2 Rahmentheorien

2.1 Konzeptuelles Wissen

Beschäftigt man sich eingehender mit dem Begriff des Wissens, wird man in der Literatur schnell Unterscheidungen zwischen verschiedenen Wissensarten finden. Im Zentrum dieser begrifflichen Abgrenzungen steht meist die Unterscheidung zwischen Faktenwissen und Handlungswissen. Während sich Ersteres vor allem auf die Kenntnis von Fakten aber auch Zusammenhängen bezieht, bezeichnet Letzteres die Fähigkeit, eine gewisse Handlung vorzunehmen (z.B. Oberauer 1993).

Die genauen Bezeichnungen der entsprechenden Wissensarten variieren von Publikation zu Publikation mitunter stark. Gemein ist den Theorien jedoch häufig, dass eine Taxonomie von i.d.R. zwei verschiedenen Wissensarten gebildet wird und „stets ein Paarling eher die Grundlage eines abstrakten Tiefenverständnisses zu sein scheint und der andere die Grundlage von Handlungskompetenz“ (Schneider 2006, S. 48).

An dieser Stelle soll jedoch nicht zu einer umfangreichen Literaturanalyse ausgeholt werden, zumal es hier bereits exzellente Arbeiten gibt (z.B. Schneider 2006; Rittle-Johnson & Siegler 1998; de Jong & Ferguson-Hessler 1996). Stattdessen sollen die wesentlichen Charakteristika aufgezeigt und für diese Arbeit als Theoriegerüst nutzbar gemacht werden.

Die prominentesten Bezeichnungen für das Faktenwissen sind vermutlich die Begriffe „deklaratives Wissen“ oder „konzeptuelles Wissen“, während Handlungswissen häufig „prozedurales Wissen“ genannt wird. Schneider (2006) zeigt anhand einer umfangreichen Literaturanalyse auf, dass die meisten Paare von Wissensarten bereits explizit oder implizit mit diesen Begriffen gleichgesetzt wurden, fokussiert aber vor allem konzeptuelles und prozedurales Wissen (vgl. Schneider 2006, S. 51 ff.).

M. Klinger, *Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis*, Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik, https://doi.org/10.1007/978-3-658-20360-3_2

In den meisten Publikationen zum Thema werden deklaratives Wissen und konzeptuelles Wissen zudem synonym verwendet (z.B. Steiner 2006; Hiebert & Lefevre 1986) oder es findet sich lediglich einer der beiden Begriffe in der entsprechenden Veröffentlichung (z.B. Carpenter 2009; Star 2005; Schneider, Rittle-Johnson & Star 2011).

In manchen Fällen werden deklaratives und konzeptuelles Wissen aber auch unterschiedlich verwendet. Hierbei steht deklaratives Wissen dann meist für eher oberflächliches und isoliertes Wissen, während konzeptuelles Wissen eher als die Kenntnis ausgeprägter Konzepte mit einer besonderen Betonung der Vernetztheit der unterschiedlichen Wissenselemente verstanden wird. So verwendet beispielsweise Renkl (2015) den Begriff des konzeptuellen Wissens, „wenn deklaratives Wissen gemeint ist, das tieferes Verständnis konstitutiert“ (Renkl 2015, S. 4). Folgt man diesem Begriffsverständnis, weist die Unterscheidung zwischen deklarativem und konzeptuellem Wissen deutliche Ähnlichkeit zu Einsteins Trennung zwischen Knowing und Understanding auf (s. Kapitel 1).

Diese Arbeit wird vornehmlich die Begriffe des konzeptuellen und prozeduralen Wissens gebrauchen. Die weiteren Textpassagen sollen dabei vor allem helfen, den für diese Dissertation wichtigen Begriff des konzeptuellen Wissens weiter zu schärfen.

Abschnitt 2.1.1 betrachtet den Begriff daher zunächst von einem kognitionspsychologischen Standpunkt. Hier wird die Art und Weise beleuchtet, wie konzeptuelles Wissen beim Menschen strukturiert ist und auf wichtige Modelle eingegangen, die diese Struktur beschreiben.

Abschnitt 2.1.2 dient dann dazu, beide Begriffe für diese Arbeit genauer zu klären und diskutiert kurz unterschiedliche Definitionspaare. Hier sollen beide Wissensarten nicht isoliert voneinander sondern nebeneinander betrachtet werden, wenngleich eine der beiden Arten in dieser Arbeit im Vordergrund stehen soll.

Abschnitt 2.1.3 geht sodann auf weitere Dimensionen ein, hinsichtlich derer sich der Wissensstand verschiedener Personen unterscheiden kann. Auf diese Weise gewinnen die eingeführten Begriffe weiter an Kontur.

2.1.1 *Der kognitionspsychologische Standpunkt*

In seinem vielzitierten Lehrbuch erörtert der amerikanische Kognitionspsychologe Anderson (2015) den Begriff des konzeptuellen Wissens als das Denken in Kategorien: „we see the world in terms of categories“ (Anderson 2015, S. 109). Menschen neigen dazu, Informationen hinsichtlich der Objekte ihrer Umwelt oder allgemeiner ihrer Erfahrung innerhalb dieser Kategorien zentral zu speichern. So können später bei Bedarf, aufgrund der zentral mit einer Kategorie verknüpften Eigenschaften, Erwartungen hinsichtlich der Eigenschaften einzelner Kategoriemitglieder abgeleitet werden. „[I]f you were licked by a four-legged furry object that weighted about 50 pounds and had a wagging tail, you would perceive yourself as being licked by a dog“ (Anderson 2015, S. 109 f.) Die entsprechenden Eigenschaften sind in diesem Fall also mit der Kategorie „Hund“ assoziiert im Gedächtnis abgelegt.

Die Vorteile dieser Kategorisierung liegen auf der Hand: Auf diese Weise ist es uns möglich, Eigenschaften oder Handlungen auch innerhalb von Situationen vorherzusagen, die wir noch nie erlebt haben. Weiterhin wird durch solche universellen Konzepte wie das Konzept „Hund“ Kommunikation erheblich vereinfacht, so dass ein Gesprächspartner unmittelbar Erwartungen hinsichtlich des Aussehens, des Verhaltens, etc. des Objektes, über welches gesprochen wird, hat (vgl. Anderson 2015, S. 109 f.).

Auf der anderen Seite bringt das Denken in Kategorien aber auch Nachteile mit sich, welche sich im Alltag beispielsweise in Form z.T. kontraproduktiver Stereotypisierungen äußern. Ein Beispiel zeigen etwa Dunning & Sherman (1997) auf. Sie konfrontierten Probanden mit Aussagen der folgenden Art:

- „Elisabeth war nicht sehr überrascht über ihre Mathematiknote.“
- „Robert war nicht sehr überrascht über seine Mathematiknote.“

Bei einer anschließenden Befragung neigten die Probanden eher zu der fälschlichen Annahme, gehört zu haben, Elisabeth sei nicht überrascht über ihre *schlechte* Mathematiknote. Beim zweiten Satz überwog hingegen unter den Falschannahmen jene, gehört zu haben, dass Robert nicht sehr überrascht über seine *gute* Mathematiknote gewesen sei (vgl. Anderson 2015, S. 110).

Nach Quillian (1966) werden Informationen bezüglich solcher begrifflicher Kategorien in sog. *semantischen Netzwerken* gespeichert, welche hierarchisch geordnet sind und deren einzelne Verbindungen als „isa links“ bezeichnet werden. So dürften die meisten Menschen über die Kategorie „Tier“ mit den Unterkategorien „Vogel“ und „Fisch“ verfügen. Eine weitere Unterkategorie zu „Vogel“ könnte „Kanarienvogel“ sein usw. Zu jeder Kategorie speichern wir typische Eigenschaften, etwa „kann fliegen“ für „Vogel“ oder „lebt im Wasser“ für „Fisch“. Eigenschaften höher geordneter Kategorien vererben sich auf die jeweilig abstammenden Kategorien, so dass die Eigenschaft „frisst“ für „Tier“ auf die Kategorien „Vogel“ und „Fisch“ übertragen wird. Innerhalb dieses semantischen Netzwerks ist der Mensch bereit Ausnahmen zu gestatten, so dass etwa die Kategorie „Strauß“ von „Vogel“ abstammen kann, auch ohne die Eigenschaft „kann fliegen“ zu erfüllen (vgl. Anderson 2015, S. 110).

Eine ähnliche Theorie implementiert den Grundgedanken des Denkens in Kategorien in sog. *Schemata* (Rumelhart & Ortony 1976; Rumelhart 1980). Jedes Schema besitzt verschiedene Eigenschaftsvariablen, sog. „slots“, welche standardmäßig mit sog. „default values“ besetzt sind, für eine spezifische Instanz dieses Schemas jedoch auch andere Werte annehmen können. Beispielsweise umfasst das Schema „Haus“ verschiedene typische Eigenschaften, etwa dass Häuser in einzelne Räume unterteilt werden oder aus Materialien wie Holz, Ziegel oder Steinen bestehen. Eine besondere Eigenschaft ist jene, dass ein Haus ein spezielles Gebäude ist. Diese Eigenschaft, die die Verbindung des Schemas „Haus“ zum höherwertigen Schema „Gebäude“ beschreibt, ist der sog. „isa slot“. Konkret könnte das Schema „Haus“ auszugsweise wie folgt aussehen:

– *Isa*: Gebäude

– *Teile*: Räume

– *Material*: Holz, Ziegel, Stein

Die kursiv gedruckten Begriffe stellen hierbei die Slots dar, deren zugewiesene Werte die Default values repräsentieren, welche wir üblicherweise implizit für ein Haus annehmen. Auch hier ist es jedoch wieder möglich, dass eine konkrete Instanz dieses Schemas, also ein spezifisches Haus, aus einem anderen Material besteht oder nicht in Räume unterteilt ist. So besitzen die Häuser im Brettspiel „Monopoly“ keine einzelnen Räume und sind aus dem für Häuser untypischen Material Kunststoff gefertigt. Im Gegensatz zu semantischen Netzwerken lassen sich mit der Schema-Theorie auch unterschiedliche Grade an Klassenzugehörigkeit erklären, welche in Form häufigerer Abweichungen einer spezifischen Instanz von ihren Default values sichtbar werden (vgl. Anderson 2015, S. 112 ff.).

Wenngleich die Schema-Theorie also der Theorie semantischer Netzwerke überlegen sein mag, so hat sie sich dennoch aus psychologischer Sicht als nicht vollständig adäquat herausgestellt (vgl. Anderson 2015, S. 118). Die gegenwärtige Forschung zur psychologischen Realität konzeptuellen Wissens lässt sich innerhalb der Kognitionspsychologie in zwei Klassen einteilen: sog. *Abstraktions-* und *Exemplartheorien*. Erstere, zu der auch die Schema-Theorie zählt, geht davon aus, dass Menschen aus konkreten Exemplaren (z.B. Häusern) gewisse gemeinsame Merkmale und Eigenschaften extrahieren und als abstrakten Typ speichern. Im Gegensatz dazu gehen die Theorien der zweiten Klasse davon aus, dass wir uns nur eine gewisse Anzahl konkreter Exemplare merken und allgemeine Schlussfolgerungen jeweils aus Abgleich mit diesen Exemplaren entstehen, wir also gar keinen abstrakten Typen speichern. Wenn wir also entscheiden müssen, wie typisch ein gewisses Objekt für einen Vogel ist, ziehen wir bekannte Vögel heran und vergleichen hinsichtlich der mittleren Unterschiede beider Objekte (vgl. Anderson 2015, S. 118 f.).

Obwohl beide Theorieklassen sich in ihren Grundannahmen fundamental unterscheiden, treffen sie dennoch oftmals die gleichen oder ähnliche Vorhersagen. Aktuelle Forschungsarbeiten der kognitiven Psychologie, die versuchen herauszufinden, ob eher Abstraktions- oder Exemplartheorien auf unser Denken zutreffen, kommen entsprechend zu keinem eindeutigen Ergebnis. Vielmehr scheint es so zu sein, dass wir uns manchmal auf Abstraktionen und manchmal auf konkrete Exemplare zu beziehen scheinen (z.B. Anderson & Betz 2001; vgl. Anderson 2015).

2.1.2 *Zur Definition konzeptuellen und prozeduralen Wissens*

In ihrem vielzitierten Aufsatz definieren Hiebert & Lefevre (1986) konzeptuelles Wissen wie folgt:

> „Conceptual knowledge is characterized most clearly as knowledge that is rich in relationships. It can be thought of as a connected web of knowledge, a network in which the linking relationships are as prominent as the discrete pieces of information." (Hiebert & Lefevre 1986, S. 3 f.)

Die in Abschnitt 2.1.1 erläuterten kognitionspsychologischen Theorien spiegeln sich in Hiebert & Lefevres in Form des „web of knowledge" gut wider.

Demgegenüber stellen sie den Begriff des prozeduralen Wissens und definieren ihn wie folgt:

> „Procedural knowledge [...] is made up of two distinct parts. One part is composed of the formal language, or symbol representation system, of mathematics. The other part consists of the algorithms, or rules, for completing mathematical tasks." (Hiebert & Lefevre 1986, S. 6)

Obwohl beide Definitionen innerhalb der mathematikdidaktischen Forschung bis heute häufig Verwendung finden, gelten sie innerhalb der gängigen Literatur meist als überholt (vgl. Rittle-Johnson & Schneider 2015, S. 1119). So weist z.B. Star (2005) darauf hin, dass Autoren, die sich auf die Definition von Hiebert & Lefevre (1986) beziehen, prozedurales Wissen insbesondere als Kenntnis von Algorithmen auffassen. Er räumt ein, dass es in diesem Kontext zwar naheliegend ist, algorithmisches Wissen als eher oberflächlich zu betrachten, gibt jedoch zu bedenken, dass es sich bei Heuristiken ebenfalls um Prozeduren handelt, auf welche sich die Definition nach Hiebert & Lefevre jedoch nicht anwenden lässt. Hiebert & Lefevre sind sich dieser Problematik bereits selbst bewusst:

> „No sooner than we propose definitions for conceptual and procedural knowledge and attempt to clarify them, we must

> back up and acknowledge that the definitions we have given and the impressions they convey will be flawed in some way. As we have said, not all knowledge fits nicely into one class or the other. Some knowledge lies at the intersection. Heuristic strategies for solving problems, which themselves are objects of thought, are examples.“ (Hiebert & Lefevre 1986, S. 9)

Star (2005) weist außerdem darauf hin, dass weitere Einschränkungen in Kauf genommen werden müssen, arbeitet man mit der Definition für konzeptuelles Wissen von Hiebert & Lefevre:

> „The point is that mathematics educators who strictly adhere to Hiebert & Lefevre's (1986) definition implicitly refer only to a particular subset of conceptual knowledge: that which is richly connected and deep.“ (Star 2005, S. 407)

Insgesamt sieht Star so eine Vermengung hinsichtlich der Dimensionen „Art des Wissens“ und „Qualität des Wissens“. Dies führt dazu, dass die Begriffe innerhalb der Terminologie von Hiebert & Lefevre unterschiedliche Konnotationen erfahren: Während „konzeptuelles Wissen“ für ein stark vernetztes und verdichtetes Begriffswissen steht, wird der Begriff „prozedurales Wissen“ eher auf das Ausführenkönnen von Verfahren reduziert und als im Wesentlichen handwerkliche Tätigkeit herabgestuft (vgl. Star 2005).

Entsprechend schlägt er vor, beide Begriffe weiterhin als unterschiedliche Arten von Wissen zu betrachten. Die erwähnten, sich in Konnotationen ablagernden Qualitäten sollen jedoch von der jeweiligen Art des Wissens getrennt werden. D.h. prozedurales Wissen soll nicht notwendigerweise von oberflächlicher Struktur, konzeptuelles Wissen nicht notwendigerweise reichhaltig vernetzt und tief sein. Vielmehr soll der in einem Individuum vorherrschende Zustand als Qualität des jeweiligen Wissens und als weitere Dimension aufgefasst werden.

Tabelle 2.1.1 stellt dies in Form einer 2×2-Matrix dar: Während oberflächliches prozedurales Wissen und tiefes konzeptuelles Wissen im Wesentlichen mit den vorherrschenden Begrifflichkeiten nach Hiebert & Lefevre übereinstimmen, sind die aus Sicht von Star bisher unberücksichtigten Felder mit Fragezeichen markiert.

Wissensart	Qualität des Wissens: oberflächlich	tief
prozedural	übliche Verwendung von „prozedurales Wissen“	?
konzeptuell	?	übliche Verwendung von „konzeptuelles Wissen“

Tab. 2.1.1: Trennung von Wissensart und -qualität (übersetzt aus Star 2005)

Die Beschreibung der beiden offenen Felder nimmt Star wie folgt vor: Unter tiefem prozeduralen Wissen (engl. „deep procedural knowledge“) versteht er „knowledge of procedures that is associated with comprehension, flexibility, and critical judgment and that is distinct from (but possibly related to) knowledge of concepts“ (Star 2005, S. 408).

Hinsichtlich oberflächlichen konzeptuellen Wissens hebt er hervor, dass jede Art von Wissen zu Beginn des Lernprozesses von oberflächlicher Natur ist: „A learner's initial knowledge of a concept is typically quite superficial and fragile, but over time the relationships can deepen and become richer.“ (Star 2005, S. 408) Konzeptuelles Wissen umfasst für ihn zwar Beziehungen zwischen den einzelnen Wissenselementen, jedoch müssen diese nicht notwendigerweise von tiefer oder reichhaltiger Struktur sein. Hier wird auch deutlich, dass der Autor die Unterscheidung zwischen Oberflächlichkeit und Tiefe des Wissens nicht dichotom versteht, sondern diese eher in Form eines bipolaren Kontinuums begreift, das im Laufe des Lernens innerhalb eines Bereichs von zunehmender Vernetzung profitiert und so ausreift.

Baroody, Feil & Johnson (2007) teilen die Kritik Stars in wesentlichen Zügen[1] und schlagen eine alternative Definition vor, welche auf einer früheren Definition von de Jong & Ferguson-Hessler (1996) basiert:

> „Consistent with his [Star] recommendation to define knowledge type independently of the degree of connectedness, we

1 Wenngleich sie den Standpunkt vertreten, dass konzeptuelles und prozedurales Wissen mit zunehmender Tiefe konvergieren und so schließlich nicht mehr trennbar sind (vgl. Baroody, Feil & Johnson 2007, S. 123; Baroody 2003).

> tentatively propose a modification of de Jong & Ferguson-Hessler's (1996) definitions, defining procedural knowledge as mental ‚actions or manipulations' (p. 107), including rules, strategies, and algorithms, for completing a task, and defining conceptual knowledge as ‚knowledge about facts, [generalizations], and principles' (p. 107)." (Baroody, Feil & Johnson 2007, S. 123; zweite Anmerkung im Original)

Sofern nicht anders genannt, sollen die Begriffe „konzeptuelles Wissen" und „prozedurales Wissen" im weiteren Verlauf der Arbeit entsprechend des obigen Zitats von Baroody, Feil & Johnson verstanden werden.

2.1.3 *Weitere Eigenschaften der Begriffe*

Neben der Qualität in Form eines ausgereifteren prozeduralen bzw. konzeptuellen Wissens wird in der Literatur auch hinsichtlich anderer Facetten der entsprechenden Wissensarten differenziert.

So unterscheiden z.B. de Jong & Ferguson-Hessler (1996) neben der Wissenstiefe, welche die Autoren als „level" bezeichnen, auch hinsichtlich der *Strukturiertheit* des bei einer Person verfügbaren prozeduralen bzw. konzeptuellen Wissens. Bei der Struktur des vorhandenen Wissens wird zwischen isolierten Wissenselementen und strukturiertem Wissen unterschieden. Hierbei orientieren sich die Autoren auch an der Schema-Theorie nach Rumelhart & Ortony (1976) bzw. Rumelhart (1980) (s. Abschnitt 2.1.1). de Jong & Ferguson-Hessler räumen ein, dass Tiefe und Struktur von Wissen nicht unabhängig sind. Da jedoch oberflächliches (und möglicherweise fehlerbehaftetes) aber strukturiertes Wissen denkbar ist, haben beide Kategorien in getrennter Form für die Autoren ihre Berechtigung (vgl. de Jong & Ferguson-Hessler 1996, S. 108).

Eine weitere Unterscheidung wird hinsichtlich der *Explizitheit* des Wissens getroffen (z.B. Mandler 2004, S. 51 ff.; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali 2001). Hierbei kann explizites Wissen bewusst abgerufen und somit verbalisiert werden, etwa gespeicherte Fakten wie das Jahr der Entdeckung Amerikas. Implizites Wissen hingegen ist dem Bewusstsein unzugänglich und kann somit auch nicht verbalisiert werden wie etwa Fahrradfahren. Häufig wird auch von „focal" und „tacit knowledge" gesprochen (z.B. Polanyi 1962).

Eng hiermit verbunden ist der von Anderson (1983) geprägte Begriff der *Kompiliertheit* von Wissen. Dieser stammt aus einer Metapher, welche in die Informatik reicht. So wird der Prozess des Übersetzens einer Hochsprache in Maschinencode, der vom Rechner ausgeführt aber vom Menschen nicht mehr interpretiert werden kann, als Kompilieren bezeichnet (vgl. Anderson 1983, S. 35). de Jong & Ferguson-Hessler (1996) sprechen auch von automatisiertem versus nicht-automatisierten oder deklarativen Wissen und erläutern, dass etwa die Bearbeitung einer Aufgabe von einem Novizen bewusst und Schritt für Schritt ablaufen kann, während eine fortgeschrittene Person selbige Aufgabe eher unbewusst, flüssig und automatisiert bearbeitet (vgl. de Jong & Ferguson-Hessler 1996, S. 108). Automatisiertes bzw. kompiliertes Wissen stellt somit eher die begriffliche Entsprechung impliziten Wissens, nicht-automatisiertes bzw. -kompiliertes Wissen die Entsprechung expliziten Wissens dar. Für Anderson ist prozedurales Wissen generell von kompilierter Natur (vgl. Schneider 2006, S. 49), was in dieser Arbeit begrifflich aber nicht so gehandhabt werden soll. Entsprechend findet sich eine solche Forderung nicht in der Definition nach de Jong & Ferguson-Hessler (1996) bzw. Baroody, Feil & Johnson (2007) (s. Abschnitt 2.1.2).

Der Begriff der *Generalisierbarkeit* stellt die Frage, ob Wissen eher in allgemeiner Form vorliegt oder ob es stark domänenspezifisch ist (vgl. de Jong & Ferguson-Hessler 1996, S. 109 f.). Während konzeptuelles Wissen eher flexibel ist und sich auf neue Probleme transferieren lässt, ist prozedurales Wissen für Rittle-Johnson, Siegler & Alibali (2001) eher an einen engeren Problemkreis gebunden und nicht sehr verallgemeinerbar (vgl. Rittle-Johnson, Siegler & Alibali 2001, S. 346 f.). Diese Eigenschaften stellen auch eine Konsequenz für die Erhebung beider Wissensarten dar: So wird konzeptuelles Wissen häufig mittels neuartiger und den Schülerinnen und Schülern unbekannten Aufgabenformaten, prozedurales Wissen hingegen mittels Routineaufgaben erhoben (vgl. Schneider 2006, S. 55). Eine derartige Operationalisierung widerspricht jedoch den Annahmen Stars (2005).

2.1.4 *Konkretisierung für die Mathematikdidaktik*

Innerhalb der einschlägigen Literatur zu den Wissensarten finden sich einige Taxonomien, die versuchen die Begriffe des konzeptuellen und prozeduralen Wissens hinsichtlich weiterer Eigenschaften zu charakterisieren (s. Abschnitt 2.1.2). Im einfachsten Fall handelt es sich hierbei um eine Vierfeldertafel, wie sie Star (2005) vornimmt. Eine ausführlichere Ausdifferenzierung der Begriffe liefern z.B. de Jong & Ferguson-Hessler (1996), deren in der Physikdidaktik verortete Arbeit ebenfalls im vorangegangenen Abschnitt Erwähnung gefunden hat.

Eine Konkretisierung der Begriffe des konzeptuellen und prozeduralen Wissens entlang verschiedener mathematischer Inhalte nehmen Barzel et al. (2013) bzw. Prediger et al. (2011) vor. Die Autoren sprechen jeweils von unterschiedlichen Facetten des Wissens. Eine entsprechende Taxonomie ist in Tabelle 2.1.2 dargestellt.

Hierbei differenzieren die Autoren die zwei Wissensarten weiter aus. So unterscheiden sie auf Ebene des konzeptuellen Wissens zwischen Konzepten und Zusammenhängen, auf Ebene des prozeduralen Wissens zwischen mathematischen Verfahren und Algorithmen sowie handwerklichen Verfahren.[2] Auf der Horizontalen trennen sie hinsichtlich der Kategorien „Explizite Formulierung“, „Konkretisierung und Abgrenzung“, „Bedeutungen und Vernetzung“ sowie „Konventionelle Festlegungen“.

Die Facetten „Explizite Formulierung“ und „Konventionelle Festlegung“ fallen hierbei im Sinne des eröffnenden Einstein-Zitates wohl unter den Begriff des Knowing, so dass bei ihrer isolierten Betrachtung Bezug zum Begriff des deklarativen Wissens besteht, wie er etwa von Renkl (2015) als reines Faktenwissen ausgelegt wird (s. Abschnitt 2.1).

Währenddessen stehen die Facetten „Konkretisierung und Abgrenzung“ sowie insbesondere „Bedeutungen und Vernetzung“ dem Kern des Understanding nahe. So findet in den Erläuterungen von Prediger

2 Barzel et al. (2013) bzw. Prediger et al. (2011) beziehen sich auf die von Hiebert & Carpenter (1992) und somit implizit auch Hiebert & Lefevre (1986) aufgebrachten Definitionen der Begriffe des konzeptuellen und prozeduralen Wissens. Im Gegensatz zu Baroody, Feil & Johnson (2007) betonen diese nicht explizit den mentalen Charakter prozeduralen Wissens, so dass sich der Begriff prinzipiell auch auf handwerkliche Verfahren anwenden lässt.

et al. (2011) zur Kategorie „Bedeutungen und Vernetzung“ der Begriff des Verstehens besondere Betonung:

> „Um Konzepte, Zusammenhänge und Verfahren flexibel und *verständig* nutzen zu können, müssen ihre Bedeutungen *verstanden* werden. Daher bilden inhaltliche Vorstellungen und passende Darstellungen ganz entscheidende Wissensfacetten (vom Hofe 1995, Prediger 2009) […].“ (Prediger et al. 2011, S. 4, eigene Hervorhebungen)

In den Ausführungen findet sich einerseits der klassische Begriff des konzeptuellen Wissens wieder als vielfältig vernetztes Wissen, anderer-

	Explizite Formulierung	*Konkretisierung und Abgrenzung*	*Bedeutungen und Vernetzung*	*Konventionelle Festlegung*
Konzeptuelles Wissen				
Konzepte	Definitionen	Beispiele und Gegenbeispiele	Vorstellungen / Darstellungen	Fachwörter
Zusammenhänge	Sätze	Beispiele und Gegenbeispiele	(anschauliche) Begründungen / Beweise	Namen von Sätzen
Prozedurales Wissen				
Mathematische Verfahren, Algorithmen	Anleitungen	Bedingungen der Anwendbarkeit, Spezialfälle, evtl. Wissen zu typ. Fehlern	Vorstellungen / Begründungen als Verknüpfung zu konzeptuellen Gehalten	Vereinbarungen
Handwerkliche Verfahren	Anleitungen	Umsetzen der Anleitung, Bedingungen der Anwendbarkeit, spezifische Kniffe, Fehlerwissen	(keine konzeptuellen Gehalte, nur Handwerk, daher keine Bedeutungen)	Vereinbarungen

Tab. 2.1.2: Arten und Facetten von Wissen nach Prediger et al. (2011) (abgewandelt entnommen aus Prediger et al. 2011, S. 3; vgl. Barzel et al. 2013)

seits wird aber auch deutlich, dass ebenso verständiges prozedurales Wissen erstrebenswert ist, wie es z.B. von Star (2005) postuliert wird.

In beiden Fällen bilden vor allem geeignete Darstellungen und Vorstellungen das Fundament des Verstehens, wobei die Autoren – wie bereits das Zitat erkennen ließ – sich hier vor allem auf die Grundvorstellungstheorie nach vom Hofe (1995) beziehen. Entsprechend wird in den folgenden Abschnitten 2.2 sowie 2.3 auf beide Konzepte genauer eingegangen.

2.2 Repräsentationen

Davis (1984) hebt die besondere Bedeutung von Repräsentationen für die Mathematik hervor.[3] So muss alles Mathematische, das Gegenstand des Denkens ist, in geeigneter Form repräsentiert werden, um es für den Verstand greifbar zu machen:

> „Any mathematical concept, or technique, or strategy – or anything else mathematical that involves either information or some means of processing information – if it is to be present in my mind at all, must be *represented* in some way" (Davis 1984, S. 203, Hervorhebung im Original)

In anderen Disziplinen wie der Physik oder Chemie ist dies ähnlich. So müssen z.B. beim mentalen Planen von Experimenten geeignete Repräsentationen existieren, z.B. in Form von Skizzen, die einen Versuchsablauf beschreiben. Jedoch ist es auch möglich auf Untersuchungsgegenstände unmittelbar und multisensorisch zuzugreifen, entweder durch direkte Wahrnehmung oder durch technische Hilfsmittel wie Mikroskope, Teleskope, etc. (vgl. Iori 2017, S. 279). Hier sieht Duval (2006) einen fundamentalen Unterschied für die Mathematik. In ihr ist ein direkter weltlicher Zugriff auf die mathematischen Objekte unmöglich, so dass nur durch Repräsentationen mathematische Inhalte überhaupt greifbar gemacht werden können (vgl. Duval 2006, S. 107).

Duval sieht hier die Gefahr eines potentiellen kognitiven Konflikts beim Lernen von Mathematik: Einerseits ist der Zugriff auf mathemati-

3 In dieser Arbeit werden die Begriffe „Repräsentation" und „Darstellung" sowie entsprechende Derivate synonym verwendet.

sche Objekte nur über sie bezeichnende Repräsentationen möglich. Jede mathematische Aktivität bedeutet somit dann das Operieren zwischen verschiedenen Repräsentationen. Andererseits darf eine Repräsentation aber auch nicht mit dem mathematischen Objekt verwechselt werden, mit welchem sie assoziiert ist (vgl. Duval 2006, S. 107). Er spricht auch vom „cognitive paradox of access to knowledge objects" (Duval 2006, S. 107).

Der folgende Abschnitt 2.2.1 soll zunächst unterschiedliche Definitionen des Repräsentationskonzepts aufzeigen und auf verschiedene Charakteristika eingehen, die einer Repräsentation inhärent sein können. Das von Duval erwähnte Paradoxon macht es für das Lernen von Mathematik besonders wichtig, unterschiedliche Repräsentationsformen zu nutzen und Schülerinnen und Schüler dazu zu befähigen, zwischen diesen flexibel zu wechseln. Der sog. Repräsentationswechsel oder Darstellungswechsel bildet daher den Schwerpunkt in Abschnitt 2.2.2.

2.2.1 *Das Konzept „Repräsentation"*

Duval (2006) beschreibt Repräsentationen zu Beginn seines Artikels schlicht als „something that stands for something else" (Duval 2006, S. 103). Hierbei handelt es sich wohl um die wesentlichste Charakteristik des Konzepts, welche sich z.T. wörtlich bereits in früheren Publikationen anderer Autoren, etwa bei Palmer (1978, S. 262) oder Kaput (1985, S. 383) finden lässt. Palmer versteht eine Repräsentation vor allem als Modell dessen, was es repräsentiert. Für ihn impliziert dies zugleich die Existenz zweier Welten: Auf der einen Seite steht die Modellwelt, die sog. *Representing World*, auf der anderen Seite die Welt, welche modelliert wird und auf deren Objekte die Repräsentationen referenzieren, die sog. *Represented World*.

Eine Repräsentation ist für ihn nur dann vollständig spezifiziert, wenn hinreichend geklärt ist, was unter repräsentierender und repräsentierter Welt im konkreten Fall zu verstehen ist sowie welche Aspekte der repräsentierten Welt modelliert werden und worin sie sich in der repräsentierenden Welt widerspiegeln. Letzlich muss noch geklärt sein, wie die beiden Welten miteinander korrespondieren (vgl. Palmer 1978, S. 262).

Ein ähnlicher Ansatz, der ebenfalls auf der Vorstellung einer Repräsentation als Modell dessen, was sie repräsentiert, basiert, findet sich z.B. bei Fischbein (2001). Er liefert zunächst eine recht technische Definition eines *Modells*:

> „Considering two systems, A and B, B is defined as a model of A if it is possible to translate properties of A in terms of B so as to produce consistent descriptions of A in terms of B, or to solve problems – originally formulated in terms of A – by resorting to a translation in terms of B." (Fischbein 2001, S. 312)

Besondere Bedeutung hat für ihn der Substitutionscharakter eines Modells, so dass dieses an die Stelle des modellierten Originals treten kann (vgl. Fischbein et al. 1990, S. 23). Als Beispiel für ein Modell innerhalb der Mathematik kann etwa die euklidische Verbindungsstrecke zweier Punkte herangezogen werden. Diese ist mathematisch von infinitesimaler Breite. Als Modell dieses mathematischen Objekts dient dann etwa eine mit dem Stift gezogene Linie auf dem Papier, welche naturgemäß von endlicher Breite ist.

Den meisten Theorien zum Konzept „Repräsentation" oder zu verwandten Konzepten ist gemein, dass hinsichtlich der physischen Existenz oder Nicht-Existenz der Repräsentation unterschieden wird. So bezieht sich der begriffliche Zusatz einer *internen* oder *mentalen Repräsentation* darauf, dass diese in rein kognitiver Form existiert. Im Gegensatz dazu, bezeichnet der Begriff der *externen Repräsentation* eine Repräsentation in physischer Form, etwa eine Skizze auf Papier, eine verbale Äußerung oder ein Graph am Computerbildschirm. Beide Formen unterscheiden sich vor allem dadurch, dass nur externe Repräsentationen zu Kommunikationszwecken genutzt werden können, das eigentliche mathematische Denken kann hingegen nur mit internen Repräsentationen bewerkstelligt werden (vgl. z.B. Hiebert & Carpenter 1992, S. 66; Goldin & Kaput 1996, S. 399; Goldin 2002, S. 210 f.).

Weiterhin können sich unterschiedliche Repräsentationen hinsichtlich ihres Informationsgehaltes über das repräsentierte Objekt unterscheiden. In diesem Zusammenhang spricht Palmer (1978) von *äquivalenten* und *nicht-äquivalenten Repräsentationen*. So bezeichnen etwa die beiden Repräsentationen x^2 und $x \cdot x$ im Allgemeinen denselben mathematischen Ausdruck, sind also hinsichtlich ihres Informationsgehalts äquivalent.

Die Nicht-Äquivalenz zweier Repräsentationen kann sich hingegen darin zeigen, dass unterschiedliche Aspekte des repräsentierten Objekts abgebildet werden. So können etwa ein Foto oder der Vorname einer Person gleichermaßen als Repräsentation dieser Person genutzt werden. Beide Repräsentationen lassen i.d.R. Rückschlüsse auf das Geschlecht der bezeichneten Person zu, jedoch wird nur das Foto Aufschlüsse über die Frisur geben. Palmer spricht hier vom *Type of Information*, der durch die verwendete Repräsentation bereitgestellt wird (vgl. Palmer 1978, S. 268).

Der Grund für eine etwaige Nicht-Äquivalenz kann aber auch aus einer unterschiedlichen *Auflösung* rühren (vgl. Palmer 1978, S. 268 f.). Hierbei kann man sich etwa zwei Landkarten vorstellen, welche in unterschiedlichen Maßstäben gedruckt sind und somit das repräsentierte Gelände auch mit verschiedener Detailtreue abbilden.

Speziell für die Mathematik kann man zudem hinsichtlich der *Eindeutigkeit* einer Repräsentation unterscheiden. Hierbei steht die Frage im Mittelpunkt, ob die verwendete Repräsentation das zugrunde liegende mathematische Objekt eindeutig identifiziert. Während beispielsweise eine Wertetabelle keine Aufschlüsse über das Verhalten einer Funktion zwischen den dargestellten Werten gibt, lässt sich dies aus einer Funktionsvorschrift in Termform eindeutig ablesen.

Die Begriffe der Auflösung sowie der Eindeutigkeit betreffen dabei beide die *Exaktheit* der durch das Paar eines mathematischen Objekts sowie seiner Repräsentation gespannten Verbindung. Hierbei ist die Auflösung ein eher stetig zu verstehendes Konzept, so dass eine entsprechende sukzessive Erhöhung zwar gegen den dichotom zu verstehenden Zustand der Eindeutigkeit konvergiert, diesen in aller Regel jedoch nicht erreicht.

Dass unterschiedliche Repräsentationen desselben mathematischen Objekts auch unterschiedliche Aspekte seiner Natur betonen oder überhaupt vermögen abzubilden, unterstreicht die Relevanz sog. Repräsentationswechsel, welche Untersuchungsgegenstand des nachfolgenden Abschnitts sind.

2.2.2 *Repräsentationswechsel: Perspektive schafft Tiefe*

Duval (2006) spricht von „semiotic representations“, welche für ihn auch natürliche Sprache einschließen, und betont insbesondere neben ihrer kommunikativen Funktion die Bedeutung semiotischer Repräsentationen für den mathematischen Erkenntnis- und Lernprozess eines Individuums (vgl. Duval 2006, S. 104). Hierbei bezieht sich „semiotic“ vor allem darauf, dass mit entsprechenden Repräsentationen eine gewisse Intention einhergeht. Im Gegensatz hierzu handelt es sich bei nicht-semiotischen Repräsentationen um unbewusste und teils nicht vermeidbare Repräsentationen, etwa einen Fußabdruck am Strand, welchen man beim dortigen Spazieren unweigerlich hinterlässt (vgl. Arzarello 2006, S. 271; Iori 2017, S. 280).

Er definiert eine Unterklasse solcher semiotischer Repräsentationen, sog. „representation registers“ (frz. „registres“, s. Duval 1993), die sich dadurch auszeichnen, dass ein Wechsel zwischen unterschiedlichen *Registern* möglich ist, ohne dass das Repräsentierte verloren geht (vgl. Duval 2006, S. 104 ff.). Beispiele für Register (im Kontext mathematischer Inhalte) sind bei ihm die natürliche Sprache, das symbolisch-algebraische Register, in welchem Terme und Gleichungen nach festen formalen Regeln verarbeitet werden können, kartesische Graphen, die eine Gleichung oder Funktion repräsentieren, oder das Register geometrischer Figuren, in welchem mathematische Inhalte i.d.R. zwei- oder dreidimensional, perspektivisch oder im Querschnitt dargestellt werden können (vgl. Duval 2006, S. 110).

Für Duval sind Repräsentationen und insbesondere der Wechsel unterschiedlicher Register essentieller Bestandteil der mathematischen Wissensaneignung:

> „[...] there is no understanding without visualization.“ (Duval 1999, S. 13; wiederabgedruckt in Duval 2002)

Jede Art mathematischer Aktivität stellt für ihn eine Transformation von Repräsentationen dar bzw. den Wechsel zwischen unterschiedlichen Registern (vgl. Duval 2006, S. 111). Dabei unterscheidet er zwei sich grundsätzlich unterscheidende Arten solcher *Darstellungswechsel*: Auf der einen

Seite spricht er von *Treatments* und meint damit Transformationen von Repräsentationen innerhalb eines Registers. Löst man etwa eine Gleichung und führt dabei z.B. *ausschließlich* auf symbolischer Ebene Umformungen durch, ohne etwa einen graphischen Plot der beiden Gleichungsseiten zur Hilfe heranzuziehen, operiert man allein im symbolisch-algebraischen Register. Das Lösen der Gleichung stellt in diesem Fall also ein Treatment – genauer: eine Verkettung vieler Treatments – dar. Auf der anderen Seite spricht Duval von *Conversions*. Hiermit sind entsprechend Transformationen zwischen den Registern gemeint, jedoch nur dann, wenn das Repräsentierte (vgl. Abschnitt 2.2.1, Kaput 1987) invariant bleibt, d.h. dasselbe mathematische Objekt in zwei verschiedenen Registern abgebildet wird. Veranschaulicht man etwa eine Gleichung, indem beide Seiten als Funktionsgraph in einem Koordinatensystem dargestellt werden, verändert man nicht das zugrundeliegende mathematische Objekt, sondern lediglich die Art seiner Repräsentation. Genauer wechselt man von einer Darstellung innerhalb des symbolisch-algebraischen Registers ins Register kartesischer Graphen. Man nimmt also eine Conversion vor.

Duval unterscheidet weiterhin in Anlehnung an Frege (1980, S. 40 ff.) zwischen *Sinn* und *Bedeutung* einer Repräsentation. Ersteres bezieht sich auf Eigenschaften der Repräsentation selbst, insbesondere ihre Funktion z.B. bei der mathematischen Begriffsbildung. Die Bedeutung bezieht sich nicht direkt auf die Repräsentation sondern auf das von ihr Repräsentierte (vgl. Jörissen & Schmidt-Thieme 2015, S. 390). In der Nomenklatur von Kaput (1987) bezieht sich „Sinn" also auf die repräsentierende, „Bedeutung" auf die repräsentierte Welt. Duval hebt hervor, dass der Inhalt einer Repräsentation und somit auch ihr didaktisches Potential wesentlich vom gewählten Register abhängt und weniger vom eigentlich zu repräsentierenden Objekt:

> „Now, and this is the decisive consequence that is rarely taken into account, *the content of a representation depends more on the register of the representation than on the object represented* [...]" (Duval 2006, S. 114, Hervorherbung im Original; vgl. Duval 2000, S. 58).

Der mit jeder Repräsentation einhergehende Sinn leitet sich für Duval vor allem aus dem jeweils verwendeten Register ab. In Abhängigkeit von der gewählten Darstellungsart eines mathematischen Begriffs werden unterschiedliche Aspekte des nicht greifbaren Objektes in verschiedener Intensität verdeutlicht oder bleiben im Verborgenen (vgl. Duval 2006, S. 114). Aus diesem Grund ist für Duval ein Wechsel zwischen den Registern nicht nur förderlich, sondern für das Verstehen mathematischer Inhalte auch essentiell notwendig. Die Fähigkeit von Schülerinnen und Schülern, solche Wechsel vornehmen zu können, ist für ihn die wesentliche Herausforderung beim Begreifen mathematischer Konzepte:

> „*how can they* [die Schülerinnen und Schüler] *distinguish the represented object from the semiotic representation used if they cannot get access to the mathematical object apart from the semiotic representations*? And that manifests itself in the fact that the ability to change from one representation system to another is very often the critical threshold for progress in learning and for problem solving." (Duval 2006, S. 107, Hervorhebung im Original)

van Someren et al. (1998) heben die Bedeutung des Lernens mit unterschiedlichen Repräsentationsformen ebenfalls hervor: Einerseits konstruieren Lernende durch den Wechsel unterschiedlicher Darstellungen Verbindungen zwischen verschiedenen Eigenschaften dieser Repräsentationen. Auf diese Weise können Zusammenhänge hergestellt werden, etwa mit welchen Aspekten einer Simulation eines bewegten Objekts das Symbol V (für Geschwindigkeit) oder A (für Beschleunigung) in Wechselwirkung steht. Durch das Spannen solcher kognitiven Verbindungen werden nach van Someren et al. Problemlöse-Fähigkeiten gestärkt, indem Lernende aus einem Pool unterschiedlicher Darstellungen optimal für bestimmte Zwecke zu wählen lernen. So kann unter Zuhilfenahme eines Diagramms ein Problem eventuell unter deutlicher Zeitersparnis gelöst werden, wenngleich die Lösung durch Umformen mathematischer Gleichungen oder sprachliche Argumentation zwar kognitiv aufwendiger aber ebenfalls hätte erreicht werden können (vgl. van Someren et al. 1998, S. 3).

Einige Studien kamen jedoch auch zu dem Schluss, dass Schülerinnen und Schülern der Wechsel zwischen unterschiedlichen Darstellungsformen schwerfallen kann. Dies kann insbesondere abhängig von der Richtung der Conversion sein. So waren beispielsweise nur sieben Prozent der Probanden in einer Studie von Pavlopoulou (1993) in der Lage, einen Wechsel vom Tabellenregister in das symbolische Register vorzunehmen. Die gleiche Aufgabe in umgekehrter Richtung lösten jedoch 72 Prozent der Schülerinnen und Schüler (vgl. Duval 2006, S. 122 f.).

Insgesamt besteht innerhalb der wissenschaftlichen Community weitgehend Konsens darüber, dass die Fähigkeit zur Verwendung verschiedener Repräsentationsformen entsprechend ihrer Vor- und Nachteile sowie der flexible und strategisch-bedachte Wechsel zwischen ihnen wesentlicher Bestandteil mathematischen Arbeitens ist (vgl. Heinze, Star & Verschaffel 2009, S. 536, Prediger 2013, S. 172, Acevedo Nistal et al. 2009, S. 627 f.).

Hierbei ist es dann ähnlich wie in der Kunst: Erst die Verwendung von Perspektive, wie sie in Form verschiedener sich ergänzender Darstellungsformen aus unterschiedlichen Blickwinkeln eingenommen werden kann, schafft begriffliche Tiefe.

Entsprechend wird beispielsweise Lernarrangements eine höhere Wirksamkeit hinsichtlich des Wissenserwerbs zugesprochen, wenn diese vielfältige Darstellungsformen beinhalten und Schülerinnen und Schüler dazu befähigen, flexibel zwischen diesen zu wechseln (vgl. Heinze, Star & Verschaffel 2009, S. 536, Laakmann 2013, S. 38 ff.). Dies spiegelt sich nicht zuletzt auch darin wider, dass von Seiten der Bildungsadministration „mathematische Darstellungen verwenden“ zu den allgemeinen mathematischen Kompetenzen im Fach Mathematik gezählt wird (z.B. KMK 2004, KMK 2015).

Hierbei ist aber nicht nur von Relevanz, dass Schülerinnen und Schüler mit externen Repräsentationen geeignet umzugehen wissen. Vielmehr ist es notwendig, dass sie diese geeignet internalisieren und somit Vorstellungen bzgl. des jeweiligen mathematischen Konzepts entwickeln. Es ist also notwendig, dass Schülerinnen und Schüler mentale Repräsentationen entwickeln. So verdichten z.B. Goldin & Shteingold (2001) die Bedeutung mathematischer Repräsentationen beim Lehren und Lernen mathematischer Inhalte wie folgt:

> „In teaching every mathematical topic, we should see the development of strong, flexible internal systems of representation

in each student as the essential goal.“ (GOLDIN & SHTEINGOLD 2001, S. 19)

Die Bedeutung, die Vorstellungen für die Mathematik haben, sowie entsprechende Theorien werden im folgenden Abschnitt dargestellt.

2.3 Grundvorstellungen und Concept Image

Als weiterer Teil des Fundaments des Verstehens (s. Abschnitt 2.1.4) soll in diesem Abschnitt u.a. auf die Arbeiten VOM HOFES zur Theorie der Grundvorstellungen eingegangen werden. Der Autor motiviert diese vor allem mit der „Sinnlosigkeit“ (VOM HOFE 1992, S. 345), die Schülerinnen und Schüler mit mathematischen Inhalten zu verbinden scheinen. Dieses Empfinden der Sinnlosigkeit begründet sich nach VOM HOFE weniger im „grundsätzlichen Desinteresse gegenüber mathematischen Zusammenhängen oder ihren Anwendungen [...], sondern häufig bereits in dem ungenügenden Verständnis der elementaren mathematischen Begriffe und Verfahren“ (VOM HOFE 1992, S. 345). Entsprechend ist für die mathematische Wissensvermittlung essentiell, „was Menschen sich unter mathematischen Inhalten *vorstellen*, welche *inhaltliche Bedeutung* sie damit verbinden“ (BLUM et al. 2004, S. 145, Hervorhebungen im Original).

Auch wenn es einige Konzepte gibt, mit denen obiger Aspekt erfasst werden soll (vgl. BLUM et al. 2004, S. 145), werden in diesem Kapitel vor allem zwei Theorien erörtert: die *Grundvorstellungstheorie* (VOM HOFE 1992, 1995) in Abschnitt 2.3.1 sowie die Theorie von *Concept Image* (und *Concept Definition*) (VINNER & HERSHKOWITZ 1980, TALL & VINNER 1981), welche auch unter entsprechenden deutschsprachigen Bezeichnungen innerhalb einschlägiger Literatur zu finden sind.[4] Schließlich werden beide Theorien in Abschnitt 2.3.3 gegenübergestellt und Ähnlichkeiten wie Unterschiede benannt.

4 Als deutschsprachige Übersetzungen der Begriffe „concept image“ und „concept definition“ nutzen z.B. WEIGAND & STRÄSSER (2011) die Bezeichnungen „Begriffsbild“ und „Begriffsdefinition“, wenngleich die englischsprachigen Bezeichnungen auch innerhalb der deutschsprachigen Literatur wenigstens ebenso prominent sind.

2.3.1 *Grundvorstellungen*

Ausgehend von ersten Verwendungen des Begriffs *Grundvorstellungen* in der deutschen Rechendidaktik, widmete sich insbesondere vom Hofe (1992, 1995) der systematischen Aufarbeitung dieses und ähnlicher Begriffe. Zu diesen zählen u.a. „Anschauungen“, „Vorstellungen“ und „Verinnerlichungen“ (vgl. vom Hofe 1995, S. 23). Selbstverständlich kann und soll dieser Abschnitt die theoretischen Grundlagen der Arbeiten vom Hofes nicht wiederholen, vielmehr sei für eine vollständige theoretische Aufarbeitung und historische Entwicklungsdetails – insbesondere verschiedene Gewichtungen, die entsprechende Begriffe im Laufe der Zeit unter unterschiedlichen Autoren erfuhren – auf seine Dissertation verwiesen (vom Hofe 1995).

In dieser beschreibt vom Hofe die „Grundvorstellungsidee“ wie folgt:

> „Die Grundvorstellungidee beschreibt Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung. In ihren unterschiedlichen Ausprägungen charakterisiert sie mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunkten insbesondere drei Aspekte dieses Phänomens:
>
> - *Sinnkonstituierung* eines Begriffs durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen,
> - *Aufbau entsprechender* (visueller) *Repräsentationen*[5] bzw. ‚Verinnerlichungen‘, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen,
> - *Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit* durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur.“
>
> (vom Hofe 1995, S. 97 f., eigene Hervorhebungen; vgl. Blum et al. 2004)

5 Hier sind vor allem mentale Repräsentationen gemeint (vgl. vom Hofe & Blum 2016, S. 230).

Der Begriff „Grundvorstellungen" befindet sich somit an der Schnittstelle zwischen mathematischen Strukturen, individuell-psychologischen Prozessen und realen Sachzusammenhängen und beschreibt Beziehungen zwischen diesen. vom Hofe verdichtet dies kurz auf „Beziehungen zwischen Mathematik, Individuum und Realität" (vom Hofe 1992, S. 347).

Der Begriff lässt sich dabei in einer das Individuum wie auch die mathematischen Begriffe fokussierenden Weise auffassen: Grundvorstellungen dienen einerseits als „individuelles Erklärungsmodell des Schülers, das in das System seiner Erfahrungsbereiche eingebunden und entsprechend aktivierbar ist" (vom Hofe 1992, S. 358), andererseits als „didaktische Kategorie des Lehrers, die im Hinblick auf ein didaktisches Ziel aus inhaltlichen Überlegungen hergeleitet wurde und Deutungsmöglichkeiten eines Sachzusammenhangs bzw. dessen mathematischen Kerns beschreibt" (vom Hofe 1992, S. 358). Der Autor spricht in diesem Zusammenhang von einer *deskriptiven* und einer *normativen Dimension*.

Während der normative Aspekt unter der Leitfrage steht, welche Grundvorstellungen zur Lösung eines Problems oder zur Bearbeitung einer Aufgabe adäquat bzw. sinnvoll sind, beschreibt der deskriptive Aspekt den Ist-Zustand auf Seiten der Schülerinnen und Schüler. Hier wird nach Vorstellungen gefragt, welche sich etwa an einer konkreten Schülerbearbeitung einer Aufgabe erkennen lassen (vgl. vom Hofe 1992, S. 353).[6]

Die Grundannahme seiner Theorie verbindet beide Dimensionen: So nimmt vom Hofe an, „daß sich durch die Umsetzung der didaktischen Kategorie [normative Dimension] entsprechende individuelle Erklärungsmodelle ausbilden lassen [deskriptive Dimension], die – bei allen subjektiven Schattierungen – einen gemeinsamen Kern haben, oder kurz: daß sich Grundvorstellungen ausbilden lassen" (vom Hofe 1992, S. 358). Hierbei nimmt er also an, dass ein an den Grundvorstellungen der mathemati-

6 Der Autor nennt gleichsam noch eine weitere Dimension, die sog. *konstruktive Dimension*, die hier jedoch nicht näher betrachtet werden soll. Diese versteht er als Verbindung des normativen und deskriptiven Aspekts. Die mit der Dimension assoziierte Leitfrage richtet sich entsprechend nach etwaigen Differenzen zwischen den intendierten Grundvorstellungen und den bei einer Schülerin oder einem Schüler tatsächlich ausgeprägten Vorstellungen in Bezug auf einen mathematischen Begriff. Weiterhin ist die Frage nach einem Weg, wie sich etwaige Divergenzen beheben lassen, von Bedeutung (vgl. vom Hofe 1992, S. 353 f.).

schen Inhalte ausgerichteter Unterricht prinzipiell dafür sorgen kann, dass sich Schülerinnen und Schüler diese ebenfalls im Rahmen ihres Lernprozesses als Teil der eigenen individuellen Vorstellungen zu eigen machen.

So betont vom Hofe (2003) außerdem, dass es sowohl aus deskriptiver wie auch normativer Perspektive nicht *eine* Grundvorstellung eines mathematischen Inhalts gibt. Stattdessen wird ein mathematischer Begriff in der Regel von *mehreren* Grundvorstellungen erfasst (vgl. vom Hofe 2003, S. 6). Beispielsweise wird in der Literatur bei dem Konzept einer mathematischen Funktion i.d.R. von drei verschiedenen Grundvorstellungen ausgegangen (s. Abschnitt 3.3).

Weiterhin unterscheidet vom Hofe zwischen *primären* und *sekundären* Grundvorstellungen. Erstere reichen bis in die Vorschulzeit zurück und begründen sich durch konkrete gegenständliche Handlungserfahrungen. Im Laufe der Schulzeit werden diese sukzessive durch sekundäre Grundvorstellungen ergänzt, welche zunehmend auf mathematischen Repräsentationsmitteln wie Zahlenstrahl, Koordinatensystem oder Graphen basieren (vgl. vom Hofe 2003, S. 6; vom Hofe & Blum 2016, S. 234).

Aus deskriptiver Perspektive betrachtet vom Hofe den Begriff „Grundvorstellung" als „individuelles Erklärungsmodell des Schülers, das in das System seiner Erfahrungsbereiche eingebunden und entsprechend aktivierbar ist" (vom Hofe 1992, S. 358). Den Begriff „Erfahrungsbereich" bezieht er dabei vor allem auf die Theorie *subjektiver Erfahrungsbereiche* Bauersfelds (1983) (vgl. vom Hofe 1995, S. 126 ff.). Der Theorie liegt die Annahme der *Bereichsspezifität* aller gedanklichen Strukturen zugrunde (vgl. vom Hofe 1995, S. 109):

> „Begriffliche Strukturen und Systeme implizieren nie eine unbeschränkte Generalität [...] Jedes individuelle kognitive System ist seinem Wesen nach beschränkt auf die Situationen, in denen es erarbeitet wurde [...]." (Seiler 1973, S. 266)

Diese Bereichsspezifität mathematischer Vorstellungen lässt sich etwa anhand der Rechenaufgabe $8 : 4 =?$ verdeutlichen. So wird häufig beobachtet, dass Schülerinnen und Schüler, die Probleme zeigen diese Aufgabe zu lösen, dazu sehr wohl fähig sind, sobald sich der Kontext ändert. So kann etwa die Aufforderung, sich vorzustellen acht Bonbons an vier

Kinder zu verteilen, dazu führen, dass sie ohne Schwierigkeiten zur korrekten Lösung gelangen (vgl. vom Hofe 1995, S. 109). Für die Lernenden handelt es sich entsprechend um zwei grundverschiedene Aufgaben, die in unterschiedlichen „Welten" angesiedelt sind. So entstammt die erste Variante der „Zahlenwelt", während die zweite innerhalb der „Geldwelt" angesiedelt ist (vgl. vom Hofe 1995, S. 110).[7] Phänomene wie dieses lassen sich nach Bauersfeld (1983) darauf zurückführen, dass Schülerinnen und Schüler in diesem Fall auf zwei voneinander getrennte unterschiedliche subjektive Erfahrungsbereiche (SEB) zurückgreifen. SEB sind für ihn jedoch kein starres Konzept: Sie haben „Prozeßcharakter und daher eine je eigene Wandlungsgeschichte ihrer Zustände vom Entstehen bis zum möglichen Verfall (Vergessenwerden)" (Bauersfeld 1983, S. 2). Hieraus lässt sich ein weiterer wichtiger Aspekt des Grundvorstellungskonzepts ableiten: Grundvorstellungen sind hinsichtlich der deskriptiven Perspektive nicht als stabiles und vollends fixiertes und für alle Zeiten gültiges gedankliches Werkzeug zu verstehen (vgl. vom Hofe 2003, S. 6). Vielmehr handelt es sich um die Ausbildung eines Netzwerks, welches sich durch sukzessiven Zugewinn neuer Aspekte „zu einem immer leistungsfähigeren *System mentaler mathematischer Modelle entwickelt*" (vom Hofe 2003, S. 6, Hervorhebung im Original).

2.3.2 *Concept Image und Concept Definition*

Eine weitere insbesondere im anglo-amerikanischen Sprachraum verbreitete Theorie erschien erstmals 1980 in einem Konferenzbeitrag von Vinner & Hershkowitz. Später prägten vor allem Tall & Vinner (1981) mit ihrem Artikel „Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity" den innerhalb der Theorie zentralen Begriff des *Concept Image*. Sie verstehen darunter alle kognitiven Strukturen, die mit einem Begriff (engl. „concept") verbunden sind, was sich insbesondere auf alle mentalen Repräsentationen sowie zugehörige Eigenschaften und Prozesse bezieht. In ihrer Definition des Begriffs he-

7 Vergleiche hierzu auch die Theorie der *Microworlds* Lawlers (1981).

ben sie außerdem den langfristigen Entwicklungscharakter des Concept Image hervor:

> „We shall use the term concept image to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures.“ (Tall & Vinner 1981, S. 152)

Das Concept Image verdeutlichen die Autoren am Beispiel der Subtraktion, welche typischerweise zunächst für natürliche Zahlen eingeführt wird. Auf diesem Niveau machen Kinder die Erfahrung, dass eine Subtraktion stets die vorliegende Anzahl verringert. Diese Beobachtungen verfestigen sich somit als Teil des Concept Image, was im späteren Bildungsverlauf zu Problemen führen kann, etwa bei der Subtraktion negativer Zahlen (vgl. Tall & Vinner 1981, S. 152). Die Autoren schließen daraus, dass „all mental attributes associated with a concept, whether they be conscious or unconscious, should be included in the concept image; they may contain the seeds of future conflict“ (Tall & Vinner 1981, S. 152). Insbesondere fassen Tall & Vinner das Concept Image als eine dynamische kognitive Struktur auf, welche ständigen Einflüssen unterworfen ist und in einem Prozess des lebenslangen Lernens sukzessive Erweiterungen, Umbrüche und Wandlungen erfährt.

Es wird weiterhin betont, dass das Concept Image einer Person zu einem gewissen Begriff im Verlauf solcher Veränderungen nicht zu allen Zeiten kohärent sein muss, vielmehr können unterschiedliche Stimuli verschiedene Teile des Concept Image aktivieren, während andere im Verborgenen bleiben. Auf diese Weise kann ein Gesamtbild entstehen, dass nicht notwendigerweise ein widerspruchsfreies Ganzes formt. In diesem Zusammenhang sprechen Tall & Vinner (1981) auch vom sog. *Evoked Concept Image* (bzw. bei Vinner (1983) „temporary concept image“), welches solche Teile des generellen Concept Image bezeichnet, die zu einem spezifischen Zeitpunkt aktiviert sind. Nur wenn sich widersprechende und somit zueinander in Konflikt stehende Aspekte des Concept Image gleichzeitig aktiviert werden, entsteht der Eindruck eines Konflikts oder einer

Verwirrung bei der entsprechenden Person. Zwei sich derart potentiell widersprechende Teile des Concept Images bezeichnen Tall & Vinner als *Potential Conflict Factor*. Erst wenn beide Teile simultan genutzt werden, also gleichzeitig vom Evoked Concept Image erfasst werden, und dies zu einem Konflikt des Individuums führt, sprechen die Autoren von einem *Cognitive Conflict Factor* (vgl. Tall & Vinner 1981, S. 153 f.)

Im Mittelpunkt der Arbeiten Tall & Vinners steht aber auch die Definition eines mathematischen Begriffs. Sie gehen insbesondere auf die Rolle einer solchen Definition für mathematische Vermittlungsprozesse ein. So kann für einen ausgebildeten Mathematiker etwa eine andere Definition zweckmäßig sein als für einen Oberstufenschüler. Dass die Qualität einer mathematischen Definition auch und insbesondere davon abhängt, an wen sie adressiert ist, erkannte bereits Poincaré:

> „What is a good definition? For the philosopher or the scientist, it is a definition which applies to all the objects to be defined, and applies only to them; it is that which satisfies the rules of logic. But in education it is not that; it is one that can be understood by the pupils." (Poincaré 1914, S. 117)

Tall & Vinner (1981) definieren die sog. *Concept Definition* wie folgt:

> „We shall regard the concept definition to be a form of words used to specify that concept." (Tall & Vinner 1981, S. 152)

Bei der Concept Definition handelt es sich also im engeren Sinne um eine verschriftlichte bzw. verbalisierte Definition eines Begriffs.

Im Mittelpunkt der Theorie von Concept Image und Concept Definition steht das Wechselspiel beider Begriffe. So beschreibt der Begriff der Concept Definition in einem weiteren Sinne auch die persönliche (Re-)Konstruktion einer Schülerin oder eines Schülers von einem zuvor erlernten mathematischen Konzept. Es handelt sich dann um einen Ausdurck in Form von Wörtern des eigenen (Evoked) Concept Image zum spezifischen Zeitpunkt der Verbalisierung bzw. Verschriftlichung der Definition. Aus diesem Grund ist eine etwaig persönlich geprägte Concept Definition unter Umständen von einer formal-gültigen Concept Definiton, welche sich dadurch auszeichnet, dass sie in der breiten mathematischen

Fachwelt Akzeptanz erfährt, zu unterscheiden (vgl. Tall & Vinner 1981, S. 152).

Umgekehrt ruft für Tall & Vinner jede Concept Definition in einem Individuum ihrerseits ein eigenes Concept Image hervor, welches wiederum Teil des gesamten Concept Image der entsprechende Person wird oder bereits ist. Hierbei berücksichtigen die Autoren ausdrücklich auch ein leeres bzw. beinahe nicht existentes Concept Image, welches durch eine Concept Definition induziert wird (vgl. Tall & Vinner 1981, S. 153). In seiner Konsequenz bedeutet dies, dass Definitionen derart formuliert werden sollten, dass sie der Erweiterung des Begriffsbildes in gewünschter Form zuträglich sind.

Neben der Formulierung der Definition selbst nehmen auch zahlreiche andere Faktoren Einfluss auf die Entwicklung des Concept Image von Lernenden. So stellen etwa Bingolbali & Monaghan (2008) fest, dass insbesondere die organisatorische Zugehörigkeit und unterschiedliche vermittlungstechnische Aspekte zu berücksichtigende Einflussgrößen hinsichtlich der Entwicklung des Concept Images darstellen. In ihrem Artikel berichten die Autoren am Beispiel des Ableitungskonzepts davon, dass ingenieurwissenschaftliche Studierende dazu neigen besonders die Vorstellung der Ableitungsfunktion als Änderungsrate in ihrem Begriffsbild zu zentrieren, während Studierende mit fachmathematisch ausgerichteten Studienschwerpunkt die Vorstellung einer Ableitungsfunktion als Steigung der Tangente an den Graphen in den Mittelpunkt rücken (vgl. Bingolbali & Monaghan 2008, S. 20).

2.3.3 *Zusammenhang beider Theorien*

Sowohl bei der Grundvorstellungs- als auch bei der Concept-Image-Theorie handelt es sich um Theorien, die zu erklären versuchen, wie wir mathematische Konzepte nutzen und welche Vorstellungen wir dabei mit ihnen verbinden. Teilweise wird der Begriff „concept image“ auch als Übersetzung des Begriffs „Grundvorstellungen“ verwendet (z.B. Barzel & Holzäpfel 2017, S. 2).

Trotz vieler Parallelen setzen beide Theorien jedoch durchaus unterschiedliche Akzente: Während vom Hofe (1995) dem Begriff „Grundvorstellung“ eine deskriptive, normative (und konstruktive) Dimension zuweist, beschränken sich Tall & Vinner (1981) im Wesentlichen auf eine deskriptive Ebene, um Erklärungen für das Verhalten von Schülerinnen und Schülern beim Umgang mit mathematischen Begriffen zu finden (vgl. Rembowski 2016, S. 173; vom Hofe & Blum 2016, S. 237). Hierbei spielt insbesondere die Concept Definition eine wichtige Rolle, die bei vom Hofe (1995) weniger Berücksichtigung erfährt.

Gemein ist beiden Konzepten der konstruktivistisch-dynamische Blick auf den Aneigungsprozess mathematischer Begriffe und mit ihnen verbundener Vorstellungen: Beide Theorien gehen davon aus, dass Grundvorstellungen bzw. das Begriffsbild im Laufe des Lernprozesses sukzessive ausgebildet werden und dabei ggfs. Umbrüchen, Anpassungen und Erweiterungen unterworfen sind. Hierbei werden neue Wissenselemente in die vorhandene kognitive Struktur integriert oder bestehende abgeändert (vgl. Hafner 2012, S. 28 f.).

Eine weitere Gemeinsamkeit findet sich auch in der Bereichsspezifität mathematischer Vorstellungen wie sie Seiler (1973) postuliert. Diese findet sich bei vom Hofe (1995) in dem Bezug auf Bauersfelds (1983) Theorie der subjektiven Erfahrungsbereiche wieder. So kann es sein, dass Schülerinnen und Schüler in einer gegebenen Situation nicht ihr volles Potential entfalten, da die Teile ihres Wissens, die zur Lösung des Problems dienlich wären, in unterschiedlichen und nicht gleichzeitig aktivierten SEB gespeichert sind. Bei Tall & Vinner (1981) zeigt sich dieser Zusammenhang im Begriff des Evoked Concept Image. So kann es auch hier vorkommen, dass nur Teile des gesamten Concept Images eines Individuums aktiviert werden, so dass auch hier das vollständige Potential nicht zur Verfügung steht.

Der Kern des Unterschiedes beider Theorien ist aber auch folgender: Grundvorstellungen beziehen sich vorrangig auf den Zusammenhang zwischen mathematischen Begriffen, dem Individuum und der Realität. Ein wichtiger Aspekt von dreien, die vom Hofe in diesem Zusammenhang nennt, ist hierbei der Aufbau entsprechender mentaler Repräsentationen der mathematischen Begrifflichkeiten. Gerade dieser Aspekt bildet aber den im Wesentlichen alleinigen Fokus der Concept-Image-Theorie, denn die Gesamtheit aller mit einem mathematischen Begriff verbundenen kognitiven Struktur beruht zweifelsohne auf mentalen Repräsentationen (vgl. Davis 1984, S. 203; s. Abschnitt 2.2). Grundvorstellungen können daher aus der deskriptiven Perspektive als *Teil* – wenn nicht sogar als fundamentaler Kern – des Concept Images aufgefasst werden (vgl. Hafner 2012, S. 28 f.; Weigand 2015, S. 262 f.; Greefrath et al. 2016a, S. 103). Die bei einem Individuum ausgebildeten Grundvorstellungen – hier findet der Begriff also wieder hinsichtlich seiner deskriptiven Dimension Anwendung – und ihre gegenseitige Vernetzung bezeichnet vom Hofe (2003) in Anlehnung an Oehl (1970) auch als *Grundverständnis*, so dass dieser Begriff schlussendlich am ehesten das begriffliche Analogon der Grundvorstellungstheorie zum Concept Image darstellt (vgl. vom Hofe 2003, S. 6).

Aus Perspektive der Testkonstruktion, wie sie im Rahmen dieser Arbeit im Mittelpunkt stehen soll, bietet die Grundvorstellungstheorie mit ihrem Zusammenspiel zwischen deskriptiver und normativer Auslegung des Begriffs Vorteile: So lassen sich anhand einer stoffdidaktischen Analyse zuvor benötigte Grundvorstellungen möglicher Testaufgaben ausmachen und anhand der später gewonnenen Daten Rückschlüsse auf die individuellen Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler schließen. Entsprechend wird an einigen Stellen dieser Dissertation ein deutlicher Fokus auf zu einer Bearbeitung benötigte und schülerseitig erworbene Grundvorstellungen gerichtet sein. Dennoch ist auch die Theorie von Concept Image und Concept Definition für die vorliegende Arbeit relevant, liefert sie doch an einigen Stellen Erklärungsmodelle dafür, warum Lernende formal verfügbares Wissen, etwa in Form von Definitionen, nicht erfolgreich nutzen können.

http://www.springer.com/978-3-658-20359-7

Funktionales Denken beim Übergang von der
Funktionenlehre zur Analysis
Entwicklung eines Testinstruments und empirische
Befunde aus der gymnasialen Oberstufe
Klinger, M.
2018, XXII, 497 S. 81 Abb., 10 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-658-20359-7