funktion als Ganzes scheitert. Betrachtet man die Tabelle dynamisch (operationaler Aspekt), so lässt sich das Monotonieverhalten qualitativ gut beschreiben. Der Graph ermöglicht einen Blick auf die Funktion als Ganzes (struktureller Aspekt). Bei der Betrachtung kleinerer Intervalle lassen sich qualitative Veränderungen im Sinne der Kovariation beschreiben. Ein zuordnender Fokus auf den Graphen wird durch das Ziehen orthogonaler Linien zu den Koordinatenachsen möglich, was je nach Skalierung jedoch recht ungenau sein kann. Der Term liefert eine exakte Zuordnung, wenn man einzelne Werte konkret einsetzt (operationaler Aspekt). Kovariation ergibt sich im Term beim Vergleich verschieden eingesetzter Werte oder hinsichtlich der Kenntnis bestimmter Kenngrößen, die ein Änderungsverhalten beinhalten (bspw. m bei linearen Funktionen). Die Funktion als Ganzes resultiert im Term aus der Deutung aller Kenngrößen und seiner operativen Beziehungen (struktureller Aspekt) (für ausführliche Beschreibungen siehe Laakmann 2013, S. 81ff).

Der mathematische Begriff formt sich aus den Kenntnissen zu seinen verschiedenen Darstellungsformen und insbesondere auch aus ihren Darstellungswechseln (vgl. Duval 2006). Durch den Wechsel zwischen Darstellungen wird neben ihren Bedeutungen auch die Verschiebung der Betonung der Aspekte explizit.

Im Folgenden werden die Bedeutungen linearer, proportionaler und antiproportionaler Funktionsaspekte auf Grundlage der symbolischen Darstellungsform der formalen Ebene (Kap. 2.1) mithilfe der numerischen und graphischen Darstellungsformen konkretisiert und hinsichtlich ihrer Besonderheiten voneinander differenziert. Eine Strukturierung erfolgt erneut nach den identifizierten Kernbereichen Rolle von a, den *additiven* und *multiplikativen* Änderungen.

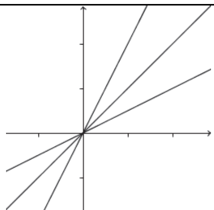
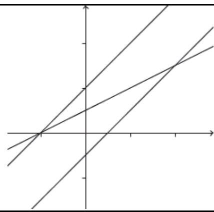
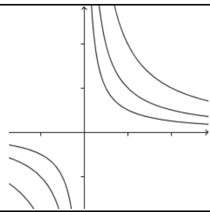
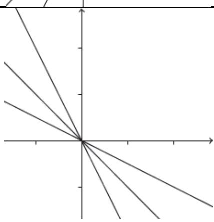
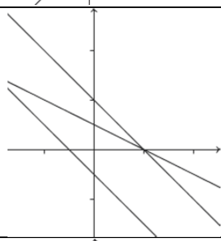
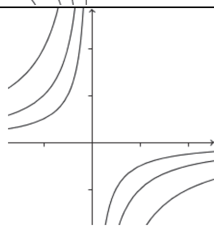
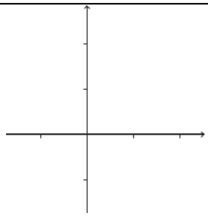
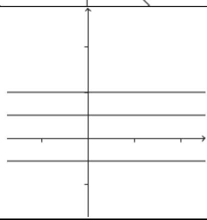
2.2.2 Bedeutungen von *a*

Dem festen Faktor (bei linearen und proportionalen Funktionen) bzw. der festen Gesamtmenge (bei antiproportionalen Funktionen) kommen durch ihre unterschiedlichen Rollen (Kap. 2.1.2 - 2.1.4) ebenfalls verschiedenartige Bedeutungen zu:

a als Kenngröße für das Monotonieverhalten

Die Tabelle zeigt nur einen diskreten, meistens recht kleinen Ausschnitt der Funktion. Das Monotonieverhalten, als dynamischer Orientierungsaspekt, ist hingegen im Graphen kontinuierlich erkennbar.

Tabelle 2: a als Kenngröße für das Monotonieverhalten linearer, proportionaler und antiproportionaler Funktionen

	linear		**antiproportional**
	proportional		
	$\boldsymbol{b = 0}$	$\boldsymbol{b \neq 0}$	
$\boldsymbol{a > 0}$			
$\boldsymbol{a < 0}$			
$\boldsymbol{a = 0}$			nicht definiert

Graphen proportionaler Funktionen werden durch alle Geraden im $\mathbb{R}^2$ beschrieben, die durch den Ursprung verlaufen. Lineare Graphen sind alle Geraden im $\mathbb{R}^2$.

Antiproportionale Graphen sind Hyperbeln, die punktsymmetrisch zum Ursprung verlaufen (da $f(-x) = \frac{a}{-x} = -\frac{a}{x} = -f(x)\ \forall x \in D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$). Das Monotonieverhalten macht jedoch keine Aussage über die Qualität des Änderungsverhaltens. Eine streng monoton wachsende (bzw. fallende) proportionale oder lineare Funktion verhält sich ganz anders als eine streng monoton wachsende (bzw. fallende) antiproportionale Funktion (nur auf $D = \mathbb{R}^+$ oder $D = \mathbb{R}^-$, siehe Tab. 2).

a als feste, additive Änderung pro Schritt

Als Spezialfall des *Linearitätsprinzips* (mit $\Delta x = 1$) in den additiven Betrachtungen entspricht a bei linearen und proportionalen Funktionen der Veränderung des Funktionswerts bei Vergrößerung des Arguments um 1 (siehe auch Kap. 2.2.3). Eine derartig konstante, additive Änderung existiert bei antiproportionalen Funktionen nicht (vgl. Kap. 2.1.4).

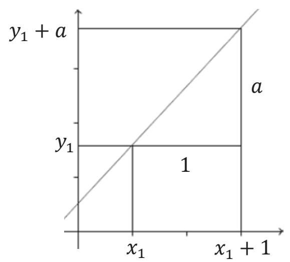


Abbildung 2.7: a als additive Änderung pro Schritt

a als fester (Differenzen-)Quotient

An dieser Stelle bekommt der Aspekt der Zuordnung eine spezifische Bedeutung.

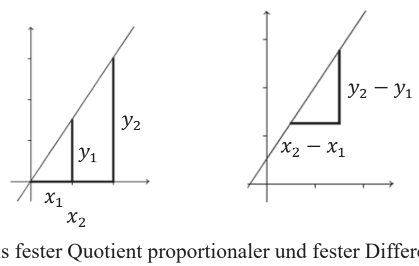


Abbildung 2.8: a als fester Quotient proportionaler und fester Differenzquotient linearer Funktionen im Graphen

Die *Quotientengleichheit* proportionaler Funktionen zeigt sich anschaulich im Graphen als Quotient der Streckenlängen von Funktionswert und zugehörigem Argument, die sog. Steigungsdreiecke. Diese positionieren sich bei proportionalen Graphen am Ursprung (durch $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \cdots = a$).

Die *Differenzquotienteneigenschaft* linearer Funktionen löst diese Position des Steigungsdreiecks vom Ursprung. Neben der additiven Bedeutung der Steigung (als Änderung pro Schritt, siehe Kap. 2.2.3) wird sie hier als Quotient aus Differenzen explizit, mit $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, denn:

$$\frac{a}{1} = \frac{a}{1} \cdot \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{a \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{a \cdot x_2 - a \cdot x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

In der proportionalen Tabelle liefert der Quotient jedes Wertepaares aus Funktionswert und zugehörigem Argument horizontal betrachtet den festen Faktor. In einer linearen Tabelle müssen zunächst Differenzen zwischen je zwei Argumenten und deren Funktionswerten bestimmt werden, um schließlich deren Quotient als a zu ermitteln.

	x	$f(x)$
$a =$	x_1	y_1
$a =$	x_2	y_2
$a =$	x_3	y_3

	Δx	$\Delta f(x)$
$a =$	$x_2 - x_1$	$y_2 - y_1$
$a =$	$x_3 - x_2$	$y_3 - y_2$
$a =$	$x_4 - x_3$	$y_4 - y_3$

Abbildung 2.9: a als fester Quotient proportionaler und fester Differenzquotient linearer Funktionen in der Tabelle

a als fester Faktor zwischen unabhängiger und abhängiger Größe

Die *Quotientengleichheit* proportionaler Funktionen lässt sich operativ ebenfalls so vollziehen, dass die Eigenschaft einer ‚Multiplikation mit einem festen Faktor' (vgl. Richter 2014, S. 53) entspricht. Im Gegensatz zur Division des Funktionswerts durch sein zugehöriges Argument, wird dieses mit dem festen Faktor multipliziert. Dieses Verfahren spiegelt die Operation in der symbolischen Darstellung ((**P1**) $f(x) = a \cdot x$) explizit wider. Van Dooren et al. (2009) nennen diesen Zugang deshalb ‚functional approach', da das *a als fester Faktor* ein Verhältnis zwischen den Größen der verschiedenen Größenbereiche (‚external ratio') herstellt. Dem steht die *Vervielfachungseigenschaft* gegenüber, bei der das r ein Verhältnis zwischen den Größen innerhalb eines Größenbereichs (‚internal ratio') impliziert (vgl. S. 190).

x	$f(x)$
x_1	$\xrightarrow{\cdot a}$ y_1
x_2	$\xrightarrow{\cdot a}$ y_2
x_3	$\xrightarrow{\cdot a}$ y_3

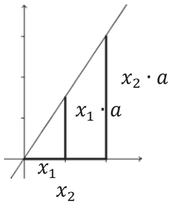


Abbildung 2.10: a als fester Faktor bei proportionalen Funktionen

a als festes Produkt

Das a nimmt hingegen bei antiproportionalen Funktionen die Rolle eines Produkts ein. In der Tabelle lässt sich dieses horizontal durch das Produkt jedes Wertepaares aus Argument und Funktionswert bestimmen. Im Graphen wird das a durch die Fläche des Rechtecks unter dem Graphen veranschaulicht. Dabei sind alle Flächeninhalte identisch (*Produktgleichheit*).

x	$f(x)$	
x_1	$\xrightarrow{\cdot}$ y_1	$= a$
x_2	$\xrightarrow{\cdot}$ y_2	$= a$
x_3	$\xrightarrow{\cdot}$ y_3	$= a$

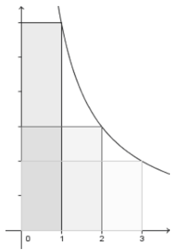


Abbildung 2.11: a als festes Produkt antiproportionaler Funktionen

a als fester Dividend

Die *Produktgleichheit* lässt sich ebenso wie die *Quotientengleichheit* hinsichtlich der betrachteten Operationsrichtung weiter differenzieren. Bei einer Betrachtung von rechts nach links in der Tabelle (Abb. 2.11) lässt sich die Gesamtmenge durch die abhängige Größe dividieren und man erhält die unabhängige Größe.

	x		$f(x)$	
a:	x_1	$=$	y_1	$[:a]$
a:	x_2	$=$	y_2	$[:a]$
a:	x_3	$=$	y_3	$[:a]$

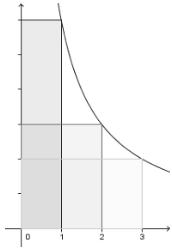


Abbildung 2.12: a als fester Dividend antiproportionaler Funktionen

Ebenso ließe sich von links betrachtet die Gesamtmenge durch das Argument dividieren und man erhält den zugehörigen Funktionswert (Abb. 2.12). Hierbei agiert a *als fester Dividend*. Im Graphen ergibt sich eine Seitenlänge aus der Division des festen Flächeninhalts durch die andere Seite. Diese Rolle von a ist der expliziten, symbolischen Darstellung ((**A1**) $f(x) = \frac{a}{x}$) seitens der Operation am nächsten.

2.2.3 Bedeutungen der additiven Änderungen

Additive Änderungen implizieren eine dynamische Sicht auf lineare, proportionale und antiproportionale Funktionen (Kovariation). Eine wiederholte lineare (proportionale), additive Änderung mithilfe von $f(x+1) = f(x) + a$ (*Additive Änderung pro Schritt*) stellt sich in der Tabelle und im Graphen durch eine iterative Addition dar, bei der pro Schritt der konstante Wert a hinzu kommt. Der feste Faktor als solcher im expliziten Term ($f(x) = a \cdot x + b$)) resultiert aus ebendieser wiederholten Addition:

	x	$f(x)$	
	0	$b+0$	
$+1$	1	$b+a$	$+a$
$+1$	2	$b+2a$	$+a$
$+1$	3	$b+3a$	$+a$
	$\vdots$	$\vdots$	

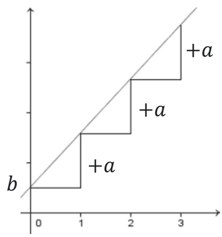


Abbildung 2.13: Additive pro Schritt-Änderungen linearer und proportionaler Funktionen

Das a gibt hierbei in der Tabelle die additive Veränderung pro Schritt, im Graphen die Höhe pro Schritt und damit die Höhe der sogenannten ‚Steigungsdreiecke' an. Durch die Konstanz von a ergibt sich der **Graph einer Geraden** (für positives a ergibt sich ein steigender, für negatives a ein fallender, für $a = 0$ ein kostanter Graph).

Im Zuge der Darstellungen lassen sich weitere, wichtige Begriffe linearer Funktionen spezifizieren. In der graphischen Darstellungsform lässt sich der feste Faktor a mit dem Begriff der **konstanten Steigung** beschreiben. Den Steigungsbegriff additiv zu verstehen bedeutet, den kovariierenden Zusammenhang zwischen zwei Größen bei Vergrößerung der ersten Größe um eins zu erkennen. Die additive Konstante b gibt in der Tabelle den Funktionswert an der Stelle 0 an. Sie ist in jedem Funktionswert genau einmal enthalten (siehe Abb. 2.13). Genau aus diesem Grund gilt die *Summeneigenschaft* (bzw. *Additivität*) proportionaler Funktionen ($f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$) nicht für lineare Funktionen mit $b \neq 0$, da der Startwert verdoppelt würde. Hinsichtlich der Betrachtung von (Sach-)Situationen auf $D = \mathbb{R}_0^+$ (vgl. Kap. 2.3.2) wird der y-Achsenabschnitt an der Stelle $x = 0$ mit dem Begriff **Startwert** bezeichnet. Dieser impliziert im Vergleich zur Steigung eine zuordnende Sicht auf den Graphen.

	x	$f(x)$	
	0	-	
	1	a	
+1	2	$a \cdot \frac{1}{2}$	$\cdot \frac{1}{2}$
+1	3	$a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$	$\cdot \frac{2}{3}$
+1	4	$a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$	$\cdot \frac{3}{4}$
	⋮	⋮	

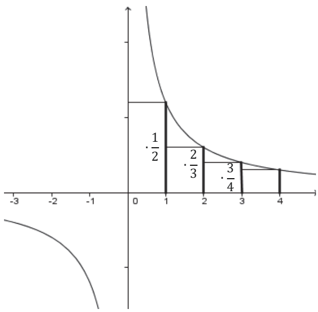


Abbildung 2.14: Additive pro Schritt-Änderungen antiproportionaler Funktionen

Antiproportionale, additive Änderungen liefern ganz andere, charakterisierende Aspekte. Eine wiederholte, antiproportionale, *additive Änderung pro Schritt* mithilfe von $f(x+1) = f(x) \cdot \frac{x}{x+1}$ wird durch eine mehrmalige Multiplikation gekennzeichnet (jedoch keine konstante, wiederholte Multiplikation, wie bspw. bei Exponentialfunktionen), bei der pro Schritt der Quotient aus zugehörigem Argument und seiner Summe mit Eins multipliziert wird.

Das a gibt in der Tabelle den Funktionswert von 1 an (ein Funktionswert an der Stelle 0 existiert nicht). Dieser wird pro weiterem Schritt um den Quotienten aus zugehörigem Argument und seiner Summe mit Eins für positive Argumente und positives a durch Multiplikation verkleinert. Im Graphen wird dies durch das Stauchen (Strecken für negative Argumente bei positivem a, für negatives a entsprechend umgekehrt) des Funktionswerts als Streckenlänge deutlich. Dahinter steckt interpretativ die Erhaltung der Produktgleichheit, die im Graphen die Erhaltung der Flächengleichheit der Rechtecke unter dem Graphen bedeutet (vgl. Kap. 2.2.2). Daraus ergibt sich der **Graph einer Hyperbel** (im I. und III. Quadranten für positives a, im II. und IV. Quadranten für negatives a). Ebenso über die Eigenschaft der Produktgleichheit begründet, nähert sich der Graph asymptotisch sowohl der y-Achse (für positives a für $x \to 0^+$ gegen $+\infty$, für $x \to 0^-$ gegen $-\infty$; für negatives a umgekehrt) als auch der x-Achse (für jedes a für $x \to \pm\infty$ gegen 0).
Eine Übertragung der zunächst dargelegten, wiederholten Zunahme um 1 auf den allgemeinen Fall zeigt bei linearen (proportionalen) Funktionen im Zuge des *Linearitätsprinzips* ((L3) $\Delta f(x) = a \cdot \Delta x$) bzw. der *allgemeinen additiven Änderung* ($f(x + \Delta x) = f(x) + a \cdot \Delta x$), dass unabhängig von konkreten Argumenten die Zunahme seitens der Funktionswerte nur mithilfe des festen Faktors und des betrachteten Abstands Δx bestimmt werden kann.

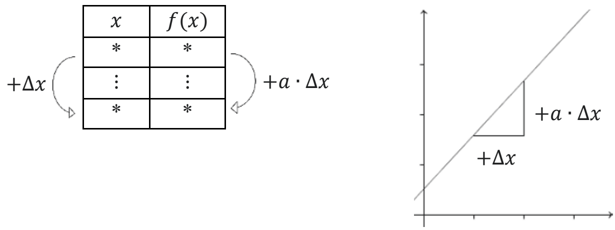


Abbildung 2.15: Allgemeine additive Änderung linearer und proportionaler Funktionen

Der Blick auf die *allgemeine additive Änderung* antiproportionaler Funktionen ist für eine Unterscheidung zu den linearen (proportionalen) Zusammenhängen ebenfalls lohnenswert. Die wiederholte Zunahme um 1 und dabei variierende Multplikation der Funktionswerte bei antiproportionalen Funktionen in der Übertragung auf allgemeine Fälle ergibt, dass sich die Werte der Argumente zwischen x und $x + \Delta x$ herauskürzen (anders als bspw. bei Exponentialfunktionen, wo sich der Wachstumsfaktor potenziert) und nur der Quotient aus Argument x und Summe aus Argument und betrachtetem Abstand Δx relevant ist (vgl. Kap. 2.1.4).

$+\Delta x$

x	$f(x)$
1	$*$
$\vdots$	$\vdots$
$*$	$*$

$\cdot \dfrac{1}{1+\Delta x}$

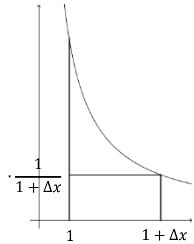


Abbildung 2.16: Allgemeine additive Änderung antiproportionaler Funktionen

Es zeigt sich im Vergleich zum Linearitätsprinzip, dass der Wert des Arguments (hier bspw. für $x = 1$) bedeutsam ist, von dem aus die additive Veränderung betrachtet wird. Dieser hat einen unmittelbaren Einfluss auf die Änderung der zugehörigen Funktionswerte.

2.2.4 Bedeutungen der multiplikativen Änderungen

Auch bei den multiplikativen Änderungen wird der Fokus auf den Aspekt der sich miteinander verändernden Größen (Kovariation) gerichtet. Die *Vervielfachungseigenschaft* proportionaler Funktionen ((**P4**) $f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$) wird in der Tabelle durch beidseitige Multiplikation dargestellt. Mit $r > 0$ impliziert dies eine Vervielfachung, mit $0 < r < 1$ wird ein Anteil beider Koordinatenwerte hergestellt und mit $r < 0$ können entsprechend Funktionswerte von negativen Argumenten berechnet werden. Im Graphen bewirkt bspw. die Verdopplung (Verdreifachung) des Arguments eine Streckung der Länge des Funktionswerts um das Doppelte (Dreifache):

$\cdot x_2$ $\quad \cdot x_1 \quad \cdot \frac{x_2}{x_1}$

x	$f(x)$
1	a
x_1	$a \cdot x_1$
x_2	$a \cdot x_2$

$\cdot x_1 \quad \cdot \frac{x_2}{x_1} \quad \cdot x_2$

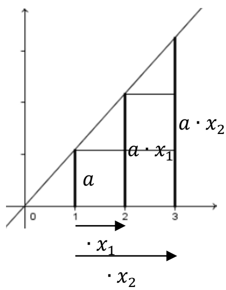


Abbildung 2.17: Multiplikative Änderungen proportionaler Funktionen

Eine wiederholte Multiplikation seitens der Argumente bewirkt ebendiese wiederholte Multiplikation seitens der Funktionswerte (bspw. $\cdot 2 \cdot \frac{3}{2} \triangleq \cdot 3$). Formal wurde die Nicht-Existenz einer strukturerhaltenden, multiplikativen Änderung linearer Funktionen gezeigt (Anpassung: (**L4**) $f(r \cdot x) = r \cdot f(x) - (r-1) \cdot b$). In der Tabelle und im Graphen würde die additive Konstante (wie bei der additiven Änderung) immer mit vervielfacht werden und daher nicht die entsprechenden Funktionswerte liefern. Bei der *Vervielfachungseigenschaft* proportionaler Funktionen nimmt das r die Rolle eines Vervielfachungsfaktors zwischen Größen desselben Bereichs an. Einen anderen Fokus auf das r liefert die *Verhältnisgleichheit.* Dabei impliziert ebendieses r das Verhältnis zwischen Größen desselben Bereichs.
Die *reziproke Vervielfachungseigenschaft* bei antiproportionalen Zusammenhängen kehrt die Operation auf Seiten der Funktionswerte im Vergleich zu proportionalen Funktionen um ((**A4**) $f(r \cdot x) = \frac{1}{r} \cdot f(x)$). Im Graphen bewirkt bspw. eine Verdopplung (Verdreifachung) der positiven Argumente eine Stauchung der Länge des Funktionswerts auf die Hälfte (ein Drittel).

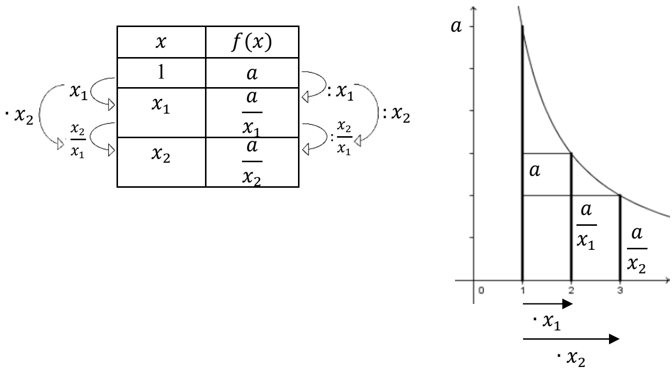


Abbildung 2.18: Multiplikative Änderungen antiproportionaler Funktionen

Auf den ersten Blick ist es im Vergleich zu den proportionalen Graphen zunächst womöglich verwunderlich, dass keine fallende Gerade entsteht, sondern eine Kurve. Eine wiederholte Multiplikation der Argumente bedeutet in diesem Fall eine wiederholte Multiplikation von Stammbrüchen bezogen auf die Funktionswerte, bei der Anteile von Anteile berechnet werden (bspw. $\cdot 2 \cdot \frac{3}{2}$ als $\cdot 2 \cdot 1{,}5 \triangleq \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1{,}5}$ als $\frac{1}{3}$), die sich nicht linear verhalten. Auch hier verbirgt sich anschaulich die Bedeutung der Erhaltung der Flächengleichheit unter dem Graphen im Zuge der einzuhaltenden Produktgleichheit (vgl. Kap. 2.2.2).

2.2.5 Strukturierung der formalen Bedeutungen

In Tabelle 3 werden die Bedeutungen linearer und proportionaler Eigenschaften in ihrer symbolischen, numerischen und graphischen Darstellungsform nach der Rolle von a (*als Kenngröße für das Monotonieverhalten*, *als additive Änderung pro Schritt*, *als fester Quotient* und *als fester Faktor*), den additiven Änderungen (*Allgemeine additive Änderung* und *additive Änderung pro Schritt*) und der multiplikativen Änderung (*Vervielfachungseigenschaft*) kategorisiert. Sie beschreiben relevante Aspekte der formalen Fokussierungsebene aus konventionaler Perspektive und werden deshalb als Fokussierungen der symbolischen, numerischen und graphischen Darstellungsform aufgeführt.

Die Aspekte a *als fester Quotient*, a *als fester Faktor* und die *Vervielfachungseigenschaft* beziehen sich nur auf proportionale Funktionen (grau hinterlegt).

Die linearen Eigenschaften der *Differenzquotienten-, Abstands-* und *Mittelwerteigenschaft* und die proportionalen Eigenschaften der *Additivität* und *Summeneigenschaft* werden in den folgenden Übersichten nicht berücksichtigt, da sie zwar für das Berechnen weiterer Werte auf der Grundlage zweier *gegebener* Punkte in einem linearen bzw. proportionalen Zusammenhang geeignet sind, nicht aber als Zugang zur Identifizierung gängiger (meist nicht überbestimmter) Situationen genutzt werden können. Die weiteren Betrachtungen fokussieren im Zuge dessen ebenfalls ausschließlich den $\mathbb{R}_0^+$, da sich die Situationen und empirischen Auswertungen auf diesen Definitionsbereich beschränken.

Tabelle 4 veranschaulicht und fasst die unterschiedlichen Bedeutungen antiproportionaler Eigenschaften in gleicher Weise zusammen.

Die Tabellen 3 und 4 bilden eine strukturierte Grundlage für den Abgleich der durch sie aufgespannten Bedeutungen linearer, proportionaler und antiproportionaler Funktionen aus konventionaler Perspektive der formalen Fokussierungsebene zu den individuellen Bedeutungszuweisungen im empirischen Teil (Kap. 4).

Tabelle 3: Bedeutungen ausgewählter linearer und proportionaler Eigenschaften

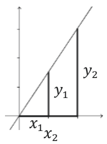
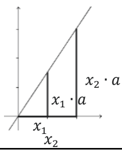
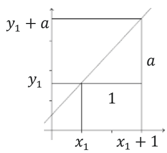
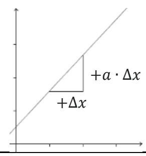
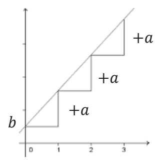
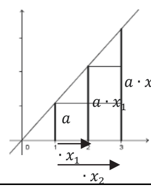
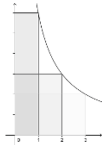
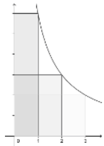
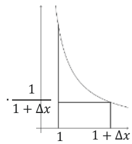
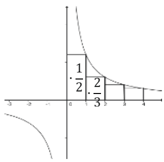
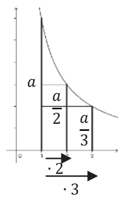
Fokussierung			symbolisch	numerisch	graphisch
ZUORDNUNG	a als…	*fester Quotient*	$\frac{f(x_i)}{x_i} = a$	$\begin{array}{r\|c\|c\|} & x & f(x) \\ a = & x_1 \leftarrow & y_1 \\ a = & x_2 \leftarrow & y_2 \\ a = & x_3 \leftarrow & y_3 \end{array}$	
		fester Faktor	$x_i \cdot a = f(x_i)$	$\begin{array}{\|c\|c\|} x & f(x) \\ x_1 \xrightarrow{\cdot a} & y_1 \\ x_2 \xrightarrow{\cdot a} & y_2 \\ x_3 \xrightarrow{\cdot a} & y_3 \end{array}$	
KOVARIATION		*Monotonie-kenngröße*	$a > 0$ str. mon. stg. $a < 0$ str. mon. fall. $a = 0$ konstant	$\begin{array}{c\|c\|c\|c} & x & f(x) & \\ & * & * & \\ > & \vdots & \vdots & >, < \text{ bzw. } = \\ & * & * & \end{array}$	siehe Tab. 2
		feste add. Änd. pro Schritt	$x + 1 \rightarrow f(x) + a$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c} & x & f(x) & \\ +1 & x_1 & y_1 & +a \\ & x_1 + 1 & y_1 + a & \end{array}$	
	Additive Änderung	*Allgemein*	$f(x_1 + \Delta x)$ $= f(x_1) + a \cdot \Delta x$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c} & x & f(x) & \\ & * & * & \\ +\Delta x & \vdots & \vdots & +a \cdot \Delta x \\ & * & * & \end{array}$	
		Pro Schritt	$f(x + 1)$ $= f(x) + a$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c} & x & f(x) & \\ +1 & 0 & b + 0 & +a \\ +1 & 1 & b + a & +a \\ & 2 & b + 2a & \\ & \vdots & \vdots & \end{array}$	
	Multiplikative Änderung	*Vervielfachungs-eigenschaft*	$f(r \cdot x)$ $= r \cdot f(x)$	$\begin{array}{c\|c\|c\|c} & x & f(x) & \\ \cdot x_1 & 1 & a & \cdot x_1 \\ \cdot x_2 \quad \cdot \frac{x_2}{x_1} & x_1 & a \cdot x_1 & \cdot \frac{x_2}{x_1} \quad \cdot x_2 \\ & x_2 & a \cdot x_2 & \end{array}$	

Tabelle 4: Bedeutungen ausgewählter antiproportionaler Eigenschaften

Fokussierung			symbolisch	numerisch	graphisch
ZUORDNUNG	***a* als…**	*festes Produkt*	$a = x_i \cdot f(x_i)$	$\begin{array}{\|c\|c\|l} x & f(x) & \\ x_1 & \cdot\, y_1 & = a \\ x_2 & \cdot\, y_2 & = a \\ x_3 & \cdot\, y_3 & = a \end{array}$	
		fester Dividend	$\frac{a}{x_i} = f(x_i)$ bzw. $\frac{a}{f(x_i)} = x_i$	$\begin{array}{r\|c\|c\|l} & x & f(x) & \\ a: & x_1 & = y_1 & [:a] \\ a: & x_2 & = y_2 & [:a] \\ a: & x_3 & = y_3 & [:a] \end{array}$	
		Monotonie-kenngröße	$a > 0$ str. mon. fall. (für $D = \mathbb{R}^+$)	$\begin{array}{r\|c\|c\|l} & x & f(x) & \\ & * & * & \\ > & \vdots & \vdots & < \text{ bzw. } > \\ & * & * & \end{array}$	siehe Tab. 2
KOVARIATION	**Additive Änderung**	*Allgemein*	$f(x_1 + \Delta x) = f(x_1) \cdot \frac{x_1}{x_1 + \Delta x}$	$\begin{array}{r\|c\|c\|l} & x & f(x) & \\ & 1 & * & \\ +\Delta x & \vdots & \vdots & \cdot \frac{1}{1+\Delta x} \\ & * & * & \end{array}$	
		Pro Schritt	$f(x+1) = f(x) \cdot \frac{x}{x+1}$	$\begin{array}{r\|c\|c\|l} & x & f(x) & \\ & 0 & - & \\ & 1 & a & \cdot \frac{1}{2} \\ +1 & 2 & a \cdot \frac{1}{2} & \cdot \frac{2}{3} \\ +1 & 3 & a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} & \\ & \vdots & \vdots & \end{array}$	
	Multiplikative Änderung	*Reziproke Vervielfachungseig.*	$f(r \cdot x) = \frac{1}{r} \cdot f(x)$	$\begin{array}{r\|c\|c\|l} & x & f(x) & \\ & 1 & a & :2 \\ \cdot 3 \quad \cdot 2 & 2 & \frac{a}{2} & :3 \\ \cdot \frac{3}{2} & 3 & \frac{a}{3} & :\frac{3}{2} \end{array}$	

2.3 Situative Fokussierungsebene

Auf dieser Ebene werden für eine detailliertere Erfassung von Fokussierungen auf Situationen funktionale Aspekte von Situationen aus konventionaler Perspektive formuliert (Kap. 2.3.1). In Abgrenzung zum Begriffsverständnis von (Sach-)Situationen wird der Kontextbegriff für diese Arbeit geklärt und typische Kontexte linearer, proportionaler und antiproportionaler Zusammenhänge zusammengefasst (Kap. 2.3.2). Durch die Typisierung von Kontexten mithilfe ihrer semantischen Strukturen werden schließlich Situationsklassen der linearen, proportionalen und antiproportionalen Zusammenhänge strukturiert (Kap. 2.3.3).

2.3.1 Funktionale Aspekte von Situationen

Tabelle 5: Fokussierungen auf lineare, proportionale und antiproportionale Zusammenhänge hinsichtlich der Bedeutungen von Zuordnung und Kovariation

	Fokussierungen auf…	**…lineare**	**…proportionale Zusammenhänge**	**…antiproportionale**
ZUORDNUNG	Bedeutung der unabhängigen und abhängigen Größe; Richtung der Abhängigkeit	-1. Größe, 2. Größe -Zuordnung (1. Größe – 2. Größe), -Wertepaar(e) $(x_i - y_i)$		
	Bedeutung von b	-Startwert in Null oder ungleich Null	-Startwert in Null	---
	Bedeutung von a	---	*-fester Quotient* *-fester Faktor*	-Anfangswert bei Eins *-festes Produkt* *-fester Dividend*
KOVARIATION		-mehr-mehr bzw. mehr-weniger Zusammenhang (*Monotoniekenngröße*) -konstante Zunahme bzw. Abnahme (konstante, *additive Änderung pro Schritt)*	-mehr-mehr Zusammenhang (*Monotoniekenngröße*) -konstante Zunahme (konstante, *additive Änderung pro Schritt)*	- mehr-weniger Zusammenhang (*Monotoniekenngröße*)
	Bedeutung der *additiven* Änderung	-konstante Zunahme bzw. Abnahme (konstante *additive Änderung)*	-kontante Zunahme (konstante *additive Änderung)*	-konvergierende Abnahme (*additive Änderung)*
	Bedeutung der *multiplikativen* Änderung	---	-gleichsinnige Vervielfachung (*Vervielfachungseigenschaft)*	-gegensinnige Vervielfachung (*reziproke Vervielfachungseigenschaft*)

Um funktionale Zusammenhänge in Situationen zu identifizieren, können aus konventionaler Sicht unterschiedliche Aspekte als relevante Fokussierungen voneinander differenziert werden, die ‚Facetten der inhaltlichen Bedeutung' (in Anl. an Zindel 2015) zwischen der Situation und dem mathematischen Begriff beschreiben. Dabei spielen sowohl die Bedeutung der unabhängigen und abhängigen Größe, die Richtung ihrer Abhängigkeit, die Bedeutung der einzelnen Parameter, als auch die Bedeutung der Änderung (additiv oder multiplikativ) zwischen den Größen eine tragende Rolle.

Tabelle 5 spezifiziert diese Aspekte für Fokussierungen auf lineare, proportionale und antiproportionale Zusammenhänge in Situationen unter Rückbezug auf die bisherigen Erarbeitungen relevanter Eigenschaften. Eine Strukturierung erfolgt wiederum nach den Grundvorstellungen Zuordnung und Kovariation, die eine Identifizierung der Funktion als Ganzes in Situationen zulassen. Die Betrachtungen beschränken sich weiterhin auf den Definitionsbereich $\mathbb{R}_0^+$.

Die Bezeichnungen der einzelnen Fokussierungen werden dabei im Rahmen der Analyse individueller Bearbeitungen identisch genutzt und ermöglichen damit einen unmittelbaren Vergleich zur konventionalen Perspektive.

2.3.2 Kontexte und Situationen

Der Begriff des **Kontexts** soll im Folgenden im Sinne eines ‚task-context' verstanden werden. Damit wird ein Kontext beschrieben, der die Realität in Aufgaben, Textaufgaben, Beispielen usw. darstellt (vgl. Wedege 1999, S. 206).

> „Ein sinnstiftender (inner- oder außermathematischer) *Kontext* stellt einen authentischen Rahmen für die Lernsituation dar" (Leuders et al. 2011, S. 8, Hervorh. i. Orig.). Dabei bietet „[d]er Kontext […] einen Rahmen für die Entwicklung mathematischer Begriffe" (a.a.O., S. 6),

bspw. der Kontext ‚Leistungsvergleiche im Sport' für Zusammenhänge zwischen Größen und den Begriff der (eindeutigen) Zuordnung. Im Rahmen dieser Arbeit werden nur außermathematische, lebensweltliche Kontexte fokussiert, weshalb sich der Kontextbegriff im Folgenden auf diesen spezifischen Teilbereich beschränkt. Dieses Begriffsverständnis grenzt sich von dem eines ‚learning-environment context' (vgl. van den Heuvel-Panhuizen 2005, S. 2) ab, das beispielsweise im Rahmen der Lerntheorie des ‚situated learning' eine umfassendere Sicht auf den Kontextbegriff einnimmt (vgl. Kap. 1.1.3).

> „Contexts are activity systems. An activity system integrates the subject, the object, and the instruments (material tools as well as signs and symbols) into a unified whole" (Engeström 1993, S. 67).

Dabei werden alle inneren, äußeren und materiellen Parameter, die bei einer Handlung Relevanz haben, unter dem Kontextbegriff subsummiert: „the social, material, and informational environments as contexts in which individual behavior occurs" (Greeno 1998, S. 6).

Eigenschaften, die im Rahmen des Projekts KOSIMA (Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen) und des damit verbundenen Schulbuchs

‚mathewerkstatt' (dieses bildet eine Grundlage für die erste Runde der erhobenen, empirischen Daten, vgl. Kap. 3.1.1) von gewählten Kontexten als verstandene ‚Aufgabenkontexte' gefordert werden, sind ‚Lebensweltbezug', ‚Kontextauthentizität' und ‚Reichhaltigkeit'. Erstere richtet ihren Fokus auf die Lernenden, die zweite basiert auf der kontextuellen Substanz authentischer Kernfragen und letztere fordert mathematische Authentizität (vgl. Leuders et al. 2011, S. 4).

Sachsituationen und Situationen werden in dieser Arbeit begrifflich synonym genutzt, da die gestellten Aufgaben stets eine außermathematische, kontextuelle Rahmung haben.

Eine Kategorisierung funktionaler (Sach-)Situationen hat Vollrath (1989) durch seine ‚phänomenologische Sicht' (neben der charakterisierenden Sicht durch Grundvorstellungen und Darstellungsformen) auf den Begriff des ‚funktionalen Denkens' vorgenommen. Er unterscheidet ‚Vorgänge' (Funktionen der Zeit), ‚Messungen' (Größen werden Zahlen zugeordnet), ‚Operationen' (Beziehungen zwischen gleichen Größen) und ‚Kausalitäten' (Beziehungen zwischen verschiedenen Größen) (vgl. S. 18ff). Die zeitlichen Vorgänge beinhalten insbesondere den zuvor beschriebenen Charakter von Vorhersagen. Kontextuelle Rahmungen ergeben sich bspw. durch „Bewegungen, Wachstumsvorgänge, Fördervorgänge, Arbeitsvorgänge, Verbrauchsvorgänge usw." (a.a.O., S. 19). In dieser Arbeit werden sowohl Vorgänge als auch Kausalitäten als „*Beschreibung von Kausalzusammenhängen durch Funktionen*" (a.a.O., S. 23, Hervorh. i. Orig.) betrachtet.

Typische Kontexte linearer, proportionaler und antiproportionaler Funktionen

Folgende Ausführungen geben nur eine Auswahl der spezifischen funktionalen Kontexte (in den vom Schulministerium zugelassenen Lernmitteln NRWs für das Fach Mathematik, Klassen 7 - 9) an. Es wird jedoch versucht Phänomene linearer, proportionaler und antiproportionaler Kontexte zu klassifizieren. Diese leiten sich von den zuvor erarbeiteten Eigenschaften ab (siehe Tab. 3 und 4).

Alle linearen Kontexte lassen sich dem inbegriffenen Phänomen einer konstanten, additiven Änderung (*allgemeine additive Änderung* oder *additive Änderung pro Schritt*) zwischen Größen desselben Größenbereichs unterordnen. Beispiele für typische lineare, aber nicht proportionale Kontexte sind:

-Dienstleistungs- bzw. Nutzungskosten (bspw. Taxifahrt mit Anfahrtsgebühr und Kosten pro gefahrenem Kilometer, Fahrradverleih mit Ausleihgebühr und Stundenpauschale)
-Tarife (bspw. Handy-/Internet-/Gas/Wasser/Stromtarife mit Grundgebühr und Kosten pro Einheit)
-Ablaufprozesse (bspw. in der Badewanne, im Schwimmbecken pro Zeiteinheit)
-…

Proportionale Kontexte (also mit Startwert in Null) können einerseits ebenfalls das Phänomen der konstanten, additiven Änderung beinhalten, aber auch das Charakteristikum einer multiplikativen Änderung im Zuge der *Vervielfachungseigenschaft*. Ebenso gibt es hier in deutlicher Abgrenzung zu den nicht proportionalen Zusammenhängen das Phänomen zwischen unterschiedlichen Größenbereichen mit *a als festem Faktor* oder *a als festem Quotient.* Typische Kontexte sind:

-Tarife (bspw. Handy-/Internettarife ohne Grundgebühr)
-Verbräuche (bspw. von Benzin, Wandfarbe)
-Füllprozesse (bspw. einer Badewanne, eines Schwimmbeckens)
-Kaufkosten (bspw. bei Lebens- oder Sachmitteln bei der Preisermittlung unterschiedlicher Stückzahlen)
-Einheitentausch (bspw. zwischen Währungen, zwischen Temperatureinheiten)
-…

Die additiven Eigenschaften antiproportionaler Zusammenhänge stellen keine einfachen und unmittelbar greifbaren Beziehungen dar. Antiproportionale Kontexte implizieren in der Regel eine *reziproke Vervielfachung,* bezogen auf eine Veränderung der Größen gleicher Größenbereiche (Kovariation) oder im Zuge der Zuordnung zwischen zwei unterschiedlichen Größenbereichen die Ideen der Produktgleichheit (*a als festes Produkt*) oder durch das *a als fester Dividend*. Beim Dividieren eines festen Werts kann sowohl kontextuell, als auch mathematisch zwischen dem Aufteilen oder Verteilen differenziert werden (Grundvorstellungen der Division).

„Das **Aufteilen** lässt sich mathematisch […] als eine Tätigkeit beschreiben, die zur Zerlegung einer Menge M in gleichmächtige, paarweise elementfremde Teilmengen führt. Gesucht ist die Anzahl der Teilmengen, während die Elementanzahl der Menge M und die Elementanzahl je Teilmenge bekannt ist. […]

Das **Verteilen** lässt sich mathematisch […] als eine Tätigkeit beschreiben, die zur Zerlegung einer Menge M in gleichmächtige, paarweise elementfremde Teilmengen führt. Gesucht ist die Anzahl der Elemente je Teilmenge, gegeben die Elementanzahl der Menge M sowie die Anzahl der Teilmengen“ (Benz & Padberg 2011, S. 153ff, Hervorh. S.H.).

Da beim Aufteilen durch die Elementanzahl je Teilmenge dividiert wird, spricht man auch vom ‚Passen in' (vgl. Prediger 2009, S. 170). Typische Kontexte sind:

-Gewinn auf- bzw. verteilen (bspw. auf gleiche Beträge oder auf Personen)
-Vorrat auf- bzw. verteilen (bspw. auf gleiche Portionen oder auf Personen oder Tiere)
-Arbeitsvolumen auf- bzw. verteilen (bspw. auf gleiche Zeitintervalle oder auf Personen oder Maschinen)
-Fläche auf- bzw. verteilen (auf unterschiedliche Seitenlängen)
-Strecke auf- bzw. verteilen (auf gleiche Zeitintervalle oder Geschwindigkeiten)
-…

Die Auflistung häufig genutzter Kontexte in Lehr-/Lernwerken, zusammen mit ihren relevanten Aspekten, sollen nun für eine Unterscheidung linearer, proportionaler und antiproportionaler Situationsklassen genutzt werden.

2.3.3 Strukturierung der Situationsklassen

Die Situationsklassen funktionaler Zusammenhänge in Situationen implizieren strukturell gleiche Kontexte (vgl. Kap. 1.2.2) mit identischen semantischen Strukturen (vgl. Kap. 1.2.3). In Anknüpfung an die Ideen der ‚set of situations' (vgl. Vergnaud 1996) und der ‚contextual neighboorhood' (vgl. Pratt & Noss 2002) sollen Situationsklassen linearer, proportionaler und antiproportionaler Zusammenhänge aus konventionaler Perspektive begrifflich gefasst werden, die verschiedene Situationen hinsichtlich ihrer Bedeutungsstruktur miteinander verbinden (vgl. Tab. 6). Dazu wird aus Gründen der Übersichtlichkeit und späteren Zusammenführung der strukturierten Tabellen ebenfalls die Klassenstruktur der Rolle von a, der additiven und multiplikativen Änderungen in Anlehnung an die Tabellen 3 und 4 genutzt.

Das Adjektiv ‚fest' wird stets für eine zuordnende, die Adjektive ‚konstant' (additiv) und ‚gleich- bzw. gegensinnig' (multiplikativ) für eine kovariative Betrachtungsrichtung hinsichtlich der semantischen Struktur zwischen den Größen der Situationen gelegt.

Aufgrund der ausschließlichen Betrachtung außermathematischer Situationen auf $\mathbb{R}_0^+$ werden keine konstante Abnahme bei proportionalen bzw. divergierende Zunahme bei antiproportionalen Zusammenhängen als Situationsklassen abgebildet.

Die Situationsklassen werden für die empirischen Analysen hinsichtlich der situativen Fokussierungsebene und einem Vergleich zum Gebrauch individueller Situationsklassen genutzt.

Tabelle 6: Situationsklassen linearer, proportionaler und antiproportionaler Zusammenhänge

Situationsklasse…			**…linearer Zusammenhänge**	**…proportionaler Zusammenhänge**	**…antiproportion. Zusammenhänge**
zwischen Größen unterschiedlicher Größenbereiche: **ZUORDNUNG**	bzgl. der **Rolle von *a*** als…	***fester/s Quotient/ Produkt***	---	Fester Quotient	Feste Gesamtmenge
		fester Faktor/ Dividend	---	Fester Faktor	Festes Aufteilen bzw. Verteilen
zwischen Größen udesselben Größenbereichs: **KOVARIATION**	bzgl. der **additiven Änderung**	***Pro Schritt / Allgemein***	Konstante Zunahme (für $a > 0$) bzw. Konstante Abnahme (für $a < 0$)	Konstante Zunahme (für $a > 0$)	Konvergierende Abnahme (für $D = \mathbb{R}^+$ und $a > 0$)
	bzgl. der **multiplikativen Änderung**	***(Reziproke) Vervielfachungseig.***	---	Gleichsinnige Vervielfachung	Gegensinnige Vervielfachung

2.4 Lokale Bedeutungen aus situativer Perspektive

In Gegenüberstellung zu und gleichsam Anknüpfung an die lokalen Bedeutungen aus formaler Perspektive (Kap. 2.2) werden an dieser Stelle die Konzepte der ‚fundamentalen Ideen‘ und ‚Kernideen‘ aus situativer Perspektive beschrieben und ihr Zusammenhang zu den Grundvorstellungen erklärt (Kap. 2.4.1). Die fundamentale Idee des ‚funktionalen Zusammenhangs‘ wird auf lokaler Ebene für die linearen, proportionalen und antiproportionalen Funktionen vor dem Hintergrund von Kernideen in Form spezifischer Aussagen konkretisiert und nach den Grundvorstellungen für Funktionen und den benannten formalen Unterklassen strukturiert (Kap. 2.4.2). Diese Aussagen über spezifische Abhängigkeiten dienen als Bindeglied zwischen lebensweltlichen Situationen, ihren Kontexten und den Begriffen der Funktionstypen aus der Mathematik.

2.4.1 Fundamentale Ideen, Kernideen und Grundvorstellungen

Das Konzept der **fundamentalen Ideen** wurde als ein allgemeines, didaktisches Prinzip der Strukturorientierung (vgl. Bender & Schreiber 1985, S. 198f) durch Bruner 1970 (Original von 1960 auf Englisch) formuliert, anhand derer das Curriculum spiralig aufzubauen sei. Konkret auf das Fach Mathematik bezogen soll das Spannungsfeld zwischen abstrakter Mathematik und alltäglichem Denken durch einen Mathematikunterricht aufgelöst werden, der sich „mit einigen wenigen allgemeinen Ideen von weitreichender Bedeutung befass[t]" (Whitehead 1962, S. 260), um dem „Problem der Stofffülle und Stoffisolation" (Tietze et al. 1997, S. 37) entgegenzuwirken. Dabei soll jede Idee „auf unterschiedlichen kognitiven Niveaus verdeutlichbar sein und das mathematische Curriculum wie ein roter Faden vom Elementarunterricht bis zur höheren Mathematik durchziehen können (Bruners "Spiralcurriculum")" (Heymann 1996, S. 173, Hervorh. i. Orig.). Bender und Schreiber (1985) charakterisieren ‚universelle Ideen' durch Weite (logische Allgemeinheit), Fülle (vielfältige Anwendbarkeit in Teildisziplinen) und Sinn (Verankerung im Alltagsdenken) (vgl. S. 199). Durch letztes Charakteristikum soll der Begriff eine weittragende Bedeutung bekommen (vgl. Schreiber 1983, S. 67). Fundamentale (als universelle) Ideen werden hierbei als solche verstanden, die die gesamte Mathematik und damit unterschiedliche Teildisziplinen betreffen, wie bspw. Algorithmus, Funktion und Approximation. Andere Arbeiten sehen fundamentale Ideen bereichsspezifisch verankert, die also innerhalb eines mathematischen Teilgebiets wirken (für eine Übersicht siehe Tietze et al. 1997), wie „z.B. die bereichsspezifische Strategie des Gaußschen Algorithmus aus der Linearen Algebra für die universelle Idee des Algorithmus" (Tietze et al. 1997, S. 41). Schweiger (1992) beruft sich bzgl. der Bereichsspezifität zur Abgrenzung auf den Begriff ‚zentrale Idee' (vgl. S. 209). Leuders et al. (2011) unterscheiden in diesem Zusammenhang zwischen ‚globalen' und ‚lokalen Ideen' (S. 7). Neben der definitorischen Festlegung des Begriffs herrscht Uneinigkeit bzgl. der konkreten inhaltlichen Auswahl fundamentaler Ideen für den Mathematikunterricht (vgl. Schweiger 1992, Tietze et al. 1997). Dennoch wird die „*Funktion* (funktionale Abhängigkeit, eindeutige Zuordnung, Abbildung, Transformation, Operator) […] allgemein als grundlegende Idee[n] der Mathematik" (Tietze et al. 1997, S. 38, Hervorh. i. Orig.) bzw. ‚funktionaler Zusammenhang' „als zentrale Idee der Analysis" (Vohns 2005, S. 53) akzeptiert.

„Die Idee des funktionalen Zusammenhangs verknüpft Alltagswissen mit einer mächtigen mathematischen Methode. […] beispielsweise, daß sich eine Beobachtung, die sich zunächst vage durch die Formulierung ‚je mehr von diesem, desto mehr von jenem' beschreiben lässt, unter bestimmten Bedingungen in einer proportionalen oder linearen Funktion wesentlich präziser beschreiben lässt. […] In derartigen Erfahrungen erschließt sich die kulturelle Bedeutung der im Funktionsbegriff gegebenen mathematischen Abstraktion. Die mathematische Formulierung funktionaler Zusammenhänge erweist sich so als ein universelles Mittel, meßbare Veränderungen in unserer Welt theoretisch zueinander in Beziehung zu setzen und symbolisch zu bearbeiten (Heymann 1996, S. 178).

Die fundamentale Idee des funktionalen Zusammenhangs bildet also einen Zugang zur Welt in der Erfassung von Abhängigkeiten zwischen spezifischen Größen, die durch die konkreten Funktionstypen in Form lokaler Ideen präzisiert und exaktifiziert werden können. Lokale Ideen sind vonnöten, um „in einem konkreten Lernprozess sinnstiftend wirken [zu] können" (Leuders et al. 2011, S. 7). Im Rahmen dieser Arbeit sollen die lokalen Ideen linearer, proportionaler und antiproportionaler Funktionen herausgearbeitet werden, die auf elementarer Ebene erste Konkretisierungen der Funktion darstellen.

Neben der dargelegten Universalität fundamentaler Ideen auf fachlicher Ebene sollen diese zugleich die Möglichkeit des Transfers begünstigen (vgl. Kronfellner 1979, S. 2).

„[I]n order for a person to be able to recognize the applicability or inapplicability of an idea to a new situation and to broaden his learning thereby, he must have clearly in mind the general nature of the phenomenon with which he is dealing" (Bruner 1960, S.18).

Fundamentale Ideen (in allen obigen Betrachtungen) entspringen daher einer eher inhaltlich-fachlichen Perspektive, die auf einer Rückschau des Fachkundigen fußen (vgl. Leuders et al. 2011, S. 7). Eine individuelle Perspektive nimmt hingegen das Konzept der **Kernideen** ein (vgl. Gallin & Ruf 1993). Dieser erkenntnistheoretische Ansatz im Zuge der Vorschauperspektive des Lernenden stellt Ideen als tatsächlich lokale und individuelle Ideen in den Mittelpunkt.

Sie sind „der persönliche und oft unreflektierte Antrieb, der immer mitwirkt, wenn ich mich mit einer Sache befasse. [Die Lehrperson; S.H.] steckt das Feld ab für ein Lernen auf eigenen Wegen und ermöglicht den Schülerinnen und Schülern, eigene Kernideen zu entwickeln" (Gallin & Ruf 1993, S. 14).

Leuders et al. (2011) haben das Begriffsverständnis der Kernidee um die Verbindung aus dem globalen und fachorientierten Konzept der fundamentalen Ideen (Bruner 1960) und dem lokalen und individuell-orientierten Konzept der Kernideen (Gallin & Ruf 1993) erweitert:

„Eine **Kernidee** enthält subjektive *und* fachliche Aspekte zugleich und somit beide Perspektiven, die die Vorschau und die Rückschau bereits in sich tragen. Die beiden Aspekte zeigen sich aus der Vorschauperspektive als subjektiv plausible *Frage* an den Gegenstand und in der Rückschauperspektive als *Antwort*, formuliert mit den bis dahin erarbeiteten mathematischen Konzepten. Als Rückschauantwort beschreibt die Kernidee, was die Lernenden am Ende einer Lernepisode – in eigener Sprache durchaus etwas anders – formulieren können" (Leuders et al. 2011, S. 7, Hervorh. i. Orig.).

Der Funktionsbegriff zielt auf die fachliche Idee Veränderungen der Welt theoretisch zu erfassen (siehe Kap. 2.2.1). Heymann (1996) konkretisiert die ‚Idee des funktionalen Zusammenhangs'. Sie impliziert die ‚Vorhersehbarkeit' von Entwicklungen in der Welt, die Möglichkeit der Beschreibung von Regelmäßigkeiten und das Fassen von empirischen Zusammenhängen und Naturgesetzen (vgl. Heymann 1996, S. 177). Dieser Aspekt der Vorhersagbarkeit schlägt dabei den Bogen zur Möglichkeit individueller, lebensweltlicher Beschreibungen (vgl. Lengnink 2005, S. 14). Funktionen liefern dabei Antworten auf folgende Kernfragen im Sinne einer subjektiven Idee: „How do we describe how two quantities change with each other and how do we calculate further values?" (Hußmann & Prediger 2016, S. 45). Es geht also (insofern möglich) um die Vorhersagbarkeit der Veränderung zwischen zwei Größen und der konkreten Angabe weiterer Werte. Dies funktioniert jedoch nur im Rahmen konkreter Funktionstypen mit bekanntenVorschriften (vgl. Lengnink 2005, S. 16f).

Inwiefern hängen Grundvorstellungen mit diesen Konzepten zusammen? Für eine Klärung des Zusammenhangs zwischen fundamentalen Ideen und Grundvorstellungen führt vom Hofe (1995a) in Anbindung und als Erweiterung des Konzepts fundamentaler Ideen aus, dass „*Grundvorstellungen als normative didaktische Kategorien*" (S. 128, Hervorh. i. Orig.) ebenso eine normative Perspektive und damit inhaltliche Ausrichtung innehaben, sie aber mit der „*deskriptiven Erfassung von individuellen Schülervorstellungen*" (ebd., Hervorh. i. Orig.) ebenfalls eine individuelle Perspektive bezogen auf die konkreten Lernprozesse einnehmen. Eine fundamentale Idee impliziert mehrere normative Grundvorstellungen, die jede für sich schließlich viele individuelle Vorstellungen beinhalten kann (vgl. a.a.O., S. 128f). Vohns (2005) schlägt vor beide Konzepte „als *Instrumente einer didaktisch orientierten Sachanalyse* einzusetzen" (S. 76, Hervorh. i. Orig.). Die Überlegungen des Lehrenden spielen sich dann auf verschiedenen Ebenen ab. Eine Orientierung an einer universellen Idee (als reichhaltige, fachwissenschaftliche Idee) als betont spiraliger Prozess konkretisiert sich lokal als zentrale, bereichsspezifische Idee. Das bedeutet gleichsam eine an der Ausgangslage der SchülerInnen ausgerichtete Planung der Entwicklung und Veränderung individueller hin zu normativ-zugeordneten Grundvorstellungen (vgl. a.a.O., S. 62). Dabei beschreiben Kernideen, sowohl aus konventionaler als auch individueller Perspektive im Rahmen der linearen, proportionalen und antiproportionalen Zusammenhänge, deren spezifische Veränderungsstrukturen zwischen zwei Größen hinsichtlich der Vorhersagbarkeit auf konkret lokaler Ebene.

2.4.2 Strukturierung der situativen Bedeutungen

Die beschriebene Vorher- und Aussagekraft von Funktionen wird für die konkreten Typen spezifiziert. Dabei werden ihre zentralen Eigenschaften genutzt, um sie bezogen auf die konkrete Abhängigkeit zwischen zwei Größen zu versprachlichen (vgl. Tab. 7 und 8).

Tabelle 7: Inferentielle Relationen zwischen den Begriffen Linearität, Proportionalität und ihren Eigenschaften

Fokussierung			Inferentielle Relation
ZUORDNUNG	***a* als…**	***fester Quotient***	*Das ist **proportional**, weil der Quotient aus abhängiger und unabhängiger Größe fest ist.*
		fester Faktor	*Das ist **proportional**, weil sich die abhängige Größe aus der Multiplikation der unabhängigen Größe mit einem festen Wert ergibt.*
KOVARIATION		***Monotoniekenngröße***	*Das kann **linear (proportional)** sein, weil die abhängigen Größen **je mehr-desto mehr** variieren.* *Das kann **linear** sein, weil die abhängigen Größen **je mehr-desto weniger** variieren.* *Das ist **linear (proportional)**, weil die abhängigen Größen fest bleiben (und ein Startwert in Null existiert).*
		feste additive Änd. pro Schritt	*Das ist **linear (proportional),** weil sich bei jedem Schritt bei der unabhängigen Größe die abhängige Größe um einen festen Wert verändert (und ein Startwert in Null existiert).*
	Additive Änderung	***Allgemein***	*Das ist **linear (proportional)**, weil eine konstante Zunahme der unabhängigen Größe eine konstante Zunahme der abhängigen Größe bedeutet (und eine Startwert in Null existiert).* *Das ist **linear**, weil eine konstante Zunahme der unabhängigen Größe eine konstante Abnahme der abhängigen Größe bedeutet.*
		Pro Schritt	*Das ist **linear (proportional),** weil sich bei jedem Schritt bei der unabhängigen Größe die abhängige Größe um einen festen Wert verändert (und ein Startwert in Null existiert).*
	Multiplikative Änderung	***Vervielfachungseigenschaft***	*Das ist **proportional,** weil sich bei einer Vervielfachung der unabhängigen Größe die abhängige Größe vervielfacht.*

Tabelle 8: Inferentielle Relationen zwischen dem Begriff Antiproportionalität und seinen Eigenschaften

Fokussierung			Inferentielle Relation
ZUORDNUNG	***a* als…**	***festes Produkt***	*Das ist* ***antiproportional****, weil das Produkt aus unabhängiger und abhängiger Größe fest ist.*
		fester Dividend	*Das ist* ***antiproportional****, weil sich die abhängige (unabhängige) Größe aus der Division eines festen Werts mit der unabhängigen (abhängigen) Größe ergibt.*
KOVARIATION		***Monotonie-kenngröße***	*Das kann* ***antiproportional*** *sein, weil die abhängigen Größen je mehr-desto weniger variieren.*
	Additive Änderung	***Allgemein***	*Das ist* ***antiproportional****, weil eine konstante Zunahme der unabhängigen Größe eine Multiplikation der abhängigen Größe mit dem Quotienten aus unabhängiger Größe und der Summe aus unabhängiger Größe und dem Wert der Zunahme bedeutet.*
		Pro Schritt	*Das ist* ***antiproportional,*** *weil bei jedem Schritt bei der unabhängigen Größe die abhängige Größe mit dem Quotienten aus unabhängiger Größe und ihrem Nachfolger multipliziert wird.*
	Multiplikative Änderung	***Reziproke Vervielfachungseig.***	*Das ist* ***antiproportional,*** *weil sich bei einer Vervielfachung der unabhängigen Größe die abhängige Größe umgekehrt vervielfacht.*

Diese verbalisierten Abhängigkeiten linearer, proportionaler und antiproportionaler Zusammenhänge können als Beschreibungsmittel aus konventionaler Perspektive genutzt werden, um lebensweltliche Abhängigkeiten funktionaler Zusammenhänge mathematisch zu beschreiben und hinsichtlich der mathematischen Begriffe Linearität, Proportionalität und Antiproportionalität als explizite Begründung für eine Identifizierung zu nutzen. Sie repräsentieren damit Urteile, die in Anlehnung an die ‚situated abstractions' und ‚operational invariants' situationsübergreifend angewendet werden können (vgl. Kap. 1.2.3). Für ihre Formulierung wurden grundlegend die von Pratt & Noss (2002) gestellten Bedingungen an die ‚situated abstractions' berücksichtigt: Involvierung einer Konsequenz, Implikation einer mathematisch kohärenten Struktur und die Möglichkeit der Anbindung an neue, konkrete Situationen (vgl. Kap. 1.2.3).

Im empirischen Teil dieser Arbeit können schließlich die individuellen Festlegungen auf spezifische Zusammenhänge und mögliche Urteile über verschiedene Situationen hinweg mit den konventionalen Urteilen verglichen werden.

Eine tabellarische Strukturierung wird wiederum nach den zuvor differenzierten Bereichen (Rolle von a, additive und multiplikative Änderungen) vorgenommen. Dabei werden die spezifischen Urteile im Rahmen inferentieller Relationen zu den fokussierten Begriffen formuliert. Sie bilden eine Grundlage für einen Vergleich mit individuellen *Begründungen* im Rahmen der Identifizierung von Situationen.

Die sprachlich formulierten Eigenschaften als konkretisierte Ideen linearer, proportionaler und antiproportionaler Funktionen lassen sich in Situationen nutzen, um die Beziehungen zwischen voneinander abhängigen Größen hinsichtlich ihres spezifischen Zusammenhangs zu bestimmen. Ebenso wurde ihre Bedeutung auf formaler Ebene hinsichtlich der verschiedenen Darstellungen abgebildet (vgl. Tabellen 3 und 4). Sie liefern demnach sowohl auf situativer als auch formaler Fokussierungsebene Urteile, die als *Begründung* für die Begriffe Linearität, Proportionalität und Antiproportionalität in der Form inferentieller Relationen genutzt werden können.

2.5 Empirische Einsichten

An dieser Stelle sollen die bisherigen Erarbeitungen aus einer *konventionalen* Perspektive zur formalen (Kap. 2.1) und situativen Fokussierungsebene (Kap. 2.3), zusammen mit ihren Bedeutungen und Perspektiven auf die jeweils andere Ebene (Kap. 2.2 & 2.4) anhand empirischer Einsichten mit bestehenden Erkenntnissen zu individuellen Identifizierungen zwischen linearen, proportionalen und antiproportionalen Zusammenhängen und ihren mathematischen Begriffen untermauert werden, um bezogen auf die dortigen *individuellen* Perspektiven auf die Forschungsfragen dieser Arbeit hinzuarbeiten.

In einem ersten Schritt werden die Anforderungen der Bildungsstandards für das Fach Mathematik für den konkreten Lerngegenstand und den Fokus dieser Arbeit dokumentiert, um daran anknüpfend deren Umsetzungen in Form von Lernpfaden in einer Auswahl zugelassener Lehr-/Lernmittel zu untersuchen. Dabei werden Lernpfade hin zu den Begriffen proportionale und antiproportionale Zuordnungen in Klasse 7 und lineare, proportionale und antiproportionale Funktionen in Klasse 8 bzw. 9 erörtert und voneinander differenziert. Ein gezielter Blick auf die Nutzung der unterschiedlichen Eigenschaften in diesen Schulbüchern soll Hinweise auf mögliche Hürden bei Identifizierungen und Differenzierungen von Situationen *nach* der Behandlung im Unterricht geben. Empirische Befunde zu Lernwegen (als individuelle Lernpfade) zeigen erste Potentiale und Hürden im Zuge einer Unterscheidung der Typen auf (Kap. 2.5.1).

In einem zweiten Schritt werden Studien zu individuellen Identifizierungen zwischen linearen, proportionalen und antiproportionalen Zusammenhängen in Situationen und ihren mathematischen Begriffen als Funktionen spezifiziert und hinsichtlich ihres Bezugs zur formalen, situativen oder der Verknüpfung beider Fokussierungsebenen strukturiert (Kap. 2.5.2).

2.5.1 Bildungsstandards und typische Lernpfade

Die aktuellen ‚Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss' (Beschluss der KMK vom 4.12.2003) orientieren sich an fünf Leitideen im Sinne fundamentaler Ideen. „Eine Leitidee vereinigt Inhalte verschiedener mathematischer Sachgebiete und durchzieht ein mathematisches Curriculum spiralförmig" (S. 9). Die inhaltsbezogenen Konkretisierungen stellen im Sinne lokaler Ideen im Rahmen der vierten Leitidee ‚Funktionaler Zusammenhang' folgende Forderungen:

„Die Schülerinnen und Schüler

-nutzen Funktionen als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge,

-**erkennen und beschreiben funktionale Zusammenhänge** und stellen diese in sprachlicher, tabellarischer oder graphischer Form sowie gegebenenfalls als Term dar,

-**analysieren, interpretieren und vergleichen unterschiedliche Darstellungen funktionaler Zusammenhänge (wie lineare, proportionale und antiproportionale**),

-**lösen realitätsnahe Probleme im Zusammenhang mit linearen, proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen** […]

-**bestimmen kennzeichnende Merkmale von Funktionen** und stellen Beziehungen zwischen Funktionsterm und Graph her […]

-geben zu vorgegebenen Funktionen Sachsituationen an, die mit Hilfe dieser Funktion beschrieben werden können (a.a.O., S. 11f, Hervorh. S.H.).

Und als inhaltlicher Fortgang des in dieser Arbeit anvisierten Lerngegenstands:

„Die Schülerinnen und Schüler […]

-wenden insbesondere lineare und quadratische Funktionen sowie Exponentialfunktionen bei der Beschreibung und Bearbeitung von Problemen an (a.a.O., S. 12).

In den ‚Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife' (Beschluss der KMK vom 18.10.2012) münden diese u.a. in folgender, inhaltlichen Weiterentwicklung:

„Die Schülerinnen und Schüler können

-die sich aus den Funktionen der Sekundarstufe I ergebenden Funktionsklassen zur Beschreibung und Untersuchung quantifizierbarer Zusammenhänge nutzen" (a.a.O., S. 17, Hervorh. S.H.).

Lernziele sind also neben der Darstellungsvielfalt das nachhaltige Anwenden gebildeter ‚Funktionsklassen'. Dies beinhaltet die Fähigkeit zwischen den einzelnen Funktionstypen anhand ‚kennzeichnender Merkmale' differenzieren zu können.

Inwiefern eine Abfolge der Inhalte und charakteristischen Eigenschaften in den verschiedenen Darstellungen zum Tragen kommen und zur Differenzierung zwischen unterschiedlichen Anwendungssituationen angeregt wird, soll in einem ersten Zugang durch eine stichpunktartige Auswertung der zugelassenen Lehr-/Lernmittel NRWs erörtert werden.

In Klasse 7 gibt es anscheinend in fast allen der gesichteten Schulbücher einen klassischen Lernweg im Rahmen des Lerngegenstands der Zuordnungen (vgl. Tab. 9). Eine Basis bildet dabei folgende Abfolge der Inhalte:

Zuordnungen → Proportionale Zuordnungen und Sachsituationen → Antiproportionale (bzw. umgekehrt proportionale) Zuordnungen und Sachsituationen → Proportionale und antiproportionale Sachsituationen

Fast alle dieser Schulbücher widmen dem Verfahren des Dreisatzes eigene Kapitel (s. unten: 1) und 2)) bzw. eigene Abschnitte im Rahmen eines Kapitels (s. unten: 3)). Dabei zeigen sich drei schulformunabhängige Herangehensweisen, an welcher Stelle diese Strategie des Herunterrechnens zur Eins (spezifische (*reziproke*) *Vervielfachungseigenschaft*) zum Einsatz kommt:

1) Zuordnungen → Proportionale Zuordnungen und Sachsituationen → **Proportionaler Dreisatz** → Antiproportionale (bzw. umgekehrt proportionale) Zuordnungen und Sachsituationen → **Antiproportionaler Dreisatz** → Proportionale und antiproportionale Sachsituationen (vgl. Einblicke für H, Elemente der Mathematik für Gy, mathe live für Ge, Mathematik real für R, Mathematik plus für Gy, Pluspunkt Mathematik für H, Schnittpunkt für R)

2) Zuordnungen → Proportionale Zuordnungen und Sachsituationen → Antiproportionale (bzw. umgekehrt proportionale) Zuordnungen und Sachsituationen → **Proportionaler und antiproportionaler Dreisatz** → Proportionale und antiproportionale Sachsituationen (vgl.Fokus Mathematik für Gy, Sekundo für HRGe, Zahlen und Größen für Ge)

3) Zuordnungen → Proportionale Zuordnungen, **proportionaler Dreisatz** und Sachsituationen → Antiproportionale (bzw. umgekehrt proportionale) Zuordnungen, **antiproportionaler Dreisatz** und Sachsituationen → Proportionale und antiproportionale Sachsituationen (vgl. Maßstab für HR, MatheForum für R, Neue Wege für Gy)

Trotz der Sichtung einer nur begrenzten Auswahl an Lehr-/Lernmittel wird deutlich, dass dem Verfahren des Dreisatzes als besondere Strategie eine große Bedeutung beigemessen wird.

Schaut man spezifischer auf die dortige Verwendung der Darstellungsformen in Klasse 7, so werden bei der anfänglichen Behandlung von allgemeinen Zuordnungen die numerischen, graphischen und verbal-situativen Darstellungsformen konsequent zur Veranschaulichung genutzt. Die symbolische Darstellungsform wird nur bei wenigen Schulbüchern in Form vereinzelter Beispiele abgebildet (MatheForum für R, Mathematik plus für Gy, Neue Wege für Gy). Dies lässt sich mit dem in Kap. 2.1.1 dargelegten Zusammenhang begründen, dass Zuordnungen nicht zwingend durch eine Gleichung zusammenfassbar sein müssen.

Tabelle 9: Lernpfade hinsichtlich proportionaler und antiproportionaler Zuordnungen in Klasse 7

	Schulbuch		Einblicke	Elemente der Mathematik	Fokus Mathematik	Maßstab	MatheForum	mathe live	Mathematik real	Mathematik plus	matheWerkstatt	Neue Wege	Pluspunkt Mathematik	Schnittpunkt	Sekundo	Zahlen und Größen
	Schulform		Gy	Gy	Gy	HR	R	Ge	R	Gy	HRGe	Gy	H	R	HRGe	Ge
Sukzessiver Lernpfad ↓	**Zuordnungen**	num	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
↓		gra	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
↓		sym					x			x		x				
↓		v-sit	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
↓	**Funktion als eindeutige Zuordnung**										x					
↓	**Proportionale Zuordnungen und Sa.**	num	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x
↓		gra	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x
↓		sym					x			x		x				
↓		v-sit	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x
↓	Eigenes(r) Kapitel/Abschnitt zum **proportion. Dreisatz**		x	x		x	x	x	x	x		x	x	x		
↓	**Antiproportion. bzw. umgekehrt proportionale Zuordnungen und Sa.**	num	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x
↓		gra	x	x	x	x	x	x		x		x	x	x	x	x
↓		sym					x			x		x				
↓		v-sit	x		x	x	x	x		x		x	x	x	x	x
↓	Eigenes(r) Kapitel/Abschnitt zum **antiprop. Dreisatz**			x		x	x	x	x	x		x	x	x		
↓	Eigenes Kapitel zum **prop. und antiprop. Dreisatz**				x										x	x
	Proportionale und anti-proportionale Sa.		x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x

num: numerisch; gra: graphisch; sym: symbolisch; v-sit: verbal-situativ; Sa: Sachsituationen

Auffällig ist dann jedoch, dass auch im Zuge der spezifischen proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen die symbolische Darstellungsform bei vielen nicht integriert wird. Durchweg werden proportionale und antiproportionale Zuordnungen am Ende der Einheit zur Unterscheidung in verschiedenen Sachsituationen gegenübergestellt. In dieser Stichprobe klärt das Schulbuch ‚mathewerkstatt' als einziges schon den Begriff der Funktion als eindeutige Zuordnung, verlagert die spezifischen Typen jedoch in Klasse 8.

In Klasse 8 bzw. 9 sind deutlichere Unterschiede in den Lernpfaden zum Gegenstand der (linearen, proportionalen oder antiproportionalen) Funktionen auszumachen (vgl. Tab. 10).

Tabelle 10: Lernpfade hinsichtlich linearer, proportionaler und antiproportionaler Funktionen in Klasse 8 bzw. 9

Schulbuch	Einblicke	Elemente der Mathematik	mathewerkstatt	Neue Wege	Einblicke	Maßstab	mathe live	Mathematik real	Schnittpunkt	Sekundo	Zahlen und Größen
Schulform	Gy	Gy	HRGe	Gy	Gy	HR	Ge	R	R	HRGe	Ge
	Klasse 8				**Klasse 9**						
Sukzessiver Lernpfad ↓											
Zuordnungen								x	x	x	x
Funktion als eindeutige Zuordnung		x	7		x	x	$\bar{x}$	x	x	x	x
Proportionale Funktionen und Sachsituationen	x	x	x		x	x	x		x		
Lineare Funkt. und Sachsituationen		x	x	x	x		x	x	x	x	x
Proport. Funkt. und Sachsituationen								x		x	
Antiproportionale Funktionen und Sachsituationen	x	x	x			x		x	x		
Lineare Funkt. und Sachsituationen	x					x					
Proportionale, lineare und antiproportionale Sachsituationen	x		x		x	x		x	x		

x: unter dem Begriff Zuordnung, nicht Funktion; 7: In Klasse 7; $\bar{x}$: Begriff der Funktion als eindeutige Zuordnung im Rahmen linearer Funktionen

Ein Teil der gesichteten Lehr-/Lernnmittel beginnt mit einem Kapitel zu allgemeinen Zuordnungen. Die meisten knüpfen an bzw. starten mit dem Begriff der

Funktion als eindeutige Zuordnung. Ab dieser Stelle lassen sich sechs unterschiedliche Lernpfade identifizieren, die sich in den ersten drei Fällen aus der verschiedenartigen Abfolge der drei Funktionstypen ergeben (jede der nachfolgenden Positionen impliziert die Charakterisierung der Funktionstypen in Situationen):

1) Proportionale Funktionen → Lineare Funktionen → Antiproportionale Funktionen
(vgl. Elemente der Mathematik für Gy Kl. 8, mathewerkstatt für HRGe Kl. 8, Schnittpunkt für R Kl. 9)

2) Lineare Funktionen → Proportionale Funktionen → Antiproportionale Funktionen
(vgl. Mathematik real für R Kl. 9)

3) Proportionale Funktionen → Antiproportionale Funktionen → Lineare Funktionen
(vgl. Maßstab für HR Kl. 9)

4) Proportionale Funktionen → Lineare Funktionen
(vgl. Einblicke für H Kl. 9, mathe live für Ge, Kl. 9)

5) Lineare Funktionen → Proportionale Funktionen
(vgl. Sekundo HRGe Kl. 9)

6) Lineare Funktionen
(vgl. Neue Wege für Gy Kl. 8, Zahlen und Größen für Ge Kl. 9)

Die letzten drei Lernpfade zeigen, dass einige Lernmittel antiproportionale Funktionen nicht berücksichtigen und wieder andere thematisieren ausschließlich und dafür vergleichsweise ausführlich lineare Funktionen. Dies hat zur Folge, dass die drei Funktionstypen am Ende des Lernpfads in unterschiedlichen Situationen für eine Unterscheidung nicht gegenübergestellt werden (können).

Da für diese Arbeit die Beschreibung der Situationen mithilfe der linearen, proportionalen und antiproportionalen Eigenschaften in unterschiedlichen Darstellungsformen (Tabelle, Graph und Term) besondere Relevanz hat, werden diese Lehrwerke auf die hier fokussierten Charakteristika (Rolle von a, additive und multiplikative Änderungen, vgl. Tab. 3 und 4) hin genauer untersucht. Dabei wird die Methode des Dreisatzes als Spezialfall der (*reziproken*) *Vervielfachungseigenschaft* gesondert aufgeführt (vgl. Tab. 11).

Insgesamt zeigt sich im Rahmen der Stichprobe das Bild, dass trotz der Forderung der Bildungsstandards nach ‚unterschiedlichen Darstellungen' insbesondere die symbolische Darstellungsform im Rahmen der spezifischen Zuordnungen in Klasse 7 nicht angemessen repräsentiert ist (vgl. Tab. 10).

Die (*reziproke*) *Vervielfachungseigenschaft*, *Quotienten-* und *Produktgleichheit* sind prominent genutzte Eigenschaften, insbesondere in der tabellarischen Darstellungsform. Dem Dreisatz wird häufig viel Aufmerksamkeit zu Lasten anderer, kennzeichnender Eigenschaften (*additive Änderungen*, *a als fester Faktor* oder *Dividend*) geschenkt (vgl. Tab. 11).

Tabelle 11: Explizite Nutzung linearer, proportionaler und antiproportionaler Eigenschaften in Klasse 7 und 8 bzw. 9

Schulbuch			Elemente der Mathematik	Fokus Mathematik	Mathematik plus	mathewerkstatt	Neue Wege	Einlicke	Maßstab	MatheForum	mathe live	Mathematik real	Pluspunkt	Schnittpunkt	Sekundo	Zahlen und Größen
Schulform			Gy	Gy	Gy	HRGe	Gy	H	HR	R	Ge	R	H	R	HRGe	Ge
Proport. Zuordnungen	**KLASSE 7** / **KLASSE 7**	*Additive Änderung*	A											A		
		Vervielfachungseig.	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
		Dreisatz	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
		a als fester Quotient	X	X	X		X		X	X	X	X		X	X	X
		a als fester Faktor	X		X		X									
Antiproport. Zuordnungen		*Addit. Änderung*														
		Rezipr. Vervielf.	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
		Dreisatz	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
		a als festes Produkt	X	X	X		X		X	X	X	X		X	X	X
		a als fester Dividend	X													
Lin. Fkt.	**KLASSE 8** / **KLASSE 9**	*Allg. add. Änd.*	X	-	-	X	X	s	X	-	X	s	-	s	s	s
		Add. Änd. pro Schr.	X	-	-	X	X		X	-			-			
Proport. Funktionen		*Allg. add. Änd.*	X	-	-	X				-		s	-	s	s	s
		Add. Änd. pro Schr.		-	-	X				-			-			
		Vervielfachungseig.	X	-	-	X			X	-			-			
		a als fester Quotient	X	-	-					-			-			
		a als fester Faktor		-	-	X			X	-			-			
Antiprop. Funkt.		*Addit. Änderung*		-	-					-		s	-	s		
		Rezipr. Vervielf.	X	-	-	X			X	-			-			
		a als festes Produkt	X	-	-	X			X	-			-			
		a als fester Dividend		-	-					-			-			

A: Eigenschaft der Additivität; s: Definition über die symbolische Darstellungsform;
-: Lernmittel hat nicht vorgelegen

‚Kennzeichnende Merkmale' werden nur selten je konsequent in den verschiedenen Darstellungen beleuchtet. Zur angestrebten Bildung von ‚Funktionsklassen' findet nur durchweg in Klasse 7 zwischen proportionalen und antiproportionalen Situationen ein Angebot zur Unterscheidung zwischen den Funktionstypen in unterschiedlichen und gegenübergestellten Situationen statt. In Klasse 8 bzw. 9 bleibt diese Gegenüberstellung häufig zwischen linearen, proportionalen und antiproportionalen Situationen aus. Begründen lässt sich dies zum Teil dadurch, dass proportionale und antiproportionale Zuordnungen in der Begrifflichkeit von Funktionen stellenweise nicht mehr thematisiert werden. Trotz der in Klasse 8 bzw. 9 vermehrten Definition der dargelegten Funktionstypen über die symbolische Darstellungsform werden die proportionalen und antiproportionalen Eigenschaften mit einer inbegriffenen zuordnenden Sichtweise, die damit der Darstellung der Funktionsgleichung sehr nahe sind, nur sehr selten konkretisiert. Das *a als fester Faktor* bei proportionalen Zusammenhängen wird nur in zwei der Lernmittel explizit als Methode auch in der Tabelle neben dem impliziten Vorkommen im Term dargestellt (mathewerkstatt & Maßstab), das *a als Dividend* antiproportionaler Funktionen wird in keinem der Stichprobe in der Tabelle oder im Graphen veranschaulicht.

Empirische Einsichten zu Lernwegen

Trotz der Analyse nur einer Auswahl der Inhalte der Lehr-/Lernmittel zum beforschten Lerngegenstand, konnten bereits sehr unterschiedliche Lernpfade in Klasse 8 bzw. 9 zu den proportionalen, linearen und antiproportionalen Funktionen aufgezeigt werden. Für das Herausstellen eines aus individueller Perspektive gelingenden Lernweges existieren nur äußerst wenige empirische Einsichten. Richter (2014) hat in ihrer qualitativen Studie mit 12 SchülerInnen der 8. Klasse zwei mögliche Lernwege hin zum Begriff der linearen Funktion auf der Basis proportionaler Vorkenntnisse rekonstruiert. Eingebettet ist die Studie in ein Lehr-/Lernarrangement im Kontext der Routenplanung und den involvierten Größen Strecke, Zeit und Durchschnittsgeschwindigkeit (siehe Kap. 3.1.1) mit dem darstellungsübergreifenden Fokus auf das gleichbleibende Wachstum mit der zugrunde liegenden Kernidee ‚Berechenbarkeit und Vorhersagbarkeit unbekannter Werte in gleichbleibenden Wachstumsprozessen'. Lineare Funktionen mit Startwert ungleich Null ergeben sich aus der situativen Rahmung, dass auf dem Tacho eines Fahrzeugs bereits gefahrene Kilometer zu Beginn der Fahrt stehen. Der erste, rekonstruierte Lernweg aus individueller Perspektive beschreibt das Verwerfen proportionaler, multiplikativer Strategien (‚Orientierung an Eins/Herunterrechnen' als Dreisatz und ‚Direktes Hochrechnen' als *Vervielfachungseigenschaft*), das gleichzeitige Beibehalten der additiven Strategie ‚sukzessive Addition/Subtraktion' als *additive Änderung pro Schritt* und das Fortführen und Modifizieren der Strategie *a als fester Faktor* mit einer anschließenden, einmaligen Addition des Startwerts. Beim zweiten Lernweg bleiben die individuellen Strategien näher an den proportionalen, multiplikativen Strategien verhaftet, indem die *Vervielfachungseigenschaft* mit einer Strategie des ‚Reparierens' angepasst wird. Dabei wird das Vielfache des Startwerts, das zu viel berechnet wurde, nachträglich subtrahiert. Ebenso wird hier, wie bei Weg eins, bei der Nutzung des festen Faktors der Startwert einmal addiert (vgl.

S. 331ff). Diese qualitative Erhebung gibt einen Hinweis darauf, dass der Lernpfad von proportionalen zu linearen Funktionen unter geeigneten kontextuellen und situativen Bedingungen Potentiale in sich trägt, geeignete, proportionale Eigenschaften für lineare Zusammenhänge korrekt fortzuführen, zu verwerfen oder zu modifizieren, so wie sie auf formaler Ebene aufgezeigt wurden (vgl. Kap. 2.2.5).

Für Lernpfade zwischen den Begriffen linearer (proportionaler) und antiproportionaler Funktionen fragt Suarez (1977) infolge einer Kategorisierung von Fehlerstrategien bei der Bearbeitung antiproportionaler Textaufgaben mithilfe linearer Eigenschaften nach der Möglichkeit der Überwindung des Linearitätsprinzips hin zu der „Struktur höherer Ordnung“ (=Antiproportionalität) (S. 89). Zur gelingenden Unterscheidung zwischen diesen Typen beschreibt er die Erkenntnis, dass dem gleichen Zuwachs Δx verschiedene Zuwächse Δy entsprechen können und dass bemerkt wird, dass Δy nicht nur von Δx, sondern auch von x abhängig ist (siehe **(A3)** $\Delta f(x) = -\frac{a}{x_1 \cdot x_2} \cdot \Delta x$). Eine empirische Konkretisierung gelingender, individueller Lernwege steht an dieser Stelle jedoch noch aus.

2.5.2 Identifizierungen zwischen Situationen und den mathematischen Begriffen

Diese Arbeit richtet ihren erkenntnistheoretischen Fokus nicht auf individuelle Lernwege, die aus der Vorschauperspektive (vgl. Kap. 2.3.1) zu einem mathematischen Begriff führen, sondern auf Erkenntnisse im Sinne von Identifizierungen mit der Frage, wie funktionale Zusammenhänge in Situationen mithilfe der mathematischen Begriffe der linearen, proportionalen und antiproportionalen Funktionen und damit inbegriffener Eigenschaften mathematisiert werden. Dabei sollen aus dem Angebot verschiedener Situationen (in Form von Bildern und Texten) kennzeichnende Aspekte bzw. Eigenschaften dieser mathematischen Begriffe wiedererkannt und zur *begründeten* Charakterisierung der Aufgabe benutzt werden. Es geht um die individuelle Rückschau (vgl. Kap. 2.3.1) auf diese mathematischen Begriffe (als Übertragung individueller Begriffe auf neue Situationen) und ihre Unterscheidung in der Bearbeitung von Situationen und über verschiedene Situationen hinweg.

Für ein besseres Verstehen von individuellen Vorgehensweisen und zur Vorbereitung des methodischen Settings zur Erfassung individueller Identifizierungen werden im Folgenden empirische Einsichten sowohl zur formalen, als auch zur situativen und auch der Vermittlung zwischen den beiden Fokussierungsebenen gegeben und gleichsam strukturiert.

Formale Fokussierungsebene

An dieser Stelle werden Studien beschrieben, die *eher* Aspekte auf formaler Ebene untersucht haben. Eine Strukturierung erfolgt nach den in dieser Arbeit differenzierten formalen Unterklassen additiver und multiplikativer Änderungen und der Rolle von a.

Empirische Einsichten zur Nutzung additiver Änderungen

Verschiedene Studien heben bei Lernenden eine Bevorzugung additiver Strategien bei proportionalen Zusammenhängen hervor. Inhelder & Piaget (1967) entdeckten u.a. ein additives Stadium, bei dem fälschlicherweise der Zusammenhang $f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta x$ anstelle von $f(x+\Delta x)=f(x)+a\cdot\Delta x$ angenommen wird, was bedeutet, dass einer Veränderung Δx auf Seiten der Argumente dieselbe Veränderung Δx auf Seiten der Funktionswerte zugesprochen wird. Damit wird allerdings nur die proportionale Funktion mit dem festen Faktor 1 gefasst. Van Dooren et al. (2009) bezeichnen dies mit der ‚additive (or constant difference) strategy' (vgl. S. 191). Auch Wollmann & Karplus (1974) konnten ebenso mit ihrer Mr. Short - Mr. Tall - Aufgabe zeigen, dass diese Strategie bei proportionalen Verhältnisaufgaben angewandt wird. Mr. Shorts Größe misst vier Knöpfe oder sechs Büroklammern. Wenn Mr. Tall sechs Knöpfe groß ist, so ist die Antwort nach seiner Größe in Büroklammern häufig acht. Bei diesen sogenannte ‚Missing-Value-Aufgaben' (drei Werte sind vorgegeben und ein vierter wird gesucht, vgl. Kurth 1989, S. 21) wird anstelle der Nutzung des Vervielfachungsfaktors mit einer konstanten Differenz (hier 2) zwischen den Werten hantiert. Auch Kurth (1992) konnte diese additive Strategie u.a. beim Lösen proportionaler Textaufgaben feststellen. Er spricht von der Addition bzgl. der ‚I-Operation', was einer additiven Kovariation entspricht. Hart (1984) spricht gleichbedeutend von der ‚incorrect addition strategy'. Sie konnte in einer zweiten Runde Interviews mit 18 der in der ersten Runde gefilterten ‚adders' (13-15 Jahre), die diese Strategie im ersten Durchgang angewendet hatten, durch Erzeugung kognitiver Konflikte feststellen, dass die fehlerhafte, additive Strategie dann für gewöhnlich durch eine mathematisch korrekte ‚building-up'-Methode ersetzt wird. Dieser ‚building-up approach' impliziert eine wiederholte Addition (vgl. Van Dooren et al. 2009, S. 191). Dabei wird bspw. das Verhältnis 5:2 aus der ersten und zweiten unabhängigen Größe umgesetzt mit ‚nimm es ein Mal, noch ein Mal und addiere die Hälfte', um der zugehörigen ersten abhängigen Größe die zweite abhängige Größe zuzuordnen. Diese Strategie ersetzt eine multiplikative Vervielfachung erfolgreich durch eine additive (zum Teil multiplikative) Strategie. Eine Vervielfachung mithilfe von Brüchen (außerhalb von $\frac{1}{2}$) wurde damit komplett umgangen.

Wenige Studien deuten darauf hin, dass dieser gravierende Unterschied der additiven Änderungen antiproportionaler im Vergleich zu linearen Funktionen

SchülerInnen häufig nicht bewusst ist bzw. nicht derart verschieden betrachtet wird. Suarez (1977) sah bei seinen Versuchen mit Züricher SchülerInnen von 5. bis 7. Klassen die Anwendung des Linearitätsprinzips bei umgekehrt proportionalen Aufgabenstellungen (Kategorie: ‚Lineare Methoden'). Er spricht davon, dass jeder Differenz eine ‚reziproke Differenz' zugesprochen wird (vgl. S. 88). Beim Lösen proportionaler und antiproportionaler Textaufgaben konnte auch Kurth (1992) in seiner quantitativen Studie mit ca. 1000 SchülerInnen der Stufen 6 - 9 das Übertragen der Linearitätseigenschaft (*allgemeine additive Änderung*) und Mittelwerteigenschaft auf antiproportionale Zusammenhänge in reziproker Form beobachten. Bei einer ebenfalls quantitativen Untersuchung mit 65 Lehramtsstudierenden des ersten Semesters zur Verbindung je zweier (kontextfreier) Darstellungen von linearen, proportionalen und antiproportionalen Zusammenhängen (Sie benutzen den Begriff ‚linear' für Zusammenhänge der Form $f(x) = ax$ mit $a \neq 0$ und den Begriff ‚affin' für lineare Funktionen mit Startwert ungleich Null; die Begriffe linear und proportional werden im Weiteren jedoch so benutzt, wie sie im Rahmen dieser Arbeit definiert werden.) (De Bock et al. 2015) fielen diejenigen Verknüpfungen zu positiv proportionalen und positiv linearen, also die steigenden Zusammenhänge, besser aus, als diejenigen zu negativ linearen und antiproportionalen Zusammenhängen (fallende Zusammenhänge). Am schlechtesten gelangen dabei die innermathematischen Darstellungswechsel, bei denen die Tabelle nicht involviert war (also zwischen Term - Graph und Graph - Term). Die Autoren vermuten, dass die konkreten Funktionswerte in der Tabelle die Arbeit mit den Darstellungen erleichtern. Beim Term und Graphen sind diese nicht unmittelbar zugänglich.

Empirische Einsichten zur Nutzung multiplikativer Änderungen

Die *Vervielfachungseigenschaft* als Vorgehensweise zur Bestimmung weiterer Werte (‚scalar approach', vgl.Van Dooren et al. 2009, S. 190) lässt sich nach der Bedeutung des Vervielfachungsfaktors r empirisch weiter ausdifferenzieren. Schülerinnen und Schüler, die diese Eigenschaft ausschließlich mit einem positiven, ganzzahligen Faktor r benutzen, wenden eine ‚factor-of-change strategy' (vgl. Cramer & Post 1993, S. 406) an. Kurth (1992) konnte in seinen schriftlichen Tests mit je fünf proportionalen und antiproportionalen Textaufgaben mit ca. 1000 ProbandInnen der Stufen 6 - 9 (hauptsächlich Haupt- und Realschüler) in seinen Vortest-Ergebnissen feststellen, dass flexibel mit ganzzahligen Verhältnissen umgegangen wird, viele aber bei Bruchzahlen scheitern und alternativ additive Verfahren anwenden (vgl. S. 328f). Cramer & Post (1993) haben im Rahmen des Rational Number Projects bei 421 Siebtklässlern die prozentual häufigste Anwendung der ‚unit-rate strategy' bei situativen Missing-Value-Aufgaben herausgestellt, bei denen die Werte aus ganzzahligen Vielfachen hervorgehen (vgl. Cramer & Post 1993, S. 406f). Dabei findet zunächst ein ‚Herunterrechnen' (vgl. Richter 2014, S. 53) zur 1 der unabhängigen Größe statt, um von dort wieder ein ‚Direktes Hochrechnen' (vgl. Richter 2014, S. 53) zum gesuchten Wert vorzunehmen. Dieses Verfahren entspricht dem klassischen Dreisatz. Bei einem Problem mit nicht-ganzzahligen Vielfachen hat sich die Zahl des Anwendens der unit-rate strategy bei diesen Siebtklässlern fast halbiert. Kirsch (2002) fordert für den Zusammenhang von Proportionalität und Schlussrechnung (Dreisatz) bei der Lösung von Aufgaben u.a. eine stärkere Beachtung der *Vervielfachungseigenschaft* für *rationale* Skalare und kritisiert dabei eine vermehrte Einschränkung dieser Eigenschaft auf natürliche Skalare und Stammbrüche (vgl. S. 9). Aufgaben, in denen die Wertepaare nicht aus und Stammbrüche (vgl. S. 9). Aufgaben, in denen die Wertepaare nicht aus ganzzahligen Verhältnissen hervorgehen, führten schließlich zwangsläufig zu Problemen.Suarez (1977) fand in seiner Antwortkategorie ‚Erhaltung einfacher Verhältnisbeziehungen', dass SchülerInnen bei antiproportionalen Aufgaben zwar bei dem Doppelten, Dreifachen usw. die Hälfte, Drittel usw. umsetzen konnten, jedoch bei Werten, die nicht durch eine ganzzahlige Multiplikation erreicht werden können, scheiterten. Ein vergleichbares Phänomen also, wie bei empirischen Untersuchungen zur *Vervielfachungseigenschaft* proportionaler Zusammenhänge. Kurth (1992) hat im Rahmen einer Unterrichtsbeobachtung in sechs Realschulklassen festgestellt, dass proportionale und antiproportionale Zusammenhänge häufig nur über die *(reziproke) Vervielfachungseigenschaft* mithilfe starrer Schemata (Dreisatz), wenig Begründung der Strategie und wenig Inhaltsbezug erlernt werden (vgl. S. 329ff).

Empirische Einsichten zur Nutzung der Rollen von a

Kurth (1992) hat in seiner Studie zur Klassifizierung von Vorgehensweisen bei proportionalen und antiproportionalen Textaufgaben eine fehlerhafte Strategie bei proportionalen Zusammenhängen ausgemacht, bei der eine intuitive Übertragung der *Quotientengleichheit* auf die Konstanz der Differenz zwischen den Wertepaaren erfolgt. Dies liefert auch hier einen Hinweis auf die intuitive Übertragung multiplikativer auf additive Strategien im Rahmen der Zuordnung in Ergänzung zu fehlerhaften Strategien bzgl. der Kovariation. Er hat ebenfalls eine fehlerhafte Strategie im Rahmen der zuordnenden Operation (‚Z-Operation') entdeckt, bei der der feste Faktor und sein Inverses verwechselt wurden. Betrachtet man die Multiplikation mit einem festen Faktor in der Tabelle nicht von links nach rechts, sondern umgekehrt, so wird das Argument bei proportionalen Funktionen mit dem Inversen des festen Faktors ($f(x) \cdot \frac{1}{a} = x$) multipliziert.

Insgesamt zeigt sich, dass verschiedene (zumeist quantitative) Studien auf der hier definierten formalen Fokussierungsebene auf konventional unzulängliche (Rechen-)Strategien in den Darstellungsformen hinweisen und dass formale

‚Verwechlungen' zwischen den Begriffen Linearität, Proportionalität und Antiproportionalität auf individueller Ebene stattfinden. Für die empirische Untersuchung stellt sich die Frage, welche *Begründungen* aus *individueller* Sicht für derartige Übertragungen angeführt werden und inwiefern die genutzten Darstellungen Hürden oder Hilfen für die Unterscheidung der Typen bereitstellen.

Situative Fokussierungsebene

An dieser Stelle werden Studien zusammengefasst, die *eher* kontextuelle und situative Merkmale fokussieren.

Empirische Einsichten zur Nutzung von Kontexten und Situationen

Bezogen auf den Lerngegenstand der linearen, proportionalen und antiproportionalen Funktionen werden häufig Hürden hinsichtlich sogenannter Übergeneralisierungen entdeckt. Dabei werden sowohl Übergeneralisierungen der Linearität bzw. Proportionalität auf nicht-lineare Zusammenhänge als auch im Speziellen Übergeneralisierungen von linearen Eigenschaften bei antiproportionalen Zusammenhängen im Rahmen von Abnahmeprozessen benannt. De Bock et al. (2002) haben in ihren Interviews mit je 20 Siebt- und Zehntklässlern zu einer nicht-linearen Textaufgabe, bei der eine zweidimensionale, gemalte Figur im Sinne einer zentrischen Streckung verdreifacht werden und die Menge der dann benötigten Farbe bestimmt werden sollte, erhoben, dass 38 der 40 Lernenden in die ‚proportionality trap' tappten und einen linearen Zusammenhang annahmen. Durch schrittweise Erweiterung der Aufgabe zur Ablösung von der Annahme der Linearität haben sie aus den Begründungen der ProbandInnen unterschiedliche Kategorien (drei der vier werden im Folgenden beschrieben) gebildet. Einige der Lernenden hantieren nach ihrer Ansicht mit einer ‚intuitiveness of linear relationship', wobei die Annahme eines konstanten Wachstums unbewusst und automatisch ohne weitere Rechtfertigung desselben erfolgt. Andere nehmen Linearität bewusst an (‚illusion of linearity'), bei denen eine Zunahme immer mit proportionaler Zunahme identifiziert wird. Wieder andere haben ‚inadequate habits and beliefs'. Bei diesen wird die gestellte Textaufgabe nur auf Grundlage der angegebenen Zahlenwerte und Schlüsselbegriffe gelöst und dabei der reale Kontext missachtet. Das mathematische Modell entsteht nur auf der Basis eines ‚reflex-like recognizing' (S. 329, vgl. auch Verschaffel 2000).

Van Dooren et al. (2009) haben eine Übersicht über Studien speziell zu proportionalen Übergeneralisierungen in nicht-linearen Situationen bei SchülerInnen in unterschiedlichen, mathematischen Inhaltsbereichen zusammengefasst[3]. Sie fassen die Gemeinsamkeiten dieser Studien zu drei übergeordneten Begründungssträngen für derartige Übergeneralisierungen zusammen: ‚The Effects of (Mis)Education', ‚Linearity, Intuitiveness, and Everyday Life' und ‚Content-Specific Effects'. Begründungen für den ersten Strang der Unterrichtseffekte sind zum einen, dass proportionalen Zusammenhängen im Rahmen des mathematischen Curriculums große Aufmerksamkeit geschenkt wird (bspw. in der sehr häufigen Verwendung von Missing-Value-Formaten oder der Darstellung eines geradlinigen Graphen), so dass sich die SchülerInnen eine gewisse ‚routine expertise' für proportionale Zusammenhänge aneignen. Zum anderen wird beim Lösen von sogenannten ‚wor(l)d problems' (als (lebensweltliche) Textaufgaben) eine ‚puzzle-like activity' beschrieben. Dabei wird einem normgeleiteten Unterricht das reduzierte Agieren der SchülerInnen auf oberflächlichen Stichworten der Textaufgabe ohne Bezug zum Kontext zugeschrieben. Der zweite Strang beinhaltet Begründungen, die auf intuitive Annahmen beruhen, die schon frühe Wurzeln haben. Dabei werden einfache proportionale Zusammenhänge mit ganzzahligen Verhältnissen schon implizit in außerschulischen Bereichen (bspw. ‚Ein Spielzeugauto hat 4 Räder, dann haben zwei Spielzeugautos 8 Räder') und im schulischen Elementarbereich erworben und angewendet (bspw. im Bereich der Multiplikation), lange bevor eine formale Thematisierung im Unterricht stattfindet. Diese nehmen eine intuitiv-resistente Position im Denken ein. Bei den inhaltsspezifischen Effekten wird die Ähnlichkeit von Merkmalen eines abweichenden Lerngegenstands (bspw. zentrische Streckung in der Geometrie) in den Problemsituationen zu proportionalen Merkmalen genannt. Ein Beispiel ist die oben beschriebene geometrische Aufgabe, bei der der Verdreifachung einer zweidimensionalen Figur fälschlicherweise die dreifache Fläche zugeordnet wird (für ausführliche Beschreibungen, auch in anderen Inhaltsbereichen, bspw. Stochastik, siehe Van Dooren et al. 2009).

Spezifische Übergeneralisierungstendenzen von Linearität auf antiproportionale Zusammenhänge haben Suarez (1977) und Kurth (1992) je im Rahmen der Bearbeitung von Textaufgaben entdeckt, bei denen lineare Eigenschaften (*allgemeine additive Änderung* und *Mittelwerteigenschaft*) bei antiproportionalen Situationen angewendet wurden. Hierbei werden lineare Abnahmeprozesse auf antiproportionale Zusammenhänge übertragen.

Neben der Identifizierung linearer Zusammenhänge in nicht-linearen Kontexten, können andere kontextuelle Bedingungen auf den funktionalen Zusammenhang an sich ebenfalls einen Einfluss auf individuelle Sichtweisen haben. Im Rahmen eines Projekts für einen unterrichtlichen Zugang zum Konzept der funktionalen Abhängigkeit in einer neunten Klasse und in einer jahrgangsübergreifenden Lerngruppe von Siebt- bis Neuntklässlern fand Lengnink (2005) eine individuelle Diskrepanz durch sogenannte ‚Sinnprobleme'. Auf der einen Seite deuten Aussagen von SchülerInnen auf individuelle, lebensweltliche Beschreibungen, die Abhängigkeiten als ‚Ursache-Wirkungs-Beziehungen' begreifen. Auf der anderen Seite fasst aber aus mathematischer Sicht die „[f]unktionale Abhängigkeit […] nur die Beziehung als solche, nicht die Ursachen" (S. 17). Beispielsweise wurde bei einer Abhängigkeit zwischen Kind und seiner Körpergröße argumentiert, dass diese nicht nur vom Kind abhängt, sondern auch von der Größe der Eltern oder vom Ernährungsverhalten des Kindes. Im Rahmen dieser Arbeit sollen deshalb individuelle, kontextuelle Argumentationen berücksichtigt werden, die möglicherweise einen Einfluss auf die Identifizierung der Situationen nehmen.

Die Art der gestellten Aufgabe (Situation) scheint ebenfalls einen Einfluss auf den Identifizierungsprozess zu haben. Van Dooren et. al. (2009) sprechen bei den spezifischen proportionalen Missing-Value-Sachsituationen von einem sogenannten ‚number effect'. In ihrer Studie mit 508 SchülerInnen der vierten bis sechsten Klasse haben sie im Rahmen von Tests mit acht Missing-Value-Textaufgaben systematisch ganzzahlige und nicht-ganzzahlige Verhältnisse bzw. Quotienten zwischen den Größen eines Größenbereichs (‚internal ratios') und den Größen verschiedener Größenbereiche (‚external ratios') variiert. Dabei wurden zwei proportionale und sechs nicht-proportionale Sachsituationen formuliert. Je zwei der nicht-proportionalen Aufgaben implizieren eine additive, eine konstante und eine affine (linear mit Startwert ungleich Null) Struktur. Bei den proportionalen Sachsituationen wurden diejenigen am besten gelöst, wo die inneren Verhältnisse (Kovariation zwischen den Größen) ganzzahlig waren. Sie wurden schlechter bei nur ganzzahligen, äußeren Verhältnissen (Zuordnung zwischen den Größen) und am schlechtesten gelöst, wenn beide Verhältnisse nicht ganzzahlig waren. Bei den nicht-proportionalen Sachsituationen hat sich die proportionale Übergeneralisierung bei Aufgaben mit nicht-ganzzahligen Verhältnissen reduziert. Dieser ‚number effect', als vermehrter Einfluss proportionaler Übergeneralisierungen bei ganzzahligen Verhältnissen, nahm von der vierten zur sechsten Klasse ab. Sie bilanzieren, dass die Vorgabe der Zahlenwerte in Missing-Value-Formaten eine Rolle bei der Übergeneralisierung proportionaler Zusammenhänge spielen. Die jüngeren ProbandInnen orientierten sich dabei mehr an den Zahlen, die, bei geeigneten Werten, die Übergeneralisierung der Proportionalität begünstigten. Die älteren ProbandInnen wurden weniger durch die Zahlen an sich, sondern vielmehr durch das Format einer Missing-Value-Aufgabe hinsichtlich einer inkorrekten Übergeneralisierung beeinflusst (vgl. ‚routine expertise' bei Van Dooren et al. 2009). Neben dem Einfluss der Zahlenwerte zur Übergeneralisierung, können diese ebenfalls die Wahl der Strategie begünstigen. Vorkommende Zahlenmuster haben in Kurths Studie (1992) bei der Bearbeitung proportionaler und antiproportionaler Textaufgaben die Wahl der Lösungsstrategie beeinflusst. Bei einer aufgehenden Division zwischen den Werten verschiedener Größenbereiche wurde eine zuordnende Strategie, bei einer aufgehenden Division zwischen den Werten innerhalb eines Bereichs wurde bei vielen der Lernenden eine Fokussierung der Kovariation bevorzugt.

Insgesamt zeigt sich, dass die vorliegenden (zumeist quantitativen) Studien auf der hier fokussierten, situativen Ebene Übergeneralisierungen, Effekte auf Unterrichts- und Aufgabenebene, intuitive oder kontextuelle Einflüsse beschreiben, die jedoch keine expliziten Erklärungen auf *individueller* Ebene liefern.

Identifizierungen zwischen den Fokussierungsebenen

Die quantitativ groß angelegte Studie PISA verweist auf Schwierigkeiten hinsichtlich einer flexiblen Nutzung der kennzeichnenden Eigenschaften in proportionalen Anwendungssituationen. Jordan et al. (2004) haben auf Grundlage der nationalen Daten von PISA 2000 ($n = 31740$) herausgestellt, dass etwa ein Viertel aller SchülerInnen am Ende der Klasse 9 keine ausreichendenden elementaren Grundkenntnisse u.a. im Inhaltsbereich Proportionalität „für einen sicheren Umgang mit einfachen linear strukturierten Kontexten" (S. 168) ausgebildet haben. Dies hat zur Folge, dass entsprechende Anwendungsaufgaben nicht richtig gelöst werden können.

Kleine & Jordan (2007) haben den Zusammenhang zwischen dem Erfolg von Lernenden der Jahrgangsstufen 8-10 in einem Leistungstest (eingeteilt in die Leistungsklassen K_1 bis K_8) zur Proportionalität und Prozentrechnung ($n = 795$; als Teilstichprobe der 2002 durchgeführten Pilotstudie des DFG-Projekts PALMA) und den verwendeten Lösungsstrategien im Rahmen verschriftlichter Lösungswege bei je 12 Aufgaben ermittelt. Die Lösungsstrategien wurden eingeteilt in ‚Proportionalitätsschluss' (basiert auf einer dynamischen Sichtweise und einer eher inhaltlichen Ausrichtung bzgl. des Sachkontextes), ‚Operator' (basiert auf einer zuordnenden Sichtweise und einer eher funktionalen Ausrichtung) und ‚Sonstiges' (individuelle Rechenwege ohne die Möglichkeit einer konkreten Typisierung). Nahezu das gesamte untere Leistungsviertel der SchülerInnen fällt in die Kategorie ‚Sonstiges', etwa die Hälfte sind bei ihren Bearbeitungen noch stark am Sachkontext verhaftet und die Leistungsklassen K_6 und K_7 wenden beide, inhaltliche und funktionale Strategien gleich häufig an, wobei K_8 die Operatoren bevorzugt. Sie bilanzieren, dass ein erfolgreicher Lösungsweg stark von dem Ausmaß der Verwendung von zuordnenden Eigenschaften (wie *a als fester Faktor*) abhängt und zweifeln an, dass der starre und häufig einseitig geübte Proportionalitätsschluss (Dreisatz als kovariative Eigenschaft) für schwache Lernende in Anwendungssituationen eine Stütze sein kann.

Empirische Befunde zum Wechsel zwischen der Situation und den anderen Darstellungsformen (symbolisch, numerisch, graphisch) geben Hinweise darauf, dass schon die Wahl der Darstellungsform Einfluss auf den weiteren Identifizierungsprozess haben kann. De Bock et al. (2015) haben einen schriftlichen multiple-choice-Test mit 12 Situationen (in verbaler Darstellungsform) bei 65 Erstsemester-Lehramtsstudierenden eingesetzt. Die Situationen sollten mit einer anderen Darstellungsform (symbolisch, numerisch oder graphisch in je einem Drittel der Aufgaben) verbunden werden. Zu einer Situation wurden bspw. vier Tabellen (zu einer anderen vier Terme bzw. vier Graphen) angeboten, darunter eine proportional, eine antiproportional, eine positiv linear (mit $b > 0$) und eine negativ linear (mit $b > 0$). Insgesamt wurden Situationen, denen ein proportionaler Zusammenhang zugrunde lag, am häufigsten den richtigen Darstellungen zugeordnet. Bei antiproportionalen und positiv linearen Situationen bestand ebenfalls die Tendenz, proportionale Darstellungen zuzuordnen. Sie sehen den Grund in der Art der Darstellungen, die diese Übergeneralisierung der Proportionalität unterschiedlich begünstigen. Bei antiproportionalen Situationen war der häufigste Fehler die Identifikation mit einer proportionalen Tabelle. Bei linearen Situationen mit positiver Steigung und positivem Startwert war der häufigste Fehler die Übersetzung mit einem proportionalen Term oder einer Tabelle. Sie argumentieren, dass man im Graphen den Startwert unmittelbar sehen kann, in den anderen Darstellungen dieser eher ‚übersehen' werden kann. In negativ linearen Situationen war der häufigste Fehler die Charakterisierung mit einem antiproportionalen Zusammenhang, insbesondere im Term. Sie vermuten, dass einerseits die in der Situation beschriebene Abnahme durch die unabhängige Variable im Nenner prägnanter erscheint als das negative Vorzeichen beim festen Faktor (im Zähler) und andererseits, dass die SchülerInnen dazu tendierenden die spezielle, antiproportionale *reziproke Vervielfachungseigenschaft* des Verdoppelns der Argumente und Halbierens der Funktionswerte (‚doubling/ halving'-Prototyp) auf negativ-lineare Abnahmeprozesse über zu generalisieren (vgl. S. 56).

Acevedo Nistal et al. (2010) haben die Bearbeitung linearer Probleme durch das Verwenden einer ‚choice/no-choice'-Methode bei secondary school-SchülerInnen untersucht. Dabei wurden diese sowohl mit Situationen konfrontiert, bei denen sie entscheiden konnten mit welcher Darstellung (Tabelle, Graph, Term) sie die Aufgabe lösen (‚C-condition'), als auch mit solchen, in denen die Bearbeitung durch eine der drei Darstellungen vorgegeben war (‚NC-condition'). In der C-condition wurde die Arbeit mit der symbolischen Darstellungsform durchweg bevorzugt. Dieser Tatsache steht das interessante Ergebnis gegenüber, dass bei den no-choice-Aufgaben diejenigen mit den Termen von allen am schlechtesten gelöst wurden.

In einer Folgestudie (Acevedo Nistal et al. 2013) wurden 36 SchülerInnen im Alter von 14 - 16 Jahren hinsichtlich ihrer Begründung für die Wahl einer Darstellungsform zur Lösung dreier, linearer Textaufgaben (eine mit Fokus auf die Steigung, eine auf den y-Achsenabschnitt und eine zum Schnittpunkt zweier Geraden) in Einzelinterviews befragt. Zuvor wurden vier Kategorien gebildet, denen die Begründungen in Form expliziter Aussagen zugeordnet wurden: ‚task-related' (Begründung bezieht sich explizit auf die Textaufgabe), ‚subject-related' (mit explizitem Bezug auf den Lernenden selber), ‚context-related' (hier als ‚learning-environment-context verstanden, vgl. Kap. 2.3.2; Begründungen, die durch soziale Normen beeinflusst sind) und ‚representation-related' (Begründungen mithilfe formaler Charakteristika der Darstellungen). In allen Textaufgaben wurden die Tabelle und der Graph (im Kontrast zur Studie in 2010) gegenüber dem Term bevorzugt. Die kontextbasierten Aussagen weisen darauf hin, dass das Nutzen der symbolischen Darstellungsform als sozial erwünscht im Sinne eines didaktischen Vertrags im Unterricht empfunden wird und dass darin Tabellen und Graphen implizit als untergeordnete Darstellungen vermittelt werden (vgl. S. 113f).

Insgesamt zeigt sich, dass die (zumeist quantitative) Forschungslage hinsichtlich des Zusammenwirkens der in dieser Arbeit formulierten situativen und formalen Fokussierungsebene neben der dargelegten Übertragung linearer Eigenschaften auf antiproportionale Zusammenhänge ebenso auf eine individuelle Verknüpfung umgekehrt antiproportionaler Darstellungen als passende Repräsentanten zu negativ-linearen Situationen hinweist. Dadurch ergibt sich die Frage nach den individuellen Gründen bzgl. der Diskrepanz zwischen negativ linearen und antiproportionalen Situationen und deren Eigenschaften. Spezifische, qualitative Studien, die explizite Begründungen derartiger Verwechslungen aufzeigen, existieren anscheinend bislang nicht.

2.6 Diskussion, spezifiziertes Analyseschema und Festlegung auf Forschungsfragen

An dieser Stelle sollen die fachlichen Fokussierungen auf der formalen (Kap. 2.1) und situativen Fokussierungsebene (Kap. 2.3), deren Bedeutungen (Kap. 2.2/2.4) und die ausgewählten, empirischen Einsichten zu diesen (Kap. 2.5) in einer umfassenden Diskussion zusammenfließen, um sowohl ein fachliches Analyseschema aus konventionalerPerspektive als auch die Forschungsfragen dieser Arbeit in Vorbereitung auf die empirischen Auswertungen zu fixieren.

Auf formaler Ebene (Kap. 2.1) bilden die linearen und antiproportionalen Funktionen zwei unterschiedliche Funktionsklassen. Die proportionalen sind spezielle lineare Funktionen, wodurch sie alle linearen Eigenschaften erben. Durch das Fehlen der additiven Konstanten mit $b = 0$ erlangen proportionale Funktionen jedoch neue Eigenschaften, sowohl im Rahmen der additiven Änderungen (*Additivität* und als Spezialfall dieser die *Summeneigenschaft*), als auch insbesondere im Zuge der multiplikativen Änderung (*Vervielfachungseigenschaft*). Neben der Rolle von a *als Monotoniekenngröße* und *feste Änderung pro Schritt* lässt sich dieses nun *als fester Quotient* und *fester Faktor* zwischen jeder unabhängigen und abhängigen Größe auffassen. Antiproportionale Eigenschaften weisen gewisse Ähnlichkeiten zu einigen der proportionalen auf ((*reziproke*) *Vervielfachungseigenschaft*, *Produkt- und Quotientengleichheit*, (*reziproke*) *Verhältnisgleichheit*). Mit Blick auf die additiven Eigenschaften existieren jedoch deutliche Unterschiede. Dem (additiven) Linearitätsprinzip linearer und damit auch proportionaler Funktionen steht bei antiproportionalen

Funktionen eine multiplikative Änderung der Funktionswerte mit einem von der konkreten Stelle x beeinflussten Faktor bei der additiven Änderung der Argumente gegenüber. Das a gibt bei allen drei Typen unter Berücksichtigung der Definiertheit Auskunft über die Monotonie, jedoch liefert dieser Aspekt kein hinreichendes Kriterium zum Schluss auf einen bestimmten Funktionstyp.

Aus der Perspektive lokaler Bedeutungen der formalen Fokussierungsebene (Kap. 2.2) lassen sich mittels zuordnender und kovariativer Fokussierungen und der Verwendung unterschiedlicher Darstellungsformen die charakteristischen Eigenschaften unterschiedlich herausarbeiten und akzentuieren. Dabei wurden die kovariativen Sichtweisen auf die symbolische, numerische und graphische Darstellungsform durch die additiven und multiplikativen Änderungen und der Rolle von a (*als Monotoniekenngröße* und *feste Änderung pro Schritt*) nochmal in Form formaler Unterklassen kategorisiert. Die zuordnenden Aspekte in den genannten Darstellungsformen bringen bei proportionalen Funktionen die Rolle von a *als fester Quotient* und *fester Faktor* hervor, wobei das a bei antiproportionalen Funktionen *als festes Produkt* oder *fester Dividend* fungiert.

Auf der situativen Fokussierungsebene (Kap. 2.3) wurden funktionale Aspekte von Situationen als Fokussierungen auf Aufgabenebene beschrieben (vgl. Tab. 5). Durch eine Listung typischer Kontexte der verschiedenen funktionalen Zusammenhänge konnten im Gegenzug zu den formalen Klassen der formalen Ebene Situationsklassen abgegrenzt und begrifflich kategorisiert werden, die verschiedene Situationen hinsichtlich ihrer semantischen Strukturen miteinander verbinden.

Im Rahmen lokaler Bedeutungen der situativen Ebene (Kap. 2.4) mit Blick auf die formale Ebene stellen Kernideen ein Konzept zur Verfügung, mit dem spezifische Vorher- bzw. Aussagen zu linearen, proportionalen und antiproportionalen Eigenschaften formuliert werden können (vgl. Tab. 6 und 7), die ein mögliches Bindeglied sowohl zwischen der individuellen und konventionalen Perspektive als auch der situativen und formalen Ebene darstellen können.

Auf curricularer Ebene fordern Bildungsstandards den Erwerb der Fähigkeit lineare, proportionale und antiproportionale Funktionen im Rahmen der Darstellungsvielfalt anzuwenden und diese anhand charakteristischer Merkmale in Situationen voneinander zu differenzieren. Die stichprobenartige Auswertung der Lehr-/Lernmittel zeigt im Rahmen der proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen in Klasse 7 eine konsequente Gegenüberstellung von zu bearbeitenden Sachsituationen. Auffällig ist dabei die starke Betonung der kovariativen Strategie des Dreisatzes. In Klasse 8 bzw. 9 wird eine Unterscheidung linearer, proportionaler und antiproportionaler Funktionen in Sachsituationen bei einigen durch den Verzicht auf einen Teil dieser Typen unmöglich. In Klasse 7 wird die symbolische Darstellungsform nur selten verwendet, wohingegen in Klasse 8 bzw. 9 die Funktionstypen vermehrt über diese definiert werden. Dies steht im Kontrast zu den selten zur Verfügung gestellten zuordnenden Eigenschaften *a als fester Faktor* bei proportionalen und *a als fester Dividend* bei antiproportionalen Funktionen, die den Funktionsterm und damit die symbolische Darstellungsform unmittelbar stützen.

Aus empirischer Sicht besteht ein Mangel an *qualitativen* Studien zur Unterscheidung zwischen den drei elementaren Funktionstypen (linear, proportional *und* antiproportional). Damit geht auch eine fehlende Konkretisierung von Aspekten zur Überwindung spezifischer Hürden zur Unterscheidung zwischen diesen Typen in Situationen einher. Einige Studien verweisen auf Übergeneralisierungstendenzen der Proportionalität auf nicht-lineare Zusammenhänge. Als mögliche Gründe werden verschiedene Einflussfaktoren beschrieben (Routine-Effekte durch den Unterricht, intuitive Annahme von Linearität, bewusste Annahme von Linearität und kontextfreie Aufgabenbearbeitung). Auch eine spezifische, lineare Übergeneralisierung in antiproportionalen Zusammenhängen ist erforscht, jedoch existieren anscheinend bisher keine expliziten *Begründungen* aus *individueller* Perspektive für die ‚Verwechslung' negativ linearer und antiproportionaler Situationen.

Empirische Einsichten deuten darüber hinaus auf die Wichtigkeit geeigneter Darstellungen und spezifischer Eigenschaften der drei Funktionstypen zur gelingenden Identifizierung von Situationen. Die Charakterisierung der Situationen mit den Darstellungen Tabelle und Graph und das Nutzen kontextuell verstandener und speziell zuordnender Eigenschaften unterstützen den Identifizierungsprozess offenbar positiv. Die Analyse der Lehr-/Lernmittel hat jedoch in Kontrast dazu gezeigt, dass die kovariative Methode des Dreisatzes bei proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen (in Klasse 7) häufig hervorgehoben wird und die linearen, proportionalen und antiproportionalen Funktionen (in Klasse 8 bzw. 9) häufig über die symbolische Darstellungsform definiert werden und dabei jedoch selten die zuordnenden Eigenschaften *a als fester Faktor* und *a als fester Dividend* in den Darstellungen Tabelle und Graph expliziert werden.

Dieses Dissertationsprojekt soll die empirische Lücke *qualitativer* Studien zur Identifizierung und Unterscheidung von funktionalen Zusammenhängen in Situationen mit den mathematischen Begriffen der linearen, proportionalen *und* antiproportionalen Funktionen ein Stück weit schließen.

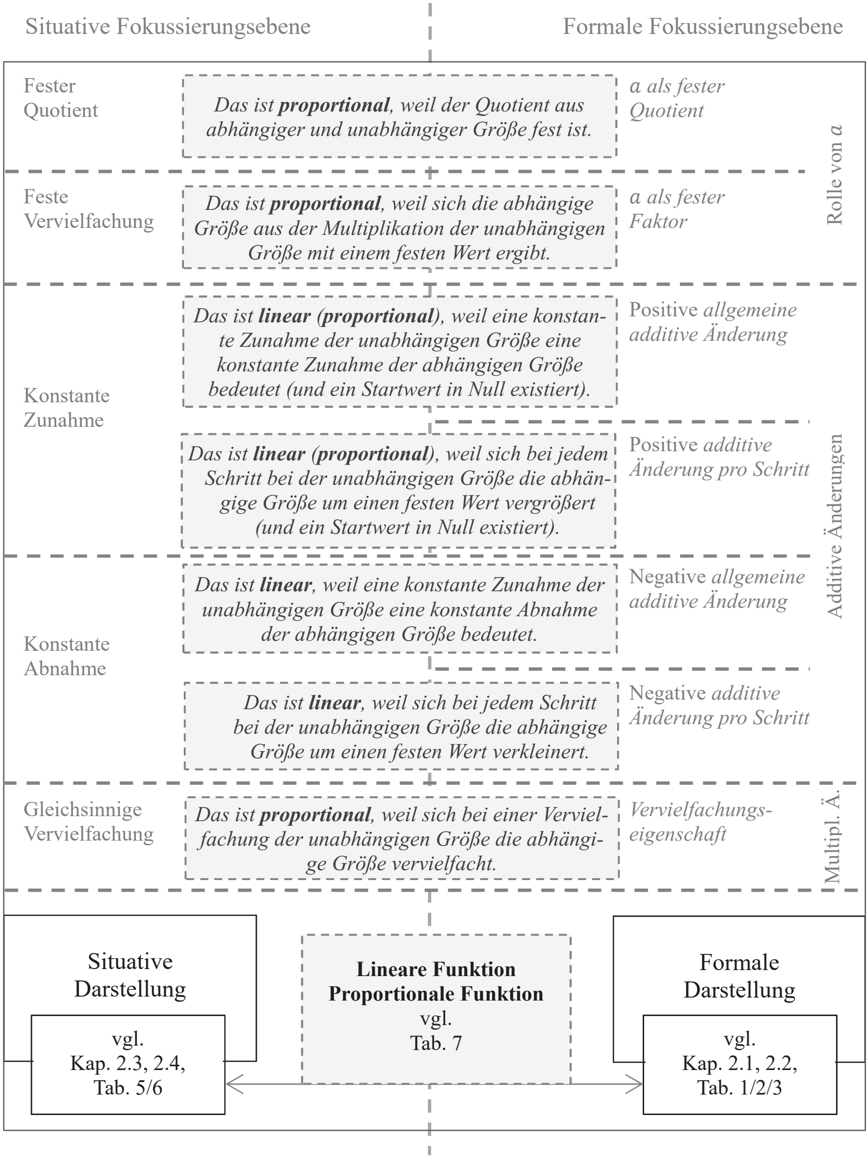


Abbildung 2.21: Fachliches Analyseschema aus konventionaler Perspektive hinsichtlich linearer und proportionaler Zusammenhänge in Situationen und ihrer mathematischen Begriffe

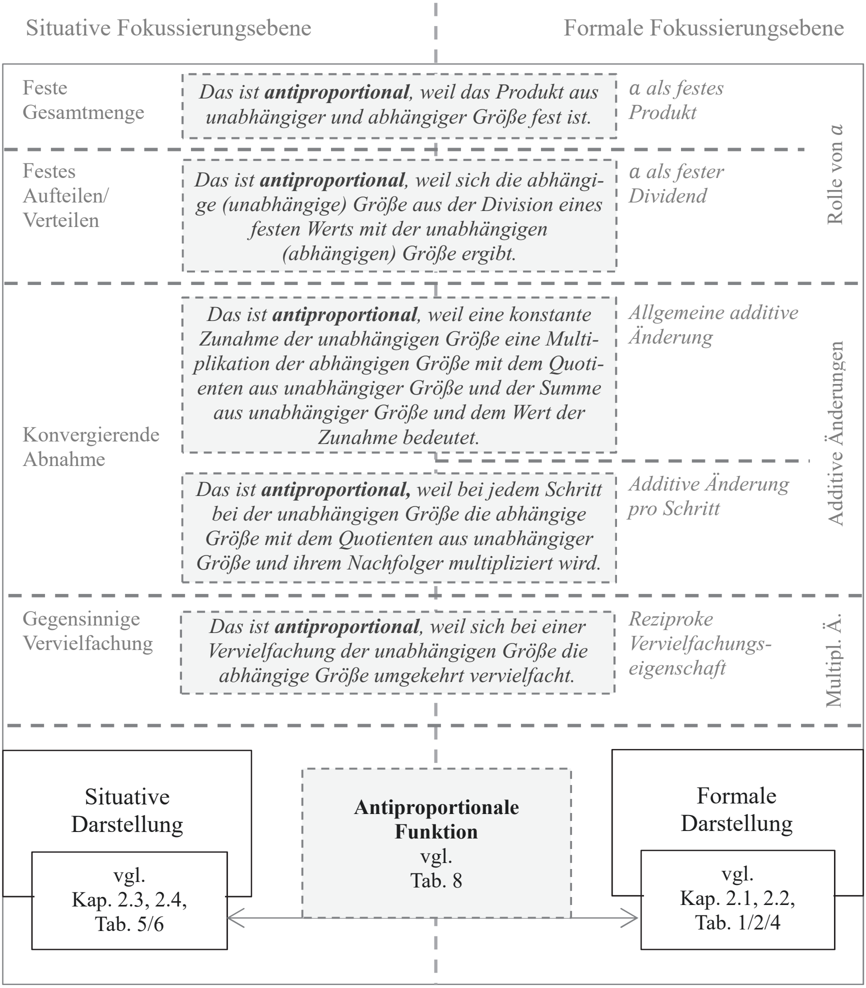


Abbildung 2.22: Fachliches Analyseschema aus konventionaler Perspektive hinsichtlich antiproportionaler Zusammenhänge in Situationen und ihres mathematischen Begriffs

Dazu sollen erste Potentiale und Hürden aus individueller Perspektive von situativen und formalen Merkmalen und deren Zusammenwirken aufgedeckt werden. Insbesondere sollen dabei *individuelle Begründungen* für die empirisch erforschte ‚Verwechslung' linear fallender und antiproportionaler Zusammenhänge hinsichtlich ihrer Begriffe aufgezeigt werden. Diese qualitative Erhebung individueller Perspektiven soll schließlich Hinweise für den Lerngegenstand geben.

Das theoretische Analyseschema als Produkt der theoretischen Festlegungen (vgl. Abb. 1.1) wird um die fachlichen Ausarbeitungen der vorausgegangenen Kapitel hinsichtlich des Zusammenwirkens linearer und proportionaler (Abb. 2.21) bzw. antiproportionaler (Abb. 2.22) Zusammenhänge in Situationen und ihrer mathematischen Begriffe spezifiziert. Dazu werden Kernelemente der Tabellen 3-7 für eine Gesamtübersicht integriert. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird hinsichtlich der Fokussierungen und (situationsübergreifenden) Urteile auf die entsprechenden Kapitel und die dort ausgearbeiteten Tabellen verwiesen. Dieses fachliche Analyseschema aus konventionaler Perspektive dient als Folie für den Vergleich mit den empirisch erhobenen, individuellen Bearbeitungen im Auswertungsteil dieser Arbeit.

Auf situativer Fokussierungsebene stehen die voneinander differenzierten Situationsklassen den formalen Klassen der formalen Fokussierungsebene mit ihren spezifischen Eigenschaften als Fokussierungsaspekte (sortiert nach der *Rolle von* a, den *additiven* und *multiplikativen Änderungen*) gegenüber. Der Begriff der proportionalen Funktion bildet aus formaler Sicht eine Unterklasse der linearen Funktion. Durch seine spezifische Einschränkung (mit $b = 0$) sind ihm jedoch weitere Situationsklassen und formale Fokussierungsaspekte angehörig. Die konstante Abnahme hat in dieser Arbeit nur für die linearen Zusammenhänge Relevanz, da nur der Definitionsbereich $\mathbb{R}_0^+$ betrachtet wird. Verbunden werden beide Ebenen durch die jeweils verbalisierten (situationsübergreifenden) Urteile, die als inferentielle Relationen zu den Begriffen abgebildet werden. Im Rahmen der Bearbeitung konkreter Situationen und deren Verknüpfung zum mathematischen Begriff dienen der Verweis auf die Unterkapitel zu den formalen Fokussierungen unter Rückgriff auf die angegebenen Tabellen der spezifischen Verortung von Festlegungen und deren Fokussierungen. Da antiproportionale Zusammenhänge mit ihrem mathematischen Begriff eine unabhängige Klasse darstellen, wird diese separat abgebildet.

Auf Grundlage dieser fachlichen Analyseschemata sollen folgende Forschungsfragen im Zuge der empirischen Untersuchung der individuellen im Vergleich zur konventionalen Perspektive genauer untersucht werden:

I. Ebene individueller Begründungsmuster:

Welche Merkmale werden im Rahmen individueller Identifizierungen zur *Begründung* funktionaler Zusammenhänge in Situationen und zur Unterscheidung der Begriffe der linearen, proportionalen und antiproportionalen Funktionen genutzt?

a) **Auf der *situativen Fokussierungsebene* bzgl. linearer, proportionaler und antiproportionaler Zusammenhänge: Welche Merkmale von konkreten Situationen und über verschiedene Situationen hinweg stellen Potentiale und Hürden für die individuellen Identifizierungen und Begründungen der verwendeten Begriffe dar?**
b) **Auf der *formalen Fokussierungsebene* bzgl. linearer, proportionaler und antiproportionaler Funktionen: Welche Merkmale in den Darstellungsformen stellen Potentiale und Hürden für die individuellen Identifizierungen und Begründungen der verwendeten Begriffe dar?**
c) **Inwiefern werden Merkmale der *situativen* und *formalen Fokussierungsebene* im Rahmen gelingender und nicht gelingender, individueller Identifizierungen isoliert bzw. aufeinander bezogen verwendet?**

II. Ebene des Lerngegenstands:

Welche Hinweise ergeben sich (insbesondere im Rahmen linearer und antiproportionaler Abnahmeprozesse) für eine Restrukturierung des mathematischen Lerngegenstands linearer, proportionaler und antiproportionaler Funktionen hinsichtlich ihrer Identifizierung und Unterscheidung in Situationen und über verschiedene Situationen hinweg?

http://www.springer.com/978-3-658-18869-6

Zwischen situativen und formalen Darstellungen mathematischer Begriffe
Empirische Studie zu linearen, proportionalen und antiproportionalen Funktionen
Heiderich, S.
2018, XV, 312 S. 57 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-18869-6