

2 Sachanalyse der drei Unterrichtsinhalte

In diesem Teil möchte ich die fachmathematischen Grundlagen für die unten folgenden didaktischen Diskussionen legen. Filler beschreibt die schulische Trigonometrie als ein Themenfeld, das zahlreiche Bezüge zu Unterrichtsinhalten früherer Schuljahre aufweist: „In der Trigonometrie kommen [...] Geometrie, Arithmetik und Algebra zusammen“ ([20]: 239). Erstaunlicherweise weist auch die fachmathematische Fundierung der schulischen Trigonometrie eine interessante Verzahnung hochschulmathematischer Themenbereiche auf: Allen voran sind hier die *Elementargeometrie*, die *analytische Geometrie* mitsamt der *lineare Algebra* sowie die *komplexe* und *reelle Analysis* zu nennen, wobei hinsichtlich der letzteren noch explizit die *Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen* erwähnt werden sollte, welche in dieser Arbeit vernachlässigt werden muss.

Aufgrund dieser „innermathematischen Interdisziplinarität“ möchte in Kapitel 2.1 einige zentrale Begrifflichkeiten einführen, die sich rund um den Begriff der euklidischen Ebene ranken. Hierdurch können die folgenden analytischen, elementargeometrischen, linear algebraischen und analytisch geometrischen Überlegungen begrifflich abgesichert werden. Die beiden folgenden Kapitel dienen dann der fachmathematischen Erarbeitung der Sinus- und Kosinusfunktion, der Additionstheoreme und des Bogenmaßes. Hierbei konzentriert sich das Kapitel 2.2 auf die relevanten reell-analytischen Theorieelemente: die Differenzierbarkeit der Sinus- und Kosinusfunktion (als Summenfunktionen), die Additionstheoreme und ihre Rolle in der reellen Analysis und schließlich den Bogenlängenbegriff. Zentrales Anliegen des Kapitels 2.3 ist es, den Bogenmaßbegriff angemessen zu formulieren.

2.1 Die euklidische Ebene

Die gesamten folgenden fachmathematischen Überlegungen konzentrieren sich auf Aussagen über Objekte im zweidimensionalen Anschauungsraum.¹ Aus diesem Grund ist es sinnvoll, sich einige zentrale Eigenschaften dieses Raumes in Erinnerung zu rufen. Diesem Anliegen entsprechend, werde ich auf Beweise der Sätze größtenteils verzichten und lediglich auf entsprechende Literatur verweisen. Ich beginne mit einer Definition ([21]: 219):²

Definition 2.1. *Ein reeller Vektorraum V , d. h. ein Vektorraum über dem Körper $(\mathbf{R}, +, \cdot)$, heißt **euklidisch**, wenn er mit einer positiv definiten, symmetrischen Bilinearform ausgestattet ist. Bei einer solchen handelt es sich um eine Abbildung $B : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$, die für beliebige $u, v, w \in V$ und beliebiges $r \in \mathbf{R}$ die folgenden Eigenschaften erfüllt (o bezeichne den Nullvektor):*

- (B1) $B(r \cdot u, v) = r \cdot B(u, v)$ und $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$,
- (B2) $B(u, v) = B(v, u)$,
- (B3) $B(u, u) \geq 0 \wedge B(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = o$.

Im Folgenden wird der zweidimensionale reelle Standardvektorraum mit $V_{\mathbf{R}^2} := (\mathbf{R}^2, +, \cdot)$ bezeichnet und der Nullvektor mit $o := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $V_{\mathbf{R}^2}$ wird stets stillschweigend durch die *kanonische Basis* $\{e_1, e_2\}$ aufgespannt. Nun gilt der folgende

Satz 2.1. *Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V_{\mathbf{R}^2} \times V_{\mathbf{R}^2} \rightarrow \mathbf{R}$ gegeben durch $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2$, heißt **Skalarprodukt** und ist eine positiv definite, symmetrische Bilinearform. ([27]: 12)*

¹ In den Abschnitten 2.1 bis 2.3 zitiere ich nur ein einziges Mal wörtlich. Die Literaturangaben sind also als Vergleichszitate zu verstehen.

² In diesem Satz sowie im Folgenden werden, wie dies üblich ist, die Addition zwischen Vektoren und zwischen Skalaren durch dasselbe Symbol dargestellt, ebenso die Multiplikation zwischen Skalaren und die Multiplikation eines Skalars mit einem Vektor.

In diesem Satz wurden die naheliegenden Bezeichnungen der Komponenten von Vektoren nicht neu definiert. Ebenso wird im Folgenden für Vektoren (und Punkte) verfahren. Es gilt also bspw. stillschweigend: $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Entsprechend Satz 2.1 und Definition 2.1 ist $(V_{\mathbf{R}^2}, \langle \cdot, \cdot \rangle) =: V_{\mathcal{E}^2}$ ein euklidischer Vektorraum. Um unten verständlich von Punkten und anderen geometrischen Objekten der Ebene sprechen zu können, wird die folgende Definition benötigt ([21]: 203):

Definition 2.2. *Ein Tripel (A, V, \oplus) aus einer nicht-leeren Menge A , einem reellen Vektorraum V und einer Abbildung $\oplus : A \times V \rightarrow A$ heißt ein **affiner Punktraum** bzw. **affiner Raum**, falls die Abbildung \oplus für beliebige **Punkte** $P, Q \in A$ und beliebige Vektoren $v, w \in V$ die folgenden Eigenschaften erfüllt:*

- (i) $P \oplus o = P$,
- (ii) $\exists! u \in V : Q = P \oplus u$,
- (iii) $P \oplus (v + w) = (P \oplus v) + w$.

Oben wurden die Vektoren des zweidimensionalen reellen Standardvektorraums $V_{\mathbf{R}^2}$ in Komponentenschreibweise als Paare reeller Zahlen dargestellt. Bekanntlich lassen sich solche Paare nicht nur als Vektoren interpretieren, sondern auch als Punkte der Ebene. Dementsprechend bietet es sich an, eine Abbildung $+: \mathbf{R}^2 \times V_{\mathbf{R}^2} \rightarrow \mathbf{R}^2$ zwischen beliebigen Punkten und Vektoren komponentenweise zu definieren: Für einen beliebigen Punkt $P \in \mathbf{R}^2$ und einen beliebigen Vektor $v \in V_{\mathbf{R}^2}$ sei dann $P + v := \begin{pmatrix} p_1 + v_1 \\ p_2 + v_2 \end{pmatrix}$. Mit $i \in \{1, 2\}$ ist $p_i, v_i \in \mathbf{R}$ und somit gilt: $P + v \in \mathbf{R}^2$. D. h. $+$ ist wohldefiniert und es liegt der Beweis der folgenden Aussage nahe ([21]: 204):

Satz 2.2. *Das Tripel $(\mathbf{R}^2, V_{\mathbf{R}^2}, +)$ ist ein affiner Punktraum.*

Beweis. Sei $P \in \mathbf{R}^2$ beliebig gewählt, dann ist offenbar $P + o = \begin{pmatrix} p_1 + 0 \\ p_2 + 0 \end{pmatrix} = P$ und d. h. (i) ist erfüllt. Sei nun noch $Q \in \mathbf{R}^2$ beliebig gewählt, dann gibt es ein $u \in V_{\mathbf{R}^2}$ mit $u := \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$. Mit den

Körpereigenschaften von $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ gilt dann: $P + u = \begin{pmatrix} p_1 + (q_1 - p_1) \\ p_2 + (q_2 - p_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = Q$. Da die additiv-inversen Elemente $-p_1$ und $-p_2$ zu p_1 bzw. p_2 eindeutig bestimmt sind, ist u eindeutig bestimmt und damit (ii) erfüllt. Die Vektoraddition in $V_{\mathbf{R}^2}$ ist ebenfalls komponentenweise definiert und deshalb ist auch (iii) wahr. \square

Seien $P, Q \in \mathbf{R}^2$ vorgegeben, dann schreibt man (etwa in der Schule) für den eindeutig bestimmten Vektor $u \in V_{\mathbf{R}^2}$ mit $P + u = Q$ auch \overrightarrow{PQ} und meint damit anschaulich den Vektor, der P in Q verschiebt ([21]: 203). Da zudem, wie im Beweis benutzt, $u = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix}$ ist, notiert man auch gern $\overrightarrow{PQ} = Q - P$ ([2]: 1). Sei $O := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ der Nullpunkt, dann ist durch die Menge $\{O, e_1, e_2\}$ ein *kartesisches Koordinatensystem* gegeben ([21]: 205, 224). Für beliebiges $P \in \mathbf{R}^2$ heißt der Vektor \overrightarrow{OP} der *Ortsvektor* von P . Offenbar lassen sich der Punkt $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ und der Ortsvektor $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 - 0 \\ p_2 - 0 \end{pmatrix}$ durch dasselbe Paar reeller Zahlen darstellen. Entsprechend der günstigen (schulüblichen) Wahl des kartesischen Koordinatensystems, sind zudem die Komponenten der Darstellung von P als Paar reeller Zahlen dessen *kartesische Koordinaten* ([21]: 221).

Ein affiner Punktraum (A, V, \oplus) heißt *euklidischer Punktraum* oder *euklidischer Raum*, wenn V ein euklidischer Vektorraum ist ([21]: 219). Entsprechend der Sätze 2.1 und 2.2 ist das Tripel $(\mathbf{R}^2, V_{\mathcal{E}^2}, +) =: \mathcal{E}^2$ mit dem auf $V_{\mathbf{R}^2}$ definierten Skalarprodukt also ein euklidischer Raum und wird die *euklidische Ebene* genannt ([2]: 1).

Unter Verwendung der bisher entwickelten Begrifflichkeiten wäre es zwar möglich, geometrische Objekte der Ebene hinsichtlich ihrer Lage zu untersuchen, allerdings müsste hierbei auf die Messung von Abständen und Längen verzichtet werden ([21]: 139). Die Messung von Streckenlängen ist zur Definition von Bogenlängen allerdings unerlässlich, weshalb ich auf folgende Definition zurückgreife ([41]: 11):

Definition 2.3. Sei V ein reeller Vektorraum und $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ eine Abbildung, dann heißt das Paar $(V, \|\cdot\|)$ ein **normierter reeller Vektorraum**, wenn die Abbildung $\|\cdot\|$ eine **Norm** ist und d. h. für beliebige $v, w \in V$ und beliebiges $r \in \mathbf{R}$ die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:

$$(N1) \quad \|v\| \geq 0 \text{ und } \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = o,$$

$$(N2) \quad \|rv\| = |r| \cdot \|v\|,$$

$$(N3) \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Die Abbildung $|\cdot| : V_{\mathcal{E}^2} \rightarrow \mathbf{R}_0^+$, gegeben durch $v \mapsto |v| := \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, heißt **euklidische Norm** ([41]: 20) und es gilt der folgende

Satz 2.3. Der euklidische Vektorraum $V_{\mathcal{E}^2}$ und die euklidische Norm bilden einen normierten reellen Vektorraum. Die euklidische Norm erfüllt zudem die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung**, d. h. für beliebige $v, w \in V_{\mathcal{E}^2}$ gilt: $|\langle v, w \rangle| \leq |v| \cdot |w|$. ([54]: 95 f.)

Den Wert $|v|$ nennt man üblicherweise die (euklidische) *Länge* des Vektors v bzw. den *Betrag* von v ([54]: 96). Mit diesem lässt sich auf \mathcal{E}^2 eine Abstandsfunktion $d : \mathcal{E}^2 \times \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathbf{R}_0^+$ definieren durch $(P, Q) \mapsto d(P, Q) := |\overrightarrow{PQ}| = |Q - P| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$. Die Zahl $d(P, Q)$ heißt **euklidischer Abstand** der Punkte P und Q und man zeigt leicht, dass die Abbildung d eine Metrik auf \mathcal{E}^2 ist ([42]: 81, 97 f.):

Satz 2.4. Der euklidische Abstand d erfüllt für Punkte P, Q, R die folgenden Eigenschaften:

$$(M1) \quad d(P, Q) \geq 0 \text{ und } d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q,$$

$$(M2) \quad d(P, Q) = d(Q, P),$$

$$(M3) \quad d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q).$$

Das Paar (\mathcal{E}^2, d) ist somit ein *metrischer Raum*. Der euklidische Abstand ist zudem *translationsinvariant* und d. h. für beliebige Punkte P, Q und einen beliebigen Vektor $v \in \mathcal{E}^2$ gilt: $d(P+v, Q+v) = d(P, Q)$ ([27]: 14).

2.2 Beiträge der reellen Analysis zur Sachanalyse

In diesem Kapitel möchte ich die fachmathematischen Grundlagen der drei Unterrichtsinhalte vorstellen, die der reellen Analysis entstammen. Hierzu werde ich in Abschnitt 2.2.1 eine Definition der Sinus- und Kosinusfunktion als reeller Summenfunktionen vorstellen, mit deren Hilfe die *Ableitungen* dieser Funktionen bestimmt werden können. Auf Grundlage dieser Definition sollen in Abschnitt 2.2.2 nicht nur die *Additionstheoreme* bewiesen werden, sondern es soll auch herausgearbeitet werden, dass diese eine zentrale Rolle bei der Erarbeitung qualitativer Eigenschaften der Sinus- und Kosinusfunktion spielen. In Abschnitt 2.2.3 wird zunächst eine zentrale Aussage für die hochschulmathematische Trigonometrie bewiesen: Gilt für reellen Zahlen x und y , dass $x^2 + y^2 = 1$, so existiert genau eine Zahl $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $\cos(\varphi) = x$ und $\sin(\varphi) = y$. Diese Aussage erlaubt nicht nur die Definition der Polarkoordinaten eines Punktes der Ebene, sondern auch die Vorstellung zweier schulrelevanter innermathematischer Anwendung der Additionstheoreme: die *Veranschaulichung der Multiplikation komplexer Zahlen* und die *analytisch geometrische Beschreibung der Drehung eines Punktes der euklidischen Ebene um den Koordinatenursprung*. In Abschnitt 2.2.4 wird die Länge von Kreisbögen bestimmt, was in Kapitel 2.3 die Einführung des *Bogenmaßbegriffs* ermöglicht.

2.2.1 Die Summenfunktionen \sin und \cos

In der (reellen) *Analysis* definiert man die Sinus- und Kosinusfunktion für gewöhnlich als Summenfunktionen bzw. als Summen von Potenzreihen mit nicht-negativem reellem Konvergenzradius r . Sei $x_0 \in \mathbf{R}$ der *Mittelpunkt* einer Potenzreihe, seien a_n mit $n \in \mathbf{N}$ reelle *Koeffizienten* und sei $K := \{x \in \mathbf{R} : |x - x_0| < r\}$ das *Konvergenzintervall*

der Potenzreihe. Dann wird die *Summenfunktion* $f : K \rightarrow \mathbf{R}$ mit Hilfe der folgenden Funktionsvorschrift definiert ([42]: 362 f., 367):

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Hierbei ist der *Konvergenzradius* der Portenzreihe durch $r := 1/\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ festgelegt, wobei $r = \frac{1}{0} := +\infty$ und $r = \frac{1}{+\infty} := 0$.

Sei $n \in \mathbf{N}$ und seien $(s_k)_{k \in \mathbf{N}}$ und $(c_k)_{k \in \mathbf{N}}$ reelle Zahlenfolgen gegeben durch

$$s_k := \begin{cases} \frac{(-1)^{(k-1)/2}}{k!}, & \text{falls } k = 2n + 1, \\ 0 & \text{falls } k = 2n, \end{cases} \quad c_k := \begin{cases} \frac{(-1)^{k/2}}{k!}, & \text{falls } k = 2n, \\ 0 & \text{falls } k = 2n + 1. \end{cases}$$

Ist der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$ bekannt ([42]: 179, 596), dann folgt mit $\frac{1}{n!} > 0$ für alle $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|s_k|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{|s_{2n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{\frac{|(-1)|^n}{|(2n+1)!|}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[2n+1]{(2n+1)!}} = 0, \end{aligned}$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{|c_{2n}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\frac{|(-1)|^n}{|(2n)!|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{(2n)!}} = 0.$$

Somit konvergieren die Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ auf ganz \mathbf{R} , was die folgende Definition der Summenfunktionen $\sin : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ und $\cos : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ermöglicht ([42]: 391):

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad (1)$$

Offenbar ist für beliebiges $x \in \mathbf{R}$ und $n \in \mathbf{N}$ stets $(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$ und $(-x)^{2n} = x^{2n}$. Da die Potenzreihen, mittels derer \sin und \cos definiert wurden, für alle $x \in \mathbf{R}$ konvergieren, ist für jedes

derartige x auch $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$. D. h. \sin ist eine *ungerade* Funktion, während \cos eine *gerade* Funktion ist ([42]: 391). Für Summenfunktionen werden in der Analysis die folgenden *Stetigkeits-* und *Differenzierbarkeitsaussagen* bewiesen ([42]: 368 f.):

Satz 2.5. Die Summenfunktion f der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ist auf dem ganzen Konvergenzintervall K stetig.

Satz 2.6. Die Summenfunktion f der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ist auf dem ganzen Konvergenzintervall K beliebig oft differenzierbar, und ihre Ableitungen können durch gliederweise Differentiation gewonnen werden. Sei $k \in \mathbf{N}$ und sei mit $f^{(k)}$ die k -te Ableitung der Summenfunktion f bezeichnet, dann gilt für jedes $x \in K$:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1) \cdot \dots \cdot (n+1) a_{n+k} (x-x_0)^n.$$

Mit Hilfe des Satzes 2.6 ist es nun ein Leichtes, die Ableitungen der Summenfunktionen \sin und \cos zu gewinnen. Hierzu müssen lediglich die entsprechenden Potenzreihen gliederweise differenziert werden. Somit gilt für alle $x \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x), \\ \frac{d}{dx} \cos(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)x^{2n-1}}{(2n)!} \\ &= {}_{(m:=n-1)} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ &= (-1) \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = -\sin(x). \end{aligned}$$

Hiermit folgt nun insbesondere, dass $\frac{d^2}{dx^2} \sin(x) = -\sin(x)$ und $\frac{d^2}{dx^2} \cos(x) = -\cos(x)$, d. h. die Funktionen \sin und \cos lösen die Differentialgleichung $f'' + f = 0$.³ Aufgrund des Stetigkeitssatzes 2.5 existieren zudem die beiden folgenden Grenzwerte ([42]: 391):

$$\frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} \mp \dots\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1, \quad (2)$$

$$\frac{\cos(x) - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} = \left(-\frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \frac{x^5}{6!} \pm \dots\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0. \quad (3)$$

2.2.2 Die Rolle der Additionstheoreme in der reellen Analysis

Mit Hilfe der Ableitungen der Funktionen \sin und \cos kann die Gültigkeit der Additionstheoreme nun folgendermaßen gezeigt werden ([42]: 392 f.): Sei $y \in \mathbf{R}$ beliebig gewählt und seien Funktionen $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ und $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} g(x) &:= \sin(x+y) - \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y), \\ h(x) &:= \cos(x+y) - \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y). \end{aligned}$$

Sei nun durch $f(x) := [g(x)]^2 + [h(x)]^2$ eine Funktion $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definiert. f ist als Verknüpfung differenzierbarer Funktionen selbst differenzierbar mit der Ableitung $f'(x) = 2g(x)h'(x) - 2g'(x)h(x) \equiv 0$. D. h. es ist $f(x) \equiv c$ mit $c \in \mathbf{R}$. Da zudem $f(0) = 0$ gilt, ist also $f(x) \equiv 0$ und damit $g(x) \equiv 0$ und $h(x) \equiv 0$, was die Gültigkeit der Additionstheoreme für beliebige $x, y \in \mathbf{R}$ zur Folge hat:

³ Umgekehrt ist \sin die eindeutig bestimmte Lösung dieser Differentialgleichung für die Anfangswertbedingung $f(0) = 0, f'(0) = 1$ und \cos jene für die Anfangswertbedingung $f(0) = 1, f'(0) = 0$. Diese Tatsache wurde in der mathematikdidaktischen Literatur immer wieder zum Anlass genommen, die Sinus- und Kosinusfunktionen mittels der Differentialgleichung $f'' + f = 0$ zu definieren. Vgl. hierzu [55], [86], [108], sowie für entsprechende ausgearbeitete Unterrichtssequenzen ([15]: 43-49, 121-138) und ([78]: 743-746).

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y), \quad (4)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y). \quad (5)$$

Im Folgenden soll die tragende Rolle der Additionstheoreme (4) und (5) bei der Erarbeitung zentraler Eigenschaften der Funktionen \sin und \cos vorgestellt werden. Zuvor bietet es sich allerdings an, einige wichtige trigonometrische Formeln zu folgern: Zunächst erhält man aus (4) bzw. (5) die *Formeln für den doppelten Winkel*:

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x) \quad \text{bzw.} \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Unter Berufung auf die „Geradheit“ bzw. „Ungeradheit“ der Funktionen \sin und \cos erschließen sich die *Subtraktionstheoreme*:

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y) \quad \text{bzw.}$$

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)$$

Durch Einsetzen in die Reihendarstellung der Kosinusfunktion ergibt sich $\cos(0) = 1$. Diese Tatsache und das \cos -Subtraktionstheorem für $x = y$ ermöglicht die Entdeckung des *trigonometrischen Pythagoras*: $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ für beliebiges $x \in \mathbf{R}$. Aus dem trigonometrischen Pythagoras ergibt sich unmittelbar die *Beschränktheit* der Funktionen \sin und \cos ([42]: 276):

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) \leq 1 \Rightarrow |\sin(x)| \leq 1,$$

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \leq 1 \Rightarrow |\cos(x)| \leq 1.$$

Die analytische Behandlung zentraler Eigenschaften der Funktionen \sin und \cos beginnt üblicherweise mit einer Definition der Zahl π *als des Doppelten der kleinsten positiven Nullstelle der Funktion \cos* .⁴ Der Beweis, dass die Funktion \cos überhaupt eine Nullstelle besitzt, macht indirekt Gebrauch von den Additionstheoremen, nämlich dann,

⁴ Die in diesem Abschnitt folgenden Überlegungen orientieren sich im Wesentlichen an Heuser ([42]: 336-38).

wenn eine Formel für den doppelten Winkel und die Beschränktheit der Funktionen \sin und \cos benutzt werden ([42]: 336).⁵

Satz 2.7. *Die Funktion \cos besitzt eine positive Nullstelle.*

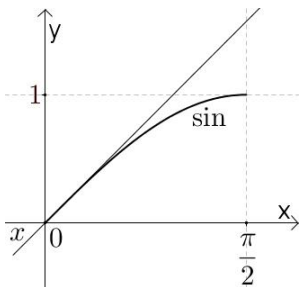
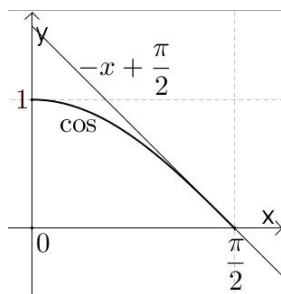
Beweis. Angenommen, \cos besitzt für $x > 0$ keine Nullstellen. \cos ist eine auf \mathbf{R} stetige Funktion und es ist $\cos(0) = 1 > 0$. Somit muss, entsprechend der Kontraposition des *Nullstellensatzes* ([42]: 223), auch $\cos(x) > 0$ für alle $x \geq 0$ gelten. Demnach ist für jeden derartigen x -Wert aber auch $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$ positiv und d. h. \sin ist auf \mathbf{R}_0^+ eine streng monoton wachsende Funktion. Einsetzen in die Reihendarstellung von \sin zeigt, dass $\sin(0) = 0$, und damit folgt, dass $\sin(x)$ für alle $x > 0$ positiv ist. Dies bedeutet aber wiederum, dass \cos für $x > 0$ streng monoton fällt, da für solche x -Werte $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x) < 0$ ist. Die Funktionen \sin und \cos sind für $x \geq 0$ also nicht nur beschränkt, sondern auch streng monoton wachsend bzw. fallend. Aus diesem Grund existieren die Grenzwerte $s := \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$ und $c := \lim_{x \rightarrow \infty} \cos(x)$, wobei insbesondere $s > 0$ gilt. Mit den Formeln für den doppelten Winkel ist dann $s = 2sc$ und $c = c^2 - s^2$. Die erste dieser Gleichungen impliziert $c = \frac{1}{2}$, da ja $s > 0$. Damit ergibt sich aber aus der zweiten Gleichung, dass es eine (positive) reelle Zahl s geben muss, deren Quadrat eine negative reelle Zahl, nämlich $-\frac{1}{4}$, ist. Dies ist offensichtlich ein Widerspruch, weshalb die Annahme, \cos besitze keine positiven Nullstellen falsch sein muss. \square

Die Zahl π ist nun definiert als das Doppelte der kleinsten positiven Nullstelle der Funktion \cos , weshalb $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ ist und $\cos(x) > 0$ für $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$. Damit ist $\frac{d}{dx} \sin(x)$ für solche x -Werte positiv und d. h. \sin ist auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend. Da

⁵ Dass die Funktion \cos auch eine *kleinste* positive Nullstelle hat, zeigt man unter Verweis auf die Tatsache, dass die Nullstellenmenge $\{x \in \mathbf{R}_0^+ : \cos(x) = 0\}$ als Teilmenge des Intervalls $[0, \infty)$ eine nach unten beschränkte und abgeschlossene Menge ist und deshalb ein Minimum besitzen muss ([42]: 224, 602).

zudem $\sin(0) = 0$ ist, hat \sin auf $(0, \frac{\pi}{2}]$ sogar positive Funktionswerte. Mit dem trigonometrischen Pythagoras (also wiederum implizit den Additionstheoremen) folgert man nun $\sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1$ und somit $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Weiterhin ist $\frac{d}{dx} \cos(x) < 0$ auf dem Intervall $(0, \frac{\pi}{2}]$ und d. h. die Funktion \cos fällt auf diesem Intervall streng monoton. Die zweiten Ableitungen der Funktionen \sin und \cos nehmen auf dem offenen Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$ beide durchgehend negative Werte an und das bedeutet, dass die beiden Funktionen dort streng konkav (rechtsgekrümmt) sind. Da $\cos(0) = 1 = \sin(\frac{\pi}{2})$, ist der Anstieg der Funktion \sin nahe $x = 0$ ungefähr 1 und der Anstieg der Funktion \cos nahe $x = \frac{\pi}{2}$ ungefähr -1 . Graphisch lässt sich \sin also nahe $x = 0$ durch den Graphen der identischen Abbildung gegeben durch $y = x$ approximieren, während sich der Graph von \cos nahe $x = \frac{\pi}{2}$ durch den Graphen der Abbildung gegeben durch $y = -x + \frac{\pi}{2}$ annähern lässt. Mit Hilfe all dieser Angaben gewinnt man die Schaubilder der Graphen der Funktionen \sin und \cos im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$, die in den Abbildungen 2 und 3 dargestellt sind.

Abb. 2: \sin -Graph auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ Abb. 3: \cos -Graph auf $[0, \frac{\pi}{2}]$

Durch erneuten Rückgriff auf die Formeln für den doppelten Winkel (und damit wiederum implizit auf die Additionstheoreme) ergeben sich nun die folgenden wichtigen Funktionswerte:

$$\sin(\pi) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\cos(\pi) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Analog erschließt man sich $\sin(2\pi) = 0$ und $\cos(2\pi) = 1$. Weiterhin liefern die Additionstheoreme für beliebiges $x \in \mathbf{R}$ die folgenden Identitäten: $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$, $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$, $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$, $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ und $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

Mit den beiden zuerst genannten Identitäten ist es möglich, die erworbenen Kenntnisse über die Funktionen \sin und \cos im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ auf das Intervall $[0, \pi]$ auszudehnen: Sei nämlich $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ und $y := x - \frac{\pi}{2}$, dann ist $0 < y \leq \frac{\pi}{2}$ und damit $\sin(x) = \cos(y)$ und $\cos(x) = -\sin(y)$. Die Funktion \sin verläuft also auf dem Intervall $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ ebenso wie die Funktion \cos auf dem Intervall $(0, \frac{\pi}{2}]$. Hingegen verläuft die Funktion \cos auf dem Intervall $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ nicht wie \sin auf $(0, \frac{\pi}{2}]$, sondern wie die Spiegelung der Funktion \sin an der x -Achse auf besagtem Intervall.

Offenbar erlauben die übrigen der oben genannten Identitäten eine Erweiterung der Kenntnis der zentralen qualitativen Eigenschaften der Funktionen \sin und \cos auf das Intervall $[0, 2\pi]$. Insbesondere ermöglichen die beiden zuletzt genannten der obigen Identitäten den Schluss, dass \sin und \cos 2π -periodische Funktionen sind, wobei eine Funktion $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ p -periodisch heißt, wenn ein $p \neq 0$ existiert mit $f(x + p) = f(x)$ für beliebige $x \in \mathbf{R}$.⁶ Demnach ist nun der qualitative Verlauf der Funktionen \sin und \cos auf deren ganzem Definitionsbereich bekannt. Insbesondere sind die Nullstellenmengen dieser Funktionen gegeben durch $N_{\sin} := \{x \in \mathbf{R} : x = k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ und $N_{\cos} = \{x \in \mathbf{R} : (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$.

In diesem Abschnitt konnte die tragende Rolle verdeutlicht werden, die die Additionstheoreme bei der Erarbeitung zentraler qualitativer Eigenschaften der Funktionen \sin und \cos in der reellen Analysis

⁶ Offenbar ist 2π auch die kleinste positive Periode dieser Funktionen ([42]: 339, 612): Andernfalls gäbe es nämlich $p_{\sin}, p_{\cos} \in (0, 2\pi)$ mit $\sin(x + p_{\sin}) = \sin(x)$ und $\cos(x + p_{\cos}) = \cos(x)$ für beliebige $x \in \mathbf{R}$. Dann ist aber $\sin(p_{\sin}) = \sin(0 + p_{\sin}) = \sin(0) = 0$ und $-\sin(p_{\cos}) = \cos(p_{\cos} + \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ und damit $p_{\sin} = p_{\cos} = \pi$. Nun gilt aber offenbar sowohl $\sin(\frac{\pi}{2} + p_{\sin}) = -1 \neq 0 = \sin(p_{\sin})$ als auch $\cos(0 + p_{\cos}) = -1 \neq 1 = \cos(0)$.

spielen. Zwei weitere innermathematische Anwendungsfälle der Additionstheoreme sollen im folgenden Abschnitt vorgestellt werden.

2.2.3 Ein wichtiger Satz, Polarkoordinaten, die Drehmatrix und die Multiplikation komplexer Zahlen

Die Ergebnisse des vorangegangenen Abschnittes ermöglichen den Beweis eines Satzes, der sich im Folgenden als essenziell erweisen wird:

Satz 2.8. *Gilt für zwei reelle Zahlen x, y die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$, dann existiert eine eindeutig bestimmte Zahl $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $\cos(\varphi) = x$ und $\sin(\varphi) = y$. ([42]: 338)*

Eine geometrische Deutung dieses Satzes ist im Folgenden nützlich: Ein Kreis $K(M, r)$ mit Mittelpunkt M und Radius $r > 0$ ist die Menge $\{P \in \mathcal{E}^2 : |P - M| = r\}$. Seien ein Punkt M und ein Radius $r > 0$ beliebig aber fest gewählt, dann gilt für alle Punkte $P \in K(M, r)$, dass $\sqrt{(p_1 - m_1)^2 + (p_2 - m_2)^2} = r$ und d. h. $\left(\frac{p_1 - m_1}{r}\right)^2 + \left(\frac{p_2 - m_2}{r}\right)^2 = 1$. Dementsprechend lässt sich schlussfolgern, dass für alle Punkte $Q = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, deren Komponenten die im Satz erwähnte Gleichheit $x^2 + y^2 = 1$

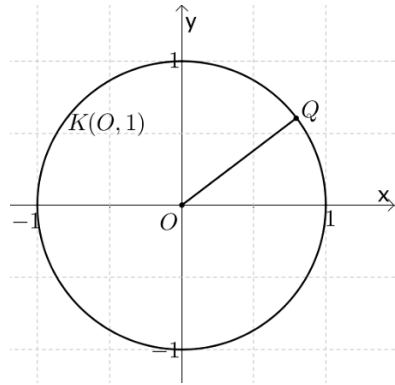


Abb. 4: Beweisskizze 1

erfüllen, $Q \in K(O, 1)$ gilt. Diese Punkte sind also Elemente des sogenannten *Einheitskreises*. Mit dem Satz 2.8 wird nun Folgendes behauptet: Die Lage eines jeden Punktes Q des Einheitskreises ist eindeutig durch die Kenntnis einer Zahl $\varphi_Q \in [0, 2\pi)$ bestimmt. Die kartesischen Koordinaten von Q bzgl. des kartesischen Koordinatensystems $\{O, e_1, e_2\}$ lauten dann nämlich $(\cos(\varphi_Q); \sin(\varphi_Q))$.

Der Beweis des Satzes 2.8 erfolgt durch Fallunterscheidung ([42]: 338) und es lohnt sich für jeden der Fälle die vorgelegte geometrische Deutung des Satzes im Auge zu behalten (vgl. Abbildung 4). Hierdurch wird nämlich die Darstellung eines Punktes der euklidischen Ebene mittels Polarkoordinaten plausibilisiert.

Beweis.

Fall 1: Für $x = 1$ und $y = 0$ erfüllt nur $\varphi = 0$ besagte Eigenschaft. Geometrisch handelt es sich hierbei um den Schnittpunkt von $K(O, r)$ mit der „positiven Hälfte der x -Achse“.

Fall 2: Ebenso erfüllt nur $\varphi = \pi$ die geforderte Eigenschaft für $x = -1$ und $y = 0$, wobei es sich geometrisch um den Schnittpunkt von $K(O, r)$ mit der „negativen Hälfte der x -Achse“ handelt.

Fall 3: Sei $0 \leq x < 1$, dann ist $y \neq 0$ und es gibt eindeutig bestimmte $\varphi_1 \in (0, \frac{\pi}{2}]$ und $\varphi_2 \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ mit $\cos(\varphi_i) = x$, $i = 1, 2$. Dies ergibt sich aus der Stetigkeit und strengen Monotonie des Kosinus auf besagten Intervallen und der Tatsache, dass \cos nur dort nicht-negative Werte annimmt. Damit ist $\sin(\varphi_1) > 0$ und $\sin(\varphi_2) < 0$. Ist $y > 0$, so gilt mit dem trigonometrischen Pythagoras, dass

$$\sin(\varphi_1) = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi_1)} = \sqrt{1 - x^2} = y > 0 > \sin(\varphi_2).$$

Es lässt sich also für $0 \leq x < 1$, $y > 0$ ein eindeutig bestimmtes $\varphi = \varphi_1 \in (0, \frac{\pi}{2}]$ finden, dass die geforderte Bedingung erfüllt. Alle Punkte des Einheitskreises, die diese Eigenschaft erfüllen, befinden sich geometrisch betrachtet im 1. Quadranten des Koordinatensystems oder stellen den Schnittpunkt mit der „positiven Hälfte der y -Achse“ dar. Analog schließt man für $0 \leq x < 1$ und $y < 0$, dass

$$\sin(\varphi_2) = -\sqrt{1 - \cos^2(\varphi_2)} = -\sqrt{1 - x^2} = y < 0 < \sin(\varphi_1),$$

und damit, dass ein eindeutig bestimmtes $\varphi = \varphi_2 \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ die geforderte Bedingung erfüllt. Somit gibt es also, geometrisch betrachtet, auch für alle Punkte des Einheitskreises im vierten Quadranten eine eindeutig bestimmte Zahl φ .

Fall 4: In Analogie zu Fall 3 verfährt man mit dem Fall $-1 < x < 0$. Für alle Punkte des Einheitskreises im zweiten Quadranten existiert dann ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ und für alle jene im dritten Quadranten eines im Intervall $(\pi, \frac{3\pi}{2})$.

□

Für $\varphi \in \mathbf{R}$ ist durch $e_\varphi := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ aufgrund des trigonometrischen Pythagoras ein *Einheitsvektor* definiert, d. h. ein Vektor der Länge 1 ([54]: 98). Sei nun noch P ein von O verschiedener Punkt der euklidischen Ebene, dann existiert offenbar genau ein Kreis mit Mittelpunkt O , d. h. ein *Kreis in Mittelpunktslage*, auf dem P liegt, nämlich $K(O, r_P)$, wobei $r_P = |P - O|$ die Länge des Ortsvektors von P ist. Dementsprechend ist $\left(\frac{p_1}{r_P}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{r_P}\right)^2 = 1$ und es existiert nach dem eben bewiesenen Satz genau eine Zahl $\varphi_P \in [0, 2\pi)$, die die Lage von P durch $O + r_P \cdot e_{\varphi_P}$ auf dem Kreis $K(O, r_P)$ eindeutig festlegt, was in Abbildung 5 veranschaulicht ist. Somit gilt der folgende

Satz 2.9. Zu einem Punkt $P \neq O$ gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $P = O + |\overrightarrow{OP}| \cdot e_\varphi$. ([54]: 98)

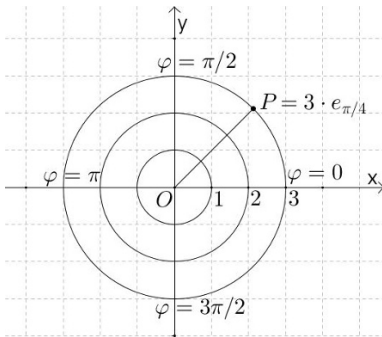


Abb. 5: Polardarstellung von P

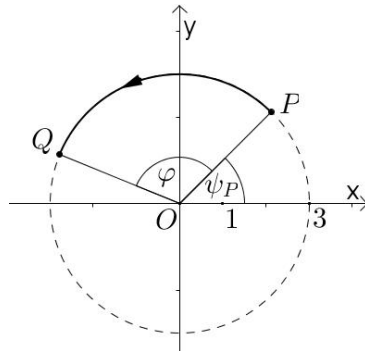


Abb. 6: Drehung von P in Q

Die Lage eines Punktes $P \neq O$ ist somit eindeutig durch ein Zahlenpaar $(r, \varphi) \in \mathbf{R}^+ \times [0, 2\pi)$ hinsichtlich des Koordinatensystems $\{O, e_1, e_2\}$ bestimmt und man nennt dieses Zahlenpaar die *Polarkoordinaten* von P . In Abbildung 5 wird zudem ersichtlich, dass es sinnvoll ist, die Zahl φ als ein Winkelmaß zu interpretieren, worauf im folgenden Kapitel 2.3 näher einzugehen sein wird. Die Einführung von Polarkoordinaten gestattet es, zwei innermathematische Anwendungen der Additionstheoreme zu skizzieren.

Sei $r > 0$ und seien $P, Q \neq O$ Punkte mit Polarkoordinaten (r, ψ_P) bzw. (r, ψ_Q) , wobei $\psi_P < \psi_Q$ mit $\psi_Q - \psi_P = \varphi \in [0, 2\pi)$. Weiterhin habe P die kartesischen Koordinaten $(x_P; y_P)$. Unter Rückgriff auf die Additionstheoreme gilt dann:

$$\begin{aligned} Q &= O + r \cdot e_{\varphi_Q} = \begin{pmatrix} r \cos(\psi_P + \varphi) \\ r \sin(\psi_P + \varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r \cos(\psi_P) \cos(\varphi) - r \sin(\psi_P) \sin(\varphi) \\ r \sin(\psi_P) \cos(\varphi) + r \cos(\psi_P) \sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_P \cos(\varphi) - y_P \sin(\varphi) \\ y_P \cos(\varphi) + x_P \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \circ P. \end{aligned}$$

Die Matrix $\mathcal{D}_\varphi := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ wird üblicherweise als *Drehmatrix* bezeichnet ([21]: 261), was sich unter Rückgriff auf Abbildung 6 anschaulich nachvollziehen lässt: Die Abbildung $f_{\mathcal{D}(\varphi)} : \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$, gegeben durch $f_{\mathcal{D}(\varphi)}(P) := \mathcal{D}_\varphi \circ P$, dreht den Punkt P in den Punkt Q , wobei der Koordinatenursprung O das Drehzentrum bildet. Die (Maß-)Zahl $\varphi \in [0, 2\pi)$ gibt demnach an, wie weit P um O gedreht wird und taugt somit wunderbar als Winkelmaß. Aufgrund der Periodizität der Funktionen \sin und \cos kann die Drehmatrix \mathcal{D}_φ für beliebige reelle Zahlen φ (wohl-)definiert werden. Die Abbildung $f_{\mathcal{D}(\varphi)}$ ist eine *affine Abbildung* ([21]: 279): Die Vektorabbildung $\tilde{f}_{\mathcal{D}(\varphi)} : V_{\mathcal{E}^2} \rightarrow V_{\mathcal{E}^2}$, gegeben durch $\tilde{f}_{\mathcal{D}(\varphi)}(v) := \mathcal{D}_\varphi \circ v$, ist nämlich offenbar eine lineare Abbildung und zudem gilt für beliebige Punkte $P, Q \in \mathcal{E}^2$, dass

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(\mathcal{D}(\psi) \circ P)(\mathcal{D}(\psi) \circ Q)} &= \begin{pmatrix} (q_1 - p_1) \cos(\psi) - (q_2 - p_2) \sin(\psi) \\ (q_1 - p_1) \sin(\psi) + (q_2 - p_2) \cos(\psi) \end{pmatrix} \\ &= \tilde{f}_{\mathcal{D}(\psi)}(\overrightarrow{PQ}). \end{aligned} \tag{6}$$

Ich wende mich nun einem zweiten (schulrelevanten) Anwendungsgebiet der Additionstheoreme zu, welches im Terrain der komplexen Zahlen zu finden ist. In der Schule wird man bei der Behandlung komplexer Zahlen nicht auf die reell-analytische Theorie der Potenzreihen zurückgreifen können, da die Behandlung von Potenzreihen ebenso wie die der komplexen Zahlen lediglich „Zusatzstoff“ ist

([95]: 44 f.; [96]: 33 f.). Demnach wird man darauf verzichten, zentrale Eigenschaften der Polardarstellung komplexer Zahlen ausgehend von der komplexen Exponentialfunktion zu erarbeiten ([42]: 393-97). Vielmehr wird man versucht sein, sich auf anschauliche und elementargeometrische Überlegungen zu stützen. In einem solchen Setting kommt den Additionstheoremen eine bedeutende Rolle zu: Diese ermöglichen nämlich nicht nur eine Veranschaulichung der Multiplikation komplexer Zahlen, sondern auch eine einfache Begründung der *Formel von Moivre*, welche einfaches Radizieren komplexer Zahlen erlaubt.

Die Elemente des Körpers $\mathbf{C} := (\mathbf{R}^2, +, \cdot)$ mit der komponentenweisen Addition und der Multiplikation $(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, bc + ad)$ heißen *komplexe Zahlen*.⁷ Man schreibt für $z = (a, b) \in \mathbf{C}$ gern $z = a + bi$. Die vorangegangenen Überlegungen dieses Abschnitts ergeben dann, dass jede von 0 verschiedene Zahl $z \in \mathbf{C}$ durch $z = |z| \cdot (\cos(\varphi_z) + i \sin(\varphi_z))$ mit $\varphi_z \in [0, 2\pi)$ eindeutig darstellbar ist. Somit ergibt sich mit den Additionstheoremen für komplexe Zahlen $w, z \neq 0$, dass

$$\begin{aligned} w \cdot z &= |w|(\cos(\varphi_w) + i \sin(\varphi_w)) \cdot |z|(\cos(\varphi_z) + i \sin(\varphi_z)) \\ &= |w||z|(\cos(\varphi_w + \varphi_z) + i \sin(\varphi_w + \varphi_z)). \end{aligned}$$

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen bedeutet somit nichts anderes als eine Multiplikation ihrer Beträge und eine Addition ihrer Argumente. Stellt man komplexe Zahlen $w, z \neq 0$ durch Ortsvektoren in der Gaußschen Zahlenebene dar, so bedeutet $w \cdot z$ eine Verlängerung bzw. Verkürzung des Vektors z um den Faktor $|w|$ und eine Drehung von z um einen Winkel dessen Größe die Maßzahl $\varphi_w = \arg(w)$ hat. Die Multiplikation komplexer Zahlen kann somit anschaulich als eine *Drehstreckung* mit Zentrum O interpretiert werden.

⁷ Für das Folgende orientiere ich mich an Fritzsche ([23]: 1-7).

Insbesondere folgt nun, dass $(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^2 = \cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)$, und man zeigt per vollständiger Induktion leicht, dass für eine beliebige natürliche Zahl $n > 0$ die *Formel von Moivre* gilt ([23]: 5):

$$(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi).$$

Sei $w \in \mathbf{C}$ vorgegeben, dann können mit dieser Formel Aufgaben der Form $z^n = w$ für $z \in \mathbf{C}$ gelöst werden. Sie ermöglicht also einfaches Radizieren komplexer Zahlen und damit insbesondere die (schöne) Entdeckung, dass die Aufgabe $z^n = 1$ genau n verschiedene Lösungen besitzt, die in der Gaußschen Zahlenebene die Eckpunkte eines regelmäßigen n -Ecks bilden ([23]: 5-7).

In diesem Abschnitt wurde der Satz 2.8 bewiesen und mit dessen Hilfe die Polarkoordinaten eines Punktes der euklidischen Ebene eingeführt. Die Polarkoordinaten wiederum gestatteten eine knappe Vorstellung zweier innermathematischer Anwendungsfelder der Additionstheoreme: nämlich einerseits die analytisch geometrische Beschreibung der Drehung eines Punktes mit Hilfe der Drehmatrix und andererseits eine Veranschaulichung der Multiplikation komplexer Zahlen.

Die Tragkraft des Satzes 2.8 wird sich im folgenden Abschnitt im Zuge der Bestimmung der Länge von Kreisbögen noch weiter verdeutlichen. An dieser Stelle sei zudem angemerkt, dass der Satz 2.8 die fachmathematische Grundlage für die schulische Einführung der Sinus- und Kosinusfunktion am Einheitskreis bildet (vgl. Abschnitt 3.1.1): Man definiert hier schlichtweg Abbildungen $s : [0, 2\pi) \rightarrow [-1, 1]$ und $c : [0, 2\pi) \rightarrow [-1, 1]$ durch $s(\varphi) := y_P$ und $c(\varphi) := x_P$, wobei $(x_P; y_P) = (\cos(\varphi); \sin(\varphi))$ die kartesischen Koordinaten eines Punktes $P \in K(O, 1)$ sind.

2.2.4 Der Begriff der Bogenlänge

In diesem Abschnitt soll der Begriff „Bogenlänge“ erläutert werden. Das Ziel ist zudem die Bestimmung der Bogenlänge spezieller „Bögen“, nämlich solcher Bögen, die für gewöhnlich als *Kreisbögen* bezeichnet

werden. Inwiefern ein Kreis $K(M, r) \subset \mathcal{E}^2$ als Bogen interpretierbar ist, klärt die folgende

Definition 2.4. Jede stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}^2$ heißt ein **Weg** in \mathcal{E}^2 , wobei $\gamma(a)$ als **Anfangs-** und $\gamma(b)$ als **Endpunkt** bezeichnet werden. Unter einem **Bogen** Γ in \mathcal{E}^2 ist die zu einem Weg $\gamma : [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}^2$ gehörende Bildmenge $\gamma([a, b]) = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$ zu verstehen. Ist ein Bogen $\Gamma \subset \mathcal{E}^2$ gegeben, dann heißt ein Weg γ mit $\gamma([a, b]) = \Gamma$ eine **Darstellung** oder **Parametrisierung** des Bogens Γ . ([41]: 241)

Im Anschluss an diese Definition stellt sich unmittelbar die Frage, wie denn ein Kreis parametrisiert werden kann. Sei $K(M, r)$ ein Kreis mit Radius $r > 0$. Mit Rückgriff auf Satz 2.8 und die Überlegungen des letzten Abschnittes existiert für alle Punkte $P \in K(M, r)$ genau eine reelle Zahl $\varphi \in [0, 2\pi)$, so dass $P = M + r \cdot e_{\varphi}$. Dementsprechend ist der Weg $\gamma_{K(M, r)} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathcal{E}^2$ mit $\gamma_{K(M, r)}(t) := \begin{pmatrix} m_1 + r \cos(t) \\ m_2 + r \sin(t) \end{pmatrix}$ eine Darstellung des Kreises $K(M, r)$.

Im Folgenden sollen nicht nur Bögen „vollständiger“ Kreise betrachtet werden, sondern vor allem echte Teilmengen solcher Bögen, die nicht „zerstückelt“ sind. Dementsprechend heiße das Bild

$$\Gamma_{K(M, r)}^{[t_1, t_2]} := \gamma_{K(M, r)}([t_1, t_2]) \text{ mit } [t_1, t_2] \subset [0, 4\pi] \text{ und } t_2 - t_1 \leq 2\pi$$

ein *Kreisbogen*. Gilt sogar $t_2 - t_1 < 2\pi$, dann heißen $\gamma_{K(M, r)}(t_1)$ und $\gamma_{K(M, r)}(t_2)$ die *Randpunkte* von $\Gamma_{K(M, r)}^{[t_1, t_2]}$. In diesem Fall ist $\gamma_{K(M, r)}$ injektiv, was sich unmittelbar aus Satz 2.8 und der Periodizität der Funktionen \sin und \cos ergibt.

Ziel dieses Abschnittes ist es, die Länge von Kreisbögen zu bestimmen. Hierzu möchte ich einen Spezialfall betrachten, der anschließend (ohne Beweis) verallgemeinert werden soll. Im Folgenden sollen lediglich Graphen $\Gamma_f := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y = f(x)\} \subset \mathcal{E}^2$ stetig differenzierbarer Funktionen $f : [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ als Bögen betrachtet werden. Solche Bögen lassen sich offenbar durch Wege $\gamma_f : [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ mit $\gamma_f(t) := \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$ darstellen. Da f nach

Voraussetzung stetig differenzierbar ist, sind auch die beiden Komponentenfunktionen $\gamma_{f,1}(t) := t$ und $\gamma_{f,2}(t) := f(t)$ von γ_f stetig differenzierbar und es ist $\dot{\gamma}_f(t) := \frac{d}{dt}\gamma_f(t) = \begin{pmatrix} \gamma'_{f,1}(t) \\ \gamma'_{f,2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$.

Die zentrale Idee zur Bestimmung der Länge eines Bogens besteht darin, die Länge injektiver Darstellungen dieses Bogens zu ermitteln. Durch die Forderung der Injektivität bürgt man (anschaulich gesprochen) dafür, dass man einen Bogen mittels eines Weges nicht „mehrfach abläuft“. Die zentrale Idee zur Bestimmung der Länge eines Weges besteht nun wiederum darin, diesen Weg zu rektifizieren, d. h. „gerade zu machen“. Hierzu bedient man sich einer Zerlegung $Z_{[a,b]} := \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ des Intervalls $[a, b]$ mit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Der Definitionsbereich des Weges γ_f wird also in n -Teilintervalle zerlegt. Nimmt man nun die plausible Annahme zur Hand, dass die Länge der Verbindungsstrecke zweier Punkte $P, Q \in \mathcal{E}^2$ durch deren Abstand

$|Q - P|$ bestimmt ist, dann lässt sich die Summe $\sum_{k=1}^n |\gamma_f(t_k) - \gamma_f(t_{k-1})|$ als eine mehr oder minder gute Näherung der Länge des Weges γ_f verstehen. Der Bogen Γ_f wird also durch einen Polygonzug approximiert und d. h. anschaulich: „gerade gemacht“ (vgl. Abbildung 7).

Abbildung 7 legt nahe, dass immer feinere Zerlegungen von $[a, b]$ eine immer genauere Approximation der Länge des Weges γ_f zur Folge haben werden ([42]: 448–50). Sei $I_k := [t_{k-1}, t_k]$ das k -te Teilintervall der Zerlegung Z mit der Intervalllänge $|I_k| := (t_k - t_{k-1})$, dann ist die Zahl $|Z| := \max_{k=1}^n |I_k|$ ein Maß für die Feinheit der Zerlegung Z . Sei nun durch $Z_{[a,b]}^{(j)} := \{t_0^{(j)}, t_1^{(j)}, \dots, t_{n_j}^{(j)}\}$ eine Zerlegungsnullfolge des Intervalls $[a, b]$ definiert, d. h. eine Folge von Zerlegungen, für die $\lim_{j \rightarrow \infty} |Z^{(j)}| = 0$

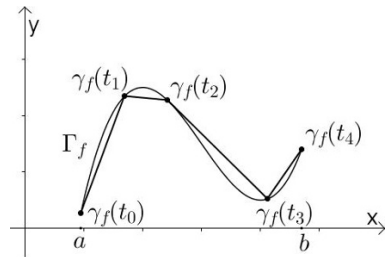


Abb. 7: Polygonzug durch die Punkte $\gamma_f(t_0), \dots, \gamma_f(t_4)$

ist. Dann gilt für die Länge des wie oben definierten Polygonzuges:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n_j} |\gamma_f(t_k^{(j)}) - \gamma_f(t_{k-1}^{(j)})| \\
&= \sum_{k=1}^{n_j} \sqrt{[\gamma_{f,1}(t_k^{(j)}) - \gamma_{f,1}(t_{k-1}^{(j)})]^2 + [\gamma_{f,2}(t_k^{(j)}) - \gamma_{f,2}(t_{k-1}^{(j)})]^2} \\
&= \sum_{k=1}^{n_j} \sqrt{[t_k^{(j)} - t_{k-1}^{(j)}]^2 + [f(t_k^{(j)}) - f(t_{k-1}^{(j)})]^2}.
\end{aligned}$$

Dank des *Mittelwertsatzes der Differenzialrechnung* ([42]: 279) gibt es im Inneren eines jeden der Intervalle $I_k^{(j)}$ ein $\xi_k^{(j)}$ mit $f(t_k^{(j)}) - f(t_{k-1}^{(j)}) = f'(\xi_k^{(j)}) \cdot (t_k^{(j)} - t_{k-1}^{(j)})$. Damit ergibt sich für die Länge des Polygonzuges:

$$\sum_{k=1}^{n_j} |\gamma_f(t_k^{(j)}) - \gamma_f(t_{k-1}^{(j)})| = \sum_{k=1}^{n_j} \sqrt{1 + [f'(\xi_k^{(j)})]^2} \cdot |I_k^{(j)}|.$$

Sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion gegeben durch $g(t) := \sqrt{1 + [f'(t)]^2}$. Da f nach Voraussetzung auf $[a, b]$ stetig differenzierbar ist, ist g als Verkettung stetiger Funktionen stetig und damit insbesondere Riemann-integrierbar ([42]: 449 f.). Das bedeutet, dass jede der Riemannfolgen von g gegen den Grenzwert $\int_a^b g(t)dt$ konvergiert. Da die oben notierte Länge des Polygons gerade ein Folgeglied einer Riemannfolge von g bzgl. der Zerlegungsnullfolge $Z^{(j)}$ ist, folgt also schließlich:

$$\begin{aligned}
\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_j} |\gamma_f(t_k^{(j)}) - \gamma_f(t_{k-1}^{(j)})| &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n_j} \sqrt{1 + [f'(\xi_k^{(j)})]^2} \cdot |I_k^{(j)}| \\
&= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieses Ergebnisses lässt sich bereits die Länge bestimmter Kreisbögen bestimmen: Sei nämlich $K(O, r)$ ein Kreis in Mittelpunktslage, dann gilt für Punkte $P \in K(O, r)$, dass $\sqrt{p_1^2 + p_2^2} = r$ und damit $p_2^2 = r^2 - p_1^2$. Entsprechend lässt sich durch den Graphen Γ_h der Funktion $h : [-r, r] \rightarrow \mathbf{R}$ gegeben durch $h(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$ ein Kreisbogen beschreiben. Für diesen wird man entsprechend der Anschauung

den naheliegenden Namen „oberer Halbkreisbogen“ wählen (vgl. Abbildung 8). h ist auf $[-r, r]$ differenzierbar mit stetiger Ableitung $h'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Dementsprechend lassen sich Kreisbögen, die Teilmengen des Halbkreisbogens Γ_h sind, durch stetig differenzierbare Wege $\gamma_h : [\tau_1, \tau_2] \subset [-r, r] \rightarrow \mathcal{E}^2$ gegeben durch $\gamma_h(t) := \begin{pmatrix} t \\ h(t) \end{pmatrix}$ parametrisieren. Für die Länge $L(\gamma_h)$ dieser Wege ergibt sich dann:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{1 + [h'(t)]^2} dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dt = r \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dt}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Damit hat sich das Problem der Bestimmung einer Weglänge in ein Integrationsproblem verwandelt, welches sich mit einigem Aufwand folgendermaßen lösen lässt: In Abschnitt 2.2.2 hatte sich herausgestellt, dass die Funktion \sin auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wächst, dementsprechend ist die Einschränkung $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ bijektiv und besitzt deshalb eine Umkehrfunktion $\sin^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

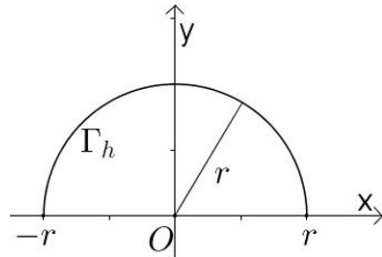


Abb. 8: Halbkreisbogen Γ_h

die üblicherweise mit \arcsin bezeichnet wird. Die Funktion \cos , die Ableitung der Funktion \sin , nimmt auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nur positive Werte an. Nach Aussage des *Satzes über die Umkehrfunktion* ([42]: 272) ist \arcsin demnach in allen Punkten des Intervalls $(-1, 1)$ differenzierbar und besitzt (unter Rückgriff auf den trigonometrischen Pythagoras) die Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \arcsin(x) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

Nun verifiziert man leicht, dass $\frac{d}{dx} \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}$. Mit dem *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* ([42]: 450) ergibt sich demnach die folgende Lösung der obigen Integrationsaufgabe: $r \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dt}{\sqrt{r^2-x^2}} = r \arcsin\left(\frac{\tau_2}{r}\right) - r \arcsin\left(\frac{\tau_1}{r}\right)$. Mit Hilfe einfacher Grenzwertbetrachtungen und einer guten Kenntnis der Funktion \sin erhält man damit insbesondere die Länge $r\pi$ des Halbkreisbogens Γ_h .

Im Rahmen der Integrationstheorie spricht man davon, dass eine Funktion *R-integrierbar* ist, wenn jede ihrer Riemannfolgen gegen ein und denselben Grenzwert konvergiert ([42]: 450). Dieser Grenzwert heißt dann das *Riemannsche Integral* dieser Funktion. In Analogie dazu unterscheidet man auch in der Theorie der Weglängen zwischen der Eigenschaft eines Weges, „begradigbar“ bzw. *rektifizierbar* zu sein, und seiner Länge als dem Grenzwert der Länge immer feinerer Polygonzüge. Ein Weg $\gamma : [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}^2$ heißt rektifizierbar, wenn es eine reelle Konstante gibt, so dass für jede Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ die Länge des zugehörigen Polygonzuges kleiner bleibt als diese Konstante ([41]: 350). In der Analysis beweist man nun den folgenden Satz, der die vorangegangenen Überlegungen erheblich verallgemeinert ([41]: 354):

Satz 2.10. *Sei $\gamma : [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}^2$ ein stetig differenzierbarer Weg mit Ableitung $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{pmatrix}$, dann ist γ rektifizierbar und hat die Länge*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{[\gamma'_1(t)]^2 + [\gamma'_2(t)]^2} dt.$$

Ich hatte bereits oben betont, dass zur Messung der Länge eines Bogens die Länge injektiver Darstellungen dieses Bogens gemessen wird. Aus diesem Grund bieten sich die folgenden sprachlichen Regelungen an ([41]: 353, 359, 361):

Definition 2.5. *Sei $\gamma : [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}^2$ ein Weg. Gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$, so heißt γ ein **geschlossener Weg**. Ist γ auf sei-*

nem Definitionsbereich $[a, b]$ injektiv, so heißt γ ein **Jordanweg**. Ein Bogen Γ_B heißt **Jordanbogen**, falls Γ_B durch einen Jordanweg γ_B darstellbar ist. Ist ein Bogen Γ_K hingegen durch einen geschlossenen Weg $\gamma_K : [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{E}^2$ darstellbar, der auf $[a, b]$ injektiv ist, so heißt Γ_K eine **Jordankurve**. Die Wege γ_B und γ_K heißen **Jordandarstellung** von Γ_B bzw. Γ_K . Jordanbögen bzw. Jordankurven heißen **rektifizierbar**, wenn sie eine rektifizierbare Jordandarstellung besitzen.

Vor diesem begrifflichen Hintergrund wird in der Analysis nun der folgende Satz bewiesen, der alle vorangegangenen Überlegungen auf ein sicheres Fundament stellt ([41]: 363):

Satz 2.11. *Sei Γ ein rektifizierbarer Jordanbogen bzw. eine rektifizierbare Jordankurve, dann sind alle Jordandarstellungen von Γ rektifizierbar und besitzen die gleiche Weglänge. Dieser gemeinsame Wert heißt die **Bogenlänge** von Γ und wird mit $L(\Gamma)$ bezeichnet.*

Entsprechend Satz 2.8 ist die eingangs vorgestellte Parametrisierung des Kreises $K(M, r)$, nämlich $\gamma_{K(M, r)} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathcal{E}^2$ gegeben durch $\gamma_{K(M, r)}(t) := \begin{pmatrix} m_1 + r \cos(t) \\ m_2 + r \sin(t) \end{pmatrix}$, auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ injektiv und insofern eine Jordandarstellung der Jordankurve $K(M, r)$. Demnach sind auch alle Einschränkungen von $\gamma_{K(M, r)}$ auf echte abgeschlossene Teilintervalle $[t_1, t_2] \subset [0, 2\pi]$ Jordandarstellungen entsprechender Jordanbögen. Zudem ist $\gamma_{K(M, r)}$ offenbar differenzierbar mit stetiger Ableitung $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -r \sin(t) \\ r \cos(t) \end{pmatrix}$ und d. h. alle Kreisbögen sind rektifizierbar. Ihre Länge berechnet sich dann unter Rückgriff auf den trigonometrischen Pythagoras wie folgt:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[-r \sin(t)]^2 + [r \cos(t)]^2} dt &= r \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} dt \\
&= r \int_{t_1}^{t_2} dt = r(t_2 - t_1).
\end{aligned}$$

Intuitiverweise ist die Länge eines Kreisbogens somit nicht von der Lage des Mittelpunktes des Kreises abhängig. Weiterhin hat ein Kreisbogen mit Radius r die Länge $2\pi r$. Man spricht in diesem Fall auch von dem *Umfang* des Kreises. Nun lässt sich der oben beispielhaft diskutierte Halbkreisbogen Γ_h offenbar durch die Einschränkung von $\gamma_{K(O,r)}$ auf das Intervall $[0, \pi]$ parametrisieren. Demnach ergibt sich erneut für die Länge dieses Bogens der Wert $r\pi$.

Bisher wurde noch nicht die Länge beliebiger Kreisbögen bestimmt: Seien P, Q Punkte des Kreises $K(M, r)$ mit $P \neq Q$, deren Lage auf $K(M, r)$ nach Satz 2.8 eindeutig durch φ_P bzw. φ_Q gegeben ist. Gilt $\varphi_P < \varphi_Q$, so wurde bisher nur die Länge des Kreisbogens $\Gamma_{K(M,r)}^{[\varphi_P, \varphi_Q]}$ bestimmt. Nun ist aber $(\varphi_P + 2\pi) - \varphi_Q < 2\pi$ und d. h. $\Gamma_{K(M,r)}^{[\varphi_Q, \varphi_P + 2\pi]}$ ist ein von $\Gamma_{K(M,r)}^{[\varphi_P, \varphi_Q]}$ verschiedener Kreisbogen. Aufgrund der Periodizität der Funktionen \sin und \cos besitzen die beiden genannten Kreisbögen die Randpunkte P und Q . Als die Länge des Kreisbogens $\Gamma_{K(M,r)}^{[\varphi_Q, \varphi_P + 2\pi]}$ ermittelt man, wie oben, den Wert $r[(\varphi_P + 2\pi) - \varphi_Q] \in [0, 2\pi r)$. Allgemein kann nun für die Länge solch „unvollständiger“ Kreisbögen $\Gamma_{K(M,r)}^{[t_1, t_2]}$ mit $[t_1, t_2] \subset [0, 4\pi)$ und $t_2 - t_1 < 2\pi$ festgehalten werden, dass

$$L\left(\Gamma_{K(M,r)}^{[t_1, t_2]}\right) = r(t_2 - t_1) \in [0, 2\pi r). \quad (7)$$

Mit Blick auf die unten folgende Behandlung des Bogenmaßes kann an dieser Stelle bereits Folgendes festgestellt werden: Das Verhältnis der Länge eines Kreisbogens $\Gamma_{K(M,r)}^{[t_1, t_2]}$ zum Radius des entsprechenden Kreises ist unabhängig vom Kreisradius, denn $\frac{r(t_2 - t_1)}{r} = t_2 - t_1$. Natürlich ist auch der Verhältnis von Kreisumfang zu dem doppelten

Kreisradius, d. h. dem Kreisdurchmesser, konstant und hat den Wert π .

In diesem Abschnitt ist deutlich geworden, dass „die Bogenlänge einer Kurve kein elementarer Begriff mehr ist“ ([79]: 126), wie Reuter schreibt. Vielmehr wurde dieser Begriff hier unter Einbeziehung zentraler analytischer Konzepte entwickelt: etwa der Begriffe *Stetigkeit*, *Konvergenz*, *Differentiation* und *Integration*.

2.3 Winkel und Winkelmaße

In diesem Abschnitt sollen Überlegungen zum *Messen von Winkeln* im Vordergrund stehen. Es wird also die Frage thematisch, auf welche Weise Winkelgrößen sinnvoll Maßzahlen zugeordnet werden können. Entsprechend dieser Fragestellung können die fachlichen Ausführungen zum *Winkelbegriff* selbst etwas in den Hintergrund treten. Dementsprechend wird, nach knappen definitorischen Überlegungen bzgl. des Winkelbegriffs in Abschnitt 2.3.1, in Abschnitt 2.3.2 der Begriff der Winkelgröße definiert, was die Messung von Winkelgrößen in Abschnitt 2.3.3 ermöglicht.

2.3.1 Der Winkelbegriff

Bevor der Winkelbegriff definiert werden kann, werden Halbgeraden definiert: Sei S ein Punkt und $v \neq o$ ein Vektor der euklidischen Ebene, dann heißt die Menge $H_{S,v} := \{P \in \mathcal{E}^2 : P = S + r \cdot v, r \geq 0\}$ eine *Halbgerade* mit Anfangspunkt S . Der Vektor v heißt der *Stützvektor* der Halbgeraden $H_{S,v}$. Da zu S und v ein eindeutig bestimmter Punkt $Q \in \mathbf{R}^2$ existiert, so dass $S + v = Q$ gilt, ist $H_{S,v} = H_{S,\overrightarrow{SQ}}$. Eine Halbgerade ist also auch durch zwei verschiedene Punkte der euklidischen Ebene eindeutig bestimmt und man schreibt deshalb auch $H_{S,Q} := H_{S,\overrightarrow{SQ}}$, wobei die Reihenfolge der Nennung der Punkte von Relevanz ist. Mit dem Begriff der Halbgeraden lassen sich Winkel nun folgendermaßen definieren:

Definition 2.6. Ein geordnetes Paar (p, q) von Halbgeraden der reellen euklidischen Ebene \mathcal{E}^2 mit gemeinsamem Anfangspunkt $S \in \mathbf{R}^2$ heißt **Winkel** $\angle(p, q)$. Die Halbgeraden p und q werden als **Schenkel** des Winkels bezeichnet und der Punkt S als dessen **Scheitel** bzw. **Scheitelpunkt**.

Eine Halbgerade ist durch ihren Anfangspunkt und einen von diesem verschiedenen Punkt eindeutig bestimmt, aus diesem Grund ist der durch die Halbgeraden $H_{S,Q}$ und $H_{S,R}$ festgelegte Winkel $\angle(H_{S,Q}, H_{S,R})$ auch eindeutig durch das geordnete Punkttupel (Q, S, R) bestimmt. Man schreibt deshalb für diesen Winkel auch $\angle(QSR)$.

Für Halbgeraden p, q mit gemeinsamem Anfangspunkt S gilt offenbar entweder $p \cap q = p = q$ oder $p \cap q = \{S\}$. Falls $p = q$, so heißt der Winkel $\angle(p, q)$ *Nullwinkel* und es gilt insbesondere $\angle(p, q) = \angle(q, p)$. Haben die beiden Halbgeraden des Halbgeradenpaares (p, q) hingegen nur den Scheitelpunkt S gemeinsam, so gilt $\angle(p, q) \neq \angle(q, p)$.⁸ Gilt für zwei Halbgeraden $p := H_{S,Q}$ und $q := H_{S,R}$, dass $p \cup q = \{P \in \mathcal{E}^2 : P = Q + r \cdot \overrightarrow{QR} \text{ mit } r \in \mathbf{R}\} =: G_{Q,R}$, so heißt der Winkel $\angle(p, q)$ *gestreckter Winkel* und $G_{Q,R}$ eine *Gerade durch die Punkte Q und R* . Es ist offenbar $G_{Q,R} = G_{R,Q} = G_{S,Q}$.

2.3.2 Der Begriff der Winkelgröße

Bevor von der Messung eines Winkels die Rede sein kann, muss geklärt werden, welche Größe überhaupt gemessen werden soll. Zudem ist das Messen von Winkelgrößen sicherlich nur dann ein sinnvolles Unterfangen, wenn unterschiedliche Winkelgrößen überhaupt miteinander verglichen werden können. Um dies einzurichten, greife ich auf Vokabular und Wissen der linearen Algebra und analytischen Geometrie

⁸ Dies ist ein bedeutsamer Unterschied zur *elementargeometrischen* Winkeldefinition ([19] : 81 f.; [56]: 16). Hier wird ein Winkel üblicherweise als die Paarmenge bzw. 2-Menge $\{p, q\}$ definiert, was offenbar zur Folge hat, dass $\{p, q\} = \{q, p\}$ und damit $\angle(p, q) = \angle(q, p)$ für jedes Paar von Halbgeraden (p, q) mit gemeinsamem Scheitel.

zurück ([54]: 100 f.): Man bezeichnet die Gruppe der reellen orthogonalen 2×2 -Matrizen $\{A \in \text{Mat}(2; \mathbf{R}) : A^t A = E_2\}$ als *orthogonale Gruppe* $O(2)$ und zeigt insbesondere das Folgende ([21]: 289 f.):

$$A \in O(2), \det A = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A = \mathcal{D}_\varphi \text{ für ein } \varphi \in \mathbf{R}. \quad (8)$$

Hierbei bezeichnet \mathcal{D}_φ die in Abschnitt 2.2.3 bereits vorgestellte Drehmatrix. Weiterhin ist durch $SO(2) := \{A \in O(2) : \det A = 1\} = \{\mathcal{D}_\varphi : \varphi \in \mathbf{R}\}$ eine Untergruppe von $O(2)$ gegeben, die *spezielle orthogonale Gruppe* genannt wird. Vor diesem Hintergrund gibt man die folgende

Definition 2.7. Eine bijektive Abbildung $f : \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$ heißt **euklidische Bewegung** oder **Kongruenzabbildung**, wenn f eine isometrische Abbildung ist, d. h. eine Abbildung, die die Abstände zwischen beliebigen Punkten $P, Q \in \mathcal{E}^2$ unverändert lässt:

$$|f(Q) - f(P)| = |Q - P|. \quad ([54]: 102)$$

Da eine euklidische Bewegung f bijektiv ist, gibt es eine Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$. Für beliebige $P', Q' \in \mathcal{E}^2$ gibt es dann jeweils genau ein P bzw. Q mit $f(P) = P'$ und $f(Q) = Q'$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} |f^{-1}(Q') - f^{-1}(P')| &= |f^{-1} \circ f(Q) - f^{-1} \circ f(P)| \\ &= |Q - P| = |f(Q) - f(P)| = |Q' - P'|, \end{aligned}$$

d. h. jede euklidische Bewegung hat eine Umkehrabbildung, die selbst wiederum eine euklidische Bewegung ist. In der analytischen Geometrie ([54]: 102) zeigt man den

Satz 2.12. Eine Abbildung $f : \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$ ist genau dann eine euklidische Bewegung, wenn f gegeben ist durch

$$P \mapsto f(P) := A \circ P + v \text{ mit } A \in O(2) \text{ und } v \in V_{\mathcal{E}^2}.$$

Eine euklidische Bewegung f , gegeben durch $f(P) = A_f \circ P + v_f$, heißt *eigentlich*, wenn die Matrix A_f Element der speziellen orthogonalen

Gruppe $SO(2)$ ist und d. h. wenn $A_f = \mathcal{D}_\varphi$ für ein $\varphi \in \mathbf{R}$ gilt ([54]: 102 f.). Der Vergleich von Winkelgrößen wird unten durch den folgenden Satz ermöglicht ([54]: 103):

Satz 2.13. *Jede eigentliche euklidische Bewegung ist durch die Bilder zweier verschiedener Punkte der euklidischen Ebene eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien P', Q' mit $P' \neq Q'$ Punkte der euklidischen Ebene und seien $f, g : \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$ eigentliche euklidische Bewegungen mit $f(P) = g(P) = P'$ und $f(Q) = g(Q) = Q'$. $SO(2)$ ist eine Gruppe und somit ist $h := f \circ g^{-1}$ eine eigentliche euklidische Bewegung und damit gegeben durch $R \mapsto h(R) = \mathcal{D}_{\varphi_h} \circ R + v_h$. Offenbar gilt $h(P') = f \circ g^{-1}(P') = f(P) = P'$ und analog $h(Q') = Q'$. Somit gilt unter Rückgriff auf Gleichung (6) aus Abschnitt 2.2.3, dass

$$\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{h(P')h(Q')} = \overrightarrow{(\mathcal{D}_{\varphi_h} \circ P')(\mathcal{D}_{\varphi_h} \circ Q')} = \mathcal{D}_{\varphi_h} \circ \overrightarrow{(P'Q')}.$$

Da $P' \neq Q'$ ist, muss nun $\mathcal{D}_{\varphi_h} = E_2$ gelten und damit $P' = h(P') = E_2 \circ P' + v_h = P' + v_h$, was $v_h = o$ zur Folge hat. Damit ist h die identische Abbildung und es ist $f = g$. \square

Im vorangegangenen Abschnitt 2.3.1 hatte ich darauf hingewiesen, dass eine Halbgerade eindeutig durch zwei Punkte definiert ist. Somit ergibt sich aus dem eben bewiesenen Satz 2.13, dass genau eine eigentliche Bewegung f existiert, die eine Halbgerade $H_{S,P}$ auf eine Halbgerade $H_{S',Q'}$ abbildet. Diese ist bestimmt durch $f(S) := S'$ und $f(Q) := Q'$, wobei für $Q \in H_{S,P}$ gelten soll, dass $|Q - S| = |Q' - S'|$. Aus der Bijektivität eigentlicher Bewegungen ergibt sich unmittelbar, dass die eindeutig bestimmte eigentliche Bewegung, die $H_{S',Q'}$ auf $H_{S,P}$ abbildet die Umkehrabbildung f^{-1} von f ist. Vor diesem Hintergrund bietet sich die folgende Definition an ([2]: 2):

Definition 2.8. *Eine Teilmenge $\Sigma_1 \subset \mathcal{E}^2$ heißt **kongruent** zu einer Teilmenge $\Sigma_2 \subset \mathcal{E}^2$, wenn eine euklidische Bewegung*

$f : \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$ existiert, die Σ_1 auf Σ_2 abbildet, d. h. für alle $P \in \Sigma_1$ existiert ein $Q \in \Sigma_2$, so dass $f(P) = Q$, und für alle $Q \in \Sigma_2$ existiert ein $P \in \Sigma_1$, so dass $f^{-1}(Q) = P$.

Jede (eigentliche) euklidische Bewegung besitzt eine Umkehrabbildung, die selbst wiederum eine (eigentliche) euklidische Bewegung ist. Deshalb ist eine Teilmenge $\Sigma_1 \subset \mathcal{E}^2$ genau dann zu einer Teilmenge $\Sigma_2 \subset \mathcal{E}^2$ kongruent, wenn Σ_2 zu Σ_1 kongruent ist. Die Kongruenzrelation ist also *symmetrisch* und man schreibt für zueinander kongruente Teilmengen $\Sigma_1, \Sigma_2 \subset \mathcal{E}^2$: $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$. Existiert eine *eigentliche* euklidische Bewegung f , die Σ_1 auf Σ_2 abbildet, so schreibe ich im Folgenden $\Sigma_1 \equiv_E \Sigma_2$. Da die identische Abbildung offensichtlich eine (eigentliche) euklidische Bewegung ist und ebenso offensichtlich die Verkettung zweier (eigentlicher) euklidischer Bewegungen wiederum eine solche ist, ist die Kongruenzrelation auch *reflexiv* und *transitiv*. Die Kongruenzrelation ist somit eine Äquivalenzrelation und man definiert dementsprechend für Teilmengen $\Sigma \subset \mathcal{E}^2$ *Kongruenzklassen* $[\Sigma]_{\equiv} := \{T \subset \mathcal{E}^2 : T \equiv \Sigma\}$, wobei Elemente einer Kongruenzklasse *Repräsentanten* der Kongruenzklasse genannt werden. Die Größe von Winkeln lässt sich nun durch Rückgriff auf eigentliche euklidische Bewegungen folgendermaßen sinnvoll definieren ([19]: 97)⁹:

Definition 2.9. Sei $\angle(p, q) \subset \mathcal{E}^2$ ein Winkel, dann ist die **Größe des Winkels** $\angle(p, q)$ definiert als die Kongruenzklasse $\alpha := g(\angle(p, q)) := [\angle(p, q)]_{\equiv_E} = \{\angle(p', q') \subset \mathcal{E}^2 : \angle(p', q') \equiv_E \angle(p, q)\}$.

Unmittelbar aus dem Vorangegangenen ergibt sich der

Satz 2.14. Zu einem beliebigen Winkel $\angle(p, q)$ der euklidischen Ebene und einer beliebigen Halbgeraden $p' \in \mathcal{E}^2$ existiert genau

⁹ Diese und die beiden folgenden Definitionen wurden ausgehend von Filler ([20]: 97-99) so modifiziert, dass sie zu dem hier vorgeschlagenen Winkelbegriff passen.

eine eigentliche euklidische Bewegung $f : \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$, die p auf p' abbildet. Insbesondere ist dann das Halbgeradenpaar (p', q') ein Winkel und es gilt: $\angle(p, q) \equiv_E \angle(p', q')$.

Entsprechend diesem Satz kann jede Winkelgröße *eindeutig* durch einen Winkel repräsentiert werden, dessen Scheitelpunkt im Koordinatenursprung O liegt und dessen (erster) Schenkel mit der „nicht-negativen Hälfte der x -Achse“, d. h. der Halbgerade H_{O, e_1} , identisch ist. Sei \mathcal{W}_g die Menge aller Winkelgrößen, dann existiert also für alle Winkelgrößen $\alpha \in \mathcal{W}_g$ genau eine Halbgerade q_α mit Anfangspunkt im Koordinatenursprung, so dass $g(\angle(H_{O, e_1}, q_\alpha)) = \alpha$. Im Folgenden schreibe ich kurz $\angle(q_\alpha) := \angle(H_{O, e_1}, q_\alpha)$. Für die Winkelgröße γ des gestreckten Winkels ist dann $\angle(q_\gamma) = G_{O, e_1}$ und d. h. (salopp) γ wird durch die x -Achse repräsentiert. Das Ordnen von Winkelgrößen ermöglicht die folgende

Definition 2.10. Seien $\alpha, \beta \in \mathcal{W}_g$ Winkelgrößen und seien $\angle(p, H_{S, R}) \in \alpha$ und $\angle(H_{S, R}, q) \in \beta$ entsprechende Repräsentanten mit gemeinsamem Schenkel $H_{S, R}$ und gemeinsamem Scheitel S . Die Winkelgröße $\delta = g(\angle(p, q))$ heißt **Summe der Winkelgrößen α und β** und man schreibt $\alpha + \beta = \delta$. ([19]: 98)

Diese Definition stattet die Menge \mathcal{W}_g mit einer additiven Verknüpfung $+$ aus. Offenbar ist für beliebige $\alpha, \beta \in \mathcal{W}_g$ auch $\alpha + \beta \in \mathcal{W}_g$, d. h. \mathcal{W}_g ist bzgl. $+$ abgeschlossen. Zudem ließe sich leicht zeigen, dass $(\mathcal{W}_g, +)$ eine Gruppe ist, wobei die Winkelgröße $\nu := g(\angle(p, p))$ des Nullwinkels das neutrale Element ist und die Winkelgröße $g(\angle(q, p))$ das inverse Element der Winkelgröße $g(\angle(p, q))$.

Im Folgenden heiße die Menge $E_O := \{(\frac{x}{y}) \in \mathcal{E}^2 : y > 0\}$ obere und die Menge $E_U := \{(\frac{x}{y}) \in \mathcal{E}^2 : y < 0\}$ untere Halbebene. Die folgende Definition erlaubt nun das Ordnen und Vergleichen von Winkelgrößen ([19]: 99):

Definition 2.11. Seien α, β beliebige Winkelgrößen und bezeichne γ die Winkelgröße des gestreckten Winkels und ν die des Nullwinkels. Es gelte

- $\alpha = \beta$, falls $\angle(q_\alpha) \in \beta$ bzw. $\angle(q_\beta) \in \alpha$,
- $\alpha < \gamma$ falls entweder (i) für $\angle(q_\alpha)$ gilt $q_\alpha \setminus \{O\} \subset E_O$ oder (ii) $\alpha = \nu$,
- $\gamma < \alpha$, falls für $\angle(q_\alpha)$, $q_\alpha \setminus \{O\} \subset E_U$,
- $\alpha < \beta$, falls (i) entweder $\alpha, \beta < \gamma$ oder $\alpha, \beta > \gamma$ und es existiert eine Winkelgröße $\delta \neq \nu$ mit $\delta < \gamma$, so dass $\alpha + \delta = \beta$, oder falls (ii) $\alpha < \gamma$ und $\beta > \gamma$.
- $\alpha \leq \beta$, falls entweder $\alpha < \beta$ oder $\alpha = \beta$.

Nach diesen umfassenden Überlegungen zur Winkelgröße, ist es nun möglich, Winkelgrößen Maßzahlen zuzuordnen.

2.3.3 Über Winkelmessung

Maßzahlen für Winkelgrößen sollten die folgenden beiden Bedingungen erfüllen ([19]: 100):

1. Alle Winkel einer Winkelgröße und nur diese haben die gleiche Maßzahl.
2. Es gilt für Winkelgrößen α, β, δ genau dann, dass $\alpha + \beta = \delta$, wenn die Summe der Maßzahlen von α und β der Maßzahl von δ entspricht.

Die erste Bedingung besagt, dass die Zuordnung von Winkelgrößen zu entsprechenden Maßzahlen eineindeutig ist. Aus der zweiten Bedingung und der Definition 2.11 erhält man zudem unmittelbar, dass die Maßzahl einer Winkelgröße

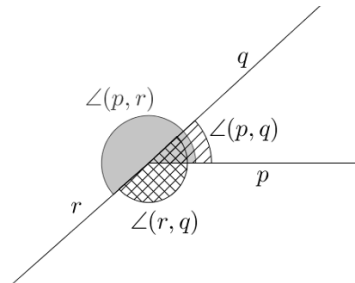


Abb. 9: Die Summe
 $g(\angle(p, q)) = g(\angle(p, r)) + g(\angle(r, q))$

α genau dann kleiner ist als die einer Winkelgröße β , falls $\alpha < \beta$. Zudem ist entsprechend der Definitionen 2.10 und 2.11 zu beachten, dass die Summe zweier Winkelgrößen durchaus kleiner sein kann als die Winkelgrößen jedes der beiden Summanden, was in Abbildung 9 veranschaulicht ist.

In Abschnitt 2.2.4 wurde die Einsicht erarbeitet, dass das Verhältnis der Länge eines Kreisbogens zum Radius des entsprechenden Kreises unabhängig vom Kreisradius ist. Im Folgenden soll ein Winkelmaß entwickelt werden, das sich dieser Einsicht bedient: Ein Winkel der Größe α , repräsentiert durch einen Winkel mit Scheitel im Mittelpunkt M eines Kreises, „schneidet“ aus jedem Kreis $K(M, r)$ einen Kreisbogen aus und das Verhältnis von dessen Länge zum entsprechenden Kreisradius ist konstant und hat einen Wert aus dem Intervall $[0, 2\pi)$. Dieser Wert taugt nun besonders gut als Maßzahl für die entsprechende Winkelgröße. Bevor dieser Gedanke exaktifiziert werden soll, ist es im Angesicht der obigen zweiten Bedingung sinnvoll, eine additive Verknüpfung auf der Menge $\mathcal{I}_{2\pi} := [0, 2\pi) = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x < 2\}$ zu definieren.

Exkurs 1: Die additive Gruppe $(\mathcal{I}_{2\pi}, \oplus)$

Sei durch $\oplus : \mathcal{I}_{2\pi} \times \mathcal{I}_{2\pi} \rightarrow \mathbf{R}$ eine Verknüpfung auf $\mathcal{I}_{2\pi}$ definiert durch

$$(x, y) \mapsto x \oplus y := \begin{cases} x + y, & \text{falls } x + y < 2\pi, \\ x + y - 2\pi, & \text{falls } x + y \geq 2\pi. \end{cases}$$

Im Nachfolgenden zeige ich, dass $(\mathcal{I}_{2\pi}, \oplus)$ eine *abelsche Gruppe* ist. Seien $x, y, z \in \mathcal{I}_{2\pi}$. Für die Abgeschlossenheit und die Kommutativität ist lediglich der Fall $x + y \geq 2\pi$ interessant: Gilt $(x + y) \in [2\pi, 4\pi)$, so ist $(x \oplus y) = (x + y - 2\pi) \in \mathcal{I}_{2\pi}$ und d. h. $(\mathcal{I}_{2\pi}, \oplus)$ ist *abgeschlossen*. Mit der Kommutativität der Addition $+$ ergibt sich leicht, dass $x \oplus y = x + y - 2\pi = y + x - 2\pi = y \oplus x$ und d. h. $(\mathcal{I}_{2\pi}, \oplus)$ ist *kommutativ*. Die *Assoziativität* $LHS := (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) =: RHS$ bereitet die meisten Schwierigkeiten, allerdings ist der Fall $(x + y + z) \in \mathcal{I}_{2\pi}$ trivial. Sei also zunächst $(x + y + z) \in [2\pi, 4\pi)$. Dann gilt für LHS eine der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}(x \oplus y) \oplus z &= (x + y) \oplus z = (x + y) + z - 2\pi \quad \text{oder} \\ (x \oplus y) \oplus z &= (x + y - 2\pi) \oplus z = (x + y - 2\pi) + z.\end{aligned}$$

Entsprechend gilt für RHS eine der folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}x \oplus (y \oplus z) &= x \oplus (y + z) = x + (y + z) - 2\pi \quad \text{oder} \\ x \oplus (y \oplus z) &= x \oplus (y + z - 2\pi) = x + (y + z - 2\pi).\end{aligned}$$

Die Assoziativität und Kommutativität von $(\mathbf{R}, +)$ sichern nun die Gültigkeit der Assoziativität von $(\mathcal{I}_{2\pi}, \oplus)$ für den Fall $(x + y + z) \in [2\pi, 4\pi)$. Im Fall $(x + y + z) \in [4\pi, 6\pi)$, muss sich die Summe je zwei der Summanden im Intervall $(2\pi, 4\pi)$ befinden, da ja für jeden der Summanden $x, y, z \in \mathcal{I}_{2\pi}$ gilt. Somit ist mit $x + y + z - 2\pi > 2\pi$

$$\begin{aligned}LH &= (x \oplus y) \oplus z = (x + y - 2\pi) \oplus z = (x + y - 2\pi) + z - 2\pi \quad \text{und} \\ RH &= x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (y + z - 2\pi) = x + (y + z - 2\pi) - 2\pi.\end{aligned}$$

Schließlich sichern die Assoziativität und Kommutativität von $(\mathbf{R}, +)$ die Assoziativität von $(\mathcal{I}_{2\pi}, \oplus)$. Da $x + 0 = x$ ist 0 das *neutrale Element* von $(\mathcal{I}_{2\pi}, \oplus)$. Offenbar ist 0 zu sich selbst invers und für $x \in \mathcal{I}_{2\pi} \setminus \{0\}$ ist durch $x^{-1} := 2\pi - x \in \mathcal{I}_{2\pi}$ ein inverses Element definiert: Es ist nämlich $x + 2\pi - x = 2\pi \geq 2\pi$ und damit $x \oplus x^{-1} = x + (2\pi - x) - 2\pi = 0$. ■

Nach diesem Exkurs können nun die oben angedeuteten Überlegungen zur Messung von Winkelgrößen exaktifiziert werden: Sei $\angle(p, q)$ ein Winkel der euklidischen Ebene mit Scheitelpunkt M und sei $K(M, r)$ ein Kreis mit Radius $r > 0$. Der Scheitelpunkt von $\angle(p, q)$ ist mit dem Mittelpunkt von $K(M, r)$ identisch und man nennt $\angle(p, q)$ einen *Mittelpunktswinkel* des Kreises $K(M, r)$. Seien $P := p \cap K(M, r)$ und $Q := q \cap K(M, r)$ Punkte, dann ist $\angle(p, q) = \angle(PMQ)$. Nach Satz 2.8 existieren für P und Q eindeutig bestimmte Zahlen $\varphi_P, \varphi_Q \in [0, 2\pi)$ mit $P = M + r \cdot e_{\varphi_P}$ bzw. $Q = M + r \cdot e_{\varphi_Q}$. Ist $\angle(p, q)$ kein Nullwinkel, so ist $P \neq Q$ und P und Q sind nach Abschnitt 2.2.4 Randpunkte zweier Kreisbögen. Nun bietet sich die folgende Festsetzung an:

$$\Gamma_{K(M,r)}^{\angle(PMQ)} := \begin{cases} \Gamma_{K(M,r)}^{[\varphi_P, \varphi_Q]}, & \text{falls } \varphi_P < \varphi_Q, \\ \Gamma_{K(M,r)}^{[\varphi_P, \varphi_Q + 2\pi]}, & \text{falls } \varphi_P > \varphi_Q. \end{cases}$$

Der Kreisbogen $\Gamma_{K(M,r)}^{\angle(PMQ)}$ wird als der Kreisbogen bezeichnet, der von dem Mittelpunktswinkel $\angle(PMQ)$ ausgeschnitten wird. Ist $P = Q$, dann schneidet der Nullwinkel $\angle(PMQ)$ den Kreis $K(M, r)$ nur im Punkt P . Sei wiederum ν die Winkelgröße des Nullwinkels, dann lässt sich jeder Winkelgröße mittels der Abbildung $m : (\mathcal{W}_g, +) \rightarrow (\mathcal{I}_{2\pi}, \oplus)$ nun folgendermaßen eine Maßzahl zuordnen:

$$g(\angle(PMQ)) =: \alpha \mapsto m(\alpha) := \begin{cases} \frac{1}{r} L \left(\Gamma_{K(M,r)}^{\angle(PMQ)} \right), & \text{falls } \alpha \neq \nu, \\ 0, & \text{falls } \alpha = \nu. \end{cases}$$

Die Festlegung $m(\nu) = 0$ ist durchaus sinnvoll, denn es ist sowohl

$$\begin{aligned} L \left(\Gamma_{K(M,r)}^{[\varphi_P, \varphi_Q]} \right) &\rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \varphi_Q \rightarrow \varphi_P \quad \text{und} \quad \varphi_Q > \varphi_P \quad \text{als auch} \\ L \left(\Gamma_{K(M,r)}^{[\varphi_P, \varphi_Q + 2\pi]} \right) &\rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \varphi_Q \rightarrow (\varphi_P - 2\pi) \quad \text{und} \quad \varphi_P > \varphi_Q. \end{aligned}$$

Nun bleibt zu prüfen, ob die Abbildung m den beiden Bedingungen gerecht werden kann, die eingangs an Maßzahlen von Winkelgrößen gestellt wurden.

Zunächst gilt es herauszufinden, ob kongruenten Winkeln dieselbe Maßzahl zukommt. Dies ist für alle Nullwinkel per Definition der Fall. Für alle Winkel, die keine Nullwinkel sind, ist dies sicherlich dann der Fall, wenn Winkel derselben Winkelgröße aus Kreisen desselben Radius, bzgl. derer sie Mittelpunktswinkel sind, Bögen derselben Länge ausschneiden. Hierfür muss lediglich gezeigt werden, dass zueinander kongruente Kreisbögen dieselbe Länge haben. Dies soll lediglich plausibilisiert werden: Seien Γ_1 und Γ_2 Kreisbögen mit $\Gamma_1 \equiv \Gamma_2$ und seien $P_0, P_n, n \in \mathbb{N}$, die Randpunkte von Γ_1 . Weiterhin sei durch $\Pi_1 := \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ mit $P_i \in \Gamma_1$ für $i \in \{0, \dots, n\}$ ein Polygonzug auf Γ_1 definiert. Die Kreisbögen Γ_1 und Γ_2 sind nach Voraussetzung kongruent und d. h. es existiert eine euklidische Bewegung f mit $f(P_i) = Q_i$ und $Q_i \in \Gamma_2$ und es sind insbesondere $f(P_0)$ und $f(P_n)$ die Randpunkte von Γ_2 . Somit ist durch $\Pi_2 := \{f(P_0), f(P_1), \dots, f(P_n)\}$

ein Polygonzug auf Γ_2 definiert. Da f eine isometrische Abbildung ist, ist $\sum_{k=1}^n |P_k - P_{k_1}| = \sum_{k=1}^n |f(P_k) - f(P_{k_1})|$ und d. h. $L(\Pi_1) = L(\Pi_2)$.

Da f bijektiv ist und die Umkehrabbildung f^{-1} selbst wieder eine isometrische Abbildung, gilt auch für jeden beliebigen Polygonzug Π' auf Γ_2 , dass $L(\Pi') = L(f^{-1}(\Pi'))$. Dementsprechend ergibt sich durch geeignete Grenzwertbetrachtungen, die in Abschnitt 2.2.4 für einen Spezialfall durchgeführt wurden, dass $L(\Gamma_1) = L(\Gamma_2)$ gelten muss.

Es bleibt zu zeigen, dass die Abbildung $m : (\mathcal{W}_g, +) \rightarrow (\mathcal{I}_{2\pi}, \oplus)$ ein *Gruppenhomomorphismus* ist.¹⁰ Hierfür kann ich mich nach dem Vorangegangenen auf spezielle Repräsentanten drei beliebiger Winkelgrößen beschränken: Seien also $\alpha, \beta, \delta \in \mathcal{W}_g$ Winkelgrößen repräsentiert durch die (eindeutig bestimmten) Winkel $\angle(q_\alpha)$, $\angle(q_\beta)$ und $\angle(q_\delta)$. Zusätzlich gelte $\alpha + \beta = \delta$ und d. h. $\angle(q_\beta) \equiv_E \angle(q_\alpha, q_\delta)$. Sei $P_\alpha = K(O, r) \cap q_\alpha$, dann existiert genau ein $\varphi_\alpha \in \mathcal{I}_{2\pi}$, welches die Lage von P_α auf $K(O, r)$ festlegt. Seien analog Punkte P_β, P_δ und Zahlen $\varphi_\beta, \varphi_\delta \in \mathcal{I}_{2\pi}$ definiert und sei schließlich E ein beliebiger Punkt auf der „positiven Hälfte der x -Achse“. Ist $\alpha \leq \delta$, dann ist $\varphi_\alpha \leq \varphi_\delta$ und damit

$$\varphi_\beta = \frac{1}{r} L \left(\Gamma_{K(O, r)}^{\angle(EOP_\beta)} \right) = m(\beta) = \frac{1}{r} L \left(\Gamma_{K(O, r)}^{\angle(P_\alpha OP_\delta)} \right) = \varphi_\delta - \varphi_\alpha < 2\pi.$$

D. h. $\varphi_\alpha + \varphi_\beta < 2\pi$, woraus insbesondere folgt, dass

$$m(\alpha) \oplus m(\beta) = \varphi_\alpha \oplus \varphi_\beta = \varphi_\alpha + \varphi_\beta = \varphi_\alpha + (\varphi_\delta - \varphi_\alpha) = \varphi_\delta = m(\delta) = m(\alpha + \beta).$$

Ist hingegen $\alpha > \delta$, dann gilt $\varphi_\alpha > \varphi_\delta$ und somit nun $\varphi_\beta = m(\beta) = \varphi_\delta + 2\pi - \varphi_\alpha$, was $\varphi_\alpha + \varphi_\beta \geq 2\pi$ zur Folge hat. Letztlich ergibt sich dann:

$$m(\alpha) \oplus m(\beta) = \varphi_\alpha \oplus \varphi_\beta = \varphi_\alpha + (\varphi_\delta + 2\pi - \varphi_\alpha) - 2\pi = \varphi_\delta = m(\delta) = m(\alpha + \beta).$$

Somit ordnet die Abbildung m Winkelgrößen auf sinnvolle Weise eine Maßzahl zu. Diese Abbildung wird als *Bogenmaß* bezeichnet, weil die Größe von Winkeln mit Hilfe der Länge von Kreisbögen gemessen wird. Das Fundament des hier dargestellten Vorgehens zur Erarbei-

¹⁰ Die Begriffe „Gruppenhomomorphismus“ und „Gruppenisomorphismus“ werden definiert in ([57]: 58 f.).

tung eines Winkelmaßes, bildet insbesondere der in Abschnitt 2.2.3 vorgestellte Satz 2.8, von dem im Vorangegangenen häufig Gebrauch gemacht wurde. Insbesondere kam er im Zuge der Parametrisierung von Kreisbögen zum Einsatz, ohne die eine Bestimmung der Länge solcher Bögen in Abschnitt 2.2.4 gar nicht möglich gewesen wäre. Der Beweis des Satzes 2.8 berief sich wesentlich auf das Wissen um die Existenz einer kleinsten positiven Nullstelle der Funktion \cos .

Die im obigen Exkurs diskutierte Verknüpfung \oplus lässt sich (nach entsprechenden Modifikationen) für beliebige Intervalle $\mathcal{I}_s := [0, s) \subset \mathbf{R}$ so definieren, dass $(\mathcal{I}_s, \oplus_s)$ eine Gruppe ist mit dem zu $x \in (0, s)$ inversen Element $x^{-1} = s - x$. Die Abbildung $g_s : (\mathcal{I}_{2\pi}, \oplus) \rightarrow (\mathcal{I}_s, \oplus_s)$, gegeben durch $g_s(x) := \frac{s}{2\pi}x$, ist offenbar ein *Gruppenisomorphismus* und dementsprechend ist die Verkettung $g_s \circ m$ ein Gruppenhomomorphismus. Winkelgrößen können also auch durch andere Maßskalen gemessen werden. Das prominenteste Beispiel ist das *Gradmaß* $g_{360^\circ} \circ m$, wobei dessen Einheit berücksichtigt werden muss. Das Bogenmaß ist als Verhältnis zweier Längen selbst eine dimensionslose Größe bzw. eine Größe der Dimension *Zahl* und man nennt nur gelegentlich aus Gründen der Eindeutigkeit die Einheit *rad*.

Das Winkelmaß 1° lässt sich nun folgendermaßen interpretieren: Es bezeichnet das Maß derjenigen Winkelgröße, die, repräsentiert durch einen Winkel in Mittelpunktslage eines Kreises, aus diesem Kreis einen Kreisbogen ausschneidet, dessen Länge $\frac{1}{360}$ des Umfangs dieses Kreises misst. Allgemein bedeutet eine Winkelmaßzahl $z \in \mathcal{I}_s$ somit Folgendes: Sie misst die Größe eines Winkels, dessen Scheitel mit dem Mittelpunkt eines Kreises identisch ist und der aus diesem Kreis einen Bogen ausschneidet, der $\frac{z}{s}$ -mal so lang ist wie der Umfang des Kreises. Ein Winkel mit dem Bogenmaß 1rad , schneidet somit aus einem entsprechenden Kreis mit Radius r einen Bogen der Länge $\frac{2\pi r}{2\pi} = r$ aus, d. h. einen Bogen, der so lang ist wie der Radius des Kreises. Mit dem Bogenmaß misst man somit, wie häufig der Radius

des entsprechenden Kreises in die Länge des Kreisbogens passt, der von dem jeweiligen Mittelpunktswinkel ausgeschnitten wird.¹¹

¹¹ Thompson und Dray bemerken: „There are at least two common ways of defining angle measurement: in terms of an inner product and in terms of the unit circle“ ([103]: 87). In diesem Abschnitt wurde eine Version der zweiten Weges vorgestellt. Der erste Weg nimmt seinen Ausgang üblicherweise von der *Cauchy-Schwarzschen Ungleichung* (vgl. Satz 2.3) und der Tatsache, dass die Kosinusfunktion auf dem Intervall $[0, \pi]$ bijektiv ist. Vgl. für diesen Weg u. a. Koecher und Krieg ([54]: 97).

Didaktische Herausforderungen der Trigonometrie
Bogenmaß, Additionstheoreme und die Ableitungen der
Sinus- und Kosinusfunktion

Korntreff, S.

2018, XIV, 168 S. 15 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-19613-4