

2 Zum Begriff des Dezimalbruchs

Um etwas über die genauen Begründungsstrukturen von Schülerinnen und Schülern beim Umgang mit Dezimalbrüchen zu erfahren, ist die genaue Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand als Grundlage unabdingbar. Daher wird in diesem Kapitel betrachtet, wie der Lerngegenstand aus normativer Perspektive spezifiziert und strukturiert werden kann. Die wesentlichen Aspekte des Dezimalbruchverständnisses werden herausgearbeitet und inferentiell gegliedert, um eine Folie zu entwickeln, vor dessen Hintergrund im empirischen Teil dieser Arbeit in der Analyse die rekonstruierten individuellen Urteilsnetze von Schülerinnen und Schülern beurteilt werden können.

Dazu werden zunächst der aktuelle Forschungsstand zu den Dezimalbrüchen sowie die Problemlage diskutiert, mit dem Ziel, wesentliche Schwierigkeiten aufzuzeigen und die zentralen Aspekte des Dezimalbruchverständnisses herauszufiltern (Kap. 2.1). Es folgt eine Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes der Dezimalbrüche. Dabei werden das dezimale Stellenwertsystem sowie die relevanten Elemente der Bruchrechnung genauer beschrieben und sukzessive in einer Grafik zusammenhängend dargestellt (Kap. 2.2). Auf dieser Grundlage werden in Kapitel 2.3 die für die vorliegende Arbeit bedeutsamen Darstellungen näher erläutert. Abschließend werden in Kapitel 2.4 zunächst einige Erwerbsmodelle zum Stellenwertverständnis hinsichtlich der Nutzbarkeit für das Dezimalbruchverständnis in den Blick genommen, bevor die verschiedenen Zugänge zur Dezimalbruchrechnung vor dem Hintergrund der Problemlage und der Betrachtung des Gegenstandsbereichs der Dezimalbrüche unter Einbezug der relevanten Darstellungen diskutiert werden.

2.1 Zur Problemlage der Dezimalbrüche

Trotz der hohen Alltagsrelevanz und der meist täglichen Konfrontation mit Dezimalbrüchen zeigt sich, dass der Umgang mit Dezimalbrüchen keineswegs so trivial und problemlos ist, wie oftmals angenommen wird (vgl. Padberg 2008b; Resnick et al. 1989; Steinle 2004).

„The recent Third International Mathematics and Science Study showed that internationally [only] about a half of 13 year old students could select the smallest decimal number from a multiple choice list of five decimals.“ (Steinle/Stacey 1998b, S. 548, Einf. L. S.)

Die Schwierigkeiten werden vor allem im Dezimalbruchvergleich, bei der Umformung von Dezimalbrüchen in gemeine Brüche und bei den Rechenoperationen mit Dezimalbrüchen identifiziert, sind aber auch in basaleren Problemen wie ihrer Schreibweise zu finden (vgl. u. a. Bell/Costello/Kuchemann 1983; Carpenter/Corbitt/Kepner/Montgomery Lindquist/Reys 1981; Günther 1987; Heckmann 2006; Klika 1997; Padberg 2009; Steinle 2004; Steinle/Stacey 2004).

Die Hauptursachen dafür liegen meist in einem unzureichenden grundlegenden Stellenwertverständnis sowie fehlenden bzw. nicht tragfähig erweiterten inhaltlichen (Bruch-)Vorstellungen. Worin im Detail die Gründe für die Schwierigkeiten liegen ist allerdings bisher nicht untersucht worden und bildet den Forschungsfokus der vorliegenden Studie.

Konzepte und Denkgewohnheiten, die aus anderen Zahlbereichen bekannt sind, können nicht immer eins zu eins in den Bereich der positiv rationalen Zahlen in Dezimalschreibweise übernommen werden (vgl. Klika 1997; Schmassmann 2009). Trotz dieser bedeutsamen Problemlage befassen sich nur wenige Untersuchungen mit dem Dezimalbruchverständnis, insbesondere mit der Erweiterung des Stellenwertverständnisses aus dem Bereich der natürlichen Zahlen, und dessen Entwicklung bei Schülerinnen und Schülern. Das liegt vermutlich daran, dass der verständige Zugang zum Dezimalbruchverständnis, im Gegensatz zu den Rechenoperationen, als nicht trivial zu erachten ist (vgl. Steinle 2004).

In den letzten Jahren wurden überwiegend verschiedene Fehlertypen und typische Denkweisen beim Rechnen mit Dezimalbrüchen und beim Dezimalbruchvergleich identifiziert (vgl. u. a. Brekke 1996; Günther 1987; Heckmann 2006; MacDonald 2008; Padberg 2009; Resnick et al. 1989; Steinle/Stacey 1998b), die auch Rückschlüsse auf die individuellen Sichtweisen auf Dezimalbrüche erlauben. Dabei sind bezüglich der Dezimalbrüche zahlreiche Probleme beschrieben worden, die sich u. a. auf das Verständnis der einzelnen Stellen des Dezimalbruchs sowie auf das Komma beziehen und als Grundlage für weiterführende Fehlvorstellungen angenommen werden (vgl. u. a. ebd.). Dies führt zu der Vermutung, dass Lernende Konzepte und Strukturen von anderen Zahlbereichen (natürliche Zahlen, ganze Zahlen, Bruchzahlen) nutzen und übergeneralisieren, um sich einen Zugang zu den Dezimalbrüchen zu verschaffen.

Gleichmaßen ist ein tragfähiges Verständnis der anderen Zahlbereiche und Konzepte für ein Verständnis der Dezimalbrüche notwendig, damit die erworbenen Wissensselemente, die in den bekannten Zahlbereichen zu richtigen Ergebnissen führen, adäquat für den Bereich der Dezimalbrüche erweitert und angepasst werden (vgl. Resnick et al. 1989).

„Es deutet vieles darauf hin, daß ein großer Teil der Schüler(innen) eine Dezimalzahl nicht als *andere Schreibweise* für einen gemeinen *Bruch* versteht, sondern eher als *eigenständiges* Objekt. Die *Nähe zu den natürlichen Zahlen* herrscht in der Vorstellung der Schüler(innen) offenbar vor.“ (Klika 1997, S. 25f, Hervor. i. O.)

Tabelle 2.1 stellt die bekannten Fehlertypen und typischen Denkweisen beim Rechnen mit Dezimalbrüchen zusammen (vgl. u. a. Brekke 1996; Günther 1987; Heckmann 2006; MacDonald 2008; Padberg 2009; Resnick et al. 1989; Steinle/Stacey 1998b).

Tabelle 2.1 Denkweisen beim Umgang mit Dezimalbrüchen

Denkweise	Kurze Erläuterung
Durch Rückgriff auf die natürlichen Zahlen	
Komma-trennt	Das Komma trennt zwei natürliche Zahlen voneinander, sodass jeder Dezimalbruch ein Paar aus zwei natürlichen Zahlen darstellt.
Kein-Komma	Der Dezimalbruch wird als eine natürliche Zahl gesehen – das Komma wird nicht beachtet.
Null-ist-nichts	• Stellenwertbelegende Nullen in den gebrochenen Stellenwerten werden nicht beachtet und weggelassen. • Die Ziffern nach dem Komma werden als gespiegelte natürliche Zahl gesehen. Daher werden Nullen, die direkt rechts vom Komma stehen, und Endstellen-Nullen weggelassen.
Umgekehrtes Denken	Die Weiterführung der Stellenwerte erfolgt umgekehrt zu der Reihenfolge links vom Komma, allerdings ohne eine doppelte Einer-Spalte: ..., Zehner, Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, usw.
Eintel	In der Erweiterung der Struktur der Stellenwerte wird das Komma als Symmetrieachse gesehen, sodass die gebrochenen Stellenwerte spiegelverkehrt zu den ähnlich klingenden ganzzahligen Stellenwerten aufgebaut sind. Als Gegenstück zu den Einern entsteht der Stellenwert der Eintel.
Durch Rückgriff auf die gemeinen Brüche	
Nennerfokussiertes Denken	Es wird davon ausgegangen, dass jedes Zehntel größer ist als jedes Hundertstel – deshalb ist auch jeder Dezimalbruch mit Zehnteln größer als jeder, der Hundertstel umfasst.
Bruchdenken	Die Dezimalbrüche werden mit den gemeinen Brüchen verknüpft, sodass der ganzzahlige Anteil des Dezimalbruchs als Zähler und der Bruchteil als Nenner aufgefasst wird. Bei Dezimalbrüchen ohne ganzzahligen Anteil wird immer von 1 als Zähler ausgegangen. Komma und Bruchstrich werden dieselbe Bedeutung zugeordnet.
Durch Rückgriff auf die ganzen Zahlen	
Negatives Denken	Dezimalbrüche zwischen Null und Eins werden wie negative Zahlen behandelt, sodass 0,65 mit -65 gleichgesetzt wird.
Durch Rückgriff auf den Kontext	
Geld-Denken / Abbruch-Denken	Es wird nur auf die ersten beiden Nachkommastellen geschaut, weil sie als relevante Stellen im Alltag – nämlich als Cent – wahrgenommen werden, die restlichen werden ignoriert.
Rundungs-Denken	Jeder Dezimalbruch mit mehr als zwei Nachkommastellen wird auf zwei Nachkommastellen gerundet. Die anderen Nachkommastellen haben für den Lernenden nur eine geringe oder keine Bedeutung.

Neben den in Tabelle 2.1 genannten Problembereichen gilt der Umgang mit der Null als zusätzliche Schwierigkeit, was durch die Sichtweise „Null-ist-nichts“ bereits angedeutet wird. Die Null wird allerdings nicht nur als „nichts“ gedeutet, sondern es zeigen sich auch Probleme bei der Frage, welche Nullen geschrieben werden müssen und welche weggelassen werden können (vgl. u. a. Günther 1987; Heckmann 2006; Resnick et al. 1989; Steinle/Stacey 2001). In jedem Stellenwertsystem spielt die Null eine wichtige Rolle, da sie angibt, dass an einer bestimmten Stelle in der Zahl kein Bündel dieser Mächtigkeit vorhanden ist. Sie kann deshalb innerhalb der belegten Stellenwerte nicht einfach weggelassen werden, da sich ansonsten der Wert der Zahl ändert: $8075 \neq 875$ (vgl. Winter 2001; Scherer/Moser Opitz 2010). Nur sogenannte *Anfangsnullen* müssen im Bereich der natürlichen Zahlen nicht geschrieben werden.

Dem Großteil der festgestellten fehlerhaften Denkweisen ist nur durch den Aufbau eines tragfähigen Stellenwertverständnisses im Bereich der natürlichen Zahlen entgegenzuwirken (vgl. Günther 1987; Heckmann 2005; Steinle/Stacey 2004).

Die beiden für ein Verständnis der Dezimalbrüche essentiellen Voraussetzungen – das dezimale Stellenwertsystem der natürlichen Zahlen und die Bruchvorstellung (vgl. Michaelidou/Gagatsis/Pitta-Pantazi 2004) – werden nachfolgend in Kapitel 2.2 näher betrachtet.

2.2 Der Gegenstandsbereich der Dezimalbrüche

Als Grundlage für den Dezimalbruchbegriff wird im Folgenden zunächst das dezimale Stellenwertsystem bei den natürlichen Zahlen genauer spezifiziert (Kap. 2.2.1). Darauf aufbauend werden die Gemeinsamkeiten und Umbrüche einerseits zwischen den natürlichen Zahlen und den Dezimalbrüchen (Kap. 2.2.2) und andererseits zwischen den gemeinen Brüchen und den Dezimalbrüchen (Kap. 2.2.3) herausgearbeitet, bevor in einem Fazit die wichtigen Aspekte des Dezimalbruchverständnisses zusammenhängend visualisiert werden (Kap. 2.2.4).

2.2.1 Das dezimale Stellenwertsystem bei den natürlichen Zahlen

Das dezimale Stellenwertsystem spielt nicht nur eine entscheidende Rolle für die natürlichen Zahlen und das Dezimalbruchverständnis, es gilt auch als fundamentale Idee der Arithmetik (vgl. Winter 2001). Das Konzept der fundamentalen Idee ist ein allgemeines, didaktisches Prinzip der Strukturorientierung, die ein spiralig aufgebautes Curriculum beschreibt (vgl. Bender/Schreiber 1985; Bruner 1970). Das Spannungsfeld zwischen abstrakter Mathematik und alltäglichem Denken soll durch einen Mathematikunterricht aufgelöst werden, der sich mit wenigen allgemeinen Ideen von weitreichender Bedeutung befasst (vgl. Whitehead 1962). Ideen werden dann als fundamental eingestuft, wenn sie die

gesamte Mathematik und demnach unterschiedliche Teildisziplinen (z. B. Arithmetik, Funktion, Geometrie) betreffen und sich wie ein roter Faden durch das mathematische Curriculum ziehen (vgl. Heymann 1996).

„Das Besondere, Fundamentale an der Stellenwertdarstellung von Zahlen als Symbolik ist ihre höchst effiziente Systematik. Mit einer endlichen Anzahl von Ziffern (in unserem Dezimalsystem zehn) kann jede Zahl (bis ins Unendliche) unter Nutzung des Schreibraumes (Stelle) eindeutig dargestellt werden [...] sodass aus der Darstellung Information über die dargestellte Zahl gewonnen werden kann.“ (Winter 2001, S. 2)

Die fundamentale Idee der Stellenwertdarstellung basiert auf den Eigenschaften der Bündelung und des Stellenwerts (vgl. Postel 1991). In einem Stellenwertsystem mit der Basis $b \leq 10$ werden ausschließlich die Ziffern 0, 1, 2, ..., $b-1$ benötigt (vgl. Padberg 2008a), im dezimalen Stellenwertsystem kann demnach aus den Ziffern 0 bis 9 jede beliebige Zahl eindeutig dargestellt werden. In einem Stellenwertsystem mit der Basis b werden somit immer b Elemente einer Einheit zu einem Element der nächsthöheren Einheit zusammengefasst, wobei die Potenzen der Basis b als Einheiten fungieren. Diese Zusammenfassung der Elemente ist als Bündeln bekannt und in allen Positionssystemen von besonderer Bedeutung.

Das Bündeln ermöglicht, zusammen mit dem Stellenwertprinzip, (auch große) Zahlen übersichtlich darzustellen, da die Ziffern an einer spezifischen Stelle die Anzahl der Bündel repräsentieren (vgl. Müller/Wittmann 1984; Padberg 2008a; van de Walle 2007; Winter 2001). Dies hilft wiederum, Rechenstrategien und schriftliche Rechenverfahren effektiv zu nutzen und sich in größeren Zahlräumen und anderen Zahlbereichen zu orientieren (vgl. Padberg/Danckwerts/Stein 1995; Scherer/Moser Opitz 2010; Selter/Spiegel 1997).

Trotz der wesentlich höheren Effizienz und Eleganz ist unsere Zahlschrift abstrakter und durch die fehlende Darstellung des Bündelungszeichens weniger anschaulich als z. B. die römische Zahlschrift (vgl. Padberg/Benz 2011; Selter/Spiegel 1997). Die Abstraktheit ist bedingt durch die Berücksichtigung der Stellung der Ziffern in der Zahl, weshalb auf die Angabe der Stellenwerte bzw. Bündelungseinheiten (Einer, Zehner, Hunderter, etc.) verzichtet werden kann (vgl. Padberg 2008a). In diesem Zusammenhang muss allerdings zwischen der *Versprachlichung der Zahlwörter* und den *Zahlwörtern an sich* unterschieden werden. Bei dieser Differenzierung ist bedeutsam, dass in der Versprachlichung der Zahlwörter ein Teil der Klarheit unseres Zahlsystems verloren geht, da in der gesprochenen Form kein Stellenwert-, sondern lediglich ein reines Bündelungssystem genutzt wird (vgl. Humbach 2008; Padberg/Benz 2011; Wartha/Schulz 2014). Bei der Wortform wird außer bei den Einern im Bereich der natürlichen Zahlen die Bündelungseinheit jeweils mitgesprochen, sodass erst auf der Ebene des geschriebenen Zahlwortes das Stellenwertsystem zum Tragen kommt. Das ist auch ein Grund dafür, dass nur in der Zifferschreibweise nicht besetzte Stellen klar mit der Null gekennzeichnet werden, was einen

bedeutungsvollen Unterschied zwischen Zahlwort und Ziffernschreibweise ausmacht (vgl. Padberg/Benz 2011; Selter/Spiegel 1997).

Grundlegend für das Verständnis des Bündelungs- und auch des Stellenwertprinzips ist das Teil-Ganzes-Prinzip und somit die Interpretation von Zahlen als Zusammensetzungen anderer Zahlen (vgl. Resnick 1983; Gaidoschik 2010; Ross 1989). Auf das Teil-Ganzes-Prinzip aufbauend sind die beiden zentralen Prinzipien des dezimalen Stellenwertsystems, Bündelungs- und Stellenwertprinzip, nicht nur Grundbausteine der natürlichen Zahlen. Sie werden ebenso genutzt, um ein tragfähiges Verständnis der positiv rationalen Zahlen in Dezimalschreibweise daraus zu entwickeln (vgl. u. a. Baroody 1990; Müller/Wittmann 1984; Padberg/Benz 2011; Ross 1989; Scherer/Moser Opitz 2010; Wartha/Schulz 2014). Bekannte Strukturen werden einerseits fortgeführt, müssen andererseits aber auch abgegrenzt und angepasst werden. Mögliche intendierte Lernwege anknüpfend an das dezimale Stellenwertverständnis bei den natürlichen Zahlen werden im weiteren Verlauf des Kapitels genauer beleuchtet (vgl. Kap. 2.4).

Im Folgenden werden das zugrunde liegende Teil-Ganzes-Prinzip sowie die beiden zentralen Prinzipien des dezimalen Stellenwertsystems genauer erläutert. Dabei werden sukzessive die genauen Zusammenhänge zwischen diesen drei Aspekten für die natürlichen Zahlen in einem Schaubild dargestellt.

Das Teil-Ganzes-Prinzip

Das Teil-Ganzes-Prinzip umfasst die Einsicht, dass Zahlen einerseits zerlegbar und andererseits aus verschiedenen Teilen zusammensetzbar sind und dass sich ihr Wert trotz verschiedener Bündelungen nicht ändert (vgl. Beutler 2013; Gaidoschik 2010; Resnick 1983; Ross 1989). Dieses Konzept ist grundlegend für das mathematische Assoziativgesetz, das wie folgt beschrieben werden kann: $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$.

Das Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems kann als sukzessive Elaboration des Teil-Ganzes-Prinzips verstanden werden: Zahlen werden nicht nur als Zusammensetzungen anderer Zahlen, sondern vor allem auch als Zusammensetzungen der Stellenwerte interpretiert (Teile müssen demnach Vielfache von Zehnerpotenzen sein) und als Subjekte spezieller Bündelungen (Zehnerbündelung) betrachtet (vgl. Resnick 1983; Ross 1989). Demnach impliziert das Stellenwertverständnis eine Verknüpfung von Wissen über unser kulturell bedingtes Notationssystem sowie Teil-Ganzes-Beziehungen, dergestalt, dass Lernende nicht nur wissen sollten, dass z. B. die Zahl 34 als eine Menge von 34 Objekten interpretiert werden kann, sondern auch, dass die rechte Ziffer vier dieser Objekte repräsentiert und die linke Ziffer dreißig (drei Zehnerbündel), und dass 34 ebenso die Summe der Mengen ist, die durch die einzelnen Ziffern dargestellt werden (vgl. Moser Opitz 2007; Ross 1989).

Das Prinzip der fortgesetzten Bündelung

Das Prinzip der fortgesetzten Bündelung ist essentiell für das Darstellen und Rechnen mit Zahlen im dekadischen System (vgl. Müller/Wittmann 1984).

„Beim Bündeln werden die Elemente einer vorgegebenen Menge zu gleich großen (gleichmächtigen) Gruppen zusammengefasst, bis keine weiteren Gruppen mehr gebildet werden können.“ (Scherer/Moser Opitz 2010, S. 131)

Für das dezimale Stellenwertsystem bedeutet dieses Prinzip, dass immer zehn Elemente einer Einheit zu einem Element der nächsthöheren Einheit zusammengefasst werden – zehn Einer werden also zu einem Zehner, zehn Zehner zu einem Hunderter gebündelt, usw. (vgl. Moser Opitz 2007; Wartha/Schulz 2014).

Das beschriebene Prinzip involviert zudem das Entbündeln als Umkehroperation, dass das Wegnehmen von Elementen der nächstkleineren Einheit ermöglicht (vgl. Scherer/Moser Opitz 2010). Bündeln und Entbündeln spielen gleichermaßen eine wichtige Rolle zur Erweiterung des dezimalen Positionssystems (vgl. *Eigenschaft der Zehnerbasis*, S. 26), insbesondere hinsichtlich der Zahlbereichserweiterung zu den positiv rationalen Zahlen in Stellenwertschreibweise (vgl. Postel 1991).

Die Möglichkeit der Zerlegungen und Zusammensetzung von Zahlen im Sinne des Teil-Ganzes-Prinzips dient dabei als Voraussetzung für das Prinzip der fortgesetzten Bündelung (vgl. Abb. 2.1).

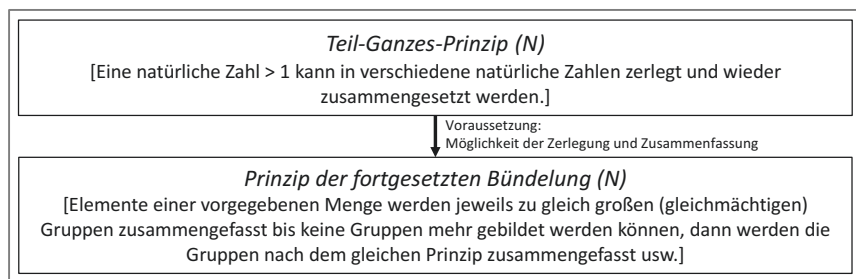


Abbildung 2.1 Zusammenhang zwischen Teil-Ganzes-Prinzip und Prinzip der fortgesetzten Bündelung im Bereich der natürlichen Zahlen

Wenn Lernenden die Einsicht in das Prinzip der fortgesetzten Bündelung nicht gelingt, kann das mit einem unsicheren Verständnis des Teil-Ganzes-Prinzips und einer überwiegend ordinalen Zahlauffassung verbunden sein (vgl. u. a. Kamii 1986; Moser Opitz 2007; Resnick 1983; Ross 1985; Schulz 2014). Weiterhin können Schwierigkeiten bei der stellengerechten Zerlegung mehrstelliger Zahlen sowie in der Erkenntnis, dass z. B. Zehnerzahlen aus gleichmächtigen Bündeln bestehen (vierzig besteht aus vier Zehnern, vgl. *Das Teil-Ganzes-*

Prinzip, S. 24), auftreten (vgl. Fuson/Wearne/Hiebert/Murray/Human/Olivier/Carpenter/Fennema 1997; Ross 1989; Schulz 2014). Werden die Zahlen überwiegend ordinal aufgefasst, werden sie meist nur als Elemente einer festen Zahlwortreihe verstanden und die kardinale Mengenauffassung der Zahlen fehlt. Diese Auffassung impliziert für viele Kinder, dass zu jeder neuen Zahl ein neues Wort und ein neues Zeichen auswendig gelernt werden muss (vgl. Gaidoschik 2008; Schulz 2014).

Das Stellenwertprinzip

Während das Prinzip der fortgesetzten Bündelung im Sinne der Kardinalität (Mächtigkeit) u. a. für das inhaltliche Verständnis der einzelnen Stellenwerte sorgt (in einem Zehner werden zehn Elemente der zugrunde liegenden Einheit 1 identifiziert), betrifft das Stellenwertprinzip die Notation der Bündelungsergebnisse (vgl. Scherer/Moser Opitz 2010; Wartha/Schulz 2014). Jede Ziffer in einer Zahl liefert zwei Informationen: Zum einen gibt die Ziffer Aufschluss über die Anzahl der Bündel der jeweiligen Mächtigkeit, sodass durch Multiplikation der Zahlenwert ermittelt werden kann (vgl. *Multiplikative Eigenschaft*, S. 27). Zum anderen informiert die Stellung der Ziffer in der Zahl über die Mächtigkeit des jeweiligen Bündels (vgl. Padberg 2008a; Padberg/Benz 2011). Das Stellenwertprinzip umfasst vier Eigenschaften, die die Interpretation von Zahlen im dezimalen Stellenwertsystem ausmachen: die *Stellenwert-Eigenschaft*, die *Eigenschaft der Zehnerbasis*, die *Multiplikative Eigenschaft* und die *Additive Eigenschaft* (vgl. Ross 1989).

Die *Stellenwert-Eigenschaft* meint einerseits, dass jede Ziffer in der Zahl für einen Stellenwert steht, und andererseits, dass der Wert einer Ziffer in einer mehrstelligen Zahl durch die Position dieser Ziffer in der Zahl bestimmt ist (vgl. ebd.).

Die *Eigenschaft der Zehnerbasis* beschreibt das Wachstum der Stellenwerte von rechts nach links um Zehnerpotenzen, beginnend mit 10^0 beim kleinsten, ganz rechten Stellenwert der Zahl. Dieses strukturierte Wachstum der Stellenwerte zeigt die Anknüpfung an das Prinzip der fortgesetzten Bündelung auf. Da diese Eigenschaft im dezimalen Stellenwertsystem auf der Grundzahl 10 basiert, erhält man aus jeder Stufenzahl 10^m (für natürliche Zahlen gilt $m \geq 0$) die nächstgrößere durch Bündeln zu Zehnerbündeln: $10 \cdot 10^m = 10^{m+1}$ (vgl. Müller/Wittmann 1984; Ross 1989). Gleichzeitig bezeichnet diese Eigenschaft auch die Weiterführung der Stellenwerte nach rechts, denn durch Entbündeln erhält man aus jeder Stufenzahl 10^m die nächstkleinere Stufenzahl: $10^m : 10 = 10^{m-1}$ (vgl. ebd.). Hier wird die multiplikative Beziehung zwischen den einzelnen Stellenwerten sichtbar. Besonders zu beachten ist die enge Verknüpfung zwischen der Stellenwert-Eigenschaft und der Eigenschaft der Zehnerbasis, da die Stellenwert-Eigenschaft zunächst aussagt, dass es verschiedenwertige Positionen in einer Zahl gibt, diese aber erst durch die Eigenschaft der

Zehnerbasis mit einem konkreten Wert verbunden werden können (vgl. Abb. 2.2).

Die *Multiplikative Eigenschaft* impliziert die Ermittlung des Wertes der einzelnen Stelle und somit der einzelnen Ziffer in der Zahl (vgl. Wartha/Schulz 2014). Jede Ziffer beschreibt diesen Zahlenwert, der durch Multiplikation der Anzahl der Einheiten (Ziffer) mit dem Wert der jeweiligen Einheit (Position bzw. Stelle) ermittelt wird (vgl. Scherer/Moser Opitz 2010). Konkret heißt das, dass in der Zahl 486 die Ziffer 4 an 10^2 -ter Stelle steht und somit mit $10^2 = 100$ multipliziert werden muss, um ihren Zahlenwert zu generieren, also $4 \cdot 10^2 = 400$. Aus der Ziffer wird durch die multiplikative Verknüpfung mit dem jeweiligen Stellenwert eine Zahl. An dieser Stelle dienen sowohl die Stellenwert-Eigenschaft, als auch die Eigenschaft der Zehnerbasis als Voraussetzung füreinander, da einerseits die Position, an der die Ziffer steht, bestimmt, welcher Stellenwert als Faktor der Multiplikation benötigt wird (Stellenwert-Eigenschaft) und andererseits die Eigenschaft der Zehnerbasis den konkreten Wert des zugehörigen Stellenwertes liefert (vgl. Abb. 2.2).

Schließlich beschreibt die *Additive Eigenschaft*, dass sich der Gesamtwert der Zahl aus der Summe der einzelnen Zahlenwerte ergibt. So wie bei der Multiplikativen Eigenschaft Ziffer und Stellenwert verknüpft werden, werden bei der Additiven Eigenschaft die einzelnen Zahlenwerte zum Gesamtwert der Zahl kombiniert. Bei jeder Zahl kann der Gesamtwert stellengerecht ermittelt bzw. kann jede Zahl stellengerecht zerlegt werden (z. B. $486 = 400 + 80 + 6$). Die stellengerechte Zerlegung einer Zahl meint, dass das Ganze in Teile zerlegbar ist, die Vielfache von Zehnerpotenzen mit Exponenten $\in \mathbb{N}_0$ sein müssen; sie gilt als standardisierte Zerlegung. Es wird allerdings betont, dass auch das nicht-standardisierte Zerlegen einer Zahl Bestandteil eines flexiblen und tragfähigen Stellenwertverständnisses ist, so sollte 87 nicht nur als $80 + 7$, sondern beispielsweise auch als $70 + 17$ erkannt werden (vgl. Ross 1989; van de Walle 2007). Diesen flexiblen Zerlegungen liegt ebenfalls, wie bereits beschrieben, das Teil-Ganzes-Prinzip zugrunde (vgl. Ross 1989).

Aufbauend auf Abbildung 2.1 fasst Abbildung 2.2 die zentralen Aspekte und Zusammenhänge des dezimalen Stellenwertverständnisses zusammen. Die durchgezogenen Pfeile verdeutlichen die inferentielle Gliederung der einzelnen Aspekte des dezimalen Stellenwertverständnisses, um aufzuzeigen, welche Aspekte im Lernprozess Voraussetzungen für andere Aspekte darstellen. Das Prinzip der fortgesetzten Bündelung baut z. B. auf dem Teil-Ganzes-Prinzip auf und beides ist Voraussetzung für die verschiedenen Eigenschaften des Stellenwertprinzips (vgl. Abb. 2.2). Die gestrichelten Pfeile kennzeichnen Rückanbindungen, so wird beispielsweise die Eigenschaft der Zehnerbasis durch die Basis 10 und somit durch die Zehnerbündelung direkt an das Prinzip der fortgesetzten Bündelung angebunden, um inhaltliche Vernetzungen herstellen zu können. Die gepunkteten Pfeile veranschaulichen die inhaltlichen Zusammenhänge zwischen

Bündelungs- und Stellenwertprinzip bzw. später auch zwischen Stellenwertprinzip und der Grundvorstellung des Zehnerbruchs als Anteil (vgl. Kap. 2.2.4).

Die Grafik dient im weiteren Verlauf dieser Arbeit als Grundlage für die Erweiterung des dezimalen Stellenwertverständnisses hinsichtlich der Dezimalbrüche (vgl. ebd.).

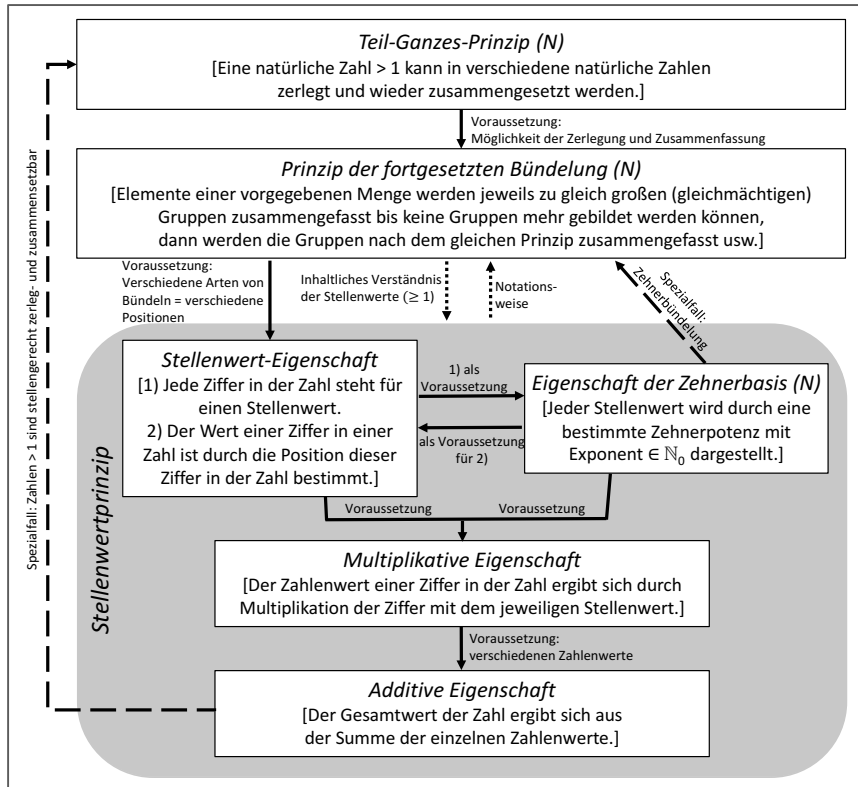


Abbildung 2.2 Wichtige Aspekte und Zusammenhänge des dezimalen Stellenwertsystems im Bereich der natürlichen Zahlen

Aus der Stellenwert-Eigenschaft, der Eigenschaft der Zehnerbasis, der Multiplikativen und der Additiven Eigenschaft ergibt sich die Charakterisierung (N), bei der natürliche Zahlen als Summe von Zehnerpotenzen dargestellt werden (vgl. Padberg 2008a; Scheid 2002). Die Charakterisierungen werden nachfolgend formal dargestellt, um im weiteren Verlauf einen besseren Zugriff auf den Vergleich der natürlichen Zahlen und der gemeinen Brüche mit den Dezimalbrü-

chen herauszuarbeiten, beispielsweise hinsichtlich von Schwierigkeiten beim Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Dezimalbrüchen oder von den gemeinen Brüchen zu den Dezimalbrüchen.

($\mathbb{N}$) **n heißt natürliche Zahl**, wenn

$$\begin{aligned} n &:= z_m z_{m-1} \dots z_1 z_0 \text{ (Ziffernfolge von } n) \\ &= \sum_{i=0}^m z_i \cdot 10^i = z_0 \cdot 10^0 + z_1 \cdot 10^1 + \dots + z_{m-1} \cdot 10^{m-1} + z_m \cdot 10^m \end{aligned}$$

für $z_i \in \{0, \dots, 9\}$, $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ und $n \neq 0$.

In Charakterisierung $\mathbb{N}$ erkennt man die natürliche Zahl als Summe (Additive Eigenschaft) von Produkten (Multiplikative Eigenschaft) mit Zehnerpotenzen (Eigenschaft der Zehnerbasis), die durch die Position der Ziffer z_i in der Zahl bestimmt ist als 10^i (Stellenwert-Eigenschaft).

($\mathbb{Z}$) **g heißt ganze Zahl**, wenn

$$\begin{aligned} g &:= \pm z_m z_{m-1} \dots z_1 z_0 \\ &= \pm \sum_{i=0}^m z_i \cdot 10^i = \pm z_0 \cdot 10^0 + z_1 \cdot 10^1 + \dots + z_{m-1} \cdot 10^{m-1} + z_m \cdot 10^m \end{aligned}$$

für $z_i \in \{0, \dots, 9\}$ und $m \in \mathbb{N}_0$.

($\mathbb{Q}$) **r heißt rationale Zahl**, wenn $g_1 \in \mathbb{Z}$ und $g_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ existieren mit

$$r := \frac{g_1}{g_2}$$

Für jeden echten Bruch $r := \frac{g_1}{g_2}$ mit $0 < |r| < 1$ heißt $\frac{g_1}{g_2}$ Anteil, wobei g_1 den Teil vom Ganzen g_2 angibt. g_1 ist definiert als Zähler, g_2 als Nenner.

Schreibt man nun das Divisionsverfahren allgemein für einen beliebigen Bruch $\frac{a}{b}$ auf, so kann man die Beziehung zwischen Bruch und zugehörigem Dezimalbruch näher betrachten (vgl. Padberg/Danckwerts/Stein 1995). Die Quotienten werden im Folgenden der Reihe nach mit $q_0, q_1, q_2, \dots$ und die Reste mit $r_0, r_1, r_2, \dots$ benannt. Durch wiederholte Division mit Rest erhält man:

$$\begin{aligned}
 a &= q_0 \cdot b + r_0 && \text{mit } 0 \leq r_0 < b \\
 10 \cdot r_0 &= q_1 \cdot b + r_1 && \text{mit } 0 \leq r_1 < b \\
 10 \cdot r_1 &= q_2 \cdot b + r_2 && \text{mit } 0 \leq r_2 < b \\
 \text{(A)} \quad 10 \cdot r_2 &= q_3 \cdot b + r_3 && \text{mit } 0 \leq r_3 < b \\
 &\dots && \dots \\
 10 \cdot r_{n-1} &= q_n \cdot b + r_n && \text{mit } 0 \leq r_n < b
 \end{aligned}$$

Da für q_i mit $i \geq 1$ stets $0 \leq q_i < 10$ für $i \in \mathbb{N}$ gilt, kann die Gleichungskette (A) auch folgendermaßen zusammengefasst werden:

$$a = q_0 \cdot b + \frac{q_1}{10} \cdot b + \frac{q_2}{10^2} \cdot b + \frac{q_3}{10^3} \cdot b + \dots + \frac{q_n}{10^n} \cdot b + \frac{r_n}{10^n}$$

bzw. in folgender Form:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \frac{q_3}{10^3} + \dots + \frac{q_n}{10^n} + \frac{r_n}{b \cdot 10^n}$$

Die letzte Gleichung wird üblicherweise als $\frac{a}{b} = q_0, q_1 q_2 q_3 \dots q_n \dots$ mit $q_0 \in \mathbb{N}$ notiert und heißt Dezimalbruchentwicklung oder Dezimalbruch von $\frac{a}{b}$. Somit kann jedem Bruch eine eindeutige Dezimalbruchentwicklung zugewiesen werden. Ist der Rest $r_n = 0$, so spricht man von einer *endlichen* oder *abbrechenden* Dezimalbruchentwicklung oder einem *endlichen* oder *abbrechenden* Dezimalbruch und schreibt $\frac{a}{b} = q_0, q_1 q_2 q_3 \dots q_n$. Andernfalls wird die Dezimalbruchentwicklung bzw. der Dezimalbruch als *nichtabbrechend* bezeichnet (vgl. Padberg/Danckwerts/Stein 1995; Padberg 2008a).

Für die vorliegende Arbeit ist besonders der endliche Dezimalbruch in der Interpretation als Summe seiner Stellenwerte von Bedeutung, weshalb für den weiteren Verlauf die folgende Charakterisierung gilt:

(D) r heißt endlicher **Dezimalbruch**, wenn

$$r := \pm z_m \dots z_0, z_{-1} \dots z_{-n} = \pm \frac{z_m \dots z_{-n}}{10^n}$$

$$= \pm \sum_{i=-n}^m z_i \cdot 10^i = \pm z_{-n} \cdot 10^{-n} + \dots + z_0 \cdot 10^0 + \dots + z_m \cdot 10^m$$

für $z_i \in \{0, \dots, 9\}$, $m \in \mathbb{N}_0$ und $i, n \in \mathbb{N}$.

Ferner wird die Bruchdarstellung eines Dezimalbruchs stets als **Zehnerbruch** bezeichnet, die Stellenwertwertschreibweise hingegen als **Dezimalbruch**. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden die Begriffe *gemeiner Bruch* und *Bruch* synonym für alle rationalen Zahlen in Bruchdarstellung verwendet.

2.2.2 Gemeinsamkeiten und Umbrüche zwischen natürlichen Zahlen und Dezimalbrüchen

Eine Charakterisierung von Dezimalbrüchen auf der Grundlage der natürlichen Zahlen muss sowohl Eigenschaften in den Blick nehmen, die von den natürlichen Zahlen übertragbar sind, als auch solche, bei denen Vorstellungsumbrüche notwendig sind. Gemeinsam ist den natürlichen Zahlen und den Dezimalbrüchen die strukturgleiche Stellenwertschreibweise, die von den natürlichen Zahlen zu den Dezimalbrüchen erweitert werden kann. Die Erweiterung der Stellenwertschreibweise wird durch die formale Schreibweise sichtbar, wobei die natürlichen Zahlen als Teilmenge der Dezimalbrüche gelten.

Satz ND₁: Jede natürliche Zahl lässt sich als Dezimalbruch darstellen.

Beweis: $\mathbb{N} \subset \mathbb{D}$:

$$n = \sum_{i=0}^m z_i \cdot 10^i \text{ ist enthalten in } \pm \sum_{i=-n}^m z_i \cdot 10^i = d.$$

Wenn im Bereich der natürlichen Zahlen ein tragfähiges Stellenwertverständnis erlangt wurde, können die erlernten Prinzipien und Eigenschaften auf den Bereich der Dezimalbrüche transferiert und strukturgleich genutzt werden. Gerade die gemeinsame Stellenwertschreibweise von Dezimalbrüchen und natürlichen Zahlen (als Summe ihrer Stellenwerte; Charakterisierungen (N) und (D)) zeigt deren starken Zusammenhang und ist gegenüber der Bruchschreibweise für endliche Dezimalbrüche zusätzlich noch eindeutig (vgl. Padberg 2009). Das lässt die Annahme zu, dass der Übergang von den natürlichen Zahlen zu den

Dezimalbrüchen trivial und ohne Schwierigkeiten vollzogen werden kann. Dies ist allerdings nicht der Fall, da auch deutliche Unterschiede beim Übergang zu den Dezimalbrüchen berücksichtigt werden müssen.

Der Zusammenhang zwischen den natürlichen Zahlen und den Dezimalbrüchen zeigt seine Bedeutung in verschiedenen Aspekten:

- Grundvorstellungen
- Zahlbildung (Stellenwertsystem) / Notationsweise
- Sprechweise
- Größenvergleich

Diese vier Aspekte werden im Folgenden kurz beschrieben und die Gemeinsamkeiten und Umbrüche zwischen den natürlichen Zahlen und den Dezimalbrüchen im Detail tabellarisch dargestellt, um ihren Zusammenhang genauer betrachten zu können (vgl. Tab. 2.2).

Grundvorstellungen

„Grundvorstellungen beschreiben Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung“ (vom Hofe 1995a, S. 6). Ebenso wie fundamentale Ideen beinhalten Grundvorstellungen als „*normative didaktische Kategorien*“ (vom Hofe 1995b, S. 128, Hervor. i. O.) eine normative Perspektive und eine inhaltliche Ausrichtung.

Hinsichtlich der Grundvorstellung der Zahl verschiebt sich der Blick von einer überwiegend kardinalen und ordinalen (d. h., die Zahl gibt die Stellung eines Elements in einer geordneten Menge an) Sichtweise auf natürliche Zahlen (vgl. Padberg/Benz 2011) hin zu einer eher ordinal- und maßzahlgeprägten (d. h., die Zahl als Maßzahl steht in Verbindung mit einer Einheit) Sichtweise auf die Dezimalbrüche (vgl. Padberg 2009). Der Dezimalbruch wird zunächst als Quasi-kardinalzahl interpretiert ($0,5 = 5$ Zehntel), wobei die Stellenwerte Zehntel, Hundertstel, etc. gemäß dem Maßzahlaspekt als neue Einheiten gesehen werden (vgl. Malle 2004).

Zahlbildung (Stellenwertsystem) / Notationsweise

Die Zahlbildung impliziert die Strukturen, die der formal-symbolischen Zahlendarstellung des jeweiligen Zahlbereichs zugrunde liegen. Da die Dezimalbruchschreibweise die natürliche Erweiterung der Stellenwertschreibweise ist, gelten das Prinzip der fortgesetzten Bündelung und das Stellenwertprinzip nicht nur für die natürlichen Zahlen, sondern ebenfalls für die (positiv) rationalen Zahlen in Dezimalschreibweise (vgl. Padberg 2009). Unter diesem Aspekt werden in Tabelle 2.2 vor allem die Zusammenhänge zwischen den Stellenwerten, deren Wert und Bezugspunkt sowie die Besonderheit der Null in ihrer stellenwertbelegenden Funktion (Nullen markieren nicht besetzte Stellen) betrachtet (vgl. Heckmann 2006; Padberg 2009; Resnick et al. 1989).

Ebenso ist die Bezeichnung der Stellenwerte für die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen den natürlichen Zahlen und den Dezimalbrüchen evident, da die Abfolge der Stellenwerte des Dezimalbruchs eine Symmetrie zur Einerstelle aufweist und sich um diese herum ähnlich klingende Stellenwerte formieren. Links von der Einerstelle folgen die Zehner, Hunderter, Tausender usw.; nach rechts folgen nach dem Komma Zehntel, Hundertstel, Tausendstel usw. Es gibt allerdings keinen ähnlich klingenden Stellenwert zu den Einern (vgl. Baturó 1999; Padberg 2009; Resnick et al. 1989). Der Zusammenhang zwischen den ähnlich klingenden Stellenwerten des ganzzahligen und des gebrochenen Teils des Dezimalbruchs sollte als klarer Unterschied thematisiert und angebunden an die Grundvorstellung des *Bruchs als Anteil* verstehensorientiert erfahren werden (vgl. Kap. 2.2.3; vgl. Padberg 2009).

Sprechweise

Als nächster Aspekt in diesem Bereich ist die Sprechweise anzuführen, die unterschiedliche Regeln für Dezimalbrüche und natürliche Zahlen beinhaltet (vgl. Padberg 2009; Schulz 2014). Bei den Dezimalbrüchen werden die jeweiligen Stellenwerte wie bei den natürlichen Zahlen nur für den ganzzahligen Teil mitgesprochen, alle Dezimalstellen werden in der formalen Sprechweise nur als einzelne Ziffern genannt. Zudem kann bei den Dezimalbrüchen die Einheit, auf dessen Grundlage die Zahl interpretiert wird, flexibel variiert und muss daher explizit festgelegt werden (vgl. Resnick et al. 1989).

Größenvergleich

Der Größenvergleich von Dezimalbrüchen knüpft an die Vorerfahrungen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen an und stimmt mit diesen weitestgehend überein (vgl. Padberg 2009). Dieser Umgang mit Dezimalbrüchen wird hier aufgegriffen, da der Größenvergleich in der vorliegenden Arbeit als Anlass genutzt wird, um das Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern näher zu untersuchen. Gemeinsamkeiten und Umbrüche bezüglich der vier Grundrechenarten werden aufgrund der fehlenden Relevanz für diese Arbeit nicht aufgegriffen.

Tabelle 2.2 fasst die Gemeinsamkeiten (+) und Umbrüche (-) zwischen den natürlichen Zahlen und den Dezimalbrüchen zusammen (vgl. Heckmann 2006; Padberg 2009; Resnick et al. 1989; Schmassmann 2009; Schulz 2014). Dazu erfolgt eine Beschreibung der elementaren Urteile der Dezimalbrüche und der natürlichen Zahlen unter den oben beschriebenen Aspekten. Unter elementaren Urteilen werden in diesem Fall die grundlegenden, wichtigen Bausteine der Dezimalbrüche bzw. der natürlichen Zahlen aus normativer Sicht verstanden, die mathematisch tragfähig und inferentiell gegliedert sind. Sie dienen als tragende Stützen des jeweiligen Begriffsverständnisses. Gemeinsamkeiten werden

in Tabelle 2.2 (wie auch analog für die Gemeinsamkeiten mit den gemeinen Brüchen in Tabelle 2.3) als solche identifiziert, wenn das elementare Urteil sowohl für den Bereich der natürlichen Zahlen als auch für die Dezimalbrüche gültig ist. Die Kennzeichnung von Umbrüchen bedeutet, dass das jeweilige Urteil im Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Dezimalbrüchen entweder keine Gültigkeit mehr besitzt oder erweitert werden muss.

Tabelle 2.2 Gemeinsamkeiten und Umbrüche zwischen natürlichen Zahlen und Dezimalbrüchen

Elementare Urteile bei den Dezimalbrüchen	Entsprechende elementare Urteile bei den natürlichen Zahlen	Gemeinsam- keiten (+) und Umbrüche (-)
Grundvorstellungen		
1. Dezimalbrüche liegen dicht auf der Zahlengeraden, d. h. zwischen zwei Dezimalbrüchen liegen unendlich viele andere und es gibt keinen eindeutigen Vorgänger oder Nachfolger.	1. Natürliche Zahlen liegen diskret auf der Zahlengeraden. Jede Zahl $a \in \mathbb{N}$ hat als Element der diskreten Menge der natürlichen Zahlen genau einen Vorgänger ($a - 1$) und einen Nachfolger ($a + 1$).	-
2. Es gibt keine korrespondierende (kardinale) Mengenvorstellung für Dezimalbrüche. Es erfolgt eine Verschiebung hin zu Ordinal- und Maßzahlaspekt als zentrale Zahlvorstellungen.	2. Überwiegend kardinale und ordinale Zahlvorstellung, bei der die Zahl als Repräsentant einer Menge oder als die Stellung eines Elements in einer geordneten Menge interpretiert wird.	-
Zahlbildung (Stellenwertsystem) / Notationsweise		
1. Für die Zahlbildung gelten Bündelungs- und Stellenwertprinzip.	1. Für die Zahlbildung gelten Bündelungs- und Stellenwertprinzip.	+
2. Der Dezimalbruch kann als Summe seiner Stellenwerte betrachtet werden.	2. Die natürliche Zahl kann als Summe ihrer Stellenwerte betrachtet werden.	+
3. Der Wert der Stellenwerte verkleinert sich von links nach rechts.	3. Der Wert der Stellenwerte verkleinert sich von links nach rechts.	+
4. Jeder Stellenwert ist zehnmal größer als sein rechts benachbarter bzw. der zehnte Teil des links benachbarten.	4. Jeder Stellenwert ist zehnmal größer als sein rechts benachbarter bzw. der zehnte Teil des links benachbarten.	+
5. Der Wert der Stellenwerte vergrößert sich, je weiter sie links vom Komma entfernt liegen; er verkleinert sich jedoch, je weiter sie rechts vom Komma entfernt liegen.	5. Der Wert der Stellenwerte vergrößert sich, je weiter sie von der Einerstelle entfernt liegen.	-

- | | | |
|---|---|---|
| 6. Die ganzzahligen Stellenwerte enden auf -er, die gebrochenen auf -tel. | 6. Die Stellenwerte der natürlichen Zahl enden auf -er. | - |
| 7. Der erste Stellenwert links des Kommas wird als <i>Einer</i> bezeichnet, der erste rechts des Kommas als <i>Zehntel</i> . | 7. Der erste, ganz rechte Stellenwert wird als <i>Einer</i> bezeichnet. | - |
| 8. Die Reihenfolge der Benennung der ganzzahligen Stellenwerte erfolgt von rechts nach links (Zehner, Hunderter, usw.), die der gebrochenen Stellenwerte jedoch von links nach rechts (Zehntel, Hundertstel, usw.). | 8. Die Reihenfolge der Benennung der Stellenwerte erfolgt von rechts nach links (Zehner, Hunderter, usw.) | - |
| 9. Die gelesene Reihenfolge der ganzzahligen Stellenwerte erfolgt wie bei den natürlichen Zahlen. Die gelesene Reihenfolge der gebrochenen Stellenwerte: Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, usw. | 9. Die gelesene Reihenfolge der Stellenwerte beginnt bei dem größten vorhandenen Stellenwert in der Zahl: z. B. Tausender, Hunderter, Zehner, Einer. | - |
| 10. Die ganzzahligen Stellenwerte bezeichnen dezimale Einheiten. Die gebrochenen Stellenwerte (Zehntel, Hundertstel, usw.) bezeichnen gleichzeitig Einheiten und Beziehungen zwischen Einheiten, denn ein Zehntel beschreibt genau diesen Anteil des Ganzen (vgl. Kap. 2.3). | 10. Die Stellenwerte (Zehner, Hunderter, usw.) bezeichnen dezimale Einheiten. | - |
| 11. Rechts des Einers liegen unendlich viele Stellen. | 11. Rechts des Einers liegen keine weiteren Stellen. | - |
| 12. Die Null erfüllt eine stellenwertbelegende Funktion. | 12. Die Null erfüllt eine stellenwertbelegende Funktion. | + |
| 13. Endstellen-Nullen können beliebig angehängt werden und verändern den Wert der Zahl nicht (z. B. $5,6 = 5,6000$). | 13. Das Anhängen von Nullen an die letzte Stelle der Zahl verändert den Wert der Zahl (z. B. $56 \neq 5600$), sofern durch ein Komma nicht die richtige Abfolge der Stellenwerte aufrechterhalten wird (z. B. $5 = 5,000$). | - |
| 14. Das Voranstellen von Nullen vor den ganzzahligen Teil des Dezimalbruchs (vor die Ziffer mit dem höchsten Stellenwert) kann beliebig erfolgen und verändert den Wert der Zahl nicht. Das Voranstellen von Nullen vor die erste Nachkommastelle verändert den Wert der Zahl allerdings ($8,7 = 08,7$ aber $8,7 \neq 8,07$). | 14. Das Voranstellen von Nullen vor die Ziffer mit dem höchsten Stellenwert kann beliebig erfolgen und verändert den Wert der Zahl nicht (z. B. $087 = 87$). | - |

- | | | |
|---|---|---|
| 15. Besteht ein Zahlwort nur aus Dezimalen, wird die Einerstelle durch eine Null besetzt. | 15. Dieser Fall tritt für natürliche Zahlen nicht ein. | - |
| 16. Es gibt unendlich viele formal-symbolische Schreibweisen für einen Dezimalbruch: z. B. $0,1 = 0,10 = 0,100 = \dots$ | 16. Es gibt nur eine formal-symbolische Schreibweise für jede Zahl. | - |

Sprechweise

- | | | |
|---|---|---|
| 1. Die jeweiligen Stellenwerte werden nur für den ganzzahligen Teil mitgesprochen, alle Dezimalen werden in der formalen Sprechweise nur als einzelne Ziffern genannt (z. B. $320,45 = \text{dreihundertzwezigkommavierfünf}$). | 1. Die jeweiligen Stellenwerte werden in den Zahlwörtern (außer bei den Einern) immer mitgesprochen (z. B. $320 = \text{dreihundertzwanzig}$). | - |
| 2. Die Einheit, auf dessen Grundlage die Zahl interpretiert wird, ist flexibel und kann flexibel variiert werden. Ein Dezimalbruch kann auf Grundlage der Einer, aber ebenso auf Grundlage z. B. der Zehntel oder Hundertstel gelesen werden ($3,74$ als dreikommasiebenvier aber auch als siebenunddreißigkommavier Zehntel oder dreihundertvierundsiebzig Hundertstel). Die Einheit muss daher explizit festgelegt werden. | 2. Die Referenz zu den Einern ist immer eindeutig, da alle Zahlen implizit auf der Basis der Einer interpretiert werden. | - |

Größenvergleich

- | | | |
|--|--|---|
| 1. Zum Größenvergleich wird das lexikografische (stellenweise) Verfahren genutzt. | 1. Zum Größenvergleich wird das lexikografische (stellenweise) Verfahren genutzt. | + |
| 2. Bezugspunkt für die Stellenwerte ist das Komma. Die Blickrichtung geht nach rechts und links. Eine „kommabündige“ Notation zweier Dezimalbrüche gewährleistet, dass gleiche Stellen untereinanderstehen, was für den Größenvergleich von Bedeutung ist. | 2. Bezugspunkt für die Stellenwerte ist die letzte Stelle der Zahl und somit eigentlich das Komma, dass nach der letzten Stelle der natürlichen Zahl steht. Aufgrund des Zahlbereichs ist den Lernenden dieser Zusammenhang aber meist unklar. Die Blickrichtung geht ausschließlich nach links. Eine rechtsbündige Notation zweier Zahlen gewährleistet, dass gleiche Stellen untereinanderstehen, was für den Größenvergleich von Bedeutung ist. | - |

3. Die Anzahl der Nachkommastellen bzw. die Gesamtanzahl der Stellen in der Zahl lässt nur dann einen Rückschluss auf die Größe der Zahl zu, wenn im ganzzahligen Bereich oder ganz rechts eine neue Stelle hinzugefügt wird. Dann wird die Zahl jeweils größer. Wird innerhalb der Dezimalstellen eine Stelle hinzugefügt, kann dies die Zahl auch verkleinern.	3. Die Gesamtanzahl der Stellen lässt einen Rückschluss auf die Größe der Zahl zu: Je mehr Stellen die Zahl umfasst, desto größer ist sie, da links anschließende neue Stellen in einer Zahl stets größer sind als ihre rechts benachbarten.	-
4. Größenvergleich an der Zahlengeraden: Die Anzahl der Stellen korreliert nicht mit der Position der Zahl auf der Zahlengeraden. Zwischen zwei natürlichen Zahlen liegen Zahlen mit beliebig vielen Nachkommastellen.	4. Größenvergleich an der Zahlengeraden: Je mehr Stellen die Zahl hat, desto weiter rechts liegt sie auf der Zahlengeraden.	-

Tabelle 2.2 zeigt deutlich, dass zwar die Grundlagen von natürlichen Zahlen und Dezimalbrüchen übereinstimmen, es aber eine Vielzahl an Umbrüchen gibt, die die Erweiterung des Stellenwertsystems von den natürlichen Zahlen zu den Dezimalbrüchen keineswegs im trivialen Licht erscheinen lassen. Die Zusammenstellung der Gemeinsamkeiten und Umbrüche soll im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit genutzt werden, um die Gründe für individuelle Schwierigkeiten der Lernenden beim Umgang mit Dezimalbrüchen herauszuarbeiten. Es ist allerdings zu vermuten, dass dafür die ausschließliche Zusammenstellung nicht ausreicht, sondern vielmehr genauer betrachtet werden muss, welche elementaren Urteile aus dem Bereich der natürlichen Zahlen wie adaptiert werden müssen, um einerseits Gemeinsamkeiten von natürlichen Zahlen und Dezimalbrüchen erkennen und nutzen und andererseits möglichen Hürden im Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Dezimalbrüchen adäquat begegnen zu können.

Nachfolgend werden die Gemeinsamkeiten und Umbrüche zwischen den Dezimalbrüchen und den gemeinen Brüchen betrachtet. Letztere dienen als zweites wichtiges Fundament für ein tragfähiges Dezimalbruchverständnis. Anschließend erfolgt die Elaboration des Schaubildes der wichtigen Aspekte und Zusammenhänge des dezimalen Stellenwertsystems in $\mathbb{N}$ (vgl. Abb. 2.2) für die Dezimalbrüche auf der Grundlage der Analogien und Differenzen von den natürlichen Zahlen zu den Dezimalbrüchen und derer von den gemeinen Brüchen zu den Dezimalbrüchen (vgl. Kap. 2.2.4).

2.2.3 Gemeinsamkeiten und Umbrüche zwischen gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen

Neben der sicheren Beherrschung des erweiterten dezimalen Stellenwertsystems (Dezimalbruch als Summe seiner Stellenwerte, vgl. Kap. 2.2.2), ist die Kenntnis der gemeinen Brüche grundlegend für das Verständnis von Dezimalbrüchen (vgl. Heckmann 2006; Padberg 2009). „Decimal concepts need to be related to a variety of fraction ideas and to place value“ (Michalelidou/Gagatsis/Pitta-Pantazi 2004, S. 306).

Bruchdarstellung und dezimale Stellenwertschreibweise stellen zwei unterschiedliche Schreibweisen für die gleiche rationale Zahl dar, was nicht selten zu einem Verständnis von Brüchen und Dezimalbrüchen als vollkommen verschiedene, zusammenhangslose Zahlssysteme führt (vgl. Günther 1987; Heckmann 2006; Padberg 2008a, 2009). Das Verständnis der Dezimalbrüche ist dann weitgehend losgelöst von dem der Bruchzahlen, obwohl gerade die Verknüpfung von großer Wichtigkeit ist, denn beide Systeme repräsentieren das gleiche Zahlkonzept (vgl. van der Walle 2007).

Der Zusammenhang zwischen den Brüchen und den Dezimalbrüchen zeigt seine Bedeutung in verschiedenen Aspekten. Die meisten der Aspekte spielen eine gleichbedeutende Rolle wie beim Zusammenhang von den natürlichen Zahlen und den Dezimalbrüchen. Das gilt für die Grundvorstellungen, die Zahlbildung / Notationsweise, die Sprechweise und den Größenvergleich. Der Aspekt der Kernideen ist den besonderen Eigenschaften der Brüche geschuldet, die für den Zusammenhang zu den Dezimalbrüchen maßgeblich sind.

- Grundvorstellungen
- Kernideen
- Zahlbildung / Notationsweise
- Sprechweise
- Größenvergleich

Diese fünf Aspekte werden im Folgenden kurz beschrieben und die Gemeinsamkeiten und Umbrüche zwischen den Dezimalbrüchen und den gemeinen Brüchen im Detail tabellarisch dargestellt, um analog zu Kapitel 2.2.2 den Zusammenhang für diese beiden Bereiche näher zu betrachten. Anschließend werden zunächst die Übersetzung von gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen ineinander thematisiert und dann typische Schwierigkeiten diesbezüglich zusammengefasst.

Grundvorstellungen

Aufgrund des engen Zusammenhangs der Dezimalbrüche und der Brüche gelten viele Grundvorstellungen der Brüche gleichermaßen für die Dezimalbrüche (vgl. Malle 2004) und dienen vor allem zu deren inhaltlicher Fundierung (vgl.

Günther 1987; Padberg 2008a; Zech 1998). Die Größe eines Dezimalbruchs lässt sich beispielsweise durch Rückgriff auf die Grundvorstellung des *Bruchs als Anteil* wesentlich prägnanter verdeutlichen als durch den Rückgriff auf die Stellenwerte (vgl. Heckmann 2007; van der Walle 2007). Zudem können die Bezeichnungen für die neuen gebrochenen Stellenwerte dadurch inhaltlich erklärt und generiert werden. Dazu wird ein Einer z. B. in zehn gleich große Teile geteilt, wobei jeder Teil genau einem Zehntel entspricht (vgl. Heckmann 2005; Malle 2004). Die Unterteilung kann für alle weiteren Stellenwerte ebenso vollzogen werden, sodass diese für Schülerinnen und Schüler nicht mehr nur konventional benannt sind, sondern ihre Bezeichnungen auch semantisch gestützt werden. Ebenso erklärt die Erkenntnis, dass jeder Teil vom Ganzen kleiner wird, in je mehr Teile das Ganze unterteilt wird (vgl. Resnick et al. 1989), und damit warum z. B. Hundertstel kleiner sind als Zehntel und nicht, wie bei den ähnlich klingenden ganzzahligen Stellenwerten, größer. Dies fördert das Verständnis für den Zusammenhang zwischen den Stellenwerten, die nun sowohl Einheiten als auch Beziehungen zwischen Einheiten implizieren (vgl. Heckmann 2005; Schmassmann 2009; Kap. 2.2.2).

Kernideen

Kernideen umfassen eine Vor- und Rückschauerspektive und beinhalten neben dem mathematischen Kern auch „individuelle Ideen, die Lernende bei ihrer ersten Begegnung mit mathemathikhaltigen Situationen entwickeln“ (Leuders/Hußmann/Barzel/Prediger 2011, S. 3). Sie umfassen sowohl individuelle als auch fachliche Aspekte. In der Vorschauerspektive stellt eine Kernidee in Frageform die individuellen Ideen des Lernenden dar, die den ganzen Lerngegenstand weitestgehend integrieren und Anlass zu sachbezogenem Handeln geben (vgl. Gallin/Ruf 1994; Leuders et al. 2011). In der Rückschauerspektive beschreiben sie „den ideenbezogenen Kern einer längeren Lernepisode“ (Leuders et al. 2011, S. 8), wozu auch eine allgemeine Problemstellung und die Benennung der zu ihrer Bewältigung notwendigen mathematischen Konzepte gehören (vgl. ebd.).

Die Brüche sind vor allem in Form ihrer Grundvorstellungen *Teil eines Ganzen* und *relativer Anteil* von Bedeutung. Dabei besteht die Möglichkeit der immer feineren Unterteilung. Erfolgt diese systematisch in Zehnerstammbrüche, so erwachsen daraus die Kernideen des *immer feineren Messens* und des *Sichtbarmachens von kleinen Unterschieden*, die ebenso für die Dezimalbrüche gelten (vgl. Barzel/Hußmann/Leuders/Prediger 2012).

Zahlbildung / Notationsweise

Obwohl Dezimalbrüche und gemeine Brüche jeweils Schreibweisen für die gleiche rationale Zahl sein können, sind gerade in der Zahlbildung und der damit verbundenen Notationsweise, deutliche Unterschiede aufzufinden (vgl.

Heckmann 2006; Resnick et al. 1989). Deshalb ist dieser Aspekt für die Beschreibung des Zusammenhangs beider Mengen von großer Bedeutung, um eventuelle Schwierigkeiten von Lernenden verstehen und einordnen zu können (vgl. *Schwierigkeiten bei der Übersetzung*, S. 43).

Sprechweise

In der Sprechweise von Dezimalbrüchen und gemeinen Brüchen zeigen sich Gemeinsamkeiten und Umbrüche, die durch die verschiedenen Notationsweisen bedingt sind (vgl. Heckmann 2006; Resnick et al. 1989). Bei den gemeinen Brüchen werden sowohl die Anzahl als auch die Größe der Teile versprochen, wobei die Größe der Teile als Einheit gesehen wird. Der Dezimalbruch wird hingegen weitestgehend als Summe seiner Stellenwerte, unter Berücksichtigung des Prinzips der fortgesetzten Bündelung im ganzzahligen Teil, expliziert (vgl. ebd.).

Größenvergleich

Aufgrund der unterschiedlichen Zahldarstellung von gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen unterscheidet sich auch der Größenvergleich deutlich. Dezimalbrüche können direkt stellenweise verglichen werden, gemeine Brüche nur dann, wenn sie bereits durch den gleichen Nenner dargestellt werden. Ansonsten müssen die zu vergleichenden Brüche durch Kürzen oder Erweitern zunächst gleichnamig gemacht werden.

Wie auch im Bereich der natürlichen Zahlen, werden die Gemeinsamkeiten und Umbrüche bezüglich der vier Grundrechenarten nicht aufgegriffen, da sie für die vorliegende Arbeit nicht von Bedeutung sind.

Die nachfolgende Tabelle 2.3 führt strukturgleich zu Tabelle 2.2 die Gemeinsamkeiten (+) und Umbrüche (-) zwischen den gemeinen Brüchen und den Dezimalbrüchen unter den oben beschriebenen Aspekten auf (vgl. Günther 1987; Heckmann 2005, 2006; Leuders et al. 2011; Malle 2004; Padberg 2009; Resnick et al. 1989; Schmassmann 2009).

Tabelle 2.3 Gemeinsamkeiten und Umbrüche zwischen gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen

Elementare Urteile bei den Dezimalbrüchen	Entsprechende elementare Urteile bei den gemeinen Brüchen	Gem. (+) und Umb. (-)
Grundvorstellungen		
1. <i>Bruch als Anteil</i> : Z. B. 0,45 als 45 von 100 gleich großen Teilen, die in ein Ganzes passen, zu deuten ist eine Bereicherung zu der oftmals rein syntaktischen Interpretation des Dezimalbruchs als Summe seiner Stellenwerte (4 Zehntel + 5 Hundertstel). Dadurch erfolgt auch eine semantische Stützung der Bezeichnungen der Stellenwerte.	1. <i>Bruch als Anteil</i> : Z. B. $\frac{45}{100}$ wird als 45 von 100 gleich großen Teilen gedeutet, die in ein Ganzes passen.	+
2. Jeder Teil vom Ganzen wird kleiner, in je mehr Teile das Ganze geteilt wird, daher gilt für die Stellenwerte $z > h > t$ usw.	2. Jeder Teil vom Ganzen wird kleiner, in je mehr Teile das Ganze geteilt wird.	+
3. <i>Quasikardinalzahl</i> : Z. B. wird 0,2 als 2 Zehntel gedeutet, wobei Zehntel, Hundertstel, etc. gemäß dem Maßzahlaspekt als neue Einheiten gesehen werden.	3. <i>Quasikardinalzahl</i> : Z. B. wird $\frac{2}{10}$ als 2 Zehntel gedeutet, wobei Zehntel, Hundertstel, etc. gemäß dem Maßzahlaspekt als neue Einheiten gesehen werden.	+
4. <i>Ergebnis einer Division</i> : Dezimalbrüche können als Ergebnis einer Division natürlicher (bzw. ganzer) Zahlen interpretiert werden. Darauf beruht primär die endliche Dezimalbruchentwicklung als Verfahren zur Erzeugung von Dezimalbrüchen.	4. <i>Ergebnis einer Division</i> : Gemeine Brüche können als Ergebnis einer Division natürlicher Zahlen interpretiert werden, z. B. $\frac{4}{10} = 4 : 10$.	+
5. Dezimalbrüche liegen dicht auf der Zahlengeraden. Zwischen zwei Dezimalbrüchen liegen unendlich viele andere.	5. Gemeine Brüche liegen dicht auf der Zahlengeraden. Zwischen zwei gemeinen Brüchen liegen unendlich viele andere.	+
6. Dezimalbrüche können Werte zwischen zwei natürlichen Zahlen darstellen.	6. Gemeine Brüche können Werte zwischen zwei natürlichen Zahlen darstellen.	+
Kernideen		
1. Kernideen: <i>Immer feiner messen und Sichtbarmachen kleiner Unterschiede.</i>	1. Kernideen: U. a. <i>immer feiner messen und Sichtbarmachen kleiner Unterschiede.</i>	+

Zahlbildung / Notationsweise

1. Die Stellenwertschreibweise ist eine formal-symbolische Schreibweise für eine rationale Zahl.	1. Die Bruchdarstellung ist eine formal-symbolische Schreibweise für eine rationale Zahl.	+
2. Die Größe der Teile, in die ein Ganzes unterteilt wird, wird implizit durch den kleinsten Stellenwert des Dezimalbruchs dargestellt.	2. Die Größe der Teile, in die ein Ganzes unterteilt wird, wird explizit durch den Nenner dargestellt.	-
3. Die Anzahl der Teile, in die ein Ganzes unterteilt wird, wird explizit durch die Ziffern des Dezimalbruchs dargestellt.	3. Die Anzahl der Teile, in die ein Ganzes unterteilt wird, wird explizit durch den Zähler dargestellt.	-
4. Das Ganze wird ausschließlich in Vielfache von 10 aufgeteilt.	4. Das Ganze kann in beliebig große Teile aufgeteilt werden.	-

Sprechweise

1. Die Endung -tel bei den gebrochenen Stellenwerten (Zehntel, Hundertstel, usw.) ist typisch für einen Bruchteil.	1. Die Endung -tel (z. B. Drittel, Viertel) ist typisch für einen Bruchteil (Ausnahme: alle Brüche mit Nenner 2 werden als „Halbe“ betitelt).	+
2. Der Dezimalbruch wird weitestgehend als Summe seiner Stellenwerte unter Berücksichtigung des Prinzips der fortgesetzten Bündelung im ganzzahligen Teil versprachlicht (vgl. Kap. 2.2.1).	2. Es werden sowohl die Anzahl als auch die Größe der Teile versprachlicht, wobei die Größe der Teile als Einheit jeweils auf der Endung -tel endet.	-

Größenvergleich

1. Zum Größenvergleich wird das lexikografische Verfahren genutzt.	1. Beim Größenvergleich werden die zu vergleichenden Brüche zunächst gleichnamig gemacht. Danach erfolgt ein lexikografischer Vergleich der Zähler.	-
--	---	---

Tabelle 2.3 zeigt gerade hinsichtlich der Aspekte der Zahlbildung / Notationsweise und der Sprechweise sowie beim Größenvergleich deutliche Unterschiede zwischen den gemeinen Brüchen und den Dezimalbrüchen, während Eigenschaften bezüglich der Grundvorstellungen und Kernideen für beide Mengen weitestgehend identisch sind. Auch diese Zusammenstellung soll wie die Systematisierung der Zusammenhänge von Dezimalbrüchen und natürlichen Zahlen (vgl. Tab. 2.2, Kap. 2.2.2) im weiteren Verlauf der Ausarbeitung der Gründe für individuelle Schwierigkeiten der Lernenden beim Umgang mit Dezimalbrüchen dienen. Allerdings liegt auch in diesem Bereich die Vermutung nahe, dass nur die Zusammenstellung von Gemeinsamkeiten und Umbrüchen nicht ausreichend ist, um diese Gründe zu verstehen (vgl. Kap. 2.2.2). Obwohl zu den Schwierigkeiten im Umgang mit den Dezimalbrüchen weitreichende Studien

und Forschungsergebnisse vorliegen (vgl. Kap. 2.1), gibt es jedoch kaum Befunde zu den genauen Gründen und Folgerungen der individuellen Interpretationen von Dezimalbrüchen. An diesem Punkt eröffnet sich ein Feld, an dem weitere Forschung angesiedelt werden soll.

Zusammenfassend wird deutlich, dass für ein tragfähiges Dezimalbruchverständnis neben dem Wissen über das erweiterte Stellenwertsystem eine maximale Flexibilität zwischen gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen durch das Verständnis, wie diese beiden Systeme zusammenhängen, anzustreben ist (vgl. van de Walle 2007).

Wechselseitiges Übersetzen zwischen gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen

Spezifische gemeine Brüche und spezifische Dezimalbrüche können jeweils Repräsentanten derselben Äquivalenzklasse einer rationalen Zahl sein, in der gleichwertige Brüche zusammengefasst werden. Als Bindeglied fungiert der Zehnerbruch, so gilt z. B. $\frac{8}{10} = 0,8$; $\frac{32}{100} = 0,32$ oder $\frac{149}{1000} = 0,149$ usw. Der Dezimalbruch wird als *ein* Bruch identifiziert (z. B. $0,32 = \frac{32}{100}$) und nicht als Summe seiner Stellenwerte (z. B. $0,32 = 0,3 + 0,02 = \frac{3}{10} + \frac{2}{100}$) (vgl. Günther 1987; Heckmann 2005, 2006; Padberg 2009). Gleiches gilt für gemeine Brüche, bei denen durch Kürzen oder Erweitern eine Zehnerpotenz im Nenner generiert werden kann, z. B. $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0,6$. Alle anderen Brüche können durch den Divisionsalgorithmus in einen Dezimalbruch überführt werden (vgl. Kap. 2.2.1; vgl. Padberg/Danckwerts/Stein 1995; Padberg 2008a).

Schwierigkeiten bei der Übersetzung

Der Zusammenhang zwischen gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen und insbesondere das wechselseitige Übersetzen zwischen ihnen bereitet Lernenden immer wieder Schwierigkeiten (vgl. u. a. Carpenter et al. 1981; Günther 1987; Heckmann 2006; Padberg 2009; Resnick et al. 1989). Es ist zu beobachten, dass es ihnen leichter fällt, gemeine Brüche und vor allem Zehnerbrüche in Dezimalbrüche zu transferieren als umgekehrt (vgl. Heckmann 2006; Padberg 2009). In beiden Übersetzungsrichtungen sind typische mathematisch nicht tragfähige Strategien zu identifizieren, die im Folgenden als Überblick tabellarisch dargestellt werden (vgl. u. a. Carpenter et al. 1981; Günther 1987; Heckmann 2006; Padberg 2009; Resnick et al. 1989). In Tabelle 2.4 beschreibt DB) jeweils die Fehler in der Übersetzung von Dezimalbrüchen in gemeine Brüche und BD) die umgekehrte Richtung.

Tabelle 2.4 Mathematisch nicht tragfähige Strategien beim Übersetzen zwischen gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen

Strategie	Kurze Erläuterung
Gleichsetzung von Komma und Bruchstrich	DB) Komma und Bruchstrich werden als synonym betrachtet, z. B. $1,7 = \frac{1}{7}$. Bei Dezimalbrüchen mit einer Null vor dem Komma, wird diese entweder als Zähler des gemeinen Bruchs übernommen oder durch Eins ersetzt. BD) Komma und Bruchstrich werden als synonym betrachtet, z. B. $\frac{1}{7} = 1,7$ und $\frac{3}{5} = 3,5$.
Beliebige Setzung des Kommas	BD) Rein syntaktisches Vorgehen nach folgendem Algorithmus: Schreibe den Zähler und Nenner als Ziffernfolge hintereinander und setze irgendwo ein Komma dazu, z. B. $\frac{3}{4} = 3,4$ oder $0,34$.
Null-Komma-Zähler	BD) Nur der Zähler wird in den Dezimalbruch übertragen und direkt nach dem Komma notiert, der Nenner findet keine Beachtung; z. B. $\frac{3}{4} = 0,3$ und $\frac{3}{100} = 0,3$. Diese fehlerhafte Strategie funktioniert für bestimmte Zehnerbrüche und weist auf ein Wissen bezüglich des Zusammenhangs geschriebener Ziffern in Brüchen und Dezimalbrüchen hin. Größe und Anzahl der Teile werden in Brüchen explizit durch Zähler und Nenner ausgedrückt. Die Anzahl der Teile wird in Dezimalbrüchen ebenfalls explizit durch die Ziffern repräsentiert, die Größe der Teile wird allerdings nur implizit durch die Position der Ziffer deutlich (vgl. Zahlbildung / Notationsweise, Tab. 2.3).
Null-Komma-Nenner	BD) Es wird ausschließlich der Nenner in den Dezimalbruch übertragen, der Zähler wird nicht beachtet, z. B. $\frac{3}{4} = 0,4$ oder $\frac{1}{3} = 0,3$. Diese fehlerhafte Strategie weist auf das Wissen hin, dass lediglich Zähler oder Nenner des Bruchs explizit in die Dezimalschreibweise übertragen wird. Die Entscheidung fällt allerdings auf den Nenner statt auf den Zähler (vgl. Zahlbildung / Notationsweise, Tab. 2.3).
Zähler und Nullen des Nenners	DB) Die Ziffern nach dem Komma werden ohne (ggf. vorhandene) Vornullen in den Zähler geschrieben. Letztere werden im Nenner an die 1 angehängt, z. B. $0,3 = \frac{3}{1}$; $0,03 = \frac{3}{10}$ usw. BD) Der Zähler des Bruchs wird hinter das Komma geschrieben. Die (ggf. vorhandenen) Nullen im Nenner werden als Nullen zwischen Komma und Zähler notiert, z. B. $\frac{3}{100} = 0,003$
Ziffernfolge von rechts nach links	DB) Die Ziffernfolge wird von rechts nach links in den Nenner eines Stammbruchs geschrieben, z. B. $0,3 = \frac{1}{30}$. Diese Vorgehensweise funktioniert allerdings nur für die Übersetzung von $0,1$; $0,01$; $0,001$; usw.

Stellenwerte	Lernende gehen bei Dezimalbrüchen von einer Symmetrie zum Komma aus. Die zweite Nachkommastelle repräsentiert somit die Zehntel. Als Pendant zu den Einern wird rechts des Kommas von Einteiln ausgegangen. DB) z. B. $0,29 = \frac{29}{10}$ BD) z. B. $\frac{123}{100} = 0,123$ Die erste Nachkommastelle wird als Hundertstel gedeutet, da Lernende davon ausgehen, dass $\frac{1}{100} = 0,1$ ist. DB) z. B. $0,3 = \frac{3}{100}$ BD) z. B. $\frac{1}{100} = 0,1$
Notation von Bündelungen höherer Ordnung	Fehlerhafter Transfer aus $\mathbb{N}$: Da bei den natürlichen Zahlen beispielsweise 87 Zehner oder 23 Hunderter ausgehend von der Zehner- bzw. von der Hunderterstelle nach links geschrieben werden, gehen Lernende bei der umgekehrten Blickrichtung davon aus, dass 87 Zehntel oder 23 Hundertstel ausgehend von der Zehntel- bzw. von der Hundertstelstelle nach rechts geschrieben und so als Block auf die jeweilige Stelle gesetzt werden. DB) z. B. $0,87 = \frac{87}{10}$ BD) z. B. $\frac{23}{100} = 0,023$

Die Vielzahl verschiedenartiger Fehlvorstellungen bezüglich des Übersetzens von Dezimalbrüchen und gemeinen Brüchen ineinander lässt darauf schließen, dass der bedeutende Zusammenhang zwischen Dezimalbrüchen und gemeinen Brüchen oftmals nicht durchschaut wird (vgl. Padberg 2009). Hürden beim Übergang von den gemeinen Brüchen zu den Dezimalbrüchen können nicht überwunden werden, da die Gemeinsamkeiten und Umbrüche der gemeinen Brüche und der Dezimalbrüche eventuell nicht wahrgenommen und verstanden wurden. Dies kann als ein Grund für ein nur teilweise ausgebildetes Dezimalbruchverständnis gesehen werden, was im weiteren Verlauf der Studie näher untersucht wird.

2.2.4 Fazit

Betrachtet man die Umbrüche, einerseits von den natürlichen Zahlen zu den Dezimalbrüchen (vgl. Kap. 2.2.2) und andererseits von den gemeinen Brüchen zu den Dezimalbrüchen (vgl. Kap. 2.2.3), so wird deutlich, dass die Strukturierung der wichtigen Aspekte und Zusammenhänge des dezimalen Stellenwertsystems in $\mathbb{N}$ (Abb. 2.2) hinsichtlich des Dezimalbruchverständnisses auf zwei Weisen modifiziert werden muss. Da die Urteile in Bezug auf die einzelnen Aspekte immer unmittelbar mit Situationsklassen zusammenhängen, muss nun die Gültigkeit der bestehenden Urteile (und der damit zusammenhängenden Urteilsnetze) für die neuen Situationsklassen der Dezimalbrüche geprüft wer-

den, um zu entscheiden, ob die bestehenden Urteile weiterhin genutzt werden können oder modifiziert werden müssen. Einerseits müssen bezüglich der zentralen Aspekte *Teil-Ganzes-Prinzip*, *Prinzip der fortgesetzten Bündelung* sowie *Eigenschaft der Zehnerbasis* die entsprechenden Urteile aus dem Bereich der natürlichen Zahlen adaptiert werden, da sie für die Dezimalbrüche nur noch teilweise Gültigkeit besitzen. Dies wird in Abbildung 2.3 durch die gestrichelten Rahmen dieser Aspekte verdeutlicht. Andererseits müssen Urteile und Urteilsnetze zu den wichtigen Aspekten *Komma*, *Bruch als Anteil*, *Zehnerbruch als Anteil* und *Gleichwertigkeit Dezimalbrüche – Brüche* hinzugenommen und in die bestehenden Zusammenhänge integriert werden. Dies wird in Abbildung 2.3 durch die gepunkteten Rahmen dieser Aspekte gekennzeichnet.

Hinsichtlich der Strukturierung der Aspekte des Dezimalbruchverständnisses und der Beschreibung eines präskriptiven Lernpfades ist die Zahlbereichserweiterung von den natürlichen zu den positiv rationalen Zahlen zentral, die eine Adaption der Urteile bezüglich des Teil-Ganzes-Prinzips, des Prinzips der fortgesetzten Bündelung und der Eigenschaft der Zehnerbasis beim Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Dezimalbrüchen bedingt. Die Modifizierungen der Urteile und Urteilsnetze gestalten sich derart, dass durch die Zahlbereichserweiterung für beliebige Zahlen nicht mehr ausschließlich ganzzahlige Zerlegungen (in natürliche Zahlen), sondern auch Zerlegungen in Anteile (in rationale Zahlen) eingegangen werden können. Es gibt für jede Zahl unendlich viele Zerlegungen (*Teil-Ganzes-Prinzip*). Für das *Prinzip der fortgesetzten Bündelung* gilt zwar weiterhin die aufgeführte Regel, die auch im Bereich der natürlichen Zahlen Gültigkeit besitzt (vgl. Abb. 2.3), allerdings bedeutet die Zahlbereichserweiterung auch eine Erweiterung der möglichen Bündelungseinheiten, dergestalt, dass die Zehnerstammbrüche als zusätzliche Bündelungseinheiten integriert werden müssen. Für die *Eigenschaft der Zehnerbasis* heißt das weiterhin, dass die Stellenwerte nicht mehr nur durch Zehnerpotenzen mit Exponenten aus $\mathbb{N}_0$ dargestellt werden, sondern die Exponenten nun Element der ganzen Zahlen sind. Die negativen Exponenten verdeutlichen die gebrochenen Stellenwerte, die im Prinzip der fortgesetzten Bündelung den Zehnerstammbrüchen entsprechen.

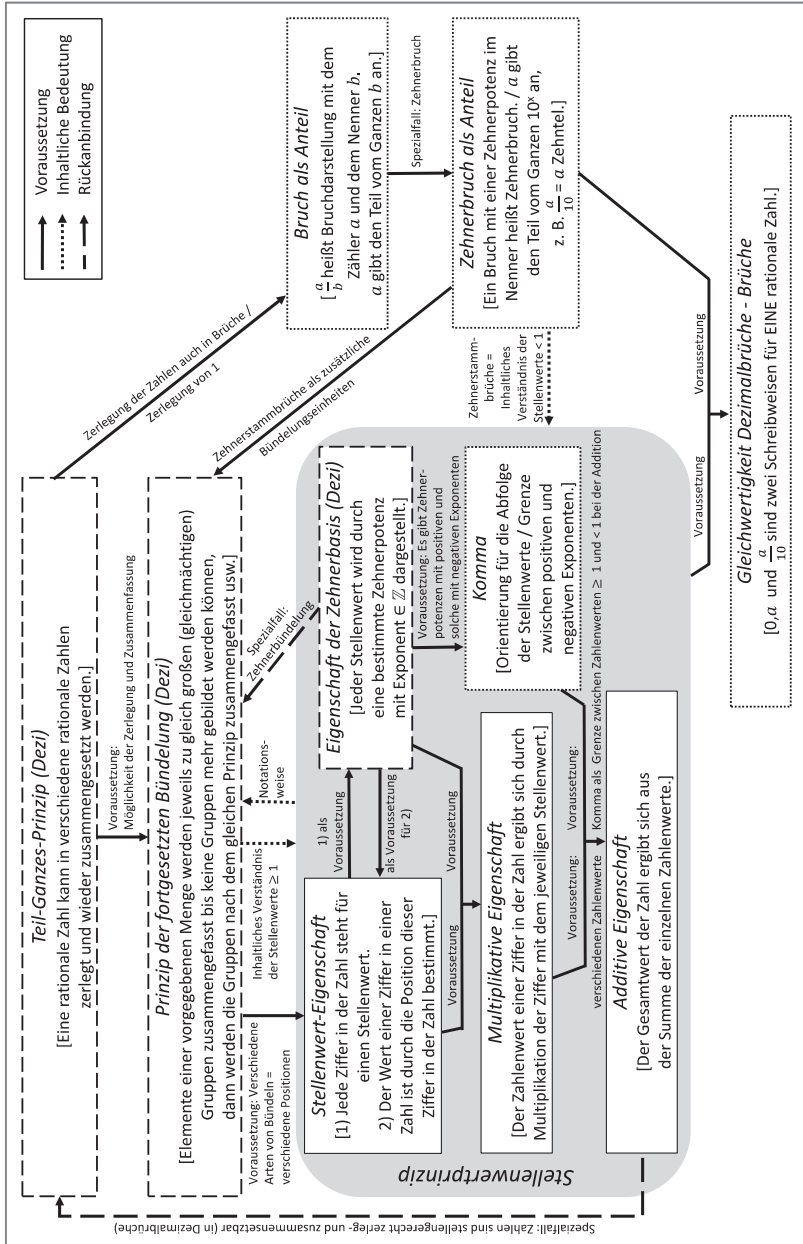


Abbildung 2.3 Wichtige Aspekte und Zusammenhänge des Dezimalbruchverständnisses

Zusätzlich zu diesen Änderungen müssen vier weitere Aspekte in die Strukturierung der wichtigen Aspekte des dezimalen Stellenwertverständnisses in $\mathbb{N}$ (vgl. Abb. 2.2) integriert werden, um eine Strukturierung der Aspekte des Dezimalbruchverständnisses (vgl. Abb. 2.3) zu erlangen. Das *Komma* als Orientierung für die Abfolge der Stellenwerte steht in direktem Zusammenhang zur Notation der Bündelungsergebnisse und wird daher in das Stellenwertprinzip eingegliedert. Es kennzeichnet die Grenze zwischen den ganzzahligen und den gebrochenen Stellenwerten. Die anderen drei neuen Aspekte befinden sich im Bereich der Brüche, die wie in Kapitel 2.2.3 beschrieben, fruchtbarer Nährboden für das Dezimalbruchverständnis sind: Der *Bruch als Anteil* und darauf aufbauend der Spezialfall des *Zehnerbruchs als Anteil*, der das inhaltliche Verständnis der gebrochenen Stellenwerte liefert. Zudem der Aspekt *Gleichwertigkeit Dezimalbrüche – Brüche*, dessen Urteile beinhalten, dass Dezimalbrüche und gemeine Brüche zwei Schreibweisen für die gleiche rationale Zahl sein können.

Die Urteile bezüglich Stellenwert-Eigenschaft, Multiplikativer und Additiver Eigenschaft besitzen auch für den erweiterten Zahlbereich der positiv rationalen Zahlen weiterhin Gültigkeit und können daher eins zu eins aus dem Bereich der natürlichen Zahlen übernommen werden.

Die Visualisierung der wichtigen Aspekte und Zusammenhänge des Dezimalbruchverständnisses (vgl. Abb. 2.3) auf der Grundlage der theoretischen Erkenntnisse und der bereits eingegangenen Erklärungen bildet die Strukturierung und Spezifizierung des Lerngegenstandes der Dezimalbrüche, auf die die vorliegende Arbeit im weiteren Verlauf aufbaut.

Die Aspekte des Dezimalbruchverständnisses, die in diesem Kapitel herausgearbeitet wurden, können Schülerinnen und Schülern z. B. als Fokussierungen dienen. So kann in der Situation ‚1,12 und 1,3 vergleichen‘ beispielsweise die Fokussierung ‚Stellenwert-Eigenschaft‘ aktiviert werden, um zu erkennen, dass die Ziffern rechts des Kommas nicht insgesamt eine natürliche Zahl, sondern einzelne Stellen des Dezimalbruchs darstellen. Fokussierungen, die sich auf diese Aspekte und Zusammenhänge des Dezimalbruchverständnisses beziehen und somit meist verinnerlichte Urteile hervorrufen, werden in dieser Arbeit auf der *konzeptuellen Ebene* zusammengefasst.

Abschließend ist anzumerken, dass in der Grafik (vgl. Abb. 2.3) die wichtigen Aspekte und Zusammenhänge des Dezimalbruchverständnisses angesprochen werden, die, bei tragfähigem Aufbau, als Grundlage für das Operieren mit Dezimalbrüchen von Lernenden aktiviert werden sollten. Bezüglich des Operierens wird in den empirischen Erhebungen vor allem der Dezimalbruchvergleich als Anlass genutzt, um die individuellen Begründungsstrukturen der Schülerinnen und Schüler beim Umgang mit Dezimalbrüchen rekonstruieren und analysieren zu können.

2.3 Zentrale Darstellungen von Dezimalbrüchen

Nach der Strukturierung der wichtigen Aspekte des Dezimalbruchverständnisses wird in diesem Kapitel darauf aufbauend erörtert, welche Darstellungen bedeutsam für den Aufbau eines tragfähigen Dezimalbruchverständnisses sein können. Dabei werden die Vor- und Nachteile der ausgewählten Darstellungen hinsichtlich der Vermittlung der verschiedenen wichtigen Aspekte des Dezimalbruchverständnisses (vgl. Abb. 2.3) näher beleuchtet. Die Urteile bezüglich dieser Prinzipien und Eigenschaften können jeweils unter Rückbezug u. a. auf drei verschiedene Darstellungen des Dezimalbruchs getroffen werden: Die formal-symbolische Zahldarstellung, die Darstellung an der Stellenwerttafel und die Darstellung an der Zahlengeraden.

Um Lernende beim Aufbau des Begriffsverständnisses zu den Dezimalbrüchen zu unterstützen, bietet sich der Umgang mit anschaulichen Modellen, wie z. B. Skalen oder Flächenmodellen an (vgl. Heckmann 2005; Klika 1997). Außerdem wird immer wieder der konsequente Umgang mit der Stellenwerttafel als hilfreiches Mittel zum Begriffsaufbau genannt (vgl. u. a. Günther 1987; Heckmann 2006; Klika 1997; Padberg 2009). Die Mehrsystem-Blöcke/Zehnerblöcke (vgl. u. a. Baroody/Coslick 1998; Heckmann 2006; Wearne/Hiebert 1988) oder die Linearen Arithmetik-Blöcke (vgl. u. a. Heckmann 2006; Steinle/Stacey 1998a) zeichnen sich durch eine hohe Anschaulichkeit aus, da in beiden Materialien jeder Stellenwert einen eindeutigen Repräsentanten besitzt und durch das Material zusätzlich die Beziehungen zwischen den Stellenwerten ausgedrückt werden können (vgl. u. a. Baroody/Coslick 1998; Steinle/Stacey 1998b; Wearne/Hiebert 1988). Daher sind sie für den Aufbau des Stellenwertverständnisses im Bereich der natürlichen Zahlen sehr gut geeignet (vgl. ebd.).

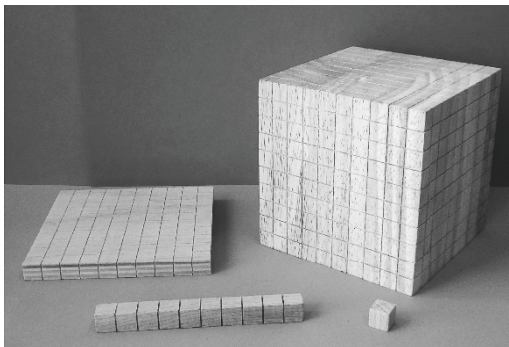


Abbildung 2.4 Mehrsystem-Blöcke / Zehnerblöcke (Mosandl/Nührenböcker 2014, S. 22)

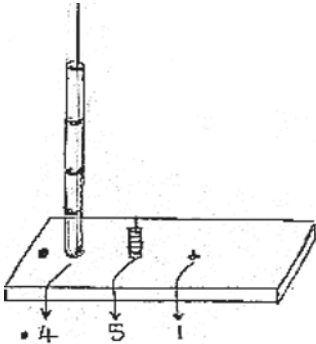


Abbildung 2.5 Lineare Arithmetik-Blöcke (Archer & Condon 1999, S. 51)

Die Lernenden, die in der vorliegenden Studie in den Blick genommen werden, sollten sich aufgrund ihres Entwicklungs- und Kenntnisstandes sowie des Zahlbereichs, in dem sie operieren, von konkreten Materialien weg und hin zu abstrakteren Darstellungen bewegen. Da es beispielsweise keine Mengenvorstellung für beliebige Dezimalbrüche gibt (vgl. Kap. 2.4.1), ist ein Darstellungsmittel mit konkreten Repräsentanten für einen Stellenwert eher weniger sinnvoll. Die Größenverhältnisse der Stellenwerte zueinander können ebenso an der Zahlengeraden erfahren werden (vgl. Kap. 2.3.3). Aufgrund des Fokus auf die Wiedererarbeitung und aufgrund der oben genannten Argumente, sind demnach Zahlengerade und Stellenwerttafel von besonderer Bedeutung, da sie die Eigenschaften des dezimalen Stellenwertsystems im Gegensatz zu den Mehrsystem-Blöcken/Zehner-Blöcken und den Linearen Arithmetik-Blöcken auf einem etwas abstrakteren Niveau erklären (vgl. Padberg 2009). Ebenso bieten beide Darstellungen die Möglichkeit, beliebig große bzw. beliebig kleine Dezimalbrüche zu veranschaulichen.

Nachfolgend wird eine kurze Erläuterung der formal-symbolischen Zahldarstellung und deren Bedeutung sowie die Spezifizierung der Darstellungsmittel Stellenwerttafel und Zahlengerade vollzogen. Diese bieten eine Möglichkeit, um den beschriebenen Fehlvorstellungen (vgl. Kap. 2.1; Kap. 2.2.3) entgegenzuwirken, dergestalt, dass mithilfe der Veranschaulichung der wichtigen Aspekte des Dezimalbruchverständnisses ein inhaltliches Begriffsverständnis des Dezimalbruchs aufgebaut wird, das die mathematisch nicht oder nur teilweise tragfähigen Denkweisen überdeckt. Dabei werden sowohl die Strukturen der Darstellungen als auch die damit verbundenen angenommenen Lernprozesse betrachtet. Abschließend erfolgt ein Fazit, indem die Bedeutung dieser Darstellungsmittel für den Aufbau eines tragfähigen Dezimalbruchverständnisses bzw. für die Aufarbeitung von Fehlvorstellungen diesbezüglich diskutiert wird.

2.3.1 Die formal-symbolische Zahldarstellung

Durch das Stellenwertprinzip (vgl. Kap. 2.2.1) kann jede beliebige Menge oder Anzahl bzw. jeder beliebige Bruch eindeutig notiert werden. Diese eindeutige Notation heißt formal-symbolische Zahldarstellung, da mit endlich vielen Zeichen, unter denen eine klare Reihenfolge festgelegt ist, beliebig lange Zeichenketten erzeugt werden können, die die entsprechenden Zahlenwerte eindeutig repräsentieren (vgl. Hefendehl-Hebeker/Schwank 2015). Die formal-symbolische Zahldarstellung ist in jedem Zahlbereich zentral und u. a. bei den Dezimalbrüchen fester Bestandteil der anderen Darstellungsformen, da der Darstellungswechsel beispielsweise zur Zahlengeraden oder zur Stellenwerttafel beim Umgang mit den verschiedenen Darstellungen eine große Rolle spielt und gleichzeitig das Verständnis der formal-symbolischen Zahldarstellung fördert.

Neben dem Verständnis der anderen Darstellungen, die vor allem der Veranschaulichung dienen, beinhaltet ein tragfähiges Dezimalbruchverständnis insbesondere auch das Verstehen dieser abstrakteren formal-symbolischen Zahldarstellung, um nach dem Erwerb des Begriffsverständnisses effizient und losgelöst von Zahlengerade und Stellenwerttafel mit den Dezimalbrüchen operieren zu können.

2.3.2 Die Darstellung in der Stellenwerttafel

Die Stellenwerttafel bietet sich als Anschauungsmittel zur Erweiterung von den natürlichen Zahlen zu den Dezimalbrüchen an, da die grundlegenden Prinzipien und Eigenschaften des dezimalen Stellenwertsystems anschaulich genutzt und für die Dezimalbrüche fortgeführt werden können (vgl. Kap. 2.2.1). Das *Teil-Ganzes-Prinzip* wird durch die stellengerechte Zerlegung der Zahlen aufgegriffen, während sich das *Prinzip der fortgesetzten Bündelung* durch die Basis 10 als Grundzahl bzw. Einheit der Stellenwerte zeigt. Die *Stellenwert-Eigenschaft* wird durch die tabellarisch feste Anordnung der Stellenwerte repräsentiert, die fortgesetzte Teilung bzw. Vervielfachung der Einheit durch/ mit 10 (vgl. Padberg 2009) spiegelt die *Eigenschaft der Zehnerbasis* wider. Die *Multiplikative Eigenschaft* lässt sich durch die tabellarische Darstellung, wie viele Bündel einer Mächtigkeit vorhanden sind, erkennen. In Abbildung 2.6 sind es a Bündel der Mächtigkeit 10^0 , b Bündel der Mächtigkeit 10^{-1} und c Bündel der Mächtigkeit 10^{-2} . Es wird eine stellengerechte, vertikale Sichtweise eingenommen.

Zehner 10^1	Einer 10^0	Zehntel 10^{-1}	Hundertstel 10^{-2}
	a	b	c

Abbildung 2.6 Die erweiterte Stellenwerttafel

Die *Additive Eigenschaft* kommt beim horizontalen Ablesen der gesamten Zahl zum Tragen, die als Summe ihrer Stellenwerte gesehen wird.

Zudem können mithilfe der elementaren Bruchvorstellungen (vgl. Kap. 2.2.3) und vor allem durch die Vorstellung der fortgesetzten Teilung der Einheit durch 10 die neuen gebrochenen Stellenwerte (Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, usw.) erklärt und verstanden werden (vgl. ebd.). Die Grundvorstellung des Dezimalbruchs als Quasikardinalzahl (vgl. ebd.) wird dabei unterstützt und genutzt, um den Dezimalbruch in der Stellenwerttafel zu veranschaulichen (z. B. *b* Zehntel und *c* Hundertstel in Abb. 2.6).

„Dezimalbrüche werden so [durch die Stellenwerttafel] eher als *eine* Zahl angesehen und nicht – wie sonst häufig – als *zwei* durch ein Komma getrennte natürliche Zahlen.“ (Padberg 2009, S. 169, Hervor. im Orig., Einf. L. S.)

Gerade das Eintragen von Zahlen in die Stellenwerttafel, also der Darstellungswechsel zwischen formal-symbolischer Zahldarstellung und der Darstellung an der Stellenwerttafel, hilft, die Auffassung von Dezimalbrüchen als zwei durch ein Komma getrennte natürliche Zahlen zu vermeiden und hebt die Zehnerbündelung hervor (vgl. Günther 1987). Es kann erkannt werden, warum es sinnvoll ist, nur die Ziffern 0 bis 9 in die Stellenwerttafel einzutragen und zugleich, wie eine Zahl durch verschiedene Bündelungen flexibel dargestellt werden kann (vgl. Ladel/Kortenkamp 2014). Das Komma kennzeichnet den Übergang von den ganzzahligen zu den gebrochenen Stellenwerten und übernimmt in der formal-symbolischen Zahldarstellung die Markierungsfunktion zur Orientierung bezüglich der Stellenwerte (vgl. Günther 1987; Heckmann 2006; Padberg 2009).

Ebenso wie die mathematischen Beziehungen und Strukturen kann mithilfe der Stellenwerttafel auch der symmetrische Aufbau der Dezimalbrüche thematisiert werden. Die Zusammensetzung der Stellenwerte ist durch die ähnlich klingenden Bezeichnungen jeweils zweier Stellenwerte (außer bei den Einern) symmetrisch zur Einer-Stelle (vgl. Baturo 1999). Diese Symmetrie zur Einer-Stelle und nicht zum Komma wird durch das fehlende Gegenstück zu den Einern in der Stellenwerttafel transparent. Letzteres kann wiederum durch die begründete Generierung der neuen gebrochenen Stellenwerte (fortgesetzte Teilung der Einheit durch 10, s. o.) verstanden werden.

Die Stellenwerttafel weist außerdem viele weitere Vorteile auf, die sich positiv auf das Begriffsverständnis der Schülerinnen und Schüler auswirken können (vgl. Günther 1987; Heckmann 2006; Padberg 2009):

- Durch die Generierung und auch Bezeichnung der gebrochenen Stellenwerte wird verdeutlicht, dass die Dezimalbrüche eine andere Schreibweise für Brüche darstellen, wobei die Zehnerbrüche als Bindeglied fungieren.
- Die stellenwertbelegende Funktion der Null wird sichtbar, da erkennbar ist, dass nicht belegte Spalten bis zum Komma mit Nullen aufgefüllt werden können.

- Die strukturierte Schreibweise in der Stellenwerttafel ist außerdem hilfreich bei der Begründung und dem Erwerb des Dezimalbruchvergleichs, sowie der Addition und Subtraktion, wenn gleiche Stellenwerte miteinander verglichen bzw. addiert/subtrahiert werden müssen.

Ein Nachteil der Stellenwerttafel ist ihre sehr abstrakte und nicht bildliche Verdeutlichung der Zahlen. Die Zusammenhänge und Strukturen, die durch die Stellenwerttafel dargestellt werden, lassen sich allerdings sehr gut in Handlungen umsetzen, z. B. mit Zehnerblöcken oder einem Rechenbrett (vgl. Heckmann 2006). Mit Hinblick auf die Schülerklientel, die bei dieser Untersuchung von Bedeutung ist, ist es, wie bereits erwähnt, allerdings sinnvoll, auf etwas abstraktere Darstellungsmittel wie Stellenwerttafel und Zahlengerade zurückzugreifen.

2.3.3 Die Darstellung an der Zahlengeraden

Die dekadische Zahlengerade als lineares Modell ist besonders zur Verdeutlichung der Ordinalität und der Dichte der Dezimalbrüche geeignet (vgl. Heckmann 2007) und kann ein Verständnis von Größenordnung stützen (vgl. Heckmann 2006). Sie bietet einen Überblick über die Anordnung der Dezimalbrüche: Je weiter rechts eine Zahl auf der Zahlengeraden liegt, desto größer ist sie. Diese Eigenschaft zeigt einen Unterschied zur Stellenwerttafel auf, bei der die Stellenwerte von links nach rechts immer kleiner werden (vgl. 2.3.2; vgl. Bove 1995).

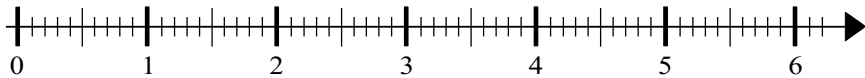


Abbildung 2.7 Die Zahlengerade

Der Aufbau der Zahlengeraden basiert auf der fundamentalen Idee des Messens, die sich bezüglich der Dezimalbrüche zur Idee des immer feineren Messens konkretisiert und zur Kernidee wird, da zwischen zwei Strichen immer feiner unterteilt und somit auch immer feiner gemessen werden kann. Aufgrund dieser Bedeutung ist die Zahlengerade z. B. im Ansatz der Realistic Mathematics Education (RME) das zentrale Modell zur Behandlung der Dezimalbrüche (vgl. Gravemeijer 1997; Gravemeijer/Doorman 1999; Heckmann 2006). Sie wird im Sinne einer doppelten Zahlengeraden (vgl. Abb. 2.8) als Skala gesehen, die sowohl die Beziehung zwischen Einheiten unterschiedlicher Größenbereiche, aber auch die Zusammenhänge zwischen kleineren und größeren Einheiten desselben Größenbereichs darstellt (vgl. Gravemeijer 1997).

„Die Kinder können dann zwischen kleineren und größeren Einheiten hin und her springen, die Größe einer Zahl repräsentieren, Schätzungen anstellen oder eine ungefähre Größenordnung angeben.“ (Gravemeijer 1997, S. 47)

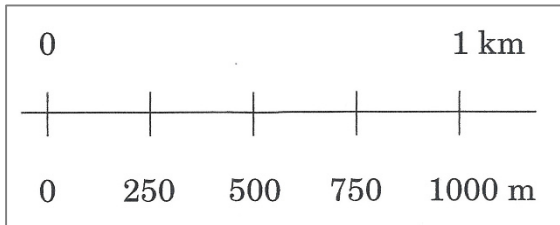


Abbildung 2.8 Der doppelte Rechenstrich (ebd., S. 47)

An der Zahlengeraden wird zwischen zwei inhaltlichen Interpretationen des Dezimalbruchs unterschieden: Zum einen der *Dezimalbruch als Strecke (Abstand)* auf der Zahlengeraden und zum anderen der *Dezimalbruch als Ort/Punkt* auf der Zahlengeraden (vgl. Michaelidou et al. 2004). Die Deutung des Dezimalbruchs als Strecke ist eng verknüpft mit dem Maßzahlaspekt (vgl. Padberg/Benz 2011), da die Abstände hinsichtlich der Vorstellung der Längenmessung in den Blick zu nehmen sind. Ebenso wird dabei auf eine kardinale Zahlvorstellung zurückgegriffen, wenn die Anzahl der Einheiten, d. h. die Abstände betrachtet werden (vgl. Scherer/Moser Opitz 2010). Bei der Interpretation des Dezimalbruchs als Punkt oder Ort auf der Zahlengeraden wird der Ordinalzahlaspekt (vgl. ebd.) genutzt, denn anhand der dezimalen Skalierung werden die entsprechenden Striche abgezählt und nicht die Abstände zwischen den Strichen „ausgemessen“. Aufgrund der Anknüpfung an verschiedene Zahlaspekte sind beide Deutungen des Dezimalbruchs an der Zahlengeraden für die Veranschaulichung der zentralen Aspekte des Dezimalbruchverständnisses essentiell.

Für die Veranschaulichung der Stellenwerte des Dezimalbruchs ist die Zahlengerade auf den ersten Blick allerdings eher weniger geeignet, da der stellenweise Aufbau der Zahl nicht direkt deutlich wird (vgl. Heckmann 2006, 2007). Unter Zuhilfenahme der Interpretation des Dezimalbruchs als Strecke und der Grundvorstellung des Bruchs als Anteil können die Stellenwerte jedoch inhaltlich erklärt werden: Durch die anschauliche Darstellung der Stellenwerte als Strecken auf der Zahlengeraden gehen auch die Größenverhältnisse dieser aus der Darstellung hervor. Gemäß dem Streckenmodell können Brüche als Bruchteile der Strecke 1 dargestellt werden (vgl. Schmassmann 2009). Durch die konkrete Darstellung der Bruchteile als Streifen (vgl. Abb. 2.9) kann verdeut-

licht werden, dass z. B. ein Zehntel genau das Zehnfache eines Hundertstels ist (*Prinzip der fortgesetzten Bündelung*).

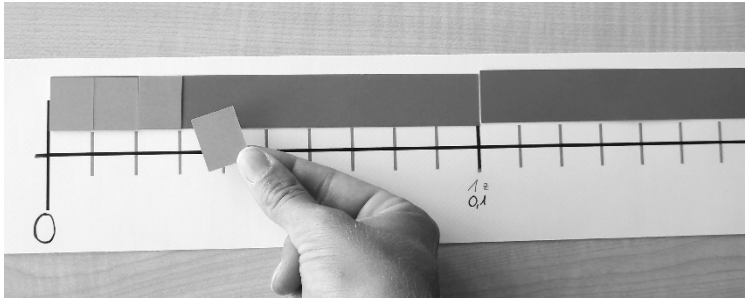


Abbildung 2.9 Darstellung von Zehnteln und Hundertsteln als Streifen auf der Zahlengeraden (Sprenger/Hußmann 2014, S. 101)

Das Prinzip der fortgesetzten Bündelung kann auch in der Interpretation des *Dezimalbruchs als Ort/Punkt* veranschaulicht werden, wenn immer zehn gleiche Striche zu einer nächstgrößeren Einheit zusammengefasst werden. Eine abschnittsweise Vergrößerung mit einer Lupe („Reinzoomen“) verdeutlicht die Zehnteilung und vermittelt gleichzeitig den Aspekt der Dichtheit der Dezimalbrüche (vgl. u. a. Padberg 2009; Schmassmann 2009). Ein „Rauszoomen“ illustriert die Zehnerbündelung, was formal einem Kürzen entsprechen würde. Auf der Zahlengeraden werden zehn Hundertstel(-Striche) zu einem Zehntel(-Strich) gebündelt – es wird eine gröbere Einteilung gewählt. Gleichzeitig entspricht eine Entbündelung/Zehnteilung z. B. von einem Zehntel formal dem Erweitern – es wird eine feinere Einteilung gewählt. Die Größenverhältnisse zwischen den einzelnen Strecken, sowie die Zehnteilung/Entbündelung bzw. die Zehnerbündelung basieren auf der *Eigenschaft der Zehnerbasis*. Die Grundvorstellung des *Erweiterns mit 10 als Verfeinern* bzw. *Kürzens durch 10 als Vergrößern der Einteilung* sowie die flexible Deutung von Dezimalbrüchen durch die Bündelungsidee sind hier eng an die Zahlengerade angebunden. Das Verfeinern und Vergrößern kann dabei handelnd erfahren werden (vgl. Sprenger/Hußmann 2014).

Die *Stellenwert-Eigenschaft* des Stellenwertprinzips wird durch die verschiedene Dicke oder Farbe der Striche auf der Zahlengeraden veranschaulicht, die für die verschiedenen Stellenwerte stehen. Je nachdem, wo die Ziffer in der Zahl steht, wird sie durch eine andere Strichart repräsentiert (*Dezimalbruch als Ort/Punkt*). Die *Multiplikative Eigenschaft* wird transparent, da die Anzahl der Striche bzw. der Strecken eines Stellenwertes angibt, wie viele Elemente/Bündel dieses Stellenwertes in der Zahl enthalten sind. Zuletzt wird noch die *Additive*

Eigenschaft genutzt, wenn die gesamte Zahl abgelesen werden soll und nun als additives Gefüge ihrer Stellenwerte gesehen wird. Die Werte der einzelnen Stellenwerte werden beispielsweise beim Eintragen einer Zahl an der Zahlengeraden aufeinanderfolgend stellengerecht eingetragen.

Die Zahlengerade weist zudem weitere Vorteile auf, die für das Begriffsverständnis der Schülerinnen und Schüler hilfreich sein können (vgl. Gravemeijer 1997; Heckmann 2006; Thompson/Walker 1996):

- Sie bietet die Möglichkeit, gleichwertige Dezimalbrüche schnell zu erkennen und schafft eine gute Verknüpfung der Dezimalbrüche zu den natürlichen Zahlen, die in diesen Zahlbereich eingebettet werden müssen – es kann an die Erfahrungsbereiche aus der Grundschule angeknüpft werden.
- Die Dezimalbrüche können mithilfe der Strecken-Interpretation direkt mit den gemeinen Brüchen verknüpft werden. Lernende können in der Erarbeitung der Zahlengeraden die Äquivalenz von Dezimalbrüchen und gemeinen Brüchen (insbesondere Zehnerbrüchen) erkennen. Dezimalbrüche werden als andere Schreibweise für die gemeinen Brüche erfahren.
- Ein großer Vorteil stellt die schon erwähnte „Zoomfunktion“ dar. Durch die Anknüpfung dieses linearen Modells an die Idee des Messens, und insbesondere durch das stetige Verfeinern („Reinzoomen“) lässt die Zahlengerade sich handelnd herstellen und mit geeigneten Fragestellungen und Handlungen verknüpfen. Gerade die Erarbeitung und Entwicklung der Zahlengeraden unterstützt den Aufbau eines ganzheitlichen Begriffsnetzwerks, in dem gemeine Brüche, Dezimalbrüche und natürliche Zahlen miteinander verknüpft sind.

In der Literatur herrscht allerdings Uneinigkeit über die Rolle der Zahlengeraden in der Dezimalbruchrechnung. Sie gilt als geometrisches Modell und zeigt bei Lernenden Probleme im Umgang, da sowohl visuelle (Wo ist der Punkt?) als auch symbolische (Wo sind die Symbole von (Orientierungs-)Zahlen?) Informationen ständig miteinander verknüpft werden müssen (vgl. Michaelidou et al. 2004; Widjaja/Stacey/Steinle 2010). Schülerinnen und Schülern fällt besonders der Umgang mit der Null beim Darstellungswechsel zwischen formal-symbolischer Zahldarstellung und Darstellung an der Zahlengeraden (z. B. 0,07 wird bei 0,7 eingetragen) sowie die Zuordnung der Stellenwerte zu den verschiedenen Strichen (beispielsweise ob die Striche Zehntel oder Hundertstel repräsentieren) schwer (vgl. Rittle-Johnson/Siegler/Alibali 2001; Widjaja et al. 2010). Dies beruht oftmals darauf, dass Nullen ignoriert (vgl. Null-ist-nichts, Kap. 2.1) oder die Größe der verschiedenen Striche nicht beachtet werden (vgl. ebd.). Des Weiteren operieren viele Lernende an der Zahlengeraden durchaus erfolgreich, allerdings lediglich mit einem „Halbwissen“ über den Aufbau der Zahlengeraden, sodass beispielsweise alle Dezimalbrüche der Art $0,7xxxx$ aufgrund der Zehntelstelle generell zwischen 0,7 und 0,8 eingetragen werden (vgl.

McIntosh/Stacey/Tromp/Lightfoot 2000), die genaue Lokalisierung des Dezimalbruchs aber unklar bleibt.

Trotz der Schwierigkeiten im Umgang mit der Zahlengeraden ist festzuhalten, dass das Wissen, die Zahlengerade als Darstellung für die Dezimalbrüche nutzen zu können, essentiell ist. Es stützt die Begriffsbildung der Dezimalbrüche und beschreibt ein hilfreiches Modell, in dem nicht nur das Verständnis des Dezimalbruchs und des Dezimalbruchvergleichs thematisiert werden können, sondern auch die basalen Rechenoperationen (vgl. Michaelidou et al. 2004; Thompson/Walker 1996).

2.3.4 Fazit

„Teaching decimals in a comprehensive way should students give the opportunity to flexibly, utilize and link a variety of representations concerning the decimal numbers: linear models, such as the number line, manipulatives, surface, symbols and currency.” (Michaelidou et al. 2004, S. 306)

Die erfolgreiche Ausbildung eines tragfähigen Begriffsverständnisses des Dezimalbruchs sollte mit dem Aufbau eines Netzwerks von Beziehungen einhergehen, das die verschiedenen Aspekte des Dezimalbruchverständnisses sowie Erfahrungen mit unterschiedlichen Darstellungen involviert und miteinander verknüpft. Dazu gehört auch der flexible Einsatz dieser Aspekte und Erfahrungen je nach Anforderungsbereich (vgl. Gravemeijer 1997; Michaelidou et al. 2004).

Die Zahlengerade bietet als besondere Stärke einen Überblick über die Anordnung der Dezimalbrüche und deren Größenvergleich. Zudem können Lernende die Dichte der Dezimalbrüche sowie den Zusammenhang zwischen Dezimalbrüchen und gemeinen Brüchen erfahren und verstehen. Die dezimale Struktur und die Möglichkeit der Interpretation des Dezimalbruchs als Strecke oder Ort/Punkt auf der Zahlengeraden dienen der Bereicherung der Erfahrung (vgl. Kap. 2.3.3). Die Veranschaulichung des stellenweisen Aufbaus des Dezimalbruchs kann hier zwar ebenfalls betrachtet werden, ist anhand der Stellenwerttafel allerdings nachvollziehbarer.

Neben dem verständigen Aufbau der Stellenwerte sowie deren Beziehungen untereinander liegen die Stärken der Stellenwerttafel u. a. in der Möglichkeit zur Erläuterung der Funktion des Kommas, das die ganzzahligen von den gebrochenen Stellenwerten trennt und als neue Markierung für die Anordnung der Stellenwerte dient (vgl. Padberg 2009). Außerdem wird die stellenwertbelegende Funktion der Null einsichtig, durch die nicht besetzte Stellen gekennzeichnet werden (vgl. Kap. 2.3.2). Die Stellenwerttafel baut auf den Strukturen und Beziehungen aus dem Bereich der natürlichen Zahlen auf, führt sie unter Zuhilfenahme der Bruchvorstellungen für den Bereich der Dezimalbrüche weiter und unterstützt ebenso die Verdeutlichung der Unterschiede zwischen diesen beiden Zahlbereichen (vgl. Günther 1987; Heckmann 2006; Padberg 2009; vgl. Kap. 2.3.2).

Die verschiedenen Stärken der Zahlengeraden und der Stellenwerttafel machen deutlich, dass weder Zahlengerade noch Stellenwerttafel besser für den Aufbau eines nachhaltigen Dezimalbruchverständnisses geeignet sind. Sie sollten beide gleichermaßen Verwendung finden. Die Darstellung des Dezimalbruchs an der Zahlengeraden und in der Stellenwerttafel unterscheiden sich in ihren Strukturen stark und eine Überführung ineinander ist nahezu unmöglich. Beispielsweise können die verschiedenen inhaltlichen Interpretationen des Dezimalbruchs als Strecke (Abstand) und als Ort/Punkt auf der Zahlengeraden an der Stellenwerttafel nicht gezeigt werden. Das Zusammenspiel beider Darstellungen ist essentiell, um die jeweiligen Stärken positiv zu nutzen und in das Begriffsverständnis zu integrieren.

Abschließend ist beim Umgang mit den Darstellungen zu beachten, dass die Verbindung der bildlichen Darstellungen mit der formal-symbolischen Zahldarstellung und der Sprechweise der Dezimalbrüche gewährleistet wird, da dies oftmals eine zentrale Schwierigkeit darstellt. Zudem könnten andernfalls zwei getrennte Erfahrungswelten entstehen, wobei die eine auf anschaulichen Problemlöseprozessen basiert und die andere auf dem Umgang mit Zahlen nach bestimmten Regeln (vgl. Hasemann 1995; Heckmann 2006; Padberg 2009). Weiterhin ist anzumerken, dass das Handeln an geeigneten Darstellungsmitteln nicht selbsterklärend ist, sondern einer expliziten Behandlung im Unterricht bedarf, um anhand dessen ein tragfähiges Begriffsverständnis auszubilden (vgl. Heckmann 2006).

Im weiteren Verlauf werden Fokussierungen, die die Verwendung einer der zentralen Darstellungen (formal-symbolische Zahldarstellung, Stellenwerttafel, Zahlengerade) oder den Darstellungswechsel zwischen diesen ansprechen, auf der *Ebene der typisch genutzten Darstellungen* zusammengefasst. Diese wird beispielsweise aktiviert, wenn in der Situation ‚1,4 und 1,46 vergleichen‘ die ‚Position auf der Zahlengeraden‘ fokussiert und so das Urteil ‚Eine Zahl, die auf der Zahlengeraden weiter rechts/weiter am Ende der Zahlengeraden liegt, ist größer.‘ eingegangen wird.

Die dritte Fokussierungsebene, die neben der konzeptuellen Ebene und der Ebene der typisch genutzten Darstellungen für diese Arbeit von Bedeutung ist (vgl. Kap. 1.2.3), ist durch die prozeduralen Fokussierungen gekennzeichnet, die sich z. B. auf bestimmte Strategien beziehen, die beim Umgang mit den Dezimalbrüchen genutzt und aktiviert werden. Sie weisen auf ein regelgeleitetes Vorgehen hin. Die Fokussierungen dieser *prozeduralen Ebene* werden in der Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes nicht explizit aufgegriffen, da die Rechenoperationen in der vorliegenden Arbeit nicht thematisiert werden und der Dezimalbruchvergleich lediglich die Rolle als Anlass für die Rekonstruktion der individuellen Begründungsstrukturen einnimmt. In der Empirie können sie allerdings durchaus identifiziert werden, wenn beispielsweise die Fokussierung ‚mit Endstellen-Nullen gleich lang machen‘ genutzt wird, um

Dezimalbrüche mit einer unterschiedlichen Anzahl an Nachkommastellen zunächst durch Anhängen von Endstellen-Nullen gleich lang zu machen und sie anschließend zu vergleichen (vgl. Kap. 5.1).

2.4 Zum Erwerb des Dezimalbruchverständnisses

Nach der Beschreibung und Strukturierung der wichtigen Aspekte des Dezimalbruchverständnisses (vgl. Kap. 2.2) und der Beleuchtung der wesentlichen Darstellungen (vgl. Kap. 2.3) stellt sich die Frage, wie ein tragfähiges Dezimalbruchverständnis erlangt werden kann. Dazu lohnt sich zunächst ein Blick auf die zentralen Erwerbsmodelle zum dezimalen Stellenwertverständnis im Bereich der natürlichen Zahlen, um zu diskutieren, ob diese für den Aufbau eines Dezimalbruchverständnisses sinnvoll erweitert werden können (Kap. 2.4.1).

Anschließend werden die in der Literatur beschriebenen Zugänge zur Dezimalbruchrechnung auf der Grundlage des aktuellen Forschungsstandes kurz skizziert (Kap. 2.4.2). Zuletzt werden in einem Fazit (Kap. 2.4.3) die zentralen Zugänge über die Stellenwerte und die Brüche als Anteile an dem Schaubild der wichtigen Aspekte und Zusammenhänge des Dezimalbruchverständnisses (vgl. Abb. 2.3) konkretisiert.

2.4.1 Modelle zum Erwerb des Stellenwertverständnisses

Bei der Entwicklung des Stellenwertverständnisses handelt es sich um die Aneignung eines komplexen Wissens, das Schülerinnen und Schüler nicht in wenigen Tagen oder Wochen aufbauen können. Vielmehr vollzieht sich der Verstehensprozess über eine Spanne von mehreren Jahren (vgl. Baroody 1990; Ross 1989). Es ist festzustellen, dass viele Lernende die zahlreich zu erreichenden Kompetenzen scheinbar ohne Probleme und eher implizit in der Auseinandersetzung mit Zahlen und Rechenoperationen erlangen (vgl. Schäfer 2005). Bei Schülerinnen und Schülern mit Problemen in Mathematik zeigen sich allerdings gerade in diesem Bereich große Schwierigkeiten, die bis in die Sekundarstufe I hineinreichen können (vgl. Moser Opitz 2005).

Aus der Strukturierung der wichtigen Aspekte des Dezimalbruchverständnisses (vgl. Kap. 2.2) sowie der Vorstellung des Theorierahmens (vgl. Kap. 1.2) ergeben sich verschiedene Aspekte, die die Grundlage für ein Erwerbsmodell zum Stellenwertverständnis für die vorliegende Arbeit bieten sollten:

- Zentrale Aspekte des dezimalen Stellenwertverständnisses: Teil-Ganzes-Prinzip, Prinzip der fortgesetzten Bündelung, Stellenwertprinzip
- Argumentative Struktur
- Anschlussfähigkeit für die Dezimalbrüche

Das Teil-Ganzes-Prinzip, sowie das Prinzip der fortgesetzten Bündelung und das Stellenwertprinzip sind die zentralen Prinzipien des Stellenwertverständnisses.

ses (vgl. Kap. 2.2) und daher unabdingbar im Erwerbsprozess. Bezugnehmend auf die Bedeutung der inferentiellen Verknüpfungen beim Wissensaufbau (vgl. Kap. 1.2) sollte das Modell zudem argumentativ gestützt sein und demnach eine begriffliche Strukturierung aufweisen. Dies meint, dass die verschiedenen Aspekte, die für das jeweilige Modell von Bedeutung sind, durch Schlussfolgerungen und Prämissen inhaltlich verknüpft und diese Inferenzen explizierbar sind. Hinsichtlich der Dezimalbrüche ist es außerdem notwendig, dass das Modell sich nicht nur auf das Stellenwertverständnis im Bereich der natürlichen Zahlen bezieht, sondern auch anschlussfähig für die Dezimalbrüche ist.

Mit den genauen Prozessen beim Erwerb des Stellenwertverständnisses haben sich – trotz der offensichtlich bedeutsamen Rolle – bislang nur wenige Studien beschäftigt (vgl. v. a. Baroody 1990; Baturó 1997; Fuson et al. 1997; Kamii 1986; Resnick 1983; Ross 1985, 1989; Thompson 2003; van der Walle 2007). Sie werden im Folgenden unter Einbezug der oben genannten Aspekte klassifiziert. Ergänzend wird erläutert, welchen Wert sie für die vorliegende Arbeit haben.

Das Modell von Kamii (1986) berücksichtigt die wichtigen Aspekte des dezimalen Stellenwertverständnisses nur sehr implizit und ist für die vorliegende Forschungsarbeit daher irrelevant.

Weitere Modelle finden in Theorie und Praxis Anwendung (vgl. Baroody 1990; Fuson et al. 1997; Resnick 1983; Thompson 2003; van der Walle 2007). Sie umfassen die Aspekte des Stellenwertprinzips und des Prinzips der fortgesetzten Bündelung, beziehen sich allerdings hauptsächlich auf das Stellenwertverständnis bei natürlichen Zahlen. Veranschaulichungen an konkreten Materialien wie z. B. Mehrsystemblöcken oder Punktebildern (nicht aber an abstrakten Darstellungsmitteln wie der Zahlengeraden), Zählen und das konkrete Bündeln stehen meist im Vordergrund (vgl. Baroody 1990; Fuson et al. 1997; Gerster/Schultz 2000; van der Walle 2007). Der Schwerpunkt der Modelle liegt auf der Kardinalität der Zahlen und somit auf der Vorstellung der Zahl als Repräsentant einer Menge, weshalb sich die Weiterführung zu den Dezimalbrüchen nur schwer gestaltet. Die Zahlvorstellung fußt bei diesen auf dem Ordinal- und Maßzahlaspekt, es gibt keine korrespondierende Mengenvorstellung von beliebigen Dezimalbrüchen.

Thompson (2003) stellt die Entwicklung und Förderung des allgemeinen Zahlensinns in den Mittelpunkt seines Erwerbsmodells zum Stellenwertverständnis. Es wird angenommen, dass das Stellenwertverständnis sowohl das Verständnis des *Mengenwertes* (*quantity value*) als auch das des *Spaltenwertes* (*column value*) als Teilkonzepte beinhaltet. Der Mengenwert beschreibt die Zahlenwerte der Ziffern einer Zahl (die sechs in der 64 bedeutet 60, die vier bedeutet 4, vgl. *Multiplikative Eigenschaft*, Kap. 2.2.1), der Spaltenwert gibt an, wie viele Bündel der jeweiligen Mächtigkeit in der Zahl vorhanden sind (64 besteht aus sechs Zehnerbündeln und vier Einerbündeln) (vgl. Thompson 2003).

Das Verständnis der beiden Werte wird durch ein flexibles Zahlverständnis, einen allgemeinen Zahlensinn, erleichtert, das verschiedene Interpretationen von Zahlen beinhaltet, z. B. 54 als ‚ein wenig mehr als die Hälfte von 100‘, eine Zahl zwischen 50 und 60, als der Nachfolger von 53 und als Summe zweier natürlicher Zahlen, aber auch als das Alter des Lehrers oder die eigene Hausnummer (vgl. ebd.). Dieses Modell ist aufgrund dieser verschiedenen Interpretationen durchaus anknüpfungsfähig für die Dezimalbrüche. Allerdings wird das Stellenwertprinzip klar auf Mengenwert und Spaltenwert bezogen, wohingegen das Prinzip der fortgesetzten Bündelung nicht explizit thematisiert wird. Eine argumentative Struktur, das heißt die inhaltlich gestützte und explizierbare Verknüpfung der verschiedenen Aspekte und Prinzipien innerhalb des Modells und als Zusammenhang der einzelnen Komponenten, fehlt.

Resnick (1983) nimmt an, dass die Entwicklung des Verständnisses von (natürlichen) Zahlen als erfolgreiche Weiterführung des Teil-Ganzes-Prinzips verstanden werden kann, sodass Lernende Zahlen als Zusammensetzungen von Zehnern und Einern (Hundertern, Tausendern, etc.) interpretieren. In dem dreistufigen Modell werden Bündelung und Entbündelung als Mittel genutzt, um verschiedene Zerlegungen von Zahlen zu generieren und für verschiedene (z. B. Subtraktions-)Aufgaben zu nutzen. Das Stellenwertprinzip findet sich im Notationssystem wieder. Dieses Modell bietet aufgrund der Thematisierung der fortgesetzten Bündelung und des starken Bezugs zum Teil-Ganzes-Prinzip durchaus Anknüpfungspunkte für die Dezimalbrüche (vgl. Resnick 1983). Es ist allerdings sehr stark auf das Teil-Ganzes-Prinzip ausgerichtet und beschäftigt sich nur implizit beispielsweise mit der Basis 10 in unserem Zahlssystem und der Bedeutung der Position der Ziffern in einer Zahl. Die hierarchische Folge der drei Stufen des Modells ist durchaus nachvollziehbar, allerdings ist für die vorliegende Arbeit eher eine Strukturierung der wichtigen Aspekte des Dezimalbruchverständnisses wie im *Modell des dezimalen Stellenwertverständnisses im dezimalen Zahlssystem* (vgl. Baturó 1997; Baturó/Cooper 1998) von Bedeutung.

Auch das fünfstufige Modell zur Interpretation von zweistelligen Zahlen, das auf das Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems zielt (vgl. Ross 1985, 1989), stellt die Unterteilung von Entwicklungsstufen in den Vordergrund, allerdings deutlich feiner als in Resnicks Modell (vgl. Resnick 1983). Es werden fünf Wissens- bzw. Erkenntnisstufen erstellt, die Schülerinnen und Schüler auf dem Weg zum Stellenwertverständnis erreichen bzw. passieren müssen: *Ganzheitliche Auffassung*, *Positions-Auffassung*, *Eigenwert der Ziffer*, *Konstruktion des Verständnisses* und *Verständnis* (vgl. Humbach 2008; Ross 1985, 1989; Schäfer 2005). Diese Stufen werden von der Interpretation einer Zahl als Repräsentant einer Menge ohne Verständnis für die Bedeutung der einzelnen Ziffern über die Unterscheidung der verschiedenen Stellenwerte in einer Zahl bis hin zur Verbindung der Eigenschaften des Stellenwertprinzips in der letzten Stufe immer komplexer (vgl. ebd.). Durch die Kennzeichnung als Stufenmodell liegt

eine Auffassung dieser als hierarchisch aufeinanderfolgend nahe. Dies ist jedoch keineswegs immer der Fall. Die Ordnung in Entwicklungsphasen oder -stufen ist sowohl empirisch als auch theoretisch kaum begründbar (vgl. Fuson et al. 1997; Schulz 2014), da beispielsweise ein tragfähiges Verständnis für manche Zahlen bereits vorliegen kann, für andere (meist größere) Zahlen aber erst teilweise ausgeprägt ist. Zudem wurde der Einfluss z. B. von Unterricht bei den Überlegungen zum Stufenmodell zur Interpretation zweistelliger Zahlen nicht berücksichtigt (vgl. ebd.). Vielmehr sollten die Stufen als Kompetenzbereiche betrachtet werden, die sich mit der Zeit zu einem vollständigen Verständnis des Stellenwertsystems zusammenfügen (vgl. Moser Opitz 2007). Bei diesem sehr komplexen System treten insbesondere dann Schwierigkeiten auf, wenn das Teil-Ganzes-Prinzip und somit auch die Beziehungen der Stellenwerte untereinander nicht richtig verstanden wurden, da diese beiden Kompetenzen Voraussetzungen für das Bündeln sind (vgl. Humbach 2008). Das Modell umfasst ausschließlich den Erwerb des Stellenwertverständnisses zweistelliger Zahlen (vgl. Ross 1985, 1989). Insoweit ergibt sich die weitere Schwierigkeit des fehlerfreien Transfers auf größere Zahlenräume und, im Hinblick auf die Dezimalbrüche, auch auf andere Zahlbereiche (vgl. Humbach 2008). Es ist anzunehmen, dass gerade für den Transfer der Erkenntnisse in den Bereich der Dezimalbrüche die explizite Thematisierung und das Verstehen der Zusammenhänge zwischen den Stellenwerten unabdingbar ist, damit die Weiterführung der Strukturen auf einer tragfähigen Basis erfolgen kann. Als letztes Ausschlusskriterium dieses Modells für die vorliegende Arbeit ist die fehlende (explizite) argumentative Struktur zu nennen. Selbst wenn die Entwicklungsstufen als Kompetenzbereiche aufgefasst werden, wird der Zusammenhang dieser nicht klar deutlich. Die unmittelbare Anknüpfung an die herausgearbeiteten wichtigen Aspekte des dezimalen Stellenwertsystems (vgl. Kap. 2.2.1) ist allerdings von großer Bedeutung und wird in die präskriptiven Lernpfade anhand der Strukturierung dieser Aspekte für das Dezimalbruchverständnis integriert (vgl. Kap. 2.4.3).

Ein wichtiges Modell, das sowohl die Aspekte des dezimalen Stellenwertverständnisses als auch die Dezimalbrüche explizit einbezieht, ist das theoretische *Modell des Stellenwertverständnisses im dezimalen Zahlssystem* (vgl. Baturro 1997; Baturro/Cooper 1998). Es beschreibt drei notwendige Stufen des Wissens, die hierarchisch aufeinander aufbauen und kognitive Komponenten, das heißt die Bestandteile des Zählprozesses (u. a. bei Dezimalbrüchen), aufführen sowie deren Verknüpfungen aufzeigen (vgl. Abb. 2.10).

Die erste Stufe umfasst das Grundlagenwissen bezüglich *Position (position)*, *Basis (base)* und *Reihenfolge (order)*, ohne das Lernende in keinem Zahlssystem erfolgreich verstehensorientiert operieren können. Der Begriff der *Position* meint sowohl den jeweils assoziierten Namen des jeweiligen Stellenwertes, aber auch die Rolle des Kommas als Orientierung für die gegebene Einheit (im dezimalen Stellenwertsystem die Einer) sowie die stellenwertbelegende Funktion

der Null. Die *Basis* beschreibt im dezimalen Zahlssystem die Zehnerbasis, die die Grundlage für die Bündelungsprozesse und die Verbindung zwischen den einzelnen Stellenwerten darstellt (vgl. Baturo 1999). Die Bedeutung der *Reihenfolge* integriert sowohl die Reihenfolge bezüglich der Größe der Stellenwerte (... > Hunderter > Zehner > Einer > Zehntel > Hundertstel > ...) sowie die Ordnungsrelation der Ziffern 0 bis 9 und somit die Reihenfolge der Ziffern innerhalb einer Stelle. Durch den Aspekt der Reihenfolge wird auf eine Symmetrie zwischen den ähnlich klingenden Stellenwerten hingewiesen, die zur Einer-Stelle besteht (vgl. Kap. 2.3.2).

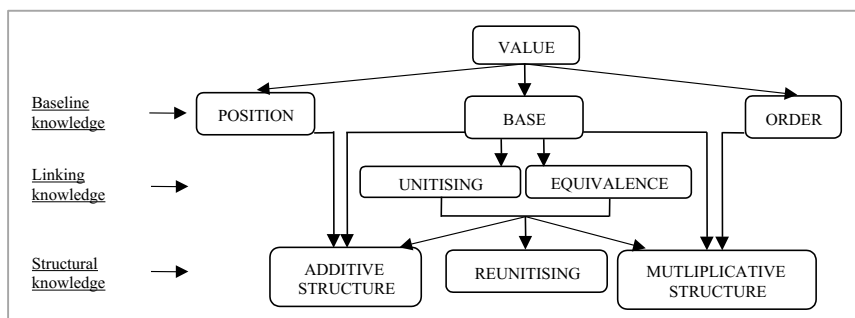


Abbildung 2.10 Das Modell des Stellenwertverständnisses im dezimalen Zahlssystem (Baturo 1999, S. 2)

Das Wissen in Stufe 2 verbindet die einzelnen Komponenten des Grundlagenwissens der ersten Stufe und füllt dieses durch die Gliederung in *Unitising* und *Äquivalenz (equivalence)* mit Semantik. Der Begriff *Unitising* umfasst die Fähigkeit, die Zahl zu identifizieren und als Einheit zu denken (vgl. Baturo/Cooper 2000). Die zugrunde liegende Einheit des Zahlsystems ist direkt durch die Basis bestimmt. Während sich *Unitising* mit der Zuordnung eines Zahlenwertes zu einer Teil-Ganzes-Beziehung befasst (vgl. Baturo 1997), thematisiert die *Äquivalenz* die Gleichwertigkeit verschiedener additiver Zerlegungen. Sowohl *Unitising* als auch *Äquivalenz* setzen im Lernprozess das Verständnis der Basis voraus (vgl. ebd.).

Die dritte und letzte Stufe beschreibt das strukturelle Wissen, das den Überbau schafft, um alle drei Stufen des Wissens miteinander zu verknüpfen (vgl. Baturo 1997). Die *additive Struktur (additive structure)* verbindet Position und Basis dahingehend, dass einerseits stellengerechte Zerlegungen ($34 \text{ Zehntel (z)} = 3 \text{ Einer (E)} + 4 \text{ z}$) und andererseits Zerlegungen innerhalb der Stellen, wie z. B. $34 \text{ z} = 30 \text{ z} + 4 \text{ z}$ oder $34 \text{ z} = 32 \text{ z} + 2 \text{ z}$, durch sie bedingt sind. Der Begriff *Reunitising* basiert auf den Aspekten *Unitising* und *Äquivalenz* und beschreibt

die Fähigkeit, die relevante Einheit flexibel zu variieren. Die Zahlen müssen in anderen Darstellungen erfasst und als äquivalent erkannt werden (vgl. Baturo/Cooper 1997). Reunitising integriert das Bündeln, um größere Einheiten zu generieren ($60 \text{ Hundertstel (h)} = 6 \text{ z}$), das Entbündeln, um kleinere Einheiten zu erhalten ($6 \text{ z} = 60 \text{ h}$), und ebenso flexible Teil-Ganzes-Zerlegungen sowie Umgruppierungen ($6 \text{ z} = 5 \text{ z} + 10 \text{ h}$). Hundertstel müssen beispielsweise einerseits als eine Anzahl von Hundertsteln, andererseits aber auch als Anzahl von Zehnteln identifiziert werden können (vgl. ebd.). Diese Prozesse sind direkt durch die Zehnerbasis verknüpft, da diese die Bündelungseinheit vorgibt. Zuletzt repräsentiert die *multiplikative Struktur* (*multiplicative structure*) die Verknüpfung von Basis und Reihenfolge, als Beschreibung einerseits des Zusammenhangs zwischen den Stellenwerten (z. B. $4 \text{ z} \cdot 10 = 4 \text{ E}$) und andererseits der multiplikativen Verknüpfung von Zahlen innerhalb einer Stelle (z. B. $4 \text{ z} = 4 \cdot 1 \text{ z}$). Diese multiplikative Struktur setzt *Position* und *Basis* in einem exponentiellen System bzw. Modell mit *Wert* und *Reihenfolge* in Beziehung, das fortlaufend und in zwei Richtungen zu betrachten ist. Nach rechts werden die Stellenwerte immer kleiner, das heißt, der Exponent der Zehnerbasis verringert sich von einer Stelle zur rechts benachbarten immer um eins, es wird demnach stets durch zehn dividiert. Analog dazu vergrößert sich der Stellenwert nach links stetig, sodass von einer Stelle zur links benachbarten mit zehn multipliziert wird (vgl. Baturo/Cooper 1997; Baturo 1999; auch *Eigenschaft der Zehnerbasis*, Ross 1989). Für den Aufbau dieses komplexen Wissens und vor allem für das Verstehen der Verbindungen zwischen den Wissenselementen der verschiedenen Stufen hilft der Einsatz von Darstellungsmitteln, wie z. B. Stellenwerttafel und Zahlengerade, um aktiv handelnd Erfahrungen machen zu können (vgl. Baturo/Cooper 1998; Baturo 1999; Kap. 2.3).

Dieses Modell bietet weniger ein Stufenmodell zum Erlangen des Stellenwertverständnisses (vgl. Ross 1985, 1989) als vielmehr eine Wissensstruktur und eine begriffliche Strukturierung, die dem dezimalen Stellenwertsystem zugrunde liegen und erfasst werden müssen, um ein tragfähiges dezimales Stellenwertverständnis auszubilden, das auch auf andere Zahlbereiche erweiterbar ist. Die argumentative Strukturierung wichtiger Aspekte des Stellenwertverständnisses, also dessen inferentielle Gliederung, wurde in der vorliegenden Arbeit bereits herausgearbeitet (vgl. Abb. 2.1; Abb. 2.2) und spielt auch für die Erwerbsprozesse des Dezimalbruchbegriffs und die Entwicklung eines präskriptiven Lernpfades im weiteren Verlauf dieser Arbeit eine wichtige Rolle. Allerdings wurden im Gegensatz zu dem *Modell des Stellenwertverständnisses im dezimalen Zahlssystem* (vgl. Baturo 1997; Baturo/Cooper 1998) in der vorliegenden Arbeit teilweise andere wichtige Aspekte aufgeführt. Der bedeutsamste Unterschied liegt in der Einbindung der elementaren Bruchvorstellungen, die für das Dezimalbruchverständnis unabdingbar sind und in der inferentiellen Gliederung der wichtigen Aspekte und Zusammenhänge des Dezimalbruchverständ-

nisses eine zentrale Rolle spielen (vgl. Kap. 2.2). Außerdem startet das oben beschriebene Modell auf der Stufe des Grundlagenwissens mit den Eigenschaften des Stellenwertprinzips (Position, Base, Order), die nach der fachlichen Analyse in Kapitel 2.2 allerdings eher auf dem Teil-Ganzes-Prinzip und dem Prinzip der fortgesetzten Bündelung aufbauen. Letztere werden im *Modell des Stellenwertverständnisses im dezimalen Zahlssystem* als Rückanbindung und nicht als Voraussetzung genutzt. Teil-Ganzes-Prinzip und Prinzip der fortgesetzten Bündelung werden demnach zwar thematisiert, allerdings erst nach den Eigenschaften des Stellenwertprinzips, um sie anschließend inhaltlich mit diesen zu verknüpfen, und nicht voraussetzend, um die Eigenschaften des Stellenwertprinzips dann auf diesen Prinzipien aufzubauen.

In Anlehnung an dieses Modell hinsichtlich der argumentativen Struktur, allerdings aufgrund der fachlichen Analyse (vgl. Kap. 2.2) mit teilweise anderen präferierten Aspekten des Dezimalbruchverständnisses, werden in Kapitel 2.4.3 zwei präskriptive Lernpfade für den Erwerb des Dezimalbruchverständnisses aufgeführt und diskutiert.

2.4.2 Zugänge zur Dezimalbruchrechnung

„Bei der Einführung des *Dezimalbruchbegriffes* bietet es sich an, sowohl auf die Zehnerbrüche, auf die Stellenwertschreibweise wie auch insbesondere auf die Kommaschreibweise bei Größen zurückzugreifen, um so bei den Vorerfahrungen der Schüler anzuknüpfen und um sie so gleichzeitig durch starke Anwendungsbezüge für die Dezimalbruchrechnung zu motivieren.“ (Padberg 2009, S. 238, Hervor. i. O.)

In der Literatur werden verschiedene Zugänge zur Dezimalbruchrechnung beschrieben, die im Unterricht zu einem tragfähigen Dezimalbruchverständnis führen sollen (vgl. u. a. Heckmann 2006; Moser Opitz/Schmassmann 2011; Padberg 2009; Postel 1991):

- der Zugang über die Stellenwerte
- der Zugang über die Zehnerbrüche
- der Zugang über die Größen
- der Zugang über die Kommaverschieberegeln

Diese vier genannten Zugänge sind in der Literatur zentral und werden nachfolgend kurz beschrieben. Dabei ist zu beachten, dass damit idealtypische Wege dargestellt, in der Praxis allerdings meist Mischkonzepte angewandt werden, um die spezifischen Vorteile der einzelnen Wege zu nutzen (vgl. Heckmann 2006; Padberg 2009; Schmassmann 2009).

Der Zugang über die Stellenwerte

Der Zugang über die Stellenwerte beruht auf der Interpretation des Dezimalbruchs als Summe seiner Stellenwerte, sodass beispielsweise die Zahl 8,785 der Summe aus 8 Einern, 7 Zehnteln, 8 Hundertsteln und 5 Tausendsteln entspricht

(vgl. Charakterisierung (D), Kap. 2.2.1). Die zentralen Prinzipien des dezimalen Stellenwertsystems bei den natürlichen Zahlen (Teil-Ganzes-Prinzip, Prinzip der fortgesetzten Bündelung und Stellenwertprinzip) werden aufgegriffen und für die rationalen Zahlen fortgeführt (vgl. Padberg 2009; Postel 1991). Dabei werden die Zehnerpotenzen als dekadische Einheiten aufgefasst. Neue Einheiten entstehen durch Bündeln oder Entbündeln, dergestalt, dass der Übergang von einer Einheit zur nächstgrößeren als Zehnerbündelung und zurück als Zehnteilung aufgefasst werden muss (vgl. ebd.). Bei diesem Ansatz spielt die Darstellung in der Stellenwerttafel sowie die gleichzeitige Interpretation von Brüchen als Quasikardinalzahl eine besondere Rolle, da so die bekannten Strukturen der Übergänge zwischen den Einheiten bei den natürlichen Zahlen auf die rationalen Zahlen sichtbar übertragen werden können (vgl. Padberg 2009). Zudem kann zur Verdeutlichung die Zahlengerade hinzugezogen werden, die ausgehend von den natürlichen Zahlen weiter gefüllt wird, indem

„zwischen je zwei natürlichen Zahlen zehn neue Abschnitte eingefügt werden (Zehntel) und in jeden dieser Abschnitte wieder zehn neue (Hundertstel) und so weiter.“ (Schmassmann 2009, S. 173)

Neben der Herausstellung der Gemeinsamkeiten beim Übergang von den natürlichen Zahlen zu den Dezimalbrüchen sollten in gleicher Weise aber auch die nichtzutreffenden Analogien (vgl. Kap. 2.2.2) thematisiert und diskutiert werden, um Übergeneralisierungen und Fehlvorstellungen vorzubeugen (vgl. Padberg 2009).

Bei einem reinen Zugang über die Erweiterung des dezimalen Stellenwertsystems bei natürlichen Zahlen sind bei der Benutzung der Stellenwerttafel, mithilfe der Interpretation der Brüche als Quasikardinalzahlen sowie unter Rückbezug auf das Prinzip der fortgesetzten Bündelung und des Stellenwertprinzips nur wenige Teile der gemeinen Bruchrechnung erforderlich (vgl. Padberg 2009; Postel 1991).

Der Zugang über die Zehnerbrüche

Der Zugang zur Dezimalbruchrechnung über die gemeinen Brüche, spezieller über die Zehnerbrüche, basiert darauf, dass jeder Dezimalbruch als Zehnerbruch geschrieben werden kann, also als gemeiner Bruch mit Zehnerpotenz im Nenner (vgl. Heckmann 2006; Padberg 2009; Postel 1991). Gemeine Brüche und Dezimalbrüche sind lediglich zwei verschiedene Schreibweisen einer rationalen Zahl, sodass sich die Regeln für die (endlichen) Dezimalbrüche aus denen der gemeinen Brüche einheitlich herleiten lassen (vgl. ebd.).

Zudem sind den Lernenden die gemeinen Brüche in Ansätzen vertraut, sodass beispielsweise durch die Grundvorstellung des Bruchs als Anteil (vgl. Kap. 2.2.3) $\frac{1}{10}$ als eins von zehn gleich großen Teilen, die in ein Ganzes passen, identifiziert werden kann (vgl. Schmassmann 2009). Dies fördert das inhaltliche

Verständnis der gebrochenen Stellenwerte, die als neue Bündelungseinheiten in das bestehende Stellenwertverständnis integriert werden müssen.

Besonderer Vorteil des Zugangs über die Zehnerbrüche ist die Betonung des engen Zusammenhangs zwischen Dezimalbrüchen und gemeinen Brüchen, sodass möglichen Fehlvorstellungen (vgl. Kap. 2.2.3) diesbezüglich entgegen gewirkt werden kann.

Es ist allerdings zu beachten, dass die gemeine Bruchrechnung von vielen Schülerinnen und Schülern nicht ausreichend verstanden wird, sodass ein Rückbezug darauf die Regeln der Dezimalbruchrechnung nicht unbedingt einsichtiger gestalten könnte. Außerdem wird eingewendet, dass der Umgang mit Dezimalbrüchen eher dem mit den ganzen Zahlen gleiche als dem Operieren mit Brüchen (vgl. Kidder 1980; Profke 1991).

Der Zugang über die Größen

Der Zugang über die Größen basiert auf dem Rückgriff auf in Kommaschreibweise gegebene Größen. Durch Umformen in kleinere Einheiten lassen sich die meisten Aufgaben mithilfe der natürlichen Zahlen lösen, da beispielsweise 2,45 kg in 2 450 g umgeformt werden kann. Die Regeln für die Dezimalbrüche können durch Variation der Zahlen und Einheiten sowie anschließender Abstraktion durch Weglassen der Einheiten abgeleitet werden (vgl. Heckmann 2006; Postel 1991). Der Zugang erfolgt über ausgewählte Größen, bei denen die dekadische Struktur gegeben ist, dazu gehören insbesondere Längen, Gewichte und Geld.

Von Vorteil ist besonders, dass der Zugang an die Vorerfahrungen der Lernenden anknüpft. Sie kennen die Dezimalbruchschreibweise im Zusammenhang mit Größen bereits aus der Grundschule und werden in der Lebenswelt täglich mit ihnen konfrontiert (vgl. Bonotto 2001; Heckmann 2006; Padberg 2009; Postel 1991). Dadurch ist der Anwendungsbezug durch die Vorstellung des Dezimalbruchs als Maßzahl für die Schülerinnen und Schüler unmittelbar sichtbar (vgl. Padberg 2009). Die Anbindung an die Größen hilft zudem bei der Lösung einfacher Aufgaben, z. B. im Bereich der Längen, da neben den formalen Rechenregeln andere leichtere Lösungswege im Sinne des Messens hinzugezogen werden können (vgl. ebd.).

Die Visualisierung erfolgt in diesem Zugang vor allem über das Maßband und somit der zugrunde liegenden Struktur der Zahlengeraden, da diese die dekadischen Strukturen des Stellenwertprinzips sowie der Längeneinheiten gut widerspiegeln (vgl. u. a. Postel 1991). Problematisch ist allerdings, dass sich die Visualisierung am Maßband ausschließlich für die Längenmaße eignet, nicht aber für andere Größen wie beispielsweise Geld, Gewichte oder Volumina. Dafür werden eher Einheitentabellen genutzt, die auf der Stellenwerttafel basieren – als Stellenwerte werden dann die Größeneinheiten und nicht mehr die dekadischen Einheiten angegeben, weshalb der multiplikative Zusammenhang zwi-

schen den verschiedenen Einheiten nicht mehr unbedingt transparent sein und daher unklar bleiben könnte.

Da der Dezimalbruch im Zusammenhang mit den Größeneinheiten meist auch als Summe von Maßzahlen in verschiedenen Einheiten gesehen wird, kann der Zugang als Vorstufe zur Interpretation des Dezimalbruchs als Summe seiner Stellenwerte genutzt werden. Im weiteren Verlauf muss diese Vorstellung allerdings dahingehend adaptiert werden, dass der Dezimalbruch als Summe einer natürlichen Zahl und mehrerer Bruchteile interpretiert wird, sodass Lernende 3,12 m nicht nur als 3 m und 12 cm auffassen, sondern vor allem auch als $3\text{ m} + \frac{1}{10}\text{ m} + \frac{2}{100}\text{ m}$ (vgl. Bonotto 2001; Klika 1997; Padberg 2009).

Die Größenangaben in Kommaschreibweise sind den Schülerinnen und Schülern, wie bereits erwähnt, zwar aus der Grundschule und aus dem Alltag bekannt, allerdings oftmals ohne ein Verständnis der einzelnen Kommastellen (vgl. Schmassmann 2009), das für ein Dezimalbruchverständnis jedoch unabdingbar ist.

„Die 5 in 0,5 km, in 0,5 m bzw. in 0,5 cm bedeutet immer 5 Zehntel der jeweiligen Einheit, auch wenn die Größen jeweils als 500 m, 50 cm oder 5 mm angegeben werden können. [...] Die Einteilung in Millimeter, Zentimeter und Dezimeter auf Maßbändern visualisieren Tausendstel, Hundertstel und Zehntel und tragen zugleich zur Verbindung von Größen und Dezimalbrüchen bei.“ (Schmassmann 2009, S. 181)

In fast jeder Anwendung von Maßen kann das Komma als Trennung verschiedener Einheiten interpretiert werden (z. B. m und cm, kg und g, € und Cent, etc.). Dies kann zu einer weitreichenden Fehlvorstellung im Zusammenhang mit den Dezimalbrüchen führen (vgl. Komma-Trennt-Vorstellung, Kap. 2.1; vgl. Brekke 1996; Günther 1987; Klika 1997; Padberg 2009; Postel 1991; Steinle 2004). Gerade in der Grundschule beschränkt sich die Verwendung des Dezimalbruchs meist im Sinne dieser Sortentrennung auf die Kommaschreibweise bei Größenangaben (vgl. Klika 1997; Padberg 2009; Postel 1991).

„Once the subunit has been identified in a given context, students revert to a system of two whole numbers, in which there is no need to partition into smaller and smaller amounts. Hence, students do not see the extension to further place value columns to the right or the fact that between any two (decimal) numbers there are an infinite number of decimals that can be written.“ (Steinle 2004, S. 11)

Der Zugang über die Größen kommt dementsprechend schnell an seine Grenzen. Es gibt nur wenige geeignete, passend aufeinanderfolgende Größeneinheiten (wie z. B. Längen, Gewichte, Geld, Volumina), die einen dekadischen Aufbau vorweisen (vgl. Heckmann 2006; Padberg 2009; Postel 1991). Zudem ist der Zugang nur bei einer geringen Anzahl an Nachkommastellen gut einsetzbar (vgl. Padberg 2009), bei mehr als zwei bis drei Nachkommastellen allerdings eher abwegig, da eine größere Anzahl an Nachkommastellen im Kontext meist nicht von Bedeutung ist (vgl. Postel 1991). In Bezug auf den häufigen und abschließlichen Einsatz von Größen und vor allem Geld entwickelt sich bei Ler-

nenden oftmals ein *money thinking* (vgl. Kap. 2.1; vgl. Heckmann 2005; Steinle/Stacey 2004; Steinle 2004). Schülerinnen und Schüler mit dieser Denkweise können mit Dezimalbrüchen mit bis zu zwei Nachkommastellen sehr gut umgehen. Bei Dezimalbrüchen mit mehr als zwei oder drei Nachkommastellen zeigen sich allerdings große Probleme, da beispielsweise im Kontext Geld maximal zwei Nachkommastellen ausschlaggebend sind und das Verständnis ausschließlich damit verknüpft ist (vgl. ebd.).

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass der Zugang über die Größen als Einstieg und zur Motivation durchaus denkbar und sinnvoll ist, anschließend aber ein anderer Zugang zum Dezimalbruchverständnis genutzt werden sollte (vgl. Padberg 2009). Beim Rückgriff auf die Größen sollten immer die möglichen Fehlerquellen und Fehlvorstellungen bedacht werden, um unreflektierten Übergeneralisierungen durch explizite Thematisierung und Reflektion vorzubeugen (vgl. Heckmann 2005).

Aus den genannten Gründen wird dieser Zugang im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit weniger berücksichtigt.

Zugang durch Rückgriff auf Kommaverschieberegeln

Bei diesem Zugang zur Dezimalbruchrechnung stehen die Kommaverschieberegeln und dadurch der Rückgriff auf die Rechenregeln im Bereich der natürlichen Zahlen im Vordergrund (vgl. Heckmann 2006). Durch Multiplikation oder Division mit einer Zehnerpotenz werden die Dezimalbrüche zunächst in natürliche Zahlen umgeformt, bevor mit ihnen operiert wird.

„Man multipliziert einen Dezimalbruch mit 10, 100, 1000, ..., indem man das Komma um 1, 2, 3, ... Stellen nach rechts verschiebt. Stehen dort keine Ziffern mehr, so ergänzt man Nullen.“ (Padberg 2009, S. 210)

Die Kommaverschieberegeln für die Division kann analog zu der für die Multiplikation abgeleitet werden, jedoch wird in diesem Fall das Komma nicht nach rechts, sondern nach links verschoben (vgl. ebd.).

Je nach Rechenoperation gelten allerdings verschiedene Vorgehensweisen. Beim Größenvergleich, bei der Addition und Subtraktion sowie bei der Division werden jeweils alle Zahlen mit derselben Zehnerpotenz multipliziert, die sich aus der Zahl mit den meisten Nachkommastellen ergibt (vgl. Padberg 2009; Postel 1991). Bei Addition und Subtraktion muss das Ergebnis dann adaptiert, also durch diese Zehnerpotenz dividiert werden, um die richtige Lösung zu erhalten. Bei der Division muss das Ergebnis im Bereich der natürlichen Zahlen nicht adaptiert werden, da es gleichzeitig das Ergebnis der Dezimalbruch-Division darstellt (vgl. ebd.). Es ist festzustellen, dass die Division von Dezimalbrüchen durch natürliche Zahlen dadurch deutlich komplizierter wird als z. B. mit dem Rückgriff auf die Stellenwerte (vgl. Padberg 2009).

Bei der Multiplikation werden die einzelnen Faktoren jeweils mit (teilweise auch verschiedenen) Zehnerpotenzen multipliziert, die immer von der Anzahl

der Nachkommastellen der einzelnen Faktoren abhängen. Das Ergebnis der Multiplikation im Bereich der natürlichen Zahlen muss dann durch die Zehnerpotenz dividiert werden, die von der Summe der Anzahlen der Nachkommastellen bestimmt ist (vgl. Padberg 2009; Postel 1991).

Dieser sehr formale Zugang zur Dezimalbruchrechnung kommt weitestgehend ohne die Bruchrechenregeln aus, es werden allerdings einige Gesetzmäßigkeiten (z. B. Distributivgesetz, Konstanz eines Quotienten beim gleichsinnigen Vervielfachen von Dividend und Divisor) im Sinne des Permanenzprinzips von den natürlichen Zahlen auf die Dezimalbrüche übertragen (vgl. Heckmann 2006; Padberg 2009; Postel 1991).

Zum Verständnis der Kommaverschieberegeln ist der Rückgriff auf die Stellenwerte essentiell. Andernfalls bleibt dieser Zugang sehr mechanisch und wenig inhaltlich gestützt und sorgt kaum für ein inhaltliches Verständnis der Dezimalbrüche (vgl. Heckmann 2006). Zudem wird in diesem Ansatz die wichtige Verbindung zwischen Dezimalbrüchen und gemeinen Brüchen (vgl. Kap. 2.2.3) weitestgehend außer Betracht gelassen. Ebenso ist gerade für die Klientel der Schülerinnen und Schüler mit Schwierigkeiten im Fach Mathematik eine rein formale Zugangsweise zu den Dezimalbrüchen vermutlich eher kontraproduktiv für ein umfassendes Dezimalbruchverständnis. Aus diesen Gründen wird der Zugang zu den Dezimalbrüchen unter Rückgriff auf die Kommaverschieberegeln für die vorliegende Arbeit nicht berücksichtigt.

Es ist allerdings anzumerken, dass die Kommaverschieberegeln im Anschluss an den Aufbau eines tragfähigen Dezimalbruchverständnisses im Sinne der Effizienz und schnellen Durchführung von Rechenoperationen mit Dezimalbrüchen durchaus sinnvoll sein können.

2.4.3 Fazit

Aus der Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes der Dezimalbrüche (vgl. Kap. 2.2) wird die Bedeutung der natürlichen Zahlen und der gemeinen Brüche für ein tragfähiges Dezimalbruchverständnis sehr deutlich, weshalb die Zugänge über die Stellenwerte und über die gemeinen Brüche (vgl. Kap. 2.4.2) von besonders hervorzuheben sind. Die Größen werden lediglich teilweise integriert, um einen Anwendungsbezug zu bieten, ansonsten aus den erwähnten Gründen aber weitestgehend außer Acht gelassen. Ebenso verhält es sich mit dem beschriebenen Zugang über die Kommaverschieberegeln.

Demnach erschließen sich für diese Arbeit abschließend zwei mögliche Zugangsweisen, die nachfolgend diskutiert werden. Es handelt sich bei beiden Wegen um Mischformen unter Einbezug des dezimalen Stellenwertverständnisses bei den natürlichen Zahlen und der gemeinen Brüche, da diese die zentralen Elemente des Dezimalbruchverständnisses (vgl. Kap. 2.2) darstellen. Zudem werden diese Mischformen der reinen Zugänge in der Literatur als ertragreich empfohlen (vgl. Kap. 2.4.2; vgl. Heckmann 2006; Padberg 2009; Schmassmann

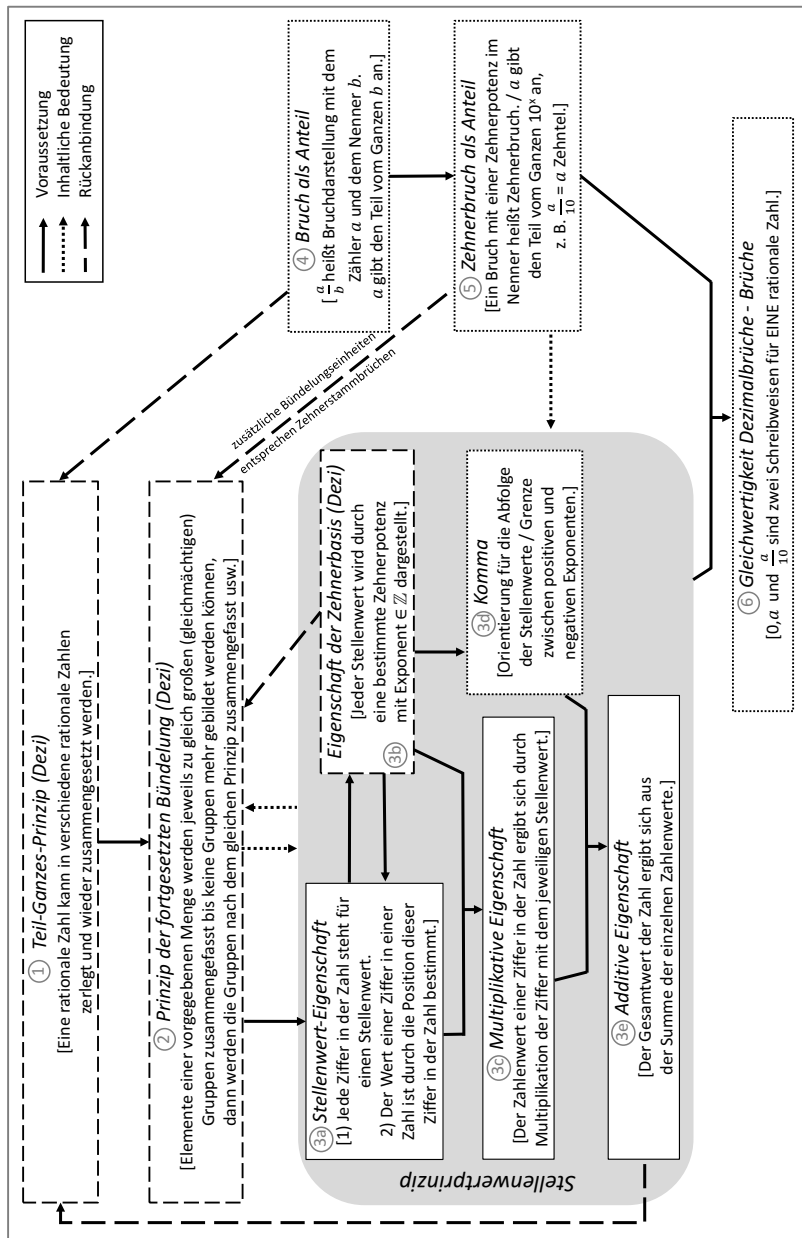
2009). Denkbar ist zum einen die direkte Anknüpfung an das dezimale Stellenwertsystem für den Bereich der natürlichen Zahlen und nachfolgend der Einbezug der gemeinen Brüche. Zum anderen können zuerst die gemeinen Brüche als Anteile eine zentrale Rolle spielen und anschließend für die Erweiterung des dezimalen Stellenwertsystems genutzt werden. Idealtypisch wird jeweils von einem tragfähigen Stellenwertverständnis im Bereich der natürlichen Zahlen ausgegangen (vgl. Abb. 2.2), auf dem weiterführend aufgebaut werden kann. Aufgrund dessen ist anzumerken, dass die verschiedenen wichtigen Aspekte und Zusammenhänge des Dezimalbruchverständnisses von Lernenden im Idealfall vermutlich deutlich schneller verstanden werden, als bei der Einführung dieser für den Bereich der natürlichen Zahlen. Dies ist dadurch begründet, dass es sich größtenteils nicht um gänzlich neue Zusammenhänge, sondern lediglich um Veränderungen bzw. Anpassungen handelt, die nichtsdestotrotz explizit thematisiert werden müssen.

Im weiteren Verlauf werden die beiden Zugangsweisen kurz mithilfe der Grafik der wichtigen Aspekte und Zusammenhänge des Dezimalbruchverständnisses (vgl. Abb. 2.3) visualisiert und beschrieben. Zuletzt erfolgt eine inhaltliche Bewertung der beiden Zugangsweisen für den Einsatz zum Aufbau bzw. zur Förderung eines tragfähigen Dezimalbruchverständnisses.

Zugang über das dezimale Stellenwertsystem in $\mathbb{N}$

Bei diesem Zugang erfolgt zunächst, aufbauend auf das Stellenwertverständnis im Bereich der natürlichen Zahlen, die Erweiterung und Anpassung der Urteile und Urteilsnetze bezüglich des Teil-Ganzes-Prinzips sowie des Prinzips der fortgesetzten Bündelung, die für die Dezimalbrüche im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen keine Gültigkeit mehr besitzen (vgl. Kap. 2.2.4). Anschließend werden die Eigenschaften des Stellenwertprinzips, insbesondere die der Zehnerbasis, für die Dezimalbrüche angeglichen.

Die Reihenfolge, in der die Urteile zu den verschiedenen Aspekten des Dezimalbruchverständnisses entweder adaptiert oder neu integriert werden müssen (vgl. Kap. 2.2.4), wird in Abbildung 2.11 durch die eingekreisten Zahlen gekennzeichnet. An dieser Stelle ist anzumerken, dass die Anpassung der Urteile und die damit verbundenen Veränderungen der Urteilsnetze sich meist nicht in einer genauen Reihenfolge vollziehen, sondern sich vielmehr wechselseitig in der Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand ausbilden. Gerade die Eigenschaften des Stellenwertprinzips sind eng miteinander verknüpft, bedingen sich gegenseitig und können kaum isoliert thematisiert werden, weshalb sie in der Grafik unter einem Punkt als Unterpunkte (a, b, c, d, e) zur Schwerpunktsetzung aufgeführt werden, um das Zusammenspiel bei der Weiterführung dieser Eigenschaften zu betonen (vgl. Abb. 2.11).

Abbildung 2.11 Der Zugang über das dezimale Stellenwertsystem in $\mathbb{N}$

Ziel eines intendierten Lernweges ist es, die Aspekte und Prinzipien des Lerngegenstandes so zu ordnen, dass ein möglicher Weg gezeichnet werden kann, an dem sich die Entwicklung eines Lehr-/Lernarrangements mit aufeinanderfolgenden Schwerpunktsetzungen orientieren könnte, um den Lerngegenstand möglichst tragfähig und verständlich zu vermitteln.

Das Komma, das für die Notation der Dezimalbrüche als Kennzeichnung der Grenze zwischen den ganzzahligen und den gebrochenen Stellenwerten benötigt wird, muss als erster neuer Gesichtspunkt in die bestehenden Zusammenhänge eingebunden werden. Erst nach der Erweiterung des dezimalen Stellenwertsystems um die gebrochenen Stellenwerte werden die gemeinen Brüche in den intendierten Lernweg eingepflegt. Über die Grundvorstellung der gemeinen Brüche als Anteile werden so die Zehnerbrüche eingeführt, die die neuen Stellenwerte (bzw. Bündelungseinheiten) inhaltlich stützen, da für ein tragfähiges Dezimalbruchverständnis eine reine Fortführung bekannter Strukturen nicht ausreichend ist – vielmehr sollte auch ein inhaltliches Verständnis der neuen Stellenwerte generiert werden. Die gemeinen Brüche werden dazu sowohl an das Teil-Ganzes-Prinzip als auch an das Prinzip der fortgesetzten Bündelung angebunden, allerdings erst nach der Thematisierung der fortgesetzten Bündelung und nicht als Voraussetzung für dieses Prinzip. Dies wird durch die Pfeile zwischen *Teil-Ganzes-Prinzip* und *Bruch als Anteil* sowie *Prinzip der fortgesetzten Bündelung* und *Zehnerbruch als Anteil* deutlich, die in diesem Lernweg nicht mehr als Voraussetzungen (durchgezogene Pfeile), sondern als Rückanbindungen (gestrichelte Pfeile) gekennzeichnet werden (vgl. Abb. 2.3; Abb. 2.11). Der Zugang schließt letztlich mit den Urteilen zur Gleichwertigkeit von Dezimalbrüchen und gemeinen Brüchen, um diesen wichtigen Zusammenhang zu betonen.

Die zentrale Darstellung in diesem intendierten Lernweg ist, neben der formal-symbolischen Zahldarstellung, die Darstellung in der Stellenwerttafel, in der der bekannte multiplikative Zusammenhang zwischen den Stellenwerten (Verzehnfachung von rechts nach links bzw. Zehnteilung von links nach rechts) fortgeführt werden kann (vgl. Kap. 2.3.2). Bei der Anknüpfung an die Brüche kann zusätzlich die Zahlengerade hinzugezogen werden, um die Größenverhältnisse zwischen den verschiedenen Stellenwerten zu verdeutlichen (vgl. Kap. 2.3.3).

Hauptvorteil dieses präskriptiven Lernpfades ist die Anknüpfung an die Ähnlichkeit zu den natürlichen Zahlen und insbesondere an die Stellenwertschreibweise. Diese und die zugrunde liegenden wichtigen Aspekte im Bereich der natürlichen Zahlen können für die Weiterführung zu den rationalen Zahlen genutzt werden (vgl. Kap. 2.2.1; Kap. 2.2.2). Ein großer Nachteil stellt möglicherweise die sehr späte Anbindung an die gemeinen Brüche dar, die für das Dezimalbruchverständnis von zentraler Bedeutung ist (vgl. Kap. 2.2.4). Die Brüche und speziell die Zehnerbrüche als Anteile werden zwar an die Aspekte

des dezimalen Stellenwertverständnisses inhaltlich angebunden, allerdings erst zu einem späten Zeitpunkt des Lernprozesses, weshalb sie als unverstandene Aspekte ohne deutlichen Zusammenhang zum dezimalen Stellenwertsystem koexistieren könnten. Dies wird insbesondere durch die Pfeile zwischen dem *Bruch* bzw. *Zehnerbruch als Anteil* und dem *Teil-Ganzes-Prinzip* bzw. *Prinzip der fortgesetzten Bündelung* deutlich: Zwischen den Aspekten der gemeinen Brüche und denen des Stellenwertverständnisses bestehen bei diesem Zugang fast ausschließlich Rückanbindungspfeile (gestrichelte Pfeile) und keine Voraussetzungspfeile (durchgezogene Pfeile) mehr. Lediglich der letzte Schritt, um die Gleichwertigkeit zu thematisieren, zeigt explizit den wichtigen Zusammenhang zwischen Dezimalbrüchen und gemeinen Brüchen auf (vgl. Abb. 2.3; Abb. 2.11). Letztlich könnten die Brüche und die Dezimalbrüche daher eventuell als zwei verschiedene, nur teilweise zusammenhängende Zahlbereiche aufgefasst und verstanden werden.

Aufgrund dieses Nachteils ist ein Zugang, der die gemeinen Brüche direkt in das Dezimalbruchverständnis eingliedert und somit alle wichtigen Elemente des Dezimalbruchverständnisses zu gleichen Teilen berücksichtigt und integriert, als deutlich sinnvoller zu erachten. Dieser *Zugang über die Brüche als Anteile* wird nachfolgend beschrieben und erläutert.

Zugang über die Brüche als Anteile

Bei diesem intendierten Lernweg, der in Abbildung 2.12 dargestellt wird, spielt die Grundvorstellung des Bruchs als Anteil eine zentrale Rolle. Ebenfalls aufbauend auf das dezimale Stellenwertverständnis bei den natürlichen Zahlen werden zunächst die Urteile zum Teil-Ganzes-Prinzip hinsichtlich der Dezimalbrüche erweitert und angepasst. Danach werden direkt die gemeinen Brüche und speziell die Zehnerbrüche eingebunden.

Die Zehnerstammbrüche stellen die inhaltliche Grundlage für das Prinzip der fortgesetzten Bündelung bereit. Mit ihnen lassen sich weiterführend die gebrochenen Stellenwerte als neue Bündelungseinheiten erzeugen. Mit dieser Semantik erfolgt die Adaption der Urteile bezüglich der Eigenschaften des Stellenwertprinzips sowie die Integration des neuen Aspekts des Kommas (vgl. Abb. 2.12). Wie schon der Zugang über das dezimale Stellenwertsystem in $\mathbb{N}$ schließt auch dieser Lernweg mit der Gleichwertigkeit der Dezimalbrüche und der gemeinen Brüche.

Die zentrale Darstellung ist bei diesem Zugang zunächst die Zahlengerade, an der vor allem die Grundvorstellung des Bruchs als Anteil anschaulich dargestellt werden kann. Die Handlungen an der Zahlengeraden mit der Interpretation des *Dezimalbruchs als Strecke/Abstand* unterstützen das inhaltliche Verständnis der Größenrelation vor allem zwischen den gebrochenen Stellenwerten (vgl. Kap. 2.3.3).

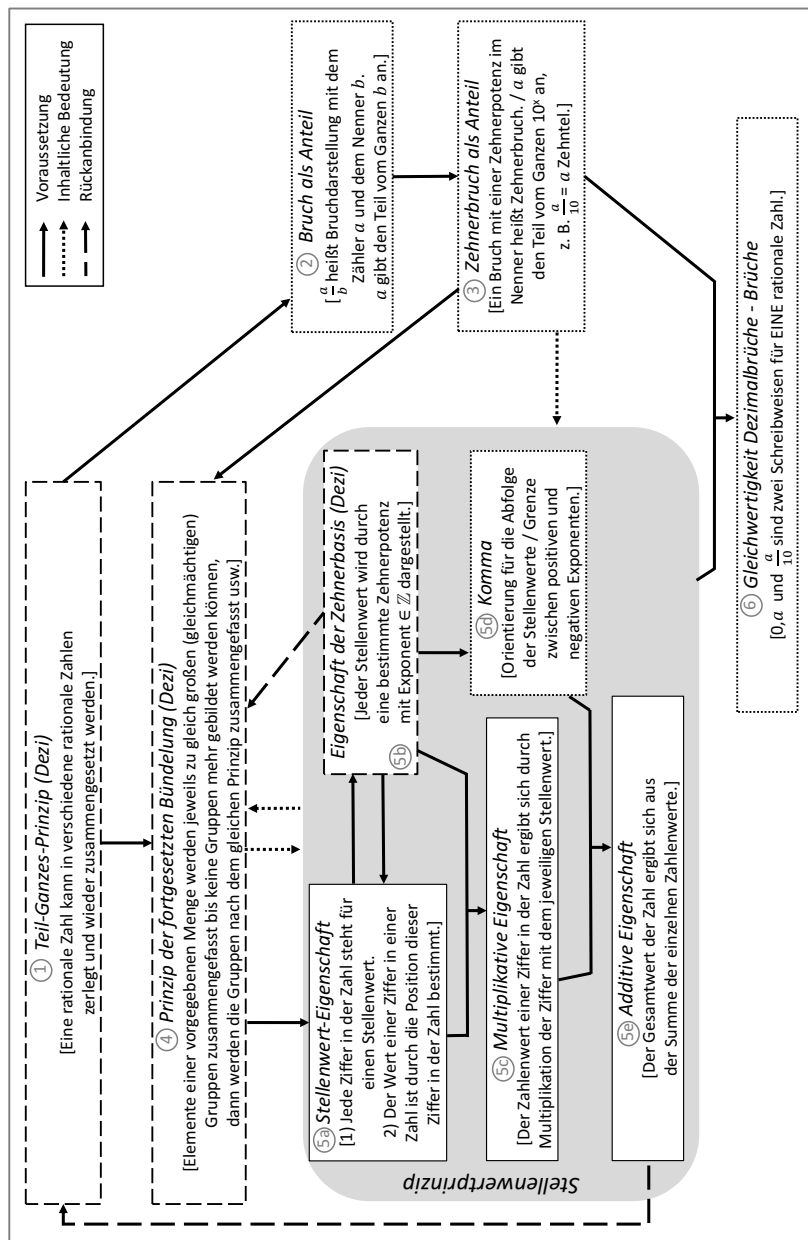


Abbildung 2.12 Der Zugang über die Brüche als Anteile

Erst nach der Einbindung der Brüche als neue Bündelungseinheiten wird dann die Darstellung des Dezimalbruchs in der Stellenwerttafel hinzugezogen, bei der die Zehnerstammbrüche als gebrochene Stellenwerte sichtbar und in das Stellenwertprinzip integriert werden (vgl. Kap. 2.3.2).

Der besondere Vorteil dieses präskriptiven Lernpfades ist die schon im Begriffsaufbau angestrebte direkte Anknüpfung der Dezimalbrüche an die gemeinen Brüche, die zur essentiellen Betonung des engen Zusammenhangs beiträgt. Zielbewusst wird ein inhaltliches Verständnis der neuen gebrochenen Stellenwerte unter Einbezug der Zehnerstammbrüche als neue Bündelungseinheiten generiert. Zudem kann der weiterzuführende multiplikative Zusammenhang zwischen den Stellenwerten (Verzehnfachung bzw. Zehnteilung) verstehensorientiert an die Grundvorstellung des Bruchs als Anteil angeknüpft werden. Dadurch kann beispielweise der Fehlvorstellung der ähnlich klingenden Stellenwerte und somit der Annahme, dass z. B. Hundertstel größer als Zehntel sind, von vornherein entgegengewirkt werden.

Als Nachteil lassen sich lediglich eventuelle Schwierigkeiten beim Bruchverständnis anführen, die Schülerinnen und Schülern einen Zugang zum Dezimalbruchverständnis erschweren könnten. Für den Zugang über die Brüche als Anteile werden allerdings lediglich basale Kenntnisse der Bruchrechnung (vor allem Bruchdarstellung, Bruch als Quasikardinalzahl, Bruch als Anteil, Zehnerbruch) benötigt, auf die bei einer späteren, weiterführenden Behandlung der Bruchrechnung aufgebaut werden kann.

Diese theoretischen Überlegungen zum *Zugang über die Brüche als Anteile* finden im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit aufgrund der obigen Beurteilung und aufgrund der Abgrenzung zum *Zugang über das dezimale Stellenwertsystem in $\mathbb{N}$* Beachtung, wenn verschiedene Designprinzipien und fachliche Inhalte erprobt werden, die in die Entwicklung eines Lehr-/Lernarrangements zum Aufbau bzw. zur Förderung eines tragfähigen Dezimalbruchverständnisses münden.

Zum Begriff des Dezimalbruchs

Eine empirische Studie zum Dezimalbruchverständnis
aus inferentialistischer Perspektive

Sprenger, L.

2018, XVII, 254 S. 35 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-19159-7