

Anlagenverzeichnis zur Dissertation

A. Komparative und kontrastierende Analysen.	A-2
Gruppe Diskursethik.....	A-3
Gruppe Rationalität	A-11
Gruppe Bildungssprache	A-19
Gruppe „Keine tatsächlichen Hindernisse“	A-26
Kontrastierung der Fallgruppen.....	A-35
B. Im Förderunterricht verwendete Aufgabenblätter.....	B-1
01.10.12 Graue und weiße Kästchen	B-1
08.10.12 Satz des Pythagoras	B-2
15.10.12 Satz des Pythagoras... ..	B-3
05.11.12 Lineare Gleichungssysteme: Das Gleichsetzungsverfahren.....	B-6
12.11.12 Lineare Funktionen	B-9
19.11.12 Lineare Funktionen in Geogebra.....	B-10
26.11.12 Lineare Funktionen	B-11
10.12.12 Wie groß ist die graue Fläche?	B-13
17.12.12 Begründungsaufgabe	B-16
07.01.13 2013 – Das Jahr der Primzahl.....	B-17
14.01.13 Offene Türen	B-18
21.01.13 Offene Türen Teil 2 – die Begründung!	B-20
18.02.13 Wenn-Dann-Beziehungen.....	B-22
25.02.13 Pyramidenschatten – Wie hoch ist die Cheops-Pyramide?	B-24
11.03.13 Da Vinci Code	B-26
15.04.13 Wie viele Linien gibt es im 15-Eck?	B-27
29.04.13 Eulerquadrate.....	B-28
06.05.13 Magische Quadrate.....	B-30
27.05.13 Magische Quadrate – Teil 2	B-31
06.06.13 Gerade und ungerade Zahlen (auch 10.06.13)	B-33

A. Komparative und kontrastierende Analysen.

Die einzelnen Analysen wurden in mehreren Merkmalsdimensionen einer erneuten Untersuchung unterzogen. Betrachtet wurden:

- Anwesenheit im Rahmen des Diskursstrangs
- Beteiligung am Diskursfragment
- Beschreibung der Argumentationsstruktur
- Beschreibung der Aufgabe
- Beschreibung des Inhalts der vorgebrachten Argumentation
- Beiträge der anwesenden Schülerinnen in Argumentationen im Diskursfragment (aufgeteilt nach den 5 Schülerinnen)
- Beteiligung in der Stunde als Gesamteindruck
- Bildungssprachliche Beobachtungen (potentielle Hindernisse; ob diese getragen haben)
- Beobachtungen hinsichtlich der Rationalität (mit Fokus auf epistemischer & teleologischer Rationalität; aber im Rückbezug auf Bildungssprache auch bezüglich der kommunikativen Rationalität: Sind Äußerungen für andere verständlich und nachvollziehbar?)
- Manifeste Hinweise auf (nicht) erfüllte diskursethische Voraussetzungen, z.B. in Form von Äußerungen
- Gesamteindruck bezüglich tatsächlicher Hindernisse in der Situation

Es fand eine Kategorisierung & Falleinteilung anhand der tatsächlichen Hindernisse statt. Dabei gibt es Fälle an den Schnittstellen der drei Erklärungshypothesen, und es gibt Fälle ohne wesentliche Hindernisse. Wenn in einer Unterrichtsstunde zwei Typen von Hindernissen als relevant gekennzeichnet wurden, so wurde diese Stunde beiden Kategorien zugeschrieben. Nach einer ersten Gruppierung der Fälle wurden die Kategorien noch einmal überprüft und anhand der jeweils zugeordneten anderen Fälle die Einschätzungen gegebenenfalls korrigiert.

Gruppe Diskursethik

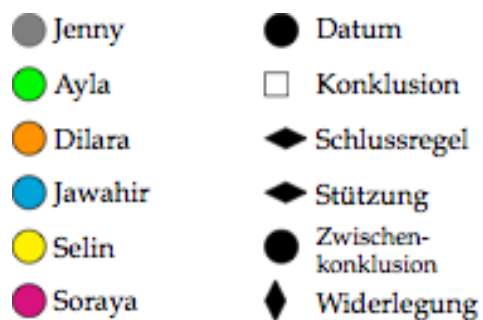
01.10.12li (DR)
15.10.12 (DS)
05.11.12 (DR)

12.11.12 (D)
26.11.12 (DR)
21.01.13 (DS)

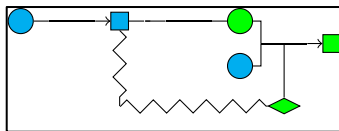
18.02.13 (DS)
25.02.13 (D)
08.04.13So (D)

Häufig können Episoden, in denen diskursethische Hindernisse auftreten, einer weiteren Kategorie von Hindernissen zugewiesen werden. Unter anderem könnte dies damit zusammenhängen, dass häufig nur eine Schülerin von diskursethischen Schwierigkeiten betroffen ist. Interessant ist auch, dass Fälle diskursethischer Schwierigkeiten im Laufe des Projektes weniger werden und insbesondere in den ersten Stunden häufig auftreten.

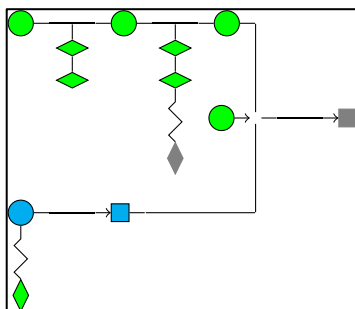
Farbige Strukturdiagramme



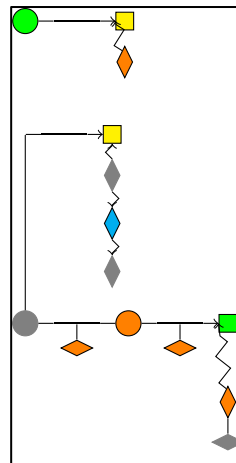
01.10.12li



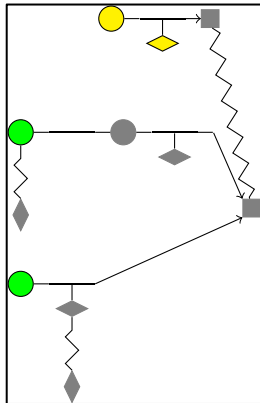
15.10.12



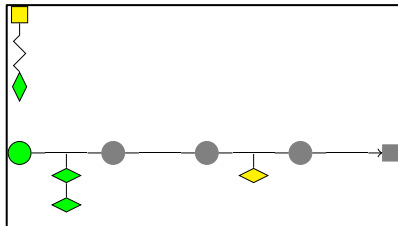
05.11.12



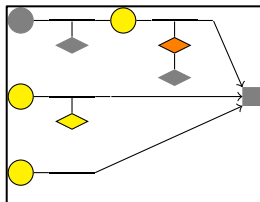
12.11.12



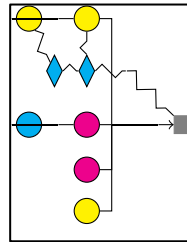
26.11.12



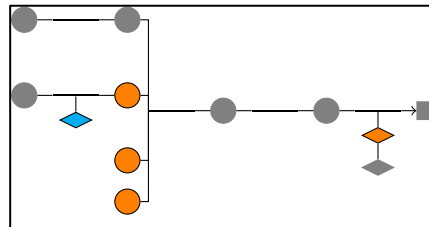
21.01.13



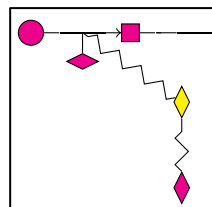
18.02.13



25.02.13



08.04.13So



Statistisches

89 Beiträge

Median 10

Durchschnitt ~9,9

60 Beiträge ohne Förderlehrerin

Ohne Förderlehrerin ~6,7

Äußere Charakterisierung

- Häufig ist nur eine Schülerin von diskursethischen Schwierigkeiten betroffen, für die anderen Lernenden liegen andere oder keine Schwierigkeiten vor.
- Sprachliche Mängel und fehlende Rationalität können eine Nichterfüllung der diskursethischen Voraussetzungen unter anderem mit begünstigen!
- Betrachtete Argumentationen sind häufig eher kurz. Es gibt komplexe Querverweise.
- An vielen Stellen werden keine Schlussregeln angegeben.
- Jenny übernimmt häufig wesentliche Anteile an der Argumentation (dies könnte eventuell das Entstehen ungünstiger Voraussetzungen begünstigt haben!!)
- Konklusionen bleiben unklar.
- Die Mädchen zeigen nur selten eigenständig einen Begründungsbedarf an; es ist kein „Need to prove“ (Reid) vorhanden.
- Häufig beteiligen sich zwar mehrere der anwesenden Mädchen; dies scheinen sie aber aus sozialem Druck heraus zu tun.
- An vielen Stellen ist erforderliches Vorwissen nur lückenhaft vorhanden.

- Insbesondere Jawahir steigt teilweise aus dem Diskurs aus, nachdem sie sich vorher bereits beteiligt hatte.
- Die betrachteten Episoden entstammen fast alle der Anfangszeit des Forschungsvorhabens.

Lage im zeitlichen Verlauf der Erhebung



Mathematische Anforderungen der gestellten Aufgaben & Umgang der jeweiligen Schülerinnen mit dieser Herausforderung.

01.10.12li

Anzahl der grauen Kästchen in einem quadratischen Muster aus grauen und weißen Kästchen ermitteln. Der Flächeninhalt des großen Quadrats ist gegeben; der Rest ist abzuleiten.

Die Sachanalyse zeigt, dass alle Wege um die Aufgabe zu Lösen das Erkennen eines Musters voraussetzen. Für viele der möglichen Wege ist es sehr hilfreich, ein erkanntes Muster in Formeln wiederzugeben. Diese Formeln müssten aus der erkannten Struktur deduktiv abgeleitet werden.

Aus mathematischer Perspektive ist das Ziehen der Wurzel die komplexeste Operation.

Jawahir hat offenbar den Zusammenhang von Seitenlänge und Flächeninhalt beim Quadrat nicht verstanden; sie stockt in der Aufgabenbearbeitung. Eine weitere Schwierigkeit könnte darin liegen, dass Ayla aus einer anderen Position heraus fragt; sie scheint bei der Bearbeitung bereits weitergekommen zu sein. Es wird nicht deutlich, inwiefern Jawahir den Aufbau des Musters verstanden hat.

Es wurde vorher nicht mitgeteilt, welches mathematische Wissen notwendig ist. Es wurde auch nicht angegeben, was für eine Art von Lösung gefordert ist.

Jawahir partizipiert nach dem analysierten Diskursfragment nicht mehr inhaltlich. Sie äußert sich jedoch kritisch gegenüber dem Fach Mathematik und gegenüber ihrer eigenen Leistung (#18:03, „Ich hasse Mathe; #19:26, „Ich bin dumm“).

Aus Perspektive der epistemischen Rationalität zeigen sich für Ayla auch im weiteren Diskurs Schwierigkeiten mit Wurzeln und Quadraten (#31:12; nachdem Ayla zuvor die Seitenlänge des von ihr gezeichneten Quadrats als Wurzel aus 1024 bestimmt hatte, staunt sie nun über die Anzahl der Kästchen im entstehenden Quadrat: „Oa, wie viele Kästchen SIND DAS? (..) Ich glaub das (.) ist dieses Eintausend-Dingsbums ne, oder, oder, oder?“). Ihr zeichnerischer Ansatz ist zudem teleologisch nicht rational.

15.10.12

Benennung der Katheten und Hypotenuse am rechtwinkligen Dreieck (als Vorbereitung auf die Umkehrung des Satz von Pythagoras).

Die Herausforderung hinter den Bezeichnungen liegt darin zu verstehen, welche Konzepte hinter dem jeweiligen neuen Fachwort stehen. Eine konzeptuelle Anknüpfung kann sowohl durch die Fokussierung der Länge als charakteristischer Eigenschaft geschehen, als auch durch die Position der Seiten relativ zum rechten Winkel. Entscheidend dabei ist dann, das konventionelle Zeichen für den 90°-Winkel zu erkennen.

Ayla nutzt eine Strategie der mentalen Rotation eines prototypischen rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c . Sie überträgt die Seitenbezeichnungen auf neue Dreiecke. Jawahir nimmt hingegen Bezug auf das Symbol für den rechten Winkel (das

ihr unbekannt ist) und bringt die Seitenbezeichnungen damit in Verbindung. Jawahir beteiligt sich zum Ende des Diskursfragments hin nicht mehr.

Es ist keine Definition gegeben, an der die Mädchen sich orientieren könnten. Es entsteht eine Unklarheit, was als Bezugspunkt dienen kann.

Bildungssprachliche Hindernisse treten auch im weiteren Verlauf auf (es geht um die zusammengelegten Winkel)

#28:44, Ayla: „Und hier sind ähm zwei Winkel von einem (..) Dreieck sozusagen, aber das wurde was anderes noch dazu, ähm, hinzugefügt. Und deswegen ist es jetzt auch hier so Teil, und das ist das andere Teil, und dann ergibt das so'n ganzes Teil.“

Aus diskursethischer Perspektive wurden Hindernisse für Jawahir in der vorliegenden Situation aufgedeckt. Sie beteiligt sich im weiteren Verlauf der Stunde noch einige Male freiwillig, häufig in Frageform. Nach dem betrachteten Austausch dauert es aber 9 Minuten, bis Jawahir den nächsten inhaltlichen Beitrag formuliert.

05.11.12

In der Aufgabe wurde den Schülerinnen ein lineares Gleichungssystem gegeben, das mit dem Gleichsetzungsverfahren gelöst wurde. Sie sollten beschreiben, wozu die einzelnen Umformungsschritte dienen und warum diese durchgeführt werden dürfen. Es ist dazu erforderlich zu erkennen, welcher Schritt jeweils durchgeführt wurde. Außerdem muss darüber reflektiert werden, zu welchem Zweck dies geschieht und warum es erlaubt ist.

Die Mädchen scheinen intrinsisch nicht motiviert und es fällt ihnen schwer, den einzelnen Umformungsschritten einen Zweck und eine Rechtfertigung zu geben.

Es ist unklar, was genau gefordert ist – Dilara weist darauf hin (Warum/Wozu). Darüber hinaus ist die Wissensgrundlage nicht geklärt.

Aus Perspektive der Rationalität zeigen sich nicht nur Lücken im Wissen über Gleichungen, sondern allgemein im Umgang mit Variablen und linearen Funktionen, auch bei den anderen Schülerinnen (Dilara bildet eine kleine Ausnahme). Ein Austausch mit Selin:

#51:02 Jenny

Hier steht ja x plus y auf einer Seite. Und hier steht das y auf einmal alleine. Was wurde da gemacht?

#51:12 Selin

(4 Sek) Das y hat doch noch gar keine Zahl.

Aus diskursethischer Perspektive zeigt sich auch außerhalb des Austauschs der Unwillen, den Unterrichtsgegenstand als relevant zu akzeptieren. (#32:57, Ayla: „Das ist voll SCHWER, brauch ich das später, wenn ich Anwältin werden will?“). Auch im weiteren Verlauf beschwerten sich die Mädchen immer wieder (#53:18, Selin: „Nein, ich mein jetzt das ist voll kompliziert im Gegensatz was ich davor hatte, was wir mit Ihnen gemacht haben das war irgendwie einfacher, das ist voll kompliziert; #53:47, Jawahir: „Können wir nicht lieber n anderes Verfahren machen?“).

12.11.12

In der Aufgabe ging es um eine Begründung, warum in der Wertetabelle einer linearen Funktion die y -Werte von links nach rechts immer um 2 steigen. Funktionsgleichung und Graph waren als zusätzliche Darstellungsformen gegeben; der erwartete Lösungsweg lag vermutlich im Wechsel zu einer der anderen Darstellungsformen.

Selin beantwortet die Frage mit einem Verweis auf die Funktionsgleichung; erst später wird klar, dass sie die Bedeutung des Steigungsparameters entgegen Jennys Interpretation ihrer Antwort noch nicht erfasst hatte. Jawahir sagt, dass sie die Aufgabe nicht verstanden hat und beteiligt sich nicht. Ayla hinterfragt Selins Ausführungen, jedoch offenbar nicht um deren Lösungsstrategie nachvollziehen zu können, sondern aus Spaß. Insgesamt beteiligen sich die Mädchen kaum, die Situation ist sehr brüchig.

Es kommen diskursethische Hindernisse für alle Schülerinnen zum Tragen. Sie drücken aus, sich nicht mit der Aufgabe identifizieren zu können und sehen nicht, was von ihnen verlangt wird. Grundlegende Begriffe (negative Zahlen, Leserichtung im Koordinatensystem) scheinen unklar und werden im Diskurs nicht herausgearbeitet. Die Förderlehrerin ist überaus stark an der Aufrechterhaltung des Diskurses beteiligt.

Das untersuchte Diskursfragment stellt die letzte Argumentation der analysierten Unterrichtsstunde dar. Bereits vor diesem Diskursfragment waren jedoch Schwierigkeiten der Mädchen aus diskursethischer Perspektive aufgefallen. (#46:59, Ayla: „Das ist voll schwer“. ; Austausch ab #45:00, Selin: „Ich sag, es ist b.“ – #45:01 Jenny: „Warum sagst du ist es b?“ – #45:04, Selin: „Weil ich geraten hab.“; Einzeläußerung bei #22:35, Jawahir: „Ich versteh die Aufgabe nicht“, danach zeigte sich ihr mangelndes Verständnis für negative Zahlen). Auch das Ende des Diskurses nach diesem Austausch könnte mit den diskursethischen Hindernissen in Zusammenhang stehen.

26.11.12

Es geht darum, Gleichungen für lineare Funktionen auf Grundlage von deren Wertetabelle und deren ins Koordinatensystem eingezeichneten Punkten zu ermitteln.

Während sich Ayla und Selin rege an der Lösung der Aufgabe beteiligten (siehe Rationalität), ist Jawahir eher entmutigt. Sie beschreibt, dass sie die Aufgabe nicht mag. Nach kurzer Beteiligung zieht sie sich aus der Argumentation wieder zurück.

Jawahir scheint nicht klar zu sein, was in der Aufgabe von ihr gefordert ist. Die Vielzahl angegebener Darstellungen kann verwirrend sein (die Funktion ist dadurch überdefiniert).

Bereits zu Beginn der Stunde bringt Selin zum Ausdruck, das Thema in der letzten Woche schon nicht verstanden zu haben; Jawahir pflichtet ihr bei (#08:36, Jawahir: „Ich hab’s auch //nicht verstanden//“). (#11:14, Jawahir: „Ich versteh die ganze Aufgabe nicht“). Jawahir beteiligt sich bis zum Ende kaum am Diskurs.

Ayla zeigt vor dem Diskursfragment ein gutes Verständnis der Zusammenhänge zwischen der Steigung und dem Verlauf des Graphen:

00:26:09	Jenny	Okay, gut. Und jetzt ähm, wenn man den einhalb sich anguckt hat man hier so Zwischenwerte (macht Kreuzchen ins Koordinatensystem, 7 Sek)
00:26:23	Jenny	(zeichnet Graph) Ist jetzt nicht ganz gerade geworden, muss eigentlich durch den Nullpunkt gehen, hab ich nicht ganz hingekriegt. Aber da sieht man dann eben
00:26:33	Ayla	Dann wird's immer flacher. Wenn die Zahl unter eins ist, dann wird die immer äh so, flacher und flacher und wenn sie von eins und höher geht (.) also erweitert wird, dann geht die immer ähm steiler und steiler
00:26:46	Jenny	Ja, sehr gut. Was ist mit den negativen Zahlen? Da haben wir jetzt hier, da kann ich leider das nur so (zeichnet Graph ein), so ungefähr läuft die
00:27:00	Ayla	Ähm (..) Wenn man (.) das ist ja zwei (deutet den Funktionsverlauf für $m=2$ mit der Hand an), und das ist ja halt rechts, also es geht ja von, links, nach rechts (Geste vom imaginären 3. in den 1. Quadrant) sozusagen und wenn man die negative Zahl findet ist das so rum (Unterarm in die andere Richtung geneigt)
00:27:15	Jenny	Mh (bejahend). Genau, dann, dann ähm ist das sozusagen an der y-Achse gespiegelt könnte man sagen.

Sie beteiligt sich auch nach dem Diskursfragment noch rege weiter. Allerdings hat sie immer wieder Schwierigkeiten, ihre Beobachtungen in den verschiedenen Darstellungsregistern miteinander zu verknüpfen. So äußert sie (#39:25) als Vermutung für die Steigung eines Graphen eine Bruchzahl, weil dieser Graph bei den ganzzahligen x-Werten jeweils zwischen zwei ganzzahligen y-Werten das Koordinatengitter schneidet. Dies liegt jedoch am y-Achsenabschnitt und nicht an der Steigung. Die Begriffe scheinen entsprechend insgesamt noch unklar zu sein, aber sie beteiligt sich trotzdem am Diskurs.

21.01.13

Die betrachtete Aufgabe ist die zweite Stunde zum „Locker Problem“. Es ging um die Begründung, warum genau die Schließfächer geöffnet sind. Dafür wurde zunächst das Schließfach mit der Nummer 11 betrachtet. Für eine sinnvolle Lösung müssen strukturelle Merkmale von Zahlen und ihren Teilern betrachtet werden. Teilerbeziehungen müssen als relevant erkannt werden.

Selin differenziert in ihrer Begründung nicht zwischen Schülern und Schließfächern (s. Sprache). Möglicherweise kann Jawahir ihr auch deshalb nicht folgen. Jawahir bringt aber auch zum Ausdruck, dass sie sich als wenig kompetent empfindet. In der Aufgabe wurde nicht angegeben, welche Art der mathematischen Lösung gefordert ist (es handelt sich um eine sehr freie mögliche Bearbeitung).

Jawahir drückt aus, dass sie sich nicht als kompetent genug zur Teilhabe am Diskurs empfindet. Sie erkennt möglicherweise die Zusammenhänge zwischen Schülern und Türen nicht. Außerdem ist nicht klar, ob ihr die Anforderungen der Aufgabenstellung deutlich geworden sind.

Am Ende der Unterrichtsstunde gibt Jawahir auf Aufforderung die aufzuschreibende Information noch einmal wieder, macht dabei jedoch Fehler. Es wird deutlich, dass ihr inhaltlich nicht klar geworden ist, worum es in der Stunde ging. Bis zu diesem Zeitpunkt scheint sie aus dem Diskurs ausgestiegen zu sein.

Selin hat bildungssprachliche Schwierigkeiten, die sich in mangelnder Präzision ausdrücken. Der gesamte Diskurs der betrachteten Unterrichtsstunde ist recht kurz, dennoch zeigen sich ihre Schwierigkeiten auch bei der Beschreibung der Auffälligkeit des Zusammenhangs zwischen den Zahlen der offenen Schließfächer (#34:02, Selin: „Auf JEDEN Fall dass (.) Fünf mal Fünf, Fünf (unv.) fehlt und das irgendwie nicht geht“).

18.02.13

In der Aufgabe ging es um die Untersuchung von Wenn-Dann-Sätzen darauf, ob es sich um eine Implikation oder eine Äquivalenz handelt (also darauf, ob eine Umkehrung gefunden werden kann). Dazu sollten die Mädchen zunächst die Umkehrung finden und diese dann inhaltlich auf ihre Gültigkeit prüfen. Das Aufstellen der Umkehrung ist sprachlich komplex, da zunächst im Sinne der dargestellten Implikation $a \rightarrow b$ herausgestellt werden muss, was a und was b ist. Diese müssen dann in der Weise $b \rightarrow a$ neu aufgestellt und ausformuliert werden.

Es zeigen sich deutliche bildungssprachliche Schwierigkeiten, besonders in Jawahirs erstem Versuch einer Formulierung. Soraya ist hingegen in der Lage, eine fast vollständig richtige Lösung anzugeben. Später reagiert sie aber nicht auf Nachfragen. Möglicherweise ist sie sich zwar syntaktisch sicher, aber semantisch hat sie den Inhalt der Umformung nicht erfasst. Auch für die anderen Mädchen führen möglicherweise bildungssprachliche Unsicherheiten zu schlechten diskursethischen Voraussetzungen. Zu beachten ist hier auch die Aussage von Selin, der nicht klar ist, worauf die Aufgabe abzielt.

Es fällt auf, dass alle Schülerinnen bezüglich der Umkehrformulierung deutliche Unsicherheiten zeigen. Die Unklarheiten von Selin bezüglich des Ziels der Aufgabe verdeutlichen ebenfalls, dass den Schülerinnen offenbar nicht bewusst ist, was von ihnen gefordert wird.

Auf Aufforderung beteiligt sich Soraya an zwei weiteren Stellen mit kurzen Beiträgen am Diskurs, allerdings nimmt sie nicht freiwillig teil. Die gesamte Stunde ist aus diskursethischer Sicht dadurch geprägt, dass Jenny permanent wesentliche Anteile am Gespräch hat.

Aus bildungssprachlicher Perspektive ist ein Wechsel von Selin in den gegebenen Realkontext der zweiten Aufgabe zu Schultaschen und Nagelfeilen interessant, (#38:52, Selin: „Wenn

du (.) von dem Mädchen auf die Nägel guckst und achtest, dass die (.) ungepflegt sind, dann benutzt sie anscheinend keine, aber wenn ich“). Alle Mädchen scheinen Schwierigkeiten mit dem richtigen Formulieren von Ausdrücken zu haben (#22:40, Dilara: „Nee wenn der Satz von Pythagoras ist, (.) dann ist das ein rechtwinkliges Dreieck.“)

25.02.13

Es ging um die Berechnung der Höhe der Cheopspyramide aus gegebenen Daten. Neben der Anwendung des Satz von Pythagoras und den Flächeninhaltsformeln für Quadrat und Dreieck müssen u.a. Gleichungen umgestellt und Wurzeln berechnet werden. Darüber hinaus müssen die Schritte der Aufgabe in der richtigen Reihenfolge ausgeführt werden um zu einem korrekten Ergebnis zu gelangen.

Die Diskussion ist dadurch geprägt, dass Jenny Begründungsansprüche erhebt und die Mädchen darauf nur eingehen. Sie selbst scheinen kein Interesse an einer eigenständigen Lösung zu haben und entwickeln auch keine Strategie.

Obwohl die Schülerinnen sich (außer Soraya) aktiv sprechend beteiligen, scheinen sie nicht motiviert zur Auseinandersetzung mit der Aufgabe. Sie zeigen zudem große Unsicherheiten bezüglich der Lösung der Aufgabe und fordern eine Erklärung ein.

Aus diskursethischer Perspektive ist eine Frage Jawahirs besonders interessant:

#28:31	Jawahir	Können Sie das nicht einfach sagen und ERKLÄREN?
#28:33	Jenny	Nee.
#28:34	Jawahir	Dann verstehen wir das ja vielleicht.

Der Diskurs ist insgesamt stark durch Jenny gelenkt und moderiert. Die Mädchen beteiligen sich stellenweise trotzdem, Dilara fällt besonders stark durch Aktivität auf und ist in der Gruppe der Schülerinnen quasi allein für den Lösungsweg verantwortlich. Sie scheinen keine Idee zu haben und resignieren.

#21:33	Ayla	Okay, ähm (.) das und das wissen wir und wir sollen ja gucken wie hoch
#21:38	Jawahir	Wir sollen gucken, wie hoch das ist (zeigt auf die Pyramide in Aylas Händen)
#21:40	Ayla	ACH NEE! Und wie willst das MACHEN?
#21:42	Jawahir	Ja, das frag ich mich AUCH! Ich glaub (.) ähm
#21:45	Ayla	SEI einfach leise.
#21:46	Jawahir	Geteilt durch vier oder so.
#21:48	Ayla	Warum durch VIER?
#21:49	Jawahir	Ja, (.) weil da vier Seiten sind.
#21:51	Ayla	HÄ? (lacht), was laberst du?
#21:53	Jawahir	Ey was!

Möglicherweise liegen abseits des analysierten Diskursfragments über die diskursethischen Schwierigkeiten hinaus auch Hindernisse im Bereich der Rationalität vor. Außerdem fühlte Jawahir sich möglicherweise erst durch die Äußerungen von Ayla vom Diskurs ausgeschlossen.

08.04.13So

Die Aufgabe war das Handshake-Problem. Es sollte eine Lösung für die Anzahl der Begrüßungen bei 15 Personen ermittelt werden. Dafür ist es notwendig, die mathematische Struktur der betrachteten Situation zu erfassen. Für das Erfassen der Situation als multiplikative Struk-

tur muss erkannt werden, wie die Anzahl der Begrüßungen jeder Person mit der Gesamtzahl zusammenhängt. Darstellungsmittel sind hilfreich.

Soraya entwickelt und begründet eine Lösung, die sie Selin mitteilt. Ihr Ansatz beruht auf einer vermuteten Proportionalität zwischen der Anzahl der Personen und der Anzahl der Begrüßungen. Diese ist für ein tragfähiges Vorgehen zu wenig durchdacht. Sie beteiligt sich gar nicht am späteren Diskurs, obwohl der Inhalt ihrer Vermutung von Selin aufgenommen wurde. Möglicherweise fühlt sie sich nicht gleichberechtigt.

Soraya bringt Unsicherheiten bezüglich ihrer Lösung zum Ausdruck und wendet ihre Schlussregel nicht in der von Selin vorgebrachten analogen Situation an. Sie knüpft nicht an die Vorarbeit der anderen an. Sie nimmt keinen Bezug auf die Strukturen der Aufgabe.

Soraya steigt nach ihrer Begründung aus dem Diskurs aus.

Hypothesen zum Entstehen diskursethischer Hindernisse

- Unklare Aufgabenstellungen
- Unklare Voraussetzungen bzgl. des eingeforderten Hintergrundwissens; diese unklare Wissensgrundlage korrespondiert direkt mit der diskursethischen Regel L1 und der Regel L2 (denn durch die mangelnde Spezifikation des Wissens sind ggf. auch die gültigen und anerkannten Schlussregeln nicht klar).
- Überforderung bei der Strukturierung des notwendigen Wissens (man muss zu viele Schritte im Voraus denken, um die Aufgabe zu lösen); ein mangelndes mathematisches Selbstbewusstsein kann hier dazu führen, dass sich die Schülerinnen als nicht gleichberechtigt weil weniger kompetent wahrnehmen.
- Aufgaben, bei denen weder der lebensweltliche Nutzen noch der direkte mathematische Inhalt deutlich wird (Cheops, Wenn-Dann, Lineare Gleichungssysteme); D1
- Kritik durch andere Schülerinnen (geschieht 2x in der Konstellation Jawahir – Ayla)
- Zu starke Regulierung des Diskurses durch Jenny (D1; D2)
- Möglicherweise hat es etwas mit der Festigung und Eingewöhnung in soziale Zusammenhänge zu tun, dass diskursethische Hindernisse tendenziell eher in den ersten Episoden aufgetreten sind. Die neu zusammengesetzte Gruppe musste einerseits erst Vertrauen fassen und sich andererseits auch erst einmal aneinander gewöhnen.
- Betroffen von diskursethischen Hindernissen sind vor allem Soraya und Jawahir; möglicherweise sehen diese beiden Schülerinnen sich einfach als weniger kompetent. (Dafür spricht zum Beispiel auch Sorayas zurückziehende Reaktion am 18.02. und Jawahirs Unsicherheit bei der richtigen Argumentation am 29.04. (MQ) .

Effekt & potentielle Ursache der identifizierten Hindernisse

- Betroffen von diskursethischen Hindernissen sind vor allem Soraya und Jawahir; möglicherweise empfinden diese beiden Schülerinnen sich als weniger kompetent im Vergleich zu den Mitschülerinnen (Dafür spricht zum Beispiel Sorayas zurückziehende Reaktion am 18.02. und Jawahirs Unsicherheit bei der richtigen Argumentation am 29.04. (MQ) .
- Diskursethische Hindernisse lassen sich offenbar so charakterisieren, dass die betroffenen Mädchen gar nicht (mehr) am Diskurs partizipieren (entweder abrupt aufgrund eines aufgetretenen Hindernisses, oder von Beginn an nicht). Man kann sie entsprechend als „Barriere“ betiteln.

Gruppe Rationalität

01.10.12li (DR)

01.10.12re (R)

08.10.12 (RS)

05.11.12 (DR)

26.11.12 (DR)

17.12.12 (R)

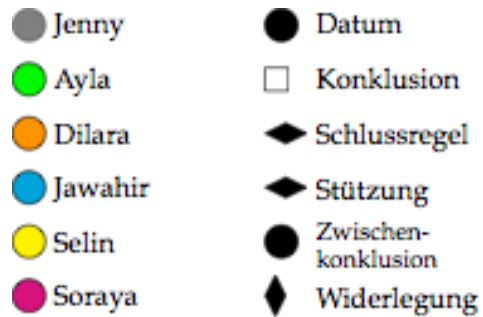
14.01.13_1 (R)

14.01.13_2 (R)

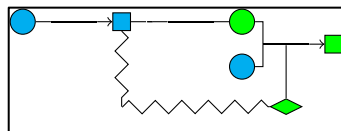
10.06.13b (R)

10.06.13c (RS)

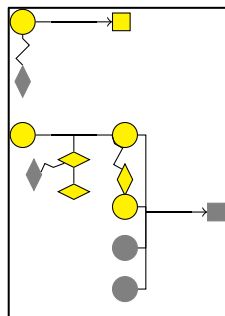
Farbige Strukturdiagramme



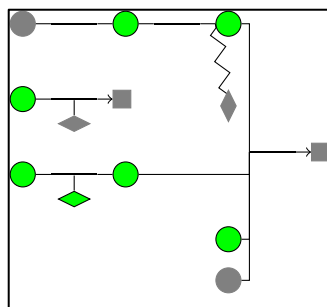
01.10.12li



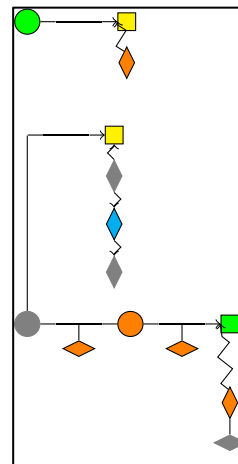
01.10.12re



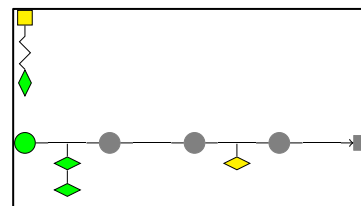
08.10.12



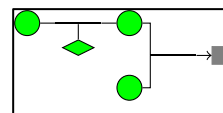
05.11.12



26.11.12



17.12.12



The diagram shows a simple circuit with a battery (represented by two cells) on the left. A horizontal wire connects the battery to a switch on the right. Three light bulbs are connected in parallel to this horizontal wire. The first bulb is on (glowing), the second bulb is off, and the third bulb is on (glowing).

Ohne Förderlehrerin ~6,7

- Rationalität tritt als Hindernis zweimal parallel zur Bildungssprache und dreimal parallel zur Diskursethik auf; allerdings gibt es auch 5 Episoden, bei denen Rationalität als einzeln auftretendes Hindernis herausgearbeitet wurde.
- An den betrachteten Argumentationen sind häufig mehrere Schülerinnen beteiligt.
- In vielen Argumentationsstrukturen treten Widerlegungen auf; fast immer durch eine andere Person (nicht durch die Sprecherin der widerlegten Aussage selbst).
- Die Argumentationen sind eher kurz.
- Viele der betrachteten Aufgaben erfordern das Erkennen von und die Arbeit mit charakteristischen Strukturen.
- Alle drei Arten von Hürden im Bereich der Rationalität treten auf.
- Es gibt auffallend viele Unterrichtsstunden, in denen sich Rationalität als Schwierigkeit in mehr als einem Diskursfragment herausgestellt hat. (01.10.; 14.01.; 10.06.)

Mathematische Anforderungen der gestellten Aufgaben & Umgang der jeweiligen Schülerinnen mit dieser Herausforderung.

01.10.12li

Anzahl der grauen Kästchen in einem quadratischen Muster aus grauen und weißen Kästchen ermitteln. Der Flächeninhalt des großen Quadrats ist gegeben; der Rest ist abzuleiten.

Die Sachanalyse zeigt, dass alle Wege um die Aufgabe zu Lösen das Erkennen eines Musters voraussetzen. Für viele der möglichen Wege ist es sehr hilfreich, ein erkanntes Muster in Formeln wiederzugeben. Diese Formeln müssten aus der erkannten Struktur deduktiv abgeleitet werden.

Aus mathematischer Perspektive ist das Ziehen der Wurzel die komplexeste Operation.

Ayla nutzt als Zugangsweise einen zeichnerischen Lösungsweg. Während dieser für das 6x6-Quadrat und möglicherweise auch für das 10x10-Quadrat noch ohne allzu große Zeitverluste durchführbar ist, stößt der Weg beim 1024 Kästchen großen Quadrat mit Seitenlänge 32 auf Hindernisse; dadurch kann sie die Lösung nicht ermitteln. Kenntnisse algebraischer Formulierungen hätten möglicherweise zu einem weniger komplexen Lösungsweg geführt.

In der Aufgabe ist kein Lösungsweg angegeben. Ayla sieht eine Struktur; sie wählt jedoch einen unökonomischen Weg zur Lösung der Aufgabe. Möglicherweise kann Ayla auf das erforderliche Fachwissen im Bereich der Algebra für das ausdrücken allgemeiner Zusammenhänge nicht zugreifen (teleologische Rationalität).

Jawahir partizipiert nach dem analysierten Diskursfragment nicht mehr inhaltlich. Sie äußert sich jedoch kritisch gegenüber dem Fach Mathematik und gegenüber ihrer eigenen Leistung (#18:03, „Ich hasse Mathe; #19:26, „Ich bin dumm“).

Aus Perspektive der epistemischen Rationalität zeigen sich für Ayla auch im weiteren Diskurs Schwierigkeiten mit Wurzeln und Quadraten (#31:12; nachdem Ayla zuvor die Seitenlänge des von ihr gezeichneten Quadrats als Wurzel aus 1024 bestimmt hatte, staunt sie nun über die Anzahl der Kästchen im entstehenden Quadrat: „Oa, wie viele Kästchen SIND DAS? (..) Ich glaub das (.) ist dieses Eintausend-Dingsbums ne, oder, oder, oder?“). Ihr zeichnerischer Ansatz ist zudem teleologisch nicht rational.

01.10.12re

s.o.

Selin wählt einen Weg zur Ermittlung der Anzahl der grauen Kästchen im 1024-Quadrat, der mit einer Zusammenstellung der neuen Figur aus bekannten Mustern arbeitet. Die Arbeit mit einem Elementarmuster wurde in der Sachanalyse als gangbarer Weg für die Aufgabenlösung herausgearbeitet und kann als teleologisch rational angesehen werden; im Bereich der epistemischen Rationalität fehlt Selin jedoch das Verständnis für den Aufbau eines Quadrats im Gegensatz zum Rechteck sowie Wissen über Größenverhältnisse bei Zahlen („ $100 \cdot 100 = 1000$ “).

Selin erkennt eine Struktur und findet einen teleologisch rationalen Weg zur Lösung der Aufgabe. Ihre Vorstellungen sind jedoch nicht vollständig tragfähig; so beachtet sie beispielsweise nicht die Bedeutung des Quadrats als Grundform.

Im Anschluss an das Diskursfragment treten keine Argumentationen zwischen Dilara und Selin mehr auf. Dilara bringt im Ergebnisvergleich am Ende der Unterrichtsstunde die Lösung 764 vor, die sie durch das Zusammensetzen des großen Quadrats aus mehreren kleinen Quadraten erzielt hat.

08.10.12

In der Aufgabe geht es um die Bedeutung von „a Quadrat“ als Vorbereitung auf den Satz des Pythagoras.

Ayla versucht, Jennys Frage zu beantworten und einen Bezug zwischen der Zeichnung und dem Begriff „a Quadrat“ herzustellen. Dabei wird jedoch nach einiger Zeit deutlich, dass ihr die geometrische Deutung von a als Strich mit Länge a und von „a Quadrat“ als Quadrat mit Seitenlänge a nicht bekannt sind. Darüber hinaus kann Ayla ihre Gedanken nur unzureichend in Worte fassen.

Die epistemische Hürde der grafischen Repräsentation von „a“ beziehungsweise „a Quadrat“ wird spät im Austausch deutlich. Ayla kann die geforderte Verbindung nicht herstellen, möglicherweise deshalb, weil ihr die geometrische Deutung von a nicht bekannt ist; dies kann auch zu Schwierigkeiten für den weiteren Umgang mit dem Satz des Pythagoras führen.

Im weiteren Unterrichtsgespräch treten sowohl Schwierigkeiten bei der sprachlichen Verständigung als auch im Umgang mit Strecken als geometrischer Repräsentation von Variablen auf. Zu sprachlichen Schwierigkeiten (Bei der Überlegung zu den Seitenbezeichnungen)

- #27:52 Jawahir Aber wieso ist das A, und wieso ist das B?
#27:54 Ayla Weil man (.) das ist ja ein, ähm, Quadrat, und das macht man ja hier, das rechnet man, um den Flächeninhalt herauszukriegen soll A mal B, oder hier B.
#28:05 Jawahir Mhm (bestätigend)
#28:06 Ayla Und weil das ja gleichgroß, also wird das dann, ach schreib jetzt da einfach a hin.

Zu Schwierigkeiten im Umgang mit Strecken und Flächeninhalten (Zur Seitenlänge im äußeren, großen Quadrat):

- #22:55 Jenny Und wie lang ist das zusammen?
#22:56 Ayla A, ähm, C! (..) Nee, A B
#23:00 Selin A mal B?
#23:02 Jawahir A mal B?
#23:05 Jenny A mal B ist ja ein Flächeninhalt.
#23:07 Ayla A B, ähm (..) B A

Ayla ist aber weiterhin rege am Diskurs beteiligt und versucht immer wieder neue Wege zu finden um ihre Ideen auszudrücken.

05.11.12

In der Aufgabe wurde den Schülerinnen ein lineares Gleichungssystem gegeben, das mit dem Gleichsetzungsverfahren gelöst wurde. Sie sollten beschreiben, wozu die einzelnen Umformungsschritte dienen und warum diese durchgeführt werden dürfen. Es ist dazu erforderlich zu erkennen, welcher Schritt jeweils durchgeführt wurde. Außerdem muss darüber reflektiert werden, zu welchem Zweck dies geschieht und warum es erlaubt ist.

Aus epistemischer Perspektive scheinen die Mädchen nur unzureichend über Wissen zum Aufbau und zur Bedeutung linearer Gleichungssysteme zu verfügen. Dies ist verbunden mit der teleologischen Perspektive, denn auch das Wissen über adäquate Werkzeuge scheint ihnen zu fehlen.

Die Schülerinnen scheinen nicht über innermathematische Schlussregeln oder Verfahren zur Lösung der Aufgabe zu verfügen. Offenbar haben sie (noch) keinen inhaltlichen Zugang zu linearen Gleichungssystemen gefunden.

Aus Perspektive der Rationalität zeigen sich nicht nur Lücken im Wissen über Gleichungen, sondern allgemein im Umgang mit Variablen und linearen Funktionen, auch bei den anderen Schülerinnen (Dilara bildet eine kleine Ausnahme). Ein Austausch mit Selin:

- #51:02 Jenny Hier steht ja x plus y auf einer Seite. Und hier steht das y auf einmal alleine. Was wurde da gemacht?

#51:12 Selin (4 Sek) Das y hat doch noch gar keine Zahl.

Aus diskursethischer Perspektive zeigt sich auch außerhalb des Austauschs der Unwillen, den Unterrichtsgegenstand als relevant zu akzeptieren. (#32:57, Ayla: „Das ist voll SCHWER, brauch ich das später, wenn ich Anwältin werden will?“). Auch im weiteren Verlauf beschweren sich die Mädchen immer wieder (#53:18, Selin: „Nein, ich mein jetzt das ist voll kompliziert im Gegensatz was ich davor hatte, was wir mit Ihnen gemacht haben das war irgendwie einfacher, das ist voll kompliziert; #53:47, Jawahir: „Können wir nicht lieber n anderes Verfahren machen?“).

26.11.12

Es geht darum, Gleichungen für lineare Funktionen auf Grundlage von deren Wertetabelle und deren ins Koordinatensystem eingezeichneten Punkten zu ermitteln. Mathematisch liegt die Anforderung der Aufgabe im Wechsel zwischen unterschiedlichen Darstellungsformen sowie im Ermitteln einer Funktionsgleichung aus den gegebenen Informationen.

Ayla hat zwar verstanden, wie sich eine Parameteränderung der Steigung auf das Aussehen einer linearen Funktion auswirkt; sie hat jedoch Schwierigkeiten bei der Übertragung dieser Erkenntnisse in die symbolische Sprache der Gleichungen. Diese Form des Darstellungswechsels kann als Schwierigkeit bezüglich der teleologischen Rationalität angesehen werden, da symbolische Sprache ein wesentliches Werkzeug zum Ausdrücken funktionaler Zusammenhänge ist.

Ayla hat konzeptionell verstanden, wie sich Steigung und y-Achsenabschnitt auf den Verlauf des Graphen auswirken. Sie kann dieses Wissen jedoch nicht in Symbolsprache überführen.

Bereits zu Beginn der Stunde bringt Selin zum Ausdruck, das Thema in der letzten Woche schon nicht verstanden zu haben; Jawahir pflichtet ihr bei (#08:36, Jawahir: „Ich hab’s auch //nicht verstanden//“). (#11:14, Jawahir: „Ich versteh die ganze Aufgabe nicht“). Jawahir beteiligt sich bis zum Ende kaum am Diskurs.

Ayla zeigt vor dem Diskursfragment ein gutes Verständnis der Zusammenhänge zwischen der Steigung und dem Verlauf des Graphen:

00:26:09 Jenny	Okay, gut. Und jetzt ähm, wenn man den einhalb sich anguckt hat man hier so Zwischenwerte (macht Kreuzchen ins Koordinatensystem, 7 Sek)
00:26:23 Jenny	(zeichnet Graph) Ist jetzt nicht ganz gerade geworden, muss eigentlich durch den Nullpunkt gehen, hab ich nicht ganz hingekriegt. Aber da sieht man dann eben
00:26:33 Ayla	Dann wird's immer flacher. Wenn die Zahl unter eins ist, dann wird die immer äh so, flacher und flacher und wenn sie von eins und höher geht (.) also erweitert wird, dann geht die immer ähm steiler und steiler
00:26:46 Jenny	Ja, sehr gut. Was ist mit den negativen Zahlen? Da haben wir jetzt hier, da kann ich leider das nur so (zeichnet Graph ein), so ungefähr läuft die
00:27:00 Ayla	Ähm (..) Wenn man (.) das ist ja zwei (deutet den Funktionsverlauf für $m=2$ mit der Hand an), und das ist ja halt rechts, also es geht ja von, links, nach rechts (Geste vom imaginären 3. in den 1. Quadrant) sozusagen und wenn man die negative Zahl findet ist das so rum (Unterarm in die andere Richtung geneigt)
00:27:15 Jenny	Mh (bejahend). Genau, dann, dann ähm ist das sozusagen an der y-Achse gespiegelt könnte man sagen.

Sie beteiligt sich auch nach dem Diskursfragment noch rege weiter. Allerdings hat sie immer wieder Schwierigkeiten, ihre Beobachtungen in den verschiedenen Darstellungsregistern miteinander zu verknüpfen. So äußert sie (#39:25) als Vermutung für die Steigung eines Gra-

phen eine Bruchzahl, weil dieser Graph bei den ganzzahligen x-Werten jeweils zwischen zwei ganzzahligen y-Werten das Koordinatengitter schneidet. Dies liegt jedoch am y-Achsenabschnitt und nicht an der Steigung. Die Begriffe scheinen entsprechend insgesamt noch unklar zu sein, aber sie beteiligt sich trotzdem am Diskurs.

17.12.12

In der Aufgabe ging es um die Frage, was man über die Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl für eine Aussage treffen kann. Vorab war gemeinsam eine Variablendarstellung erarbeitet und eine ähnliche Aufgabe zum Produkt einer geraden und einer ungeraden Zahl gelöst worden. Es geht in der Aufgabe darum, einen allgemeingültigen Zusammenhang auf Grundlage der abstrahierten Eigenschaften gerader und ungerader Zahlen zu erkennen und zu begründen.

Ayla stellt gestisch und implizit Bezüge zum vorher eingeführten Variablenbegriff her; es tritt jedoch hervor, dass ihre Kenntnisse bezüglich des Umgangs mit Variablen mangelhaft sind. Durch diese epistemische Hürde entstehen teleologische Hindernisse; die Abstraktion wird erschwert. Für die übrigen Schülerinnen ist es u.U. schwierig, Ayla in ihren Ausführungen zu folgen. Sie erkennt aber den strukturellen Zusammenhang, dass „einer übrig bleibt“.

Bedeutendes Hintergrundwissen ist im Diskurs nicht verfügbar. Dies führt möglicherweise zu Hindernissen beim Abstrahieren, weil das ohne tragfähigen Variablenbegriff nur schwer möglich ist.

Der betrachtete Austausch liegt nahe am Ende des betrachteten Diskurses. Auch im weiteren Verlauf zeigen sich Aylas Schwierigkeiten bei der Konkretisierung ihrer Gedanken (#30:40, Ayla: „das ist ja eigentlich fast gleich, und nur dieses plus eins ist glaub ich (.) das was es ungerade macht“). Diese allgemeinen Schwierigkeiten hängen vermutlich mit einer lückenhaften Wissensgrundlage zusammen. Ayla partizipiert aber regelmäßig weiter.

14.01.13 (1)

In der analysierten Unterrichtsstunde wurde das sog. „Locker Problem“ untersucht. Nach Durchführung eines Java-Applets für die ersten 50 Schüler (Offene Türen 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49) sollten die Mädchen Vermutungen über die nächste offene Tür anstellen. Für eine weitere Bearbeitung der Aufgabe ist es günstig, die Zahlen als Quadratzahlen zu identifizieren und auf dieser Grundlage eine Vermutung zu formulieren. Um eine tragfähige Lösung zu erarbeiten, müssen über die Oberfläche hinausgehende Muster und Strukturen gesehen werden.

Selin vermutet, 56 sei die nächste offene Tür. Zur Begründung ihrer Vermutung stellt sie ein Muster dar, das sie in den Endziffern der offen gebliebenen Türen erkannt hat. Sie betrachtet darin die Zahlen nicht ganzheitlich, sondern die Einerstelle separat. Dieses Vorgehen versperrt Selin möglicherweise den Blick auf die Teilbarkeitsstruktur der Zahlen und hat somit Auswirkungen auf die teleologische Rationalität.

Selins ziffernweise Zahlbetrachtung erschwert eine tragfähige Bearbeitung der Aufgabe. Die fehlende Ganzheitlichkeit bei der Zahlbetrachtung wirkt sich auch auf die teleologische Rationalität aus.

Ayla nimmt während der gesamten Unterrichtsstunde aktiv an den entstehenden Argumentationen teil. Selin ist hingegen vor der Vorstellung ihrer Vermutung zwar an den Argumentationen beteiligt, liefert jedoch im Anschluss an das betrachtete Diskursfragment keine Beiträge mehr zum Diskurs. In den letzten 9 Minuten ist nur Ayla beteiligt.

14.01.13 (2)

Nach Selins erstem Versuch (s.o.) wurde das Java-Applet weitergeführt und damit ihre Vermutung widerlegt. Die 64 wurde als nächste offene Zahl etabliert. Die Herausforderung der

Aufgabe besteht immer noch in der Wahrnehmung struktureller Zusammenhänge zwischen den Zahlen.

Ayla vermutet korrekt, dass 81 die nächste Zahl sein muss. Sie hat erkannt, dass die Abstände zwischen den zu den offenen Türen gehörenden Zahlen immer um 2 ansteigen. Den Zusammenhang beschreibt sie korrekt, allerdings auf zählende und damit schwer nachvollziehbare Weise. Dies könnte ein kommunikatives Hindernis für ihre Mitschülerinnen sein. Des Weiteren fällt auf, dass Ayla zwar im Gegensatz zu Selin einen ganzheitlichen Blick auf die Zahlen der offenen Türen hat, diese allerdings auch nicht mit den die Tür bewegendenden Schülern (beziehungsweise mit den Teilern der Zahlen) in Verbindung bringt.

Ayla hat aus epistemischer Perspektive ein tragfähiges Zahlverständnis. Die teleologische Rationalität ist jedoch eingeschränkt, da ihre Vermutung nicht mit dem strukturellen Zusammenhang zwischen dem Durchgehen der Schüler und den geöffneten Türen zusammenhängt. Aus kommunikativer Sicht fällt es außerdem schwer, ihr zu folgen.

Ayla nimmt während der gesamten Unterrichtsstunde aktiv an den entstehenden Argumentationen teil. Selin ist hingegen vor der Vorstellung ihrer Vermutung zwar an den Argumentationen beteiligt, liefert jedoch im Anschluss an das betrachtete Diskursfragment keine Beiträge mehr zum Diskurs. In den letzten 9 Minuten ist nur Ayla beteiligt.

10.06.13 (b)

Die zu bearbeitende Aufgabe lautet: „Das Produkt aus a und b ist ungerade. Was weißt du über a und b?“. Zuvor war der Unterschied zwischen geraden und ungeraden Zahlen herausgestellt worden. Die Anforderung der Aufgabe ist es, zu erkennen, dass das Produkt aus zwei ganzen Zahlen nur dann ungerade sein kann, wenn beide Faktoren ungerade sind. Eine Art des Ausschlussverfahrens ist erforderlich.

Selin begründet mit einem Beispiel (drei mal fünf), dass die Faktoren ungerade sein müssen. Sie argumentiert aus Richtung der Faktoren. Zur Untermauerung konstatiert sie, dass zwei mal zwei vier, also eine gerade Zahl ist. Selin arbeitet nicht mit Variablen oder anderen Darstellungen und gibt sich mit dieser Begründung zufrieden.

Selin argumentiert von der Gegenrichtung aus; sie zeigt nicht die Allgemeingültigkeit. Sie ist möglicherweise mit der Richtung von Implikationen nicht vertraut (epistemische Rationalität) und wählt ihr Gegenbeispiel unsystematisch (aus teleologischer Sicht nicht zielführend)

Auch im weiteren Verlauf (siehe c) zeigen sich Selins Schwierigkeiten mit dem Finden adäquater Beispiele und Gegenbeispiele

10.06.13 (c)

Die hier betrachtete Aufgabe ist „ $c+d$ ist eine ungerade Zahl. Was weißt du über c und d?“. Für die Lösung dieser Aufgabe müssen die strukturellen Eigenschaften gerader und ungerader Zahlen erfasst und auf die Summe übertragen werden. Die Addition muss verstanden sein, und der Term „ $c+d$ “ muss als Repräsentant einer Summe verstanden werden (nicht als Rechenvorschrift). Der Nachweis geht nur durch Betrachtung aller unterschiedlichen Fälle.

Jawahir bringt die Aufgabe $5+4$ vor und beschreibt dies als Beispiel für eine ungerade Summe. Als Gegenbeispiel bringt Selin das Doppelte der Zahl fünf als gerade Zahl ein. Es scheinen bei beiden Mädchen Schwierigkeiten im Bereich der teleologischen Rationalität vorzuliegen. Möglicherweise fällt es Selin und Jawahir schwer, ihre Gedanken in allgemeineren Variablen auszudrücken; sie scheinen aber auch keine Notwendigkeit für eine allgemeinere Überprüfung zu sehen. Für die allgemeingültige Lösung ist gleichzeitig die Durchführung

einer Fallunterscheidung notwendig; möglicherweise kennen die Mädchen diese nicht als adäquates Werkzeug zum Entwickeln von Begründungen.

Selin und Jawahir geben sich mit einer beispielgebundenen Begründung zufrieden, der Zusammenhang wird nicht allgemeingültig begründet. Möglicherweise fehlen ihnen die entsprechenden Mittel, um Allgemeingültigkeit auszudrücken (teleologische Rationalität).

Hier kommen die bereits gezeigten Schwierigkeiten von Selin und Jawahir zusammen.

Hypothesen zum Entstehen von Hindernissen aus Perspektive der Rationalität

- Viele der betrachteten Aufgaben erfordern das Erkennen mathematisch tragfähiger Strukturen und Zusammenhänge für die Entwicklung von validen Argumenten (Graue und Weiße Kästchen, Locker Problem, Aufgaben zu geraden und ungeraden Zahlen). Es ist selten ein konkretes Vorwissen erforderlich; allerdings ist ein gewisses Maß an Übung hilfreich (beispielsweise zur Darstellung von Zusammenhängen in algebraischer Sprache).
- In den Argumentationsdiagrammen sind viele Widerlegungen erkennbar; dies kann als Hinweis darauf gesehen werden, dass Unklarheiten bezüglich der gemeinsamen Wissensbasis bestehen. Die Mädchen gehen offenbar teils von unterschiedlichen Voraussetzungen aus. Die Entwicklung einer gemeinsamen Argumentation könnte dadurch erschwert worden sein.
- Für Ayla treten an mehreren Stellen Schwierigkeiten im Bereich der teleologischen Rationalität (Lösung durch Zeichnungen bei grauen und weißen Kästchen; Variablen als Lösungsstrategie für gerade und ungerade Zahlen nicht hinreichend vertraut) auf.
- Bei Selin treten mindestens zwei Mal Schwierigkeiten im Bereich der epistemischen Rationalität in Bezug auf das Zahlverständnis auf (Graue und weiße Kästchen: $100 \cdot 100 = 1000$ / „Mal zwei“ oder „Hoch zwei“?, Locker Problem: Zerlegung der Zahlen in Ziffern). Diese sind teilweise auf Schwierigkeiten mit elementaren Rechenoperationen zurückzuführen. Auch für Ayla gibt es stellenweise Hürden in der Rationalität.
- Kommunikative Rationalität: 17.12. → Ayla kann nur unzureichend ihre Gedanken formulieren, die anderen Schülerinnen können ihr möglicherweise deshalb nicht folgen. 14.01.(2): Es fällt schwer, Aylas Ansatz nachzuvollziehen.
- Es ist kein besonders hohes Maß an Korrelation zwischen Rationalität und Bildungssprache oder Diskursethik erkennbar.
- Alle Formen von Rationalität stehen mit fachlichen Kenntnissen in Verbindung.
- Trotz Hindernissen im Bereich der Rationalität partizipieren die betroffenen Mädchen meist weiter an der Argumentation. Hindernisse in der Rationalität lassen sich somit als Hürden beschreiben, die den Diskurs zwar behindern können, ihn aber nicht zwingend beenden.

Gruppe Bildungssprache

08.10.12 (RS)

15.10.12 (DS)

21.01.13 (DS)

18.02.13 (DS)

15.04.13 (S)

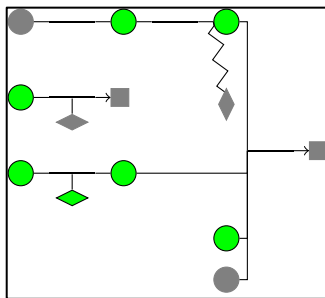
10.06.13a (S)

10.06.13c (RS)

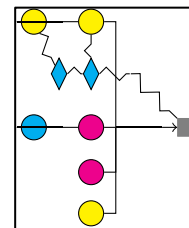
Farbige Strukturdiagramme



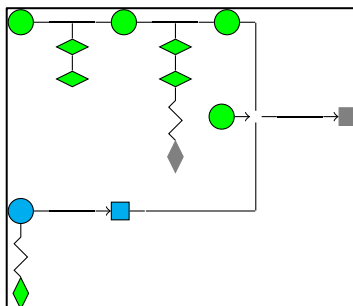
08.10.12



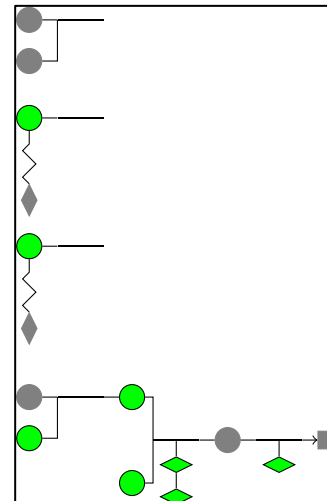
18.02.13



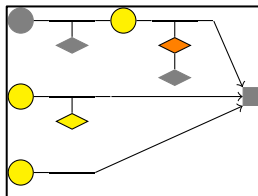
15.10.12



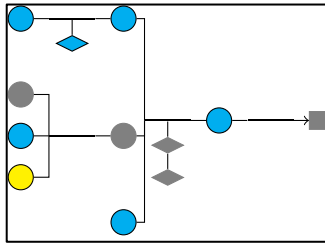
15.04.13



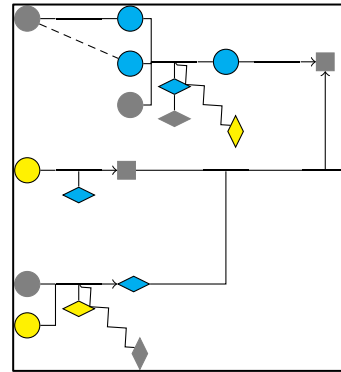
21.01.13



10.06.13a (oben)



10.06.13c (unten)



Statistisches

Beiträge 89

Median 13~

Durchschnitt ~12,7

Ohne Förderlehrerin 57

Ohne Förderlehrerin ~8,1

Äußere Charakterisierung

- Im Vergleich zu den übrigen Hindernisgruppen sind in den Argumentationsdiagrammen zur Bildungssprache eher viele Elemente vorhanden.
- Auf der ersten (niedrigsten) Ebene des Argumentationsdiagramms gibt es immer mehr als einen Strang.
- Widerlegungen treten gelegentlich auf, aber nicht in allen Argumentationen.
- Alle Schülerinnen treten mindestens einmal als Sprecherinnen auf.
- Jenny ist an allen Argumentationen beteiligt.

Lage im zeitlichen Verlauf der Erhebung



Mathematische Anforderungen der gestellten Aufgaben & Umgang der jeweiligen Schülerinnen mit dieser Herausforderung.

08.10.12

In der Aufgabe geht es um die Bedeutung von „a Quadrat“ als Vorbereitung auf den Satz des Pythagoras.

Ayla versucht, Jennys Frage zu beantworten und einen Bezug zwischen der Zeichnung und dem Begriff „a Quadrat“ herzustellen. Dabei wird jedoch nach einiger Zeit deutlich, dass ihr die geometrische Deutung von a als Strich mit Länge a und von „a Quadrat“ als Quadrat mit Seitenlänge a nicht bekannt sind. Darüber hinaus kann Ayla ihre Gedanken nur unzureichend in Worte fassen. Es wird aus ihren Ausführungen lange nicht deutlich, dass eine Verständnisschwierigkeit bezüglich des Unterschieds zwischen a, a Quadrat und zwei mal a.

Aylas Formulierungen lassen an vielen Stellen multiple Interpretationen zu. Nur durch die Berücksichtigung von Gesten und erst als Resultat eines längeren Aushandlungsvorgangs lässt sich erkennen, worauf sie hinaus möchte. Unpräzise Sprache offenbart Verständnislücken erst spät und führt so zu einem Hindernis.

Im weiteren Unterrichtsgespräch treten sowohl Schwierigkeiten bei der sprachlichen Verständigung als auch im Umgang mit Strecken als geometrischer Repräsentation von Variablen auf. Zu sprachlichen Schwierigkeiten (Bei der Überlegung zu den Seitenbezeichnungen)

#27:52	Jawahir	Aber wieso ist das A, und wieso ist das B?
#27:54	Ayla	Weil man (.) das ist ja ein, ähm, Quadrat, und das macht man ja hier, das rechnet man, um den Flächeninhalt herauszukriegen soll A mal B, oder hier B.
#28:05	Jawahir	Mhm (bestätigend)
#28:06	Ayla	Und weil das ja gleichgroß, also wird das dann, ach schreib jetzt da einfach a hin.

Zu Schwierigkeiten im Umgang mit Strecken und Flächeninhalten (Zur Seitenlänge im äußeren, großen Quadrat):

#22:55	Jenny	Und wie lang ist das zusammen?
#22:56	Ayla	A, ähm, C! (..) Nee, A B
#23:00	Selin	A mal B?
#23:02	Jawahir	A mal B?
#23:05	Jenny	A mal B ist ja ein Flächeninhalt.
#23:07	Ayla	A B, ähm (..) B A

Ayla ist aber weiterhin rege am Diskurs beteiligt und versucht immer wieder neue Wege zu finden um ihre Ideen auszudrücken.

15.10.12

Benennung der Katheten und Hypotenuse am rechtwinkligen Dreieck (als Vorbereitung auf die Umkehrung des Satz von Pythagoras).

Die Herausforderung hinter den Bezeichnungen liegt darin zu verstehen, welche Konzepte hinter dem jeweiligen neuen Fachwort stehen. Eine konzeptuelle Anknüpfung kann sowohl durch die Fokussierung der Länge als charakteristischer Eigenschaft geschehen, als auch durch die Position der Seiten relativ zum rechten Winkel. Entscheidend dabei ist dann, das konventionelle Zeichen für den 90°-Winkel zu erkennen.

Die unterschiedlichen Strategien von Ayla und Jawahir bei der Bearbeitung (Ayla: Abgleich des neuen Dreiecks mit einem prototypischen rechtwinkligen Dreieck mit Seitenbezeichnungen a,b,c; Jawahir: Berufung auf das Symbol für den Winkel als Bindeglied zwischen Katheten) werden lange nicht deutlich, und den Mädchen scheint gegenseitig nicht klar, wovon die jeweils andere spricht.

Da sie keine Definition haben, nutzen die Mädchen idiosynkratische Wege zur Ermittlung der Seitenbezeichnungen. Dabei verstehen sie einander nicht und gelangen nicht zu einer gemeinsamen Deutung.

Bildungssprachliche Hindernisse treten auch im weiteren Verlauf auf (es geht um die zusammengelegten Winkel)

#28:44, Ayla: „Und hier sind ähm zwei Winkel von einem (..) Dreieck sozusagen, aber das wurde was anderes noch dazu, ähm, hinzugefügt. Und deswegen ist es jetzt auch hier so Teil, und das ist das andere Teil, und dann ergibt das so'n ganzes Teil.“

Aus diskursethischer Perspektive wurden Hindernisse für Jawahir in der vorliegenden Situation aufgedeckt. Sie beteiligt sich im weiteren Verlauf der Stunde noch einige Male freiwillig, häufig in Frageform. Nach dem betrachteten Austausch dauert es 9 Minuten, bis Jawahir den nächsten inhaltlichen Beitrag formuliert.

21.01.13

Die betrachtete Aufgabe ist die zweite Stunde zum „Locker Problem“. Es ging um die Begründung, warum genau die Schließfächer geöffnet sind. Dafür wurde zunächst das Schließfach mit der Nummer 11 betrachtet. Für eine sinnvolle Lösung müssen strukturelle Merkmale von Zahlen und ihren Teilern betrachtet werden. Teilerbeziehungen müssen als relevant erkannt werden.

Selin trifft sprachlich keine Unterscheidung zwischen den Nummern der Türen und den Nummern der Schüler, die diese bewegen. Sie bleibt dabei im konkreten Kontext und an Zahlenbeispielen verhaftet. Dadurch bleibt möglicherweise unklar, warum sich der Zustand der Türen so ändert, wie er es in der Aufgabe tut. Auch Dilaras Beitrag zur Argumentation ist unklar formuliert, wird aber von Jenny als Expertenantwort wertgeschätzt. Keine der Schülerinnen spricht über Teilbarkeit als wesentliches Konzept.

Selins Beschreibung bleibt an der konkreten Situation verhaftet. Dilaras Beitrag ist sprachlich unklar formuliert. Die Situationsverhaftung und mangelnde Abstraktion bezüglich der Teilbarkeit als charakteristischem Merkmal können der Bildungssprache zugeschrieben werden. Sie führen möglicherweise zu Hindernissen bezüglich der Verständigung.

Am Ende der Unterrichtsstunde gibt Jawahir auf Aufforderung die aufzuschreibende Information noch einmal wieder, macht dabei jedoch Fehler. Es wird deutlich, dass ihr inhaltlich nicht klar geworden ist, worum es in der Stunde ging. Bis zu diesem Zeitpunkt scheint sie aus dem Diskurs ausgestiegen zu sein.

Selin hat bildungssprachliche Schwierigkeiten, die sich in mangelnder Präzision ausdrücken. Der gesamte Diskurs der betrachteten Unterrichtsstunde ist recht kurz, dennoch zeigen sich ihre Schwierigkeiten auch bei der Beschreibung der Auffälligkeit des Zusammenhangs zwischen den Zahlen der offenen Schließfächer (#34:02, Selin: „Auf JEDEN Fall dass (.) Fünf mal Fünf, Fünf (unv.) fehlt und das irgendwie nicht geht“).

18.02.13

In der Aufgabe ging es um die Untersuchung von Wenn-Dann-Sätzen darauf, ob es sich um eine Implikation oder eine Äquivalenz handelt (also darauf, ob eine Umkehrung gefunden werden kann). Dazu sollten die Mädchen zunächst die Umkehrung finden und diese dann inhaltlich auf ihre Gültigkeit prüfen. Das Aufstellen der Umkehrung ist sprachlich komplex, da zunächst im Sinne der dargestellten Implikation $a \rightarrow b$ herausgestellt werden muss, was a und was b ist. Diese müssen dann in der Weise $b \rightarrow a$ neu aufgestellt und ausformuliert werden.

Es zeigen sich deutliche bildungssprachliche Schwierigkeiten, besonders in Jawahirs erstem Versuch einer Formulierung. Auch Selin hat große Probleme beim Aufstellen der logischen Umkehrung. Dies könnte auch durch ihr fehlerhaftes Aufgabenverständnis zustande gekommen sein, denn Selin denkt, dass es darum geht, ob sich die Sätze überhaupt umkehren lassen. Soraya ist hingegen zunächst in der Lage, eine fast vollständig richtige Lösung anzugeben, steigt anschließend aber auch aus dem Diskurs aus.

Bildungssprachliche Hindernisse könnten zu Schwierigkeiten beim Formulieren der entgegengesetzten Implikation geführt haben. Hier fällt möglicherweise der Wechsel zwischen syntaktischer und semantischer Ebene schwer, denn aus dem gegebenen „Wenn-Dann-Satz“ müssen zunächst Bedingung und Folgerung extrahiert werden, damit der Satz anschließend umgestellt werden kann. Dies erfordert die Identifikation der Satzbestandteile auf Grundlage der Syntax. Die Prüfung auf Gültigkeit ist hingegen semantischer Natur.

Auf Aufforderung beteiligt sich Soraya an zwei weiteren Stellen mit kurzen Beiträgen am Diskurs, allerdings nimmt sie nicht freiwillig teil. Die gesamte Stunde ist aus diskursethischer Sicht dadurch geprägt, dass Jenny wesentliche Anteile am Gespräch hat.

Aus bildungssprachlicher Perspektive ist ein Wechsel von Selin in den gegebenen Realkontext der zweiten Aufgabe zu Schultaschen und Nagelfeilen interessant, (#38:52, Selin: „Wenn du (.) von dem Mädchen auf die Nägel guckst und achtest, dass die (.) ungepflegt sind, dann benutzt sie anscheinend keine, aber wenn ich“). Alle Mädchen scheinen Schwierigkeiten mit dem richtigen Formulieren von Ausdrücken zu haben (#22:40, Dilara: „Nee wenn der Satz von Pythagoras ist, (.) dann ist das ein rechtwinkliges Dreieck.“)

15.04.13

Die in dieser Unterrichtsstunde betrachtete Aufgabe beschäftigt sich mit der Anzahl der Linien in einem n-Eck, bei dem jeder der n Punkte mit jedem anderen Punkt verbunden ist. Zur Verdeutlichung der Aufgabe erhielten die Mädchen die Zeichnung eines 15-Ecks auf einem Aufgabenblatt. Prinzipiell stand ihnen der Weg zur Ermittlung der Linienanzahl frei; die Zeichnung bevorzugt jedoch eine statische Sicht gegenüber einer Wahrnehmung der Situation als Entwicklung (wie zuvor beim Händeschütteln).

Ayla versucht zunächst noch, einen zuvor von Dilara vorgestellten Ansatz zu verstehen, während Jenny in Aylas Antwort offenbar schon einen erwünschten Lösungsansatz zu sehen scheint. Ayla lässt in ihren Ausführungen viele Dinge offen, die Jenny dann recht frei mit Interpretationen füllt. Dabei legt sie Ayla möglicherweise Worte in den Mund, die diese so gar nicht hatte sagen wollen. Auch für die übrigen Schülerinnen war es möglicherweise sehr schwer, Aylas Erläuterungen zu folgen.

Ayla gelangt schließlich unter starker Lenkung der Förderlehrerin zu einer Lösung. Die Übertragung von Beobachtungen auf allgemeingültige Ebene scheint erschwert zu sein.

#17:58	Ayla	Voll verwirrend. Weil bei JEDEM Punkt sind doch (leise) eins zwei drei vier fünf
#18:05	Jawahir	Ja, hast du auch schon gezählt
#18:07	Ayla	Zehn, zehn Stück. An jedem Punkt sind zehn Linien.
#18:11	Jenny	Nee. Das sind mehr als zehn.
#18:12	Selin	Zwölf.
#18:13	Ayla	Zwölf?
#18:13	Jenny	Es sind auch mehr als Zwölf.
#18:14	Dilara	Vierzehn (unv., sind das, oder?).
#18:15	Jenny	Mh' (nickt)
#18:16	Selin	Vierzehn?
#18:17	Ayla	Ja, und vierzehn und das ist doppelt. Dann müssen vierzehn mal (.)
#18:22	Jawahir	Vierzehn mal eins zwei drei /
#18:24	Selin	Vierzehn mal vierzehn sind?
#18:25	Jenny	Also es sind fünfzehn Eckpunkte. Deswegen, es ist ja n Fünfeck.
#18:31	Ayla	Vierzehn mal Fünfzehn müssen wir rechnen. Und das macht?
#18:35	Selin	Das sind zweihundert (.)zehn
#18:36	Ayla	Und das durch zwei
#18:38	Selin	Nicht durch zwei.
#18:39	Jawahir	Aber hier ist das aber auch (.) solche Linien hier
#18:42	Selin	Ja.

#18:42 Jenny

Warum willst du's durch zwei teilen?

#18:44 Ayla

Äh, durch vierzehn.

Obwohl Ayla bereits einmal die Lösung fast vollständig hergeleitet hatte, wurde diese anfänglich im Diskurs nicht aufgegriffen. Offenbar ließ sie sich von diesem Umstand jedoch nicht entmutigen und versuchte es erneut. Auffällig ist, dass sich ihre Formulierungen obwohl es sich um den zweiten Versuch handelt im Vergleich zum ersten Diskursfragment nicht wesentlich gebessert haben.

10.06.13 (a)

Gefragt ist die Unterscheidung zwischen ungeraden und geraden Zahlen.

Jawahir bringt eine Argumentation vor, in der sie beschreibt, dass in geraden Zahlen jedes Element einen „Partner“ hat, wohingegen in ungeraden Zahlen ein Element ohne „Partner“ ist. Sie spricht zunächst beispielgebunden über die Eigenschaften der Zahlen und geht erst auf Rückfrage auf allgemeine Eigenschaften ein. Ihre Formulierungen sind dabei sehr unpräzise und lassen mehrere Interpretationen zu.

Jawahir kann offenbar ihre Beobachtungen nicht oder nur schwer allgemeingültig auszudrücken. Obwohl sie die strukturellen Eigenschaften gerader und ungerader Zahlen richtig erfasst hat, kann sie diese den anderen nur schwer vermitteln.

Offenbar ist Jawahir klar, worin die strukturellen Unterschiede zwischen geraden und ungeraden Zahlen liegen. Aus den weiteren Argumentationen zu geraden und ungeraden Zahlen geht jedoch hervor, dass sie offenbar konzeptionelle Schwierigkeiten mit dem Begründen allgemeingültiger Behauptungen hat. Sie bleibt, wie Selin, an Zahlenbeispielen verhaftet und wechselt nicht auf eine allgemeine Ebene. Dieses Verhalten kann als bildungssprachliche Schwierigkeit bezüglich der Abstraktion von konkreten Kontexten und dem Erfassen von Verallgemeinerungen interpretiert werden. Möglicherweise ist Jawahir der Unterschied zwischen den Ebenen einfach nicht klar.

10.06.13 (c)

Die hier betrachtete Aufgabe ist „ $c+d$ ist eine ungerade Zahl. Was weißt du über c und d ?“. Für die Lösung dieser Aufgabe müssen die strukturellen Eigenschaften gerader und ungerader Zahlen erfasst und auf die Summe übertragen werden. Die Addition muss verstanden sein, und der Term „ $c+d$ “ muss als Repräsentant einer Summe verstanden werden (nicht als Rechenvorschrift). Der Nachweis geht nur durch Betrachtung aller unterschiedlichen Fälle.

Jawahir bringt die Aufgabe $5+4$ vor und beschreibt dies als Beispiel für eine ungerade Summe. Als Gegenbeispiel bringt Selin das Doppelte der Zahl fünf als gerade Zahl ein. Es scheinen bei beiden Mädchen Schwierigkeiten im Bereich der teleologischen Rationalität vorzuliegen. Möglicherweise fällt es Selin und Jawahir schwer, ihre Gedanken in allgemeineren Variablen auszudrücken; sie scheinen aber auch keine Notwendigkeit für eine allgemeinere Überprüfung zu sehen. Für die allgemeingültige Lösung ist gleichzeitig die Durchführung einer Fallunterscheidung notwendig; möglicherweise kennen die Mädchen diese nicht als adäquates Werkzeug zum Entwickeln von Begründungen. Möglicherweise hat Selin den Unterschied zwischen der „Summe aus zwei ungeraden Zahlen“ und dem „Doppelten einer ungeraden Zahl“ nicht hinreichend verstanden. Die Abstraktionsschwierigkeiten betreffen nicht allein den Mangel an einer Übertragung in die mathematisch-symbolische Darstellungsform, sondern auch den Umgang mit verbalsprachlichen Beschreibungen.

Selin und Jawahir scheinen sprachlich adäquate Mittel zu fehlen, um abstrakte und generalisierte Gedanken zu formulieren. Dies gilt sowohl auf mathematisch-symbolischer als auch auf verbalsprachlicher Ebene.

Hier kommen die bereits gezeigten Schwierigkeiten von Selin und Jawahir zusammen

Hypothesen zum Entstehen von Hindernissen aus Perspektive der Bildungssprache

- Insbesondere in den ersten Aufgaben, bei denen Hindernisse bezüglich der Bildungssprache auftreten, geht es um definitorisches Wissen (was ist a Quadrat / was sind Katheten).
- Häufig ist ein ganzheitlicher Blick auf die Situation erforderlich, um konkrete Muster oder Strukturen zu abstrahieren (Locker Problem; Linien im n-Eck; allgemeingültige Begründung für die ungerade Summe). Eine mangelnde Berücksichtigung solcher globalen Strukturen oder Muster könnte mit bildungssprachlichen Fähigkeiten zusammenhängen, da möglicherweise der geforderte Abstraktionsgrad nicht dargelegt werden kann.
- In einigen Fällen interpretiert die Förderlehrerin in Antworten der Schülerinnen eine Expertenlösung hinein und hebt sie damit auf ein abstrakteres Niveau. Es ist unklar, ob die Schülerinnen selbst dabei folgen können.
- Schwierigkeiten im Bereich der Rationalität tragen möglicherweise teilweise zu den Herausforderungen bei, insbesondere hätte eine gute Kenntnis algebraischer fachsprachlicher Ausdrücke häufig beim Überwinden von Hindernissen helfen können.
- Im Fall des Locker-Problems werden die von Lubienski (2000) beziehungsweise Leufer & Sertl (2010) angesprochenen Schwierigkeiten bei Kontextwechseln deutlich: In ihrer Lösung bleibt Selin stark am konkreten Kontext verhaftet. Das Locker Problem unterscheidet sich beispielsweise vom Handshake-Problem, denn bei letzterem verwehrt der Blick auf die konkrete Situation nicht den Blick auf die mathematischen Zusammenhänge.
- Die tendenziell eher langen Argumentationsdiagramme entstehen teilweise, weil mehrere unterschiedliche Ausdrucksweisen gefunden werden um einen Sachverhalt zu begründen. Dies steht in Zusammenhang mit einem Mangel an fachlichem Hintergrundwissen.
- Interessant: Bildungssprachliche Hindernisse lassen sich durchaus auch noch in anderen durchgeführten Analysen identifizieren; allerdings werden sie von den Schülerinnen sehr oft überwunden oder kommen nicht zum Tragen.
- Bildungssprachliche Schwierigkeiten führen entsprechend nicht immer zu Hindernissen für das Argumentieren, sondern sie können teilweise von den Schülerinnen überwunden werden. Dort, wo dies nicht geschieht, ist häufig definitorisches Wissen unklar, oder für die Lösung der Aufgabe ist die simultane Erfassung einer Gesamtstruktur erforderlich. Insgesamt können Hindernisse im Bereich der Bildungssprache deshalb als Stolpersteine charakterisiert werden: sie treten in Diskursen recht häufig auf, in vielen Fällen führen sie jedoch nicht zu Schwierigkeiten. „Strauchelnde“ Gespräche fangen sich oft wieder und es wird inhaltliche Klarheit geschaffen.

Gruppe „Keine tatsächlichen Hindernisse“

19.11.12 (K)

11.03.13 (K)

06.05.13 (K)

10.12.12 (K)

08.04.13 (K)

27.05.13 (K)

07.01.13 (K)

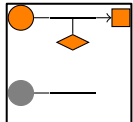
29.04.13 (K)

06.06.13 (K)

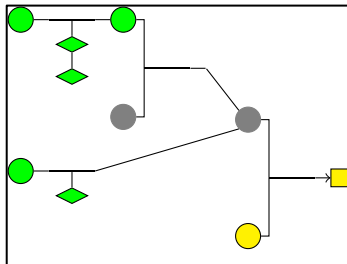
Farbige Strukturdiagramme



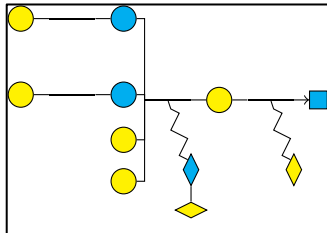
19.11.12



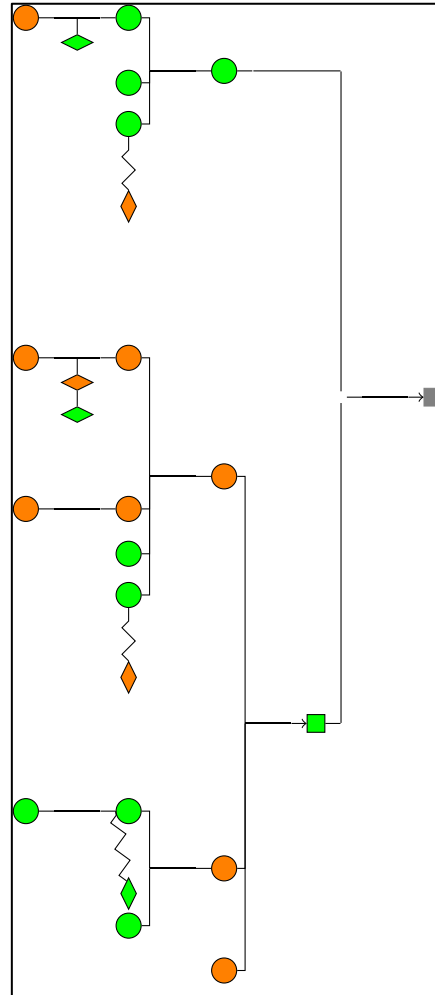
07.01.13



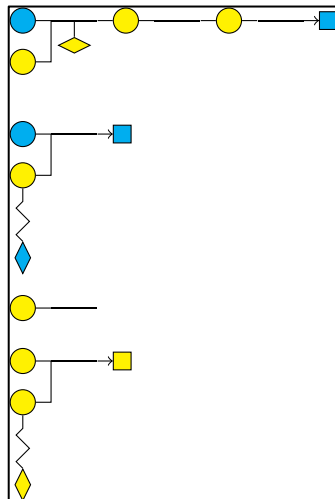
08.04.13



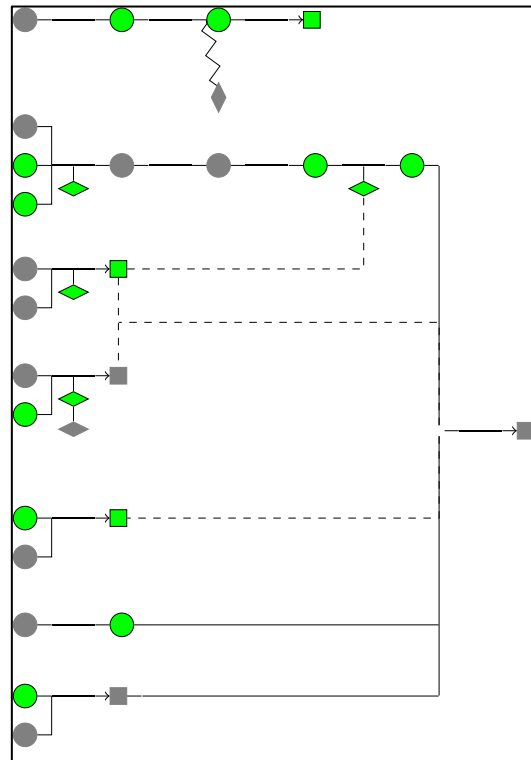
10.12.12



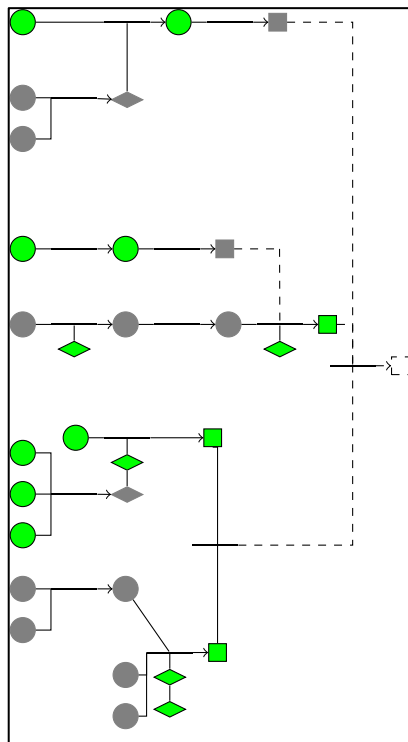
29.04.13



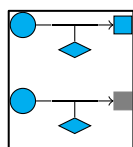
06.06.13



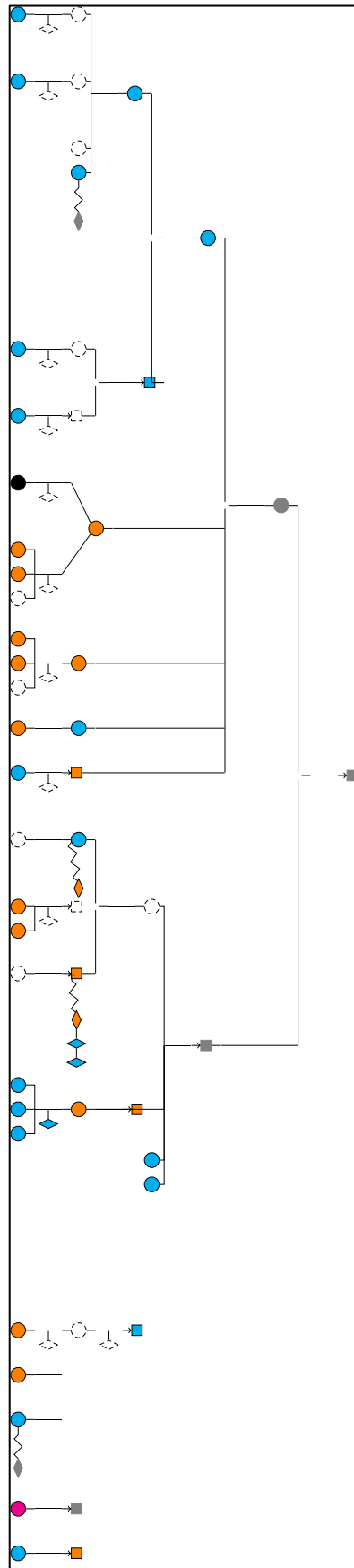
06.05.13



27.05.13



11.03.13



Statistisches

Beiträge 181

Median 15

Durchschnitt ~20,1

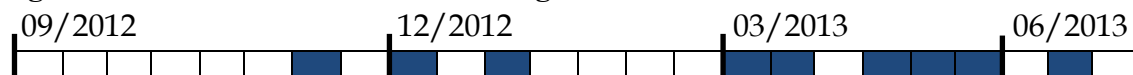
Ohne Förderlehrerin 141

Ohne Förderlehrerin ~15,7

Äußere Charakterisierung

- Die Argumentationsstruktur entspricht fast in allen betrachteten Fällen einer Quell-Struktur, bei der die meisten Teile verbunden sind.
- Schlussregeln werden zumindest teilweise offen gelegt.
- Jenny nimmt nur wenig an der Argumentation teil und ist im Wesentlichen für die Zusammenführung zu einer Gesamtargumentation verantwortlich.
- Häufig ist mehr als eine Person bei der Hervorbringung der Gesamtargumentation beteiligt, obwohl einzelne Argumente auch von einzelnen Mädchen vorgebracht werden.
- Die betrachteten Unterrichtsstunden liegen tendenziell eher zum Ende des Projekts hin.
- Es gibt keine direkte Schnittmenge mit den Hinderniskategorien.

Lage im zeitlichen Verlauf der Erhebung



Mathematische Anforderungen der gestellten Aufgaben & Umgang der jeweiligen Schülerinnen mit dieser Herausforderung.

19.11.12

In der Aufgabe geht es um die Untersuchung linearer Funktionen in Geogebra. Es sollte eine Rätselaufgabe gelöst werden, bei der eine Menge von im Koordinatensystem eingetragenen Punkten mit möglichst wenigen Geraden getroffen werden sollte. Dazu bekamen die Mädchen Gelegenheit, für Steigung und y-Achsenabschnitt konkrete Werte einzusetzen.

In der Argumentation antizipiert Dilara die Auswirkungen einer Steigungsänderung auf den Verlauf des Funktionsgraphen und setzt diese bewusst als Mittel ein, um mehr Punkte zu treffen. Dilaras Argument fand bereits nach etwa 13 Minuten in der betrachteten Unterrichtsstunde statt. Es ist zwar kurz und sprachlich teilweise unpräzise, beschreibt aber die Auswirkung der Steigung auf den Verlauf des Graphen korrekt und ist unter Zuhilfenahme der Gesten eindeutig interpretierbar. Die übrigen drei Mädchen sind alle ebenfalls beteiligt, Selin und Jawahir zunächst eher durch das Stellen von Fragen, später aber auch durch inhaltliche Beiträge. Ayla nutzt dabei ebenfalls eine spannende gestische Repräsentation für m und b .

Dilara sieht Zusammenhänge zwischen dem Graphenverlauf und dem Steigungsparameter und kann die von ihr erkannten Strukturen bewusst zur Lösung der Aufgabe einsetzen. Auch die anderen Mädchen lernen nach und nach mit dem Applet umzugehen. Es gibt potentielle Hindernisse in allen drei Bereichen, die jedoch nicht zum Tragen kommen. Durch das gemeinsame Etablieren einer Wissensgrundlage am Computer und das gegebene Werkzeug der Schieberegler konnte möglicherweise eine epistemische und teleologisch rationale Grundlage geschaffen werden. Aus diskursethischer Perspektive ist diese Wissensgrundlage ebenfalls hilfreich; außerdem vermittelt die Aufgabe möglicherweise den Eindruck einfacher Lösbarkeit. Die Förderlehrerin ist kaum beteiligt.

Interessant ist die Abweichung zwischen der Selbsteinschätzung der anderen Mädchen bei der Bearbeitung der Aufgabe und der tatsächlichen Herangehensweise. (#16:07, Jawahir:

„Wir raten eigentlich die ganze Zeit.“ → #17:36, Jawahir: „Aber da muss doch kein m sein, es muss doch b“. Es zeigt sich außerdem später ein gewisser Stolz auf die gefundenen Lösungen: (#22:55, Jenny: „Okay. Dann habt ihr für Aufgabe eins jetzt ja alle ne Lösung“. – #25:59, Ayla: „Wir haben sogar ZWEI“). Es zeigt sich eine hohe Motivation (#27:59, Jawahir: „Also wir sollen das öfters machen, so mit das macht richtig Spaß.“).

10.12.12 (Ayla & Dilara)

In der betrachteten Stunde wurde den Mädchen eine Problemlöseaufgabe zur Ermittlung des Flächeninhalts einer kompliziert aufgebauten Fläche gestellt. Sie bekamen Hilfekarten, um diese Aufgabe in Gruppen zu lösen. Auf den Hilfekarten war das gesamte notwendige Wissen zur Lösung der Aufgabe abgebildet; es wurde aber nicht vorgegeben, in welcher Reihenfolge die Karten zu benutzen sind.

Ayla und Dilara sind zunächst unsicher, ob es um Umfang oder Flächeninhalt geht, finden letztlich aber doch zu einer Lösung für den Flächeninhalt. Ihre Berechnung ist am Ende nicht ganz vollständig, sie machen aber gute Fortschritte bei der Ermittlung der Fläche. Die Bearbeitung verläuft sehr selbstständig. Jawahir und Selin kommen zu spät und schaffen es nicht, in die Aufgabenbearbeitung einzusteigen.

Für Aylas und Dilaras Bearbeitung scheinen die Hilfekarten eine gute Stütze zu sein. Die Bearbeitung ist zwar nicht vollständig korrekt, aber in sich schlüssig und beinhaltet gute Schritte. Insbesondere Dilara zeigt bei dieser Aufgabe ein gutes Verständnis für die Anwendung von Formeln, während Ayla eher intuitiv nach Zusammenhängen sucht. Teilweise sind die Diskussionen über den nächsten erforderlichen Schritt sehr lang, die Argumentation bricht trotzdem nicht ab. Jenny ist nicht am Zusammenhalt der Argumentation beteiligt.

Nach der betrachteten Episode muss Jenny relativ stark bei der Lösung helfen, da Ayla und Dilara einige Schwierigkeiten bei der Berechnung der inneren Fläche haben. Bis zu diesem Punkt sind sie aber gut allein zurechtgekommen und haben die Hilfekarten mehrfach verwendet. Letztere nutzen sich auch über das Diskursfragment hinaus weiter. Sie beteiligen sich weiterhin rege am Diskurs. Jawahir und Selin schienen hingegen eher unbeteiligt.

07.01.13

Die analysierte Aufgabe bezog sich auf Primzahlen und das Siebverfahren von Eratosthenes. Es sollte ein Zusammenhang zwischen einer vorgeschalteten Aufgabe zu den Multiplikationsreihen der Zahlen 5, 6 und 7 und dem Siebverfahren hergestellt werden. Ein erkennbarer Bezug ist, dass ab dem zweiten Element alle Zahlen in den Multiplikationsreihen gestrichen sind.

Ayla und Selin nehmen an der Argumentation teil. Sie erkennen korrekt, dass die Zahlen aus den Multiplikationsreihen im Sieb des Eratosthenes gestrichen werden, und Ayla verankert diese Beobachtung an den Teilbarkeitseigenschaften. Sie beschreibt, dass die Elemente der Multiplikationsreihen aufgrund des Aufbaus der Reihen durch mehr Zahlen teilbar sind als durch eins und sich selbst und weist damit auf das wesentliche Alleinstellungsmerkmal der Primzahlen gegenüber anderen Zahlen hin. Selin stimmt ihr zu; es wird nicht deutlich, inwiefern auch sie dieses Verständnis aufgebaut hat.

In der analysierten Stunde nehmen Ayla, Selin und Jawahir immer wieder an Argumentationen teil, während sich Soraya und Dilara eher zurückhalten. Die erstgenannten drei Mädchen nehmen sich offenbar als gleichberechtigte Diskurspartnerinnen wahr und können einander folgen, obwohl sie teilweise sprachliche Schwierigkeiten zum Ausdruck bringen.

Auch vor und nach dem Austausch bringen Ayla, Selin und Jawahir immer wieder Beiträge in Form von Fragen, Vermutungen und Argumenten in den Diskurs ein.

11.03.13

In der analysierten Unterrichtsstunde wurde das Gesellschaftsspiel „Da Vinci Code“ eingeführt und die Mädchen hatten Gelegenheit, dieses Spiel selbst zu spielen. Anschließend wurde ihnen eine fiktive, aus Perspektive eines Spielers fotografierte Situation vorgelegt, in der sie verdeckte Steine identifizieren sollten, die entsprechend der Spielregeln aufgebaut waren.

Vor allem Jawahir war rege an der Lösung beteiligt, aber auch Dilara bringt eigene Beiträge ein. Soraya reagiert nur auf Nachfrage. Die Erläuterungen zu den einzelnen zu identifizierenden Steinen sind teilweise ohne Berücksichtigung von Gesten nur schwer nachvollziehbar, können aber eindeutig zugeordnet werden, wenn diese beachtet werden. Schlussregeln werden teilweise implizit gelassen, korrespondieren dann aber an allen solchen Stellen mit den drei bekannten Spielregeln. Jawahir und Dilara zeigen intrinsisch motiviertes Interesse an der Lösung der Situation und bringen tragfähige Argumente ein. Aus diskursethischer Perspektive können alle Voraussetzungen als besonders gut erfüllt rekonstruiert werden.

Die vorliegende Situation ist ein Paradebeispiel für eine gute Argumentation. Möglicherweise hat die Spielsituation mit ihrem konkret-anschaulichen Spielmaterial, den klaren und wenig komplexen Regeln sowie dem lösbaren Rätsel zu einer guten Bearbeitung geführt. Die Förderlehrerin ist fast gar nicht an der Lösung beteiligt.

08.04.13

(Betrachtung von Sorayas Beteiligung in der Gruppe Diskursethik)

In der betrachteten Unterrichtsstunde ging es um das sogenannte „Handshake-Problem“, in der konkreten Aufgabe sollten die Mädchen ermitteln, wie viele Begrüßungen in einer Gruppe von 15 Personen stattfinden. Zuvor wurde die Aufgabe am konkreten Beispiel der vier anwesenden Mädchen durchgeführt und die Anzahl hergeleitet.

Selin und Jawahir entwickeln auf Grundlage der Erlebnisse in der Realsituation eine rekursive Perspektive auf die Situation (sie betrachten jeden einzelnen von 15 Gästen, die bereits in einem Raum sind.) Dieses Modell führt sie zu einem additiven Zugang, bei dem sie die Begrüßungen der einzelnen Gäste aufaddieren. Sie gelangen zum richtigen Ergebnis. Sie hinterfragen dies jedoch, weil es ihnen zu groß vorkommt.

Selin und Jawahir entwickeln auf Grundlage der Realsituation zu Beginn der Unterrichtsstunde ein mathematisch tragfähiges Modell zur Berechnung der Anzahl der Begrüßungen, und sie gelangen damit auch zu einem richtigen Ergebnis. Möglicherweise hat die gute Greifbarkeit der Situation zu einem tiefen Verständnis geführt. Wesentlich scheint hier auch das Gefühl zu sein, vor einer lösbaren Aufgabe zu stehen und über die notwendigen Mittel zu verfügen (denn notfalls kann man die Begrüßungen ja auch einfach zählen).

Siehe ICME-Paper. Selin und Jawahir beteiligen sich immer wieder am weiteren Diskurs, insbesondere Selin scheint durch einen Willen, Zusammenhänge zu verstehen, angetrieben zu sein. Soraya steigt hingegen aus. Jawahir stellt immer wieder Rückfragen und bringt Begründungsanlässe ein.

29.04.13

Die betrachtete Unterrichtsstunde beschäftigte sich mit dem Legen von Eulerquadraten aus Quirkle-Steinen. Die analysierte Argumentation ist dem Prozess entnommen, in dem Jawahir und Selin versuchen, mithilfe von 16 Quirkle-Steinen (4 Farben und 4 Symbolen) ein Eulerquadrat zu legen.

Die Argumentation entstand beim Lösen der Aufgabe. Sie wirkt stellenweise etwas abgehackt und brüchig, dies könnte aber daran liegen, dass es immer wieder um neue, einzelne Steine und nicht um eine Gesamtstruktur geht. Jawahir und Selin beachten bewusst die Eigenschaf-

ten der Spielsteine (abgebildetes Symbol & Farbe), um zu bestimmen, welche Steine in einer Reihe noch fehlen. Beide Mädchen verfolgen dabei das Ziel, das Quadrat richtig zu vervollständigen. Insbesondere Jawahir scheint sehr motiviert zur Lösung der Aufgabe. In der Abschlussdiskussion beteiligt sich sogar Soraya freiwillig und unaufgefordert (mit einem lediglich aus zwei Worten bestehenden Beitrag, aber immerhin).

Obwohl das Argumentationsdiagramm in dieser Argumentation teilweise brüchig wirkt zeigt dessen nähere Betrachtung, dass dies dem Aufgabencharakter geschuldet ist (jedes einzelne Argument hat die Position eines bestimmten Steines als Konklusion). Möglicherweise hat das Vorliegen der Steine als haptisches Werkzeug zu einer besseren unmittelbaren Prüfbarkeit von Hypothesen geführt. Dies könnte sich positiv auf die Argumentation ausgewirkt haben. Es könnte jedoch auch zu einem überschnellen Umlegen von Steinen führen.

Insbesondere Jawahir und Selin scheinen durch die direkte Greifbarkeit der Steine zu einer Lösung der Aufgabe motiviert zu werden; Ayla, Dilara und Soraya nehmen ebenfalls aktiv teil, wirken allerdings etwas unmotivierter und bringen zum Ausdruck, den Sinn hinter der Aufgabe nicht zu sehen. Die Beteiligung ist aber insgesamt gut, und die Kommunikation untereinander ebenfalls.

06.05.13

In der Aufgabe ging es um die Frage, warum die 5 stets in der Mitte eines magischen Quadrats mit den Zahlen von 1 bis 9 stehen muss. Zuvor waren an der Tafel unterschiedliche Summenbildungen aus drei Zahlen mit dem Ergebnis 15 gesammelt worden.

Neben Ayla, die sich am stärksten in die Argumentation einbringt, beteiligt sich auch Selin an der Diskussion. Sprachlich bleiben die Ausführungen häufig unpräzise; die Beteiligten scheinen ihnen aber einen Sinn geben zu können. Ayla sieht den Zusammenhang zwischen den Häufigkeiten der unterschiedlichen Zahlen in den verschiedenen Summenbildungen für die magische Zahl 15 und kann diesen mit den unterschiedlichen Summen im magischen Quadrat in Verbindung bringen. Teilweise hätten ihre Darstellungen expliziter sein können. Jawahir beteiligt sich kaum, es gibt jedoch keine Indizien dafür, dass sie sich weniger kompetent fühlt.
Ayla (und Selin?) entwickeln einen strukturierten Blick auf die Situation und können die Summenbildungen mit den jeweils drei in einer Zeile, Spalte beziehungsweise Diagonalen liegenden Kästchen in Verbindung bringen. Sie finden damit einen guten Zugang zum magischen Quadrat, der auf mathematischen Strukturen beruht.

Ayla und Selin sind weiter rege an der Lösung der Aufgabe und an der Einordnung der übrigen Zahlen in das magische Quadrat beteiligt. Jawahir hat ihre Brille nicht dabei und kann aus diesem Grund die an der Tafel stehenden Summen nicht lesen, zweifelt jedoch auch (#22:21) an der Relevanz des Inhalts für den Mathematikunterricht. Sie scheint aber keine Schwierigkeiten mit dem Anspruchsniveau der Aufgabe zu haben.

27.05.13

In dieser Stunde ging es noch einmal um magische Quadrate und um deren Zusammenhang mit Eulerquadraten. Die betrachtete Argumentation stammt aus einer Zwischenfrage dazu, ob bei einer Erhöhung jeder Zahl in einem magischen Quadrat der Größe 4×4 weiterhin ein magisches Quadrat vorliegt. Die Mädchen sollten erkennen, dass bei einer gleichmäßigen Veränderung jedes Elements im magischen Quadrat die Zeilen- beziehungsweise Spaltensumme weiterhin gleich bleibt.

Jawahir sagt die veränderte neue Zeilen- beziehungsweise Spaltensumme richtig vorher und verankert ihre Begründung an der Anzahl der Elemente in einer Zeile (beziehungsweise Spalte). Sie hat dabei zwar teilweise Schwierigkeiten, ihre Aussagen klar zu formulieren, kann aber den Inhalt kommunizieren. Unklar ist hingegen, inwiefern die anderen Mädchen an die-

ser Stelle dem Diskurs folgen können. Jawahir zeigt Unsicherheiten bezüglich der Richtigkeit ihrer Erkenntnis; an dieser Stelle scheint das ihre Teilnahme am Diskurs nicht zu beeinflussen, aber möglicherweise führt diese Unsicherheit an anderer Stelle zu Schwierigkeiten. Für die übrigen Mädchen scheinen Hindernisse in der Rationalität vorzuliegen; möglicherweise betrachten sie nicht das Hinzufügen der gleichen Zahlen zur Summe sondern operieren auf der Ebene einzelner Zahlen.

Ein vollständig reibungsloser Ablauf liegt an dieser Stelle nicht vor; dennoch konnte gezeigt werden, dass Jawahir wesentliche strukturelle Eigenschaften der Situation erfasst und mit ihrer Hilfe argumentieren kann. Im weiteren Verlauf der Stunde beteiligen sich auch Ayla und Selin; Soraya hingegen nicht.

Im weiteren Verlauf der Stunde zeigt sich zunächst, dass Ayla Jawahirs Erläuterung nicht folgen konnte. Jenny vollzieht die Lösung noch einmal gemeinsam mit Ayla nach. Ayla und Selin sind stark beteiligt, auch Jawahir beteiligt sich im weiteren Verlauf der Argumentationen in der Unterrichtsstunde immer wieder. Ihre Beteiligung findet zwar eher in Form von Einzelbeiträgen statt, ist aber merklich vorhanden.

06.06.13

Die betrachtete Argumentation entstammt einer Aufgabe aus dem Interview mit Ayla zum Ende des Projekts. Es handelte sich dabei um ein Einzelinterview, da Ayla zum letzten Termin der Förderung keine Zeit hatte. In der Aufgabe ging es um die zwei Summanden einer ungeraden Summe.

Ayla beschreibt, dass es sich bei den Summanden um eine gerade und eine ungerade Zahl handeln müsse. Sie verankert ihre Lösung an einem Ausschlussverfahren und beschreibt, dass dies die einzige passende Lösung sei: Sowohl die Addition zweier gerader Zahlen als auch die Addition zweier ungerader Zahlen führen zu einem geraden Ergebnis, also muss etwas ungerade sein. Ayla kann Jennys Hilfestellungen in Form der Vorstellung von geraden Zahlen als Zweierpäckchen in ihrer eigenen Argumentation nutzen.

Ayla bringt zwar kein vollständiges Argument für die Notwendigkeit, dass es sich bei den Summanden um eine gerade und eine ungerade Zahl handeln muss, sie verfolgt jedoch einen sehr guten Kerngedanken, der zu einer guten Lösung der Aufgabe beitragen kann. Aus Perspektive der teleologischen Rationalität kann darüber hinaus festgehalten werden, dass die benötigte Fallunterscheidung sehr komplex ist. Die Denkweise ihres Vorgehens ist interessant.

Hypothesen, warum in den betrachteten Situationen keine oder wenige Hindernisse zum Tragen gekommen sind

- In vielen der betrachteten Situationen wurden mathematische Strukturen erst direkt vorher gemeinsam mit den Mädchen neu erarbeitet (Rationalität, Diskursethik).
- Für eine korrekte Bearbeitung der Aufgabe kann häufig gegebenenfalls auf zählende Strategien zurückgegriffen werden. Möglicherweise hat dies die Mädchen in ihrem Selbstvertrauen für die korrekte Lösung der Aufgabe bestärkt.
- Meist reichen eher basale mathematische Fähigkeiten für eine Lösung der gestellten Aufgabe aus.
- Die Aufgaben haben in vielen Fällen Rätselcharakter. Möglicherweise hat dies einerseits zu dem Eindruck der Mädchen geführt, dass es tatsächlich eine erreichbare Lösung der Aufgabe gibt und andererseits zu einer guten intrinsischen Motivation, das Rätsel lösen zu können.
- In allen Argumentationen offenbart sich ein strukturelles Verständnis der wesentlichen mathematischen Zusammenhänge.
- Dort, wo mathematisches Vorwissen gefordert ist, ist dies klar abgesteckt.

- Die betrachteten Aufgaben sind von ihrem Charakter her eher weit entfernt von Schulbuchaufgaben. Möglicherweise hat diese Distanz zu gewohnten Mathematikaufgaben dazu beigetragen, dass die Mädchen sich selbst als kompetenter empfunden haben.
- Alle beobachteten Stunden ohne wesentliche Brüche liegen vergleichsweise spät im Verlauf der Untersuchung. Durch das nähere Kennenlernen der Gruppe zu Beginn der Erhebung wurden möglicherweise einige Barrieren abgebaut, die für die Mädchen ansonsten zu Hindernissen hätten werden können.
- An einigen Stellen wurde mit konkreten Objekten oder greifbaren Repräsentationen hantiert (DVC beim Spielen; Quirkle-Steine im Eulerquadrat; Buntstifte als idiosynkratische Repräsentation beim Handshake-Problem). Diese könnten zu einem besseren Erkennen von Strukturen beigetragen haben.
- Jenny ist nur wenig an den betrachteten Argumentationen beteiligt. Dies könnte sowohl Ursachen- als auch Wirkungscharakter haben: Ist die Partizipation höher, weil sie nicht beteiligt ist, oder ist beteiligt sie sich weniger, weil die Mädchen mehr sagen? In jedem Fall könnte dies zu längeren Argumentationen geführt haben.

Kontrastierung der Fallgruppen

Insgesamt acht der 27 untersuchten Fälle wurden in zwei Kategorien eingeordnet. Zwischen Bildungssprache und Rationalität gab es zwei Überschneidungen, zwischen Rationalität und Diskursethik drei Überschneidungen und zwischen Diskursethik und Bildungssprache ebenfalls drei Überschneidungen. Über diese Doppelzuordnungen hinaus sind für die Ermittlung von Unterschieden zwischen den Kategorien jedoch auch potentielle Hindernisse, sowie gegebenenfalls deren Überwindung, bedeutsam. Der paarweise Vergleich der Kategorien berücksichtigt neben den doppelt zugeordneten Fällen auch identifizierte potentielle Hindernisse aus der jeweils anderen Kategorie.

Bildungssprache – Rationalität

In den Fällen 08.10.12 und 10.06.13c kommen sowohl bildungssprachliche Hindernisse als auch Hindernisse aus Perspektive der Rationalität zum Tragen. Am 08.10.12 geht es um eine geometrische Deutung des Ausdrucks a Quadrat. Als wesentliches Hindernis wurde herausgestellt, dass Ayla aus Perspektive der epistemischen Rationalität das notwendige Wissen für eine tragfähige Bearbeitung fehlt, da ihr die geometrischen Deutungen von a als einer Strecke der Länge a und „ a Quadrat“ als Quadrat mit der Seitenlänge a offenbar zuvor unbekannt waren. Aus bildungssprachlicher Perspektive liegt ein Hindernis darin, dass sowohl die Aussagen von Ayla als auch die Aussagen von Jenny über einen längeren Zeitraum mehrere Interpretationen ermöglichen. Im Fall 10.06.13c verlangt die Aufgabe das Ermitteln und Begründen von Eigenschaften zweier ganzzahliger Summanden einer ungeraden Summe. Selin und Jawahir beschränken sich in ihrer Antwort auf die Angabe des Beispiels $5+4$ als Möglichkeit für eine ungerade Summe und schlussfolgern, dass ein Summand gerade und ein Summand ungerade sein muss. An einigen Stellen scheinen ihnen sprachlich adäquate Mittel zu fehlen, um die Allgemeingültigkeit ihrer Beobachtung auszudrücken. Diese Schwierigkeiten können jedoch auch auf ein Hindernis aus Perspektive der teleologischen Rationalität zurückgeführt werden, da den Mädchen offenbar keine Werkzeuge zur Verfügung stehen um die Allgemeingültigkeit ihrer Behauptungen zu zeigen.

In beiden Fällen stehen die identifizierten tatsächlichen Hindernisse aus den beiden Kategorien miteinander in Zusammenhang. Aylas Formulierungsschwierigkeiten am 08.10.12 werden vermutlich unter anderem dadurch bedingt, dass ihr die konventionellen geometrischen Deutungen von a und a^2 nicht bekannt waren. Jawahir und Selin mangelt es in der Argumentation 10.06.13c möglicherweise an adäquaten Werkzeugen, um Allgemeingültigkeit zu zeigen. In beiden Fällen wählen die Schülerinnen idiosynkratische Ausdrucksweisen.

Über die beiden Fälle in denen tatsächliche Hindernisse in beiden Kategorien auftreten hinaus wurden in nahezu allen der Kategorie Bildungssprache zugeordneten Fälle potentielle Hindernisse bezüglich der Rationalität identifiziert. Hindernisse aus epistemischer Perspektive liegen am 15.10.12, 21.01.13 und 15.04.13 vor. Am 15.10.12 fehlt den Mädchen für eine sinnvolle Bearbeitung eine tragfähige Definition von Katheten und Hypotenuse, am 21.01.13 fällt im Kontext der zweiten Stunde zum Locker Problem mangelndes Wissen bezüglich Teilbarkeit auf, und am 15.04.13 erkennen die Mädchen bei der Bestimmung der Anzahl an Linien im n -Eck zunächst nicht den Zusammenhang zwischen den Anzahlen der Ecken und Verbindungslinien. Die jeweiligen Wissenslücken könnten die Schwierigkeiten beim Auffinden konkreter Formulierungen verstärkt haben. Aus teleologischer Perspektive treten am 18.02.13 Hindernisse auf. Den Mädchen scheinen keine adäquaten Werkzeuge für die Umkehrung der gegebenen Wenn-Dann-Aussagen zur Verfügung zu stehen. Auch die Schwierigkeiten im Umgang mit der Anzahl der Verbindungslinien in Abhängigkeit von der Anzahl der Eckpunkte im n -Eck am 15.04.13 können als teleologische Hindernisse betrachtet werden. Am 21.01.13 und am 18.02.13 liegen so starke Schwierigkeiten bei der Ausformulierung

von Ideen vor, dass unklar bleibt, inwiefern Hindernisse aus Perspektive der Rationalität zu den Problemen beigetragen haben oder ursächlich waren. In den Fällen des 15.10.12 und 15.04.13 überwinden die Mädchen hingegen die potentiellen Hindernisse aus Perspektive der Rationalität im Verlauf der Unterrichtsstunde. Es ist denkbar, dass sie in diesen Fällen im Laufe des Diskurses zu einer Einsicht in wesentliche Konzepte gelangen, deren Formulierung ihnen jedoch weiterhin schwer fällt.

Auch in sechs der Kategorie Rationalität zugeordneten Fällen treten potentielle Hindernisse aus Sicht der Bildungssprache auf. Am 01.10.12li und am 12.11.12 bleibt immer wieder phasenweise sprachlich unklar, worauf sich die Mädchen beziehen. Diese Unklarheiten werden jedoch im Wesentlichen noch innerhalb des jeweiligen Diskursfragments aufgeklärt. Im Fall des 17.12.12 drückt Ayla ihre Beobachtungen zu geraden und ungeraden Zahlen ohne die Verwendung fachlicher Begriffe aus, diese werden durch Jenny ergänzt. Selin vermittelt ihre Beobachtungen im Fall 14.01.13(1) über Betonungen, Ayla im Fall 14.01.13(2) über Abzählen. In der Argumentation 10.06.13b beschränkt sich Selin möglicherweise aufgrund bildungssprachlicher Schwierigkeiten auf ein Zahlenbeispiel. Trotz bildungssprachlicher Schwierigkeiten schaffen es die Mädchen in den dargelegten Fällen jedoch, ihre Ideen auszudrücken und zu vermitteln, obwohl diese Ideen aus Perspektive der Rationalität mathematisch nicht günstig sind.

Rationalität – Diskursethik

In drei Fällen wurden tatsächliche Hindernisse im Bereich der Rationalität und im Bereich der Diskursethik identifiziert, diese Fälle sind 01.10.12li, 05.11.12 und 26.11.12. Eine genaue Betrachtung zeigt in diesen drei Fällen einen möglichen Zusammenhang zwischen den Hinderniskategorien im hohen Anforderungsniveau der gestellten Aufgaben. Am 01.10.12li bei der Bearbeitung der Aufgabe zu grauen und weißen Kästchen ist Jawahir von diskursethischen Hindernissen betroffen, die sich in ihrer negativen Selbstwahrnehmung zeigen. Für Ayla scheinen hingegen Hindernisse im Bereich der epistemischen und teleologischen Rationalität vorzuliegen, die sich in einem fehlerhaften Umgang mit Wurzeln und Quadraten beziehungsweise der ungünstigen Bearbeitungsweise des Zeichnens und Abzählens offenbaren. Die widerwillige Akzeptanz des Unterrichtsgegenstands am 05.11.12 in der Aufgabe zu linearen Gleichungssystemen führt zu einem diskursethischen Hindernis. Parallel treten bei der Bearbeitung Schwierigkeiten aus Perspektive der epistemischen Rationalität auf, da die Schülerinnen nicht über notwendige Vorkenntnisse verfügen. Die Fallrekonstruktion des 26.11.12 zu linearen Funktionen zeigt ebenfalls diskursethische Hindernisse für Jawahir, die keinen Zugang zur Aufgabe findet und Unverständnis ausdrückt. Für Ayla treten Schwierigkeiten im Bereich der Rationalität beim Darstellungswechsel auf. Die jeweiligen Lücken im Bereich der epistemischen Rationalität erschweren eine Bearbeitung der Aufgabe, sodass es in allen drei Fällen nicht zu einer vollständigen Bearbeitung durch die Schülerinnen kommt. Die subjektive Wahrnehmung, nicht über notwendiges Vorwissen zu verfügen oder nicht gleichberechtigt zur Teilnahme am Diskurs zu sein, könnte durch ein solches hohes Anforderungsniveau begünstigt werden.

Die Fälle 01.10.12re und 10.06.13c wurden der Kategorie R zugeordnet. Die aufklärenden Analysen konnten in diesen beiden Fällen ebenfalls potentielle Hindernisse aus dem Bereich der Diskursethik zeigen. Die Lösung von Selin am 01.10.12re zu grauen und weißen Kästchen beinhaltet einige Fehlannahmen aus Perspektive der epistemischen Rationalität. Nach dem Diskursfragment findet in ihrer Kleingruppe keine weitere Argumentation statt. Es ist möglich, dass Selins Austausch mit Jenny über die Fehler in ihrem Ansatz zu einem diskursethischen Hindernis geführt hat; dieses lässt sich jedoch anhand des Transkripts nicht konkretisieren. In der Argumentation 10.06.13c wurde mangelndes Hintergrundwissen als mögliches Hindernis für das Erkennen analoger Fälle im Sinne der diskursethischen Regel L2 und

zugleich als potentielles Hindernis der epistemischen Rationalität herausgearbeitet, die aufklärenden Analysen konnten jedoch zeigen, dass die Mädchen über ein ausreichend gutes Wissen bezüglich gerader und ungerader Zahlen verfügen, ihnen aber aus teleologischer Perspektive adäquate Mittel fehlen, um Allgemeingültigkeit auszudrücken. Insgesamt bestätigen aber auch diese Fälle die Beobachtung, dass mangelndes Wissen aus Perspektive der epistemischen Rationalität ein Entstehen diskursethischer Schwierigkeiten möglicherweise begünstigen kann.

Fünf Fälle aus der Kategorie Diskursethik beinhalten potentielle Hindernisse aus Perspektive der Rationalität: 15.10.12, 12.11.12, 21.01.13, 18.02.13 und 08.04.12So. Am 15.10.12 wurde Jawahirs deutlicher Rückgang der Beteiligung nach ihrem Austausch mit Ayla einem diskursethischen Hindernis zugeschrieben, das möglicherweise durch die Zurechtweisung durch Ayla entsteht. Fehlende Kenntnisse der notwendigen Begriffe und Definitionen wurde als potentielles diskursethisches Hindernis rekonstruiert. Während diese Wissenslücken für Ayla im Laufe des Diskurses ausgeglichen werden können, scheinen sie für Jawahir zu einem Ausstieg aus dem Diskurs zu führen. Schwierigkeiten bei der Anerkennung des Diskussionsgegenstands führen am 12.11.12 zu einem diskursethischen Hindernis; es deuten sich inhaltliche Schwierigkeiten im Umgang mit negativen Zahlen an, die möglicherweise indirekt zum diskursethischen Hindernis beigetragen haben. Am 21.01.13 in der zweiten Stunde zum Locker Problem wurde als potentielles Hindernis aus Perspektive der Rationalität ein mangelndes Wissen über Teilerbeziehungen herausgearbeitet. In dieser Situation liegen diskursethische Hindernisse für Jawahir vor, da sie sich selbst als nicht ausreichend kompetent wahrnimmt. Möglicherweise hätte ein präzises Wissen über Teilerbeziehungen ihr zu einer besseren Selbsteinschätzung verholfen. Die diskursethischen Schwierigkeiten bei der Akzeptanz der Aufgabe zu Wenn-Dann-Aussagen vom 18.02.13 könnten durch die identifizierten potentiellen Hindernisse aus teleologischer Perspektive beim Erkennen der relevanten Äußerungsbestandteile ebenfalls verstärkt worden sein. Für den 08.04.13So liegen neben den diskursethischen Hindernissen für die Beteiligung Sorayas möglicherweise Schwierigkeiten aus epistemischer Perspektive vor, die sich in der von ihr falsch vermuteten Proportionalität zwischen den Anzahlen von Personen und Begrüßungen ausdrücken. Auch in diesem Fall könnte die inhaltliche Unsicherheit zum diskursethischen Hindernis beigetragen haben. Insgesamt scheinen Diskursethik und Rationalität in einem engen Zusammenhang zu stehen und sich häufiger zumindest in einigen Bereichen gegenseitig zu beeinflussen.

Diskursethik – Bildungssprache

Die Fälle 15.10.12, 21.01.13 und 18.02.13 wurden in die Kategorie Diskursethik und in die Kategorie Bildungssprache eingeordnet. Bei der Identifikation von Katheten und Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck am 15.10.12 haben Ayla und Jawahir Schwierigkeiten, die Argumentation der jeweils anderen zu verstehen. Ayla kritisiert Jawahirs Ansatz offen und verurteilt damit möglicherweise deren Ausstieg aus dem Diskurs. Es könnte sein, dass Jawahir sich zurückzieht, weil sie das Gefühl hat, ihre Ideen nicht adäquat vermitteln zu können; hier liegt ein möglicher Zusammenhang zwischen den beiden Arten von Hindernissen. Am 21.01.13 in der zweiten Stunde zum Locker Problem ist die Kontextverhaftung von Selin besonders auffällig. In ihrer sprachlichen Beschreibung legt sie keine Abstraktion an. Die Allgemeingültigkeit ihrer Beobachtungen und die Möglichkeit zu einer Übertragung auf analoge Situationen werden dadurch möglicherweise soweit erschwert, dass Jawahir abgehängt wird. Am 18.02.13 könnten bildungssprachliche und diskursethische Hindernisse ebenfalls zusammenspielen, denn die Schwierigkeiten beim Umstellen und dem inhaltlichen Erfassen der Wenn-Dann-Aussagen stehen möglicherweise mit dem Entstehen diskursethischer Schwierigkeiten in Form eines Gefühls der Benachteiligung in Zusammenhang.

In keinem weiteren Fall aus der Kategorie Bildungssprache wurden wesentliche potentielle Hindernisse aus dem Bereich der Diskursethik offengelegt. In der Kategorie Diskursethik treten zwei Fälle auf, in denen auch bildungssprachliche Hindernisse zum Tragen kommen: 01.10.12li und 12.11.12. Bei der Bearbeitung der Aufgabe zu grauen und weißen Kästchen in der Partnerarbeit von Jawahir und Ayla im Fall 01.10.12li bleiben die Bezugspunkte der Mädchen im Gespräch immer wieder unklar. Auch der 12.11.12 ist von Unklarheiten geprägt. In beiden Fällen sind diese Unklarheiten jedoch offenbar nicht ursächlich für Schwierigkeiten bezüglich des mathematischen Argumentierens, da der Diskurs nicht ihretwegen abgebrochen wird.

Zwischen Bildungssprache und Diskursethik scheint die geringste Schnittmenge vorzuliegen.

Zur Überwindung potentieller Hindernisse in der Gruppe „Keine Hindernisse“

Auch in den neun der Gruppe „Keine Hindernisse“ zugeordneten Fällen konnten die aufklärenden Analysen potentielle Hindernisse herausstellen. Für die Ausdifferenzierung der verschiedenen Arten von Hindernissen ist interessant, welche Hindernisse in den Fällen überwunden wurden. Dafür findet zunächst eine Analyse nach Fällen statt und anschließend entlang der Hindernisdimensionen.

Am 19.11.12 ging es darum, die Gleichungen linearer Funktionen in Geogebra zu ermitteln. Die Äußerungen der Mädchen lassen sich teilweise nur unter Berücksichtigung von Gesten klar deuten, dann sind sie allerdings verständlich, sodass es nicht zu bildungssprachlichen Hindernissen kommt. Möglicherweise hilft die gemeinsame Arbeit am Laptop bei der Zuordnung der Gesten. Anfängliche Hindernisse aus epistemischer Perspektive werden in der Interaktion überwunden; möglicherweise wird dies begünstigt durch das geringe nötige Vorwissen und den Fokus auf der eigenständigen Erarbeitung von Wissen. Die Überwindung von Hindernissen beseitigt auch die potentiellen diskursethischen Schwierigkeiten.

Die Argumentation zur Ermittlung des Flächeninhalts der grauen Fläche zwischen Ayla und Dilara am 10.12.12 ist ebenfalls durch unpräzise Sprache gekennzeichnet; die Turn-by-Turn-Analyse konnte sogar zeigen, dass beide Mädchen anfangs vermutlich über unterschiedliche Sachverhalte sprechen. Diese Unklarheit löst sich jedoch im weiteren Gesprächsverlauf auf. Aylas Schwierigkeiten in der epistemischen Rationalität werden durch Dilaras Fachwissen und die Hilfekarten ausgeglichen. Insgesamt scheinen die Mädchen von der Lösbarkeit der Aufgabe hinreichend überzeugt zu sein, dass sie an der Lösung weiterarbeiten.

Der 07.01.13 wurde als Fallbeispiel in dieser Dissertation umfangreich erläutert. Obwohl es den Schülerinnen gelegentlich schwer fällt, ihre Gedanken in Worte zu fassen, versuchen sie es weiter. Die Einführung über Multiplikationsreihen könnte beim Abbau von Hindernissen geholfen haben, da dieses Thema allen Schülerinnen hinreichend vertraut war und keine großen Herausforderungen mit sich brachte.

Am 11.03.13 bei den Argumentationen zum Da Vinci Code sind Gesten und das Arbeitsblatt wesentlich, um dem Inhalt der Argumentation zu folgen. Da die Schülerinnen so sitzen, dass sie die jeweiligen Gesten der anderen problemlos erkennen können, hilft die Auslagerung der Informationen auf Zeigegesten möglicherweise bei der inhaltlichen Strukturierung von Äußerungen. Aus Rationalitäts- und diskursethischer Perspektive bleiben Hindernisse möglicherweise deshalb aus, weil die Regeln der Situation allein durch die zuvor eingeführten Spielregeln gegeben waren und somit klare Voraussetzungen und eine Gleichberechtigung aller Schülerinnen vorliegen (vgl. Cramer, 2014).

Das Handshake-Problem am 08.04.13 hat keine tatsächlichen Hindernisse für Selin und Jawahir offenbart. Obwohl die Unterscheidung zwischen den Personen und der gewählten Repräsentation der Situation durch Buntstifte sprachlich nicht immer klar ist, ist die Struktur des Arguments in beiden Fällen gleich und somit möglicherweise von verschiedenen Standpunkten ausgehend nachvollziehbar. Die Schwierigkeiten aus epistemischer Perspektive werden

von den Mädchen durch den handlungsorientierten Ansatz überwunden. Diskursethisch entstehen für Soraya dennoch Probleme.

Die Situation am 29.04.13 zeigt kaum potentielle Hindernisse für das Argumentieren. Präzisionen geschehen erneut in Form von Gesten; ansonsten scheint die Verwendung des Spielmaterials zur Vermeidung teleologischer Hindernisse beizutragen. Diskursethische Schwierigkeiten treten nicht auf. In Hinblick auf die Kürze der Argumentationsstränge im Diagramm ist jedoch unklar, inwiefern ein längeres Nachdenken vor dem Ausprobieren neuer Anordnungen schneller zu einer richtigen Lösung geführt hätte.

Der 06.05.13 ist durch sprachliche Auslassungen gekennzeichnet; diese sind in Kombination mit Gesten jedoch eindeutig zuzuordnen. Die strukturellen Verbindungen zwischen der Anordnung der Zahlen im magischen Quadrat und dessen Aufbau werden deutlich.

Am 27.05.13 waren erneut magische Quadrate das Thema, es ging um die Veränderung der magischen Zahl bei Erhöhung jeder der Ziffern um eine bestimmte Zahl. Auffällig an Jawahirs Bearbeitung ist, dass sie ihre Erklärung zweimal fast identisch formuliert; damit ist nicht klar, inwieweit die übrigen Schülerinnen der Argumentation folgen können. Allerdings klärt sich diese Schwierigkeit im weiteren Verlauf durch eine Rückfrage von Ayla und alle anderen beteiligen sich ebenfalls weiter.

Der 06.06.13 stellt einen Sonderfall dar, da es sich um ein Einzelgespräch zwischen Jenny und Ayla handelt. Dabei lässt Ayla zwar ebenfalls Dinge unklar; da es sich jedoch um die 1:1-Situation handelt, fragt Jenny direkt nach, wenn sie Bezüge nicht verstanden hat. Bei den Hindernissen im Bereich der Rationalität helfen Jennys Kenntnisse ebenfalls weiter.

Insgesamt kann die Überwindung potentieller Hindernisse in den Fällen der Kategorie Keine Hindernisse vermutlich den Eigenschaften der Aufgaben beziehungsweise Situationen zugeschrieben werden.

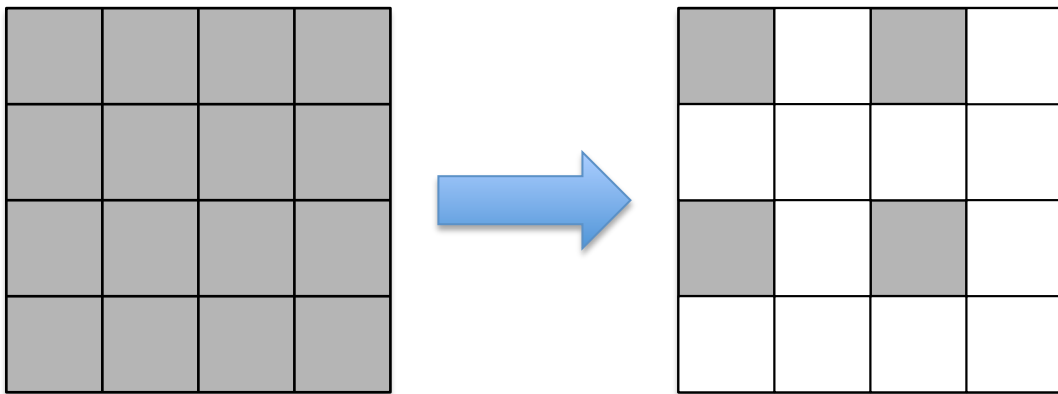
B. Im Förderunterricht verwendete Aufgabenblätter.

01.10.12 Graue und weiße Kästchen

Aufgabe:

In ein Quadrat aus grauen Kästchen sollst du weiße Kästchen legen. Die grauen Kästchen dürfen sich danach nicht mehr berühren.

Beispiel mit 16 grauen Quadraten:



a) Wie viele weiße Kästchen brauchst du, wenn das graue Quadrat aus

- 36
- 100
- 1024

Kästchen besteht?

b) Wie viele weiße Kästchen brauchst du, wenn das graue Quadrat aus

- 25
- 81
- 529

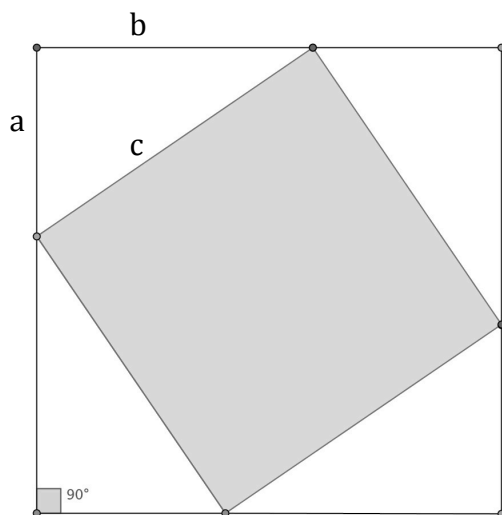
Kästchen besteht?

Eine Mitschülerin war nicht dabei, als ihr die Aufgabe gelöst habt. Formuliert eine allgemeine Erklärung dafür, wie man die Anzahl der weißen Kästchen herausfindet!

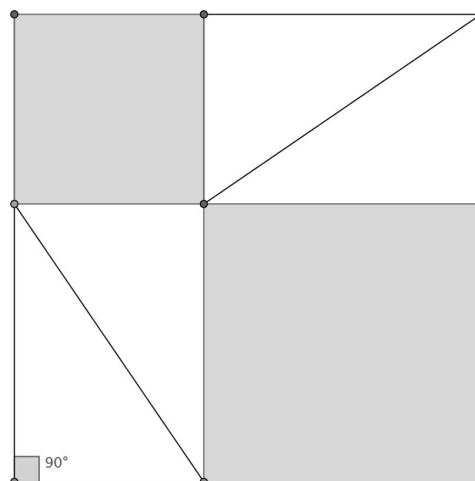
Aufgabe:

Einleitende Aufgabe: Was heißt eigentlich a^2 ?

1. Lege die beiden Figuren (i) und (ii) mit den Puzzleteilen nach!



(i)



(ii)

2. Markiere alle Teile, die gleich groß sind.

3. In Zeichnung (i) wurden die Seiten des Dreiecks links oben mit a , b und c beschriftet.

Suche nun alle Dreiecke in (i) und (ii), die genauso groß sind. Beschrifte die Seiten wie bei dem vorgegebenen Dreieck.

4. Beide Figuren (i) und (ii) haben als Außenlinien ein großes Quadrat. Welche Seitenlänge hat dieses Quadrat?

5. Welche Seitenlängen haben:

- Das schräg liegende Quadrat in Figur (i)?
- Das Quadrat oben links in Figur (ii)?
- Das Quadrat unten links in Figur (ii)?

6. Sind die beiden grauen Flächen in Figur (i) und Figur (ii) gleich groß? Formuliere eine Erklärung.

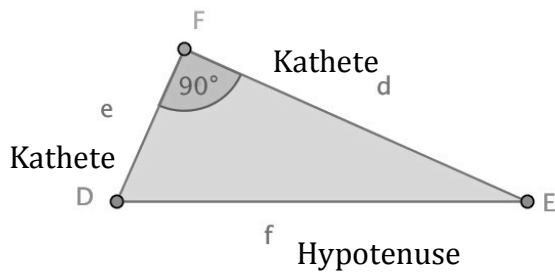
15.10.12 Satz des Pythagoras...

Begriffe:

Einleitende Aufgabe: Identifikation von Katheten und Hypotenuse

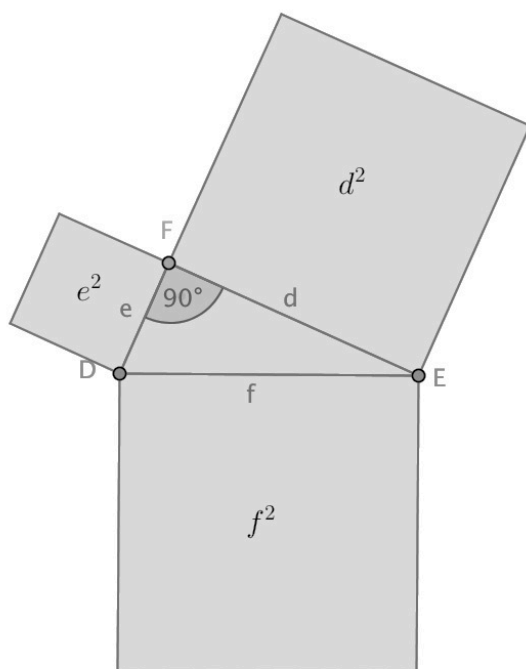
Bei einem rechtwinkligen Dreieck heißen die beiden Seiten, die an den rechten Winkel angrenzen **Katheten**.

Die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, heißt **Hypotenuse**.



Der Satz des Pythagoras:

In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten genauso groß wie der Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse.



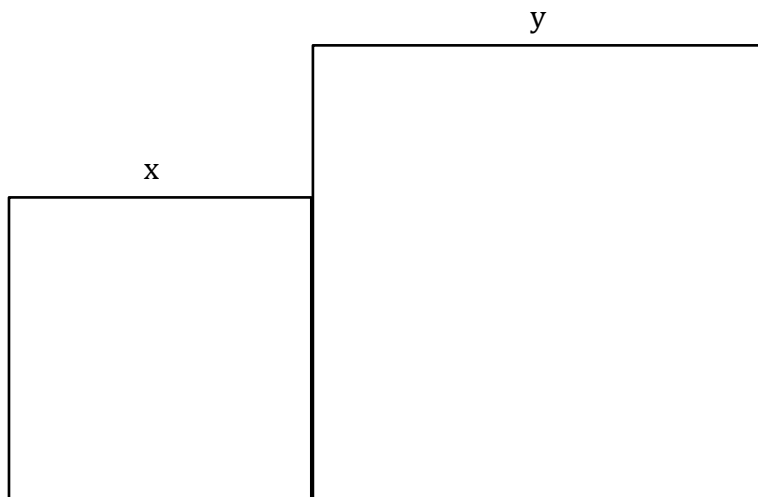
Hier lautet der Satz des Pythagoras also:

$$d^2 + e^2 = f^2$$

...und seine Umkehrung

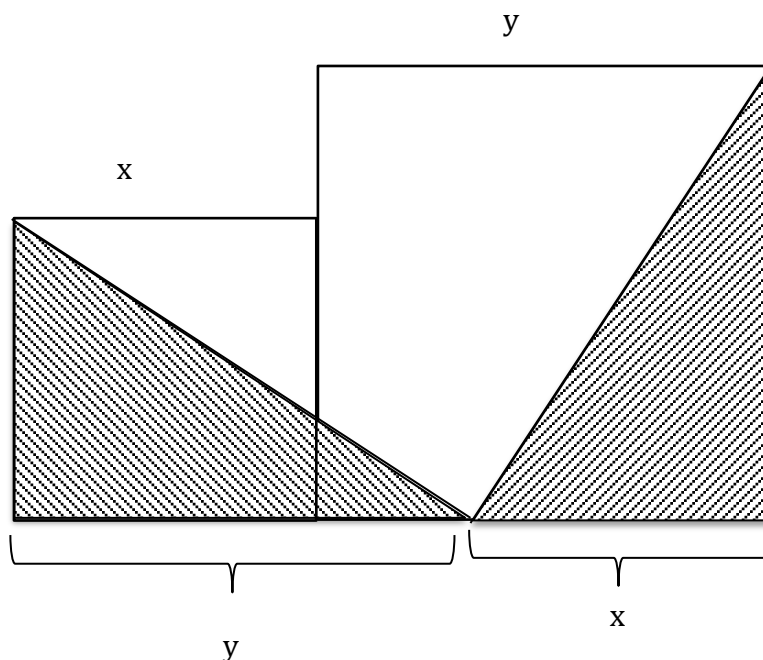
Über ein Dreieck mit den Seiten x, y, z sei bekannt: $x^2 + y^2 = z^2$

Vor euch liegt eine Figur aus 2 Quadraten. Die Seitenlängen bezeichnen wir mit x und y .

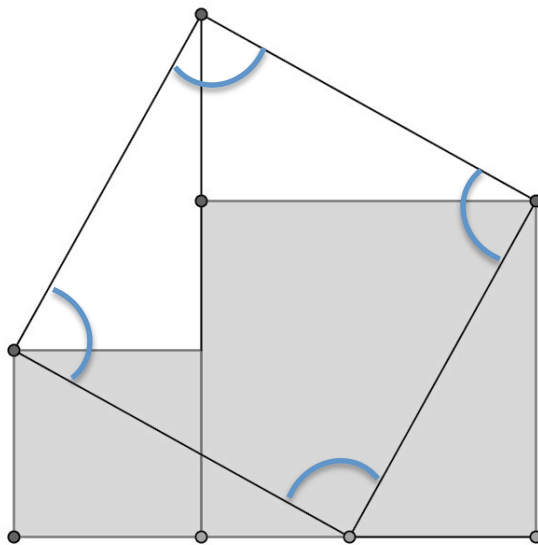


Aufgabe:

Zeichnet folgende Linien ein:



Schneidet die beiden entstandenen Dreiecke ab. Setzt die Figur zu einem Viereck zusammen!



Aufgabe:

Was kannst du über die markierten Winkel sagen?

Funktioniert das immer, egal wie groß x und y sind?

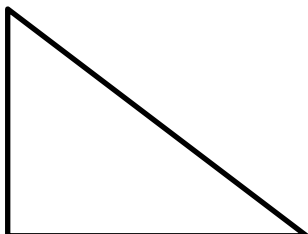
Schlussfolgerung:

Aufgabe:

Es gilt: $3^2 + 4^2 = 5^2$ ($9+16=25$).

Ein rechtwinkliges Dreieck mit diesen Seitenlängen ist unten aufgezeichnet.

Kannst du ein Dreieck mit den drei Seitenlängen 3 cm, 4 cm und 5 cm konstruieren, das keinen rechten Winkel hat?



05.11.12 Lineare Gleichungssysteme: Das Gleichsetzungsverfahren

In der Tabelle seht ihr ein Gleichungssystem mit zwei linearen Gleichungen und zwei Variablen. Es wurde mit dem Gleichsetzungsverfahren gelöst.

In der Tabelle gibt es verschiedene Spalten. Links seht ihr das Gleichungssystem, das Schritt für Schritt verändert wird.

In der zweiten Spalte sollt ihr notieren, was in dem Schritt getan wurde.

Die dritte Spalte beschreibt, warum diese Umformung nützlich ist.

In der letzten Spalte sollt ihr eine Begründung angeben, warum dieser Schritt erlaubt ist.

Beispiel:

	Das habe ich getan:	Wozu habe ich das getan?	Warum darf ich das?
$\begin{cases} 6x + 3y = 12 \\ x + 7y = 11 \end{cases}$			
\downarrow	$\begin{matrix} :3 \\ :7 \end{matrix}$	Ich habe durch die Zahl vor dem y geteilt, damit in beiden Gleichungen das y alleine steht.	Ich teile die Zahlen in jeder Gleichung alle durch dieselbe Zahl. Die Seiten waren vorher gleich groß, also ist auch ein Drittel der linken Seite so groß wie ein Drittel der rechten Seite.
$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ \frac{x}{7} + y = \frac{11}{7} \end{cases}$			
\downarrow			

...

Auf der nächsten Seite findet ihr die Tabelle zum Gleichungssystem

$$\begin{cases} 4x + 4y = 8 \\ -6x + 3y = -9 \end{cases}$$

Füllt bitte die Tabelle möglichst vollständig aus. Ihr könnt dafür mit eurer Nachbarin zusammenarbeiten.

Bitte schreibt als Begründungen ganze Sätze.

Lineare Gleichungssysteme: Das Gleichsetzungsverfahren

	Das wurde getan:	Warum habe ich das getan?	Warum darf ich das?
$\begin{cases} 4x + 4y = 8 \\ -6x + 3y = -9 \end{cases}$			
↓			
$\begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$			
↓			
$\begin{cases} y = 2 - x \\ y = -3 + 2x \end{cases}$			
↓			
$\begin{cases} 2x - 3 = 2 - x \\ y = 2x - 3 \end{cases}$			
↓			
$\begin{cases} 3x = 5 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$			
↓			
$\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = 2x - 3 \end{cases}$			

↓			
$\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = 2 \cdot \frac{5}{3} - 3 \end{cases}$			
↓			
$\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$			
↓			
$L = \left\{ \left(\frac{5}{3} \middle \frac{1}{3} \right) \right\}$			

12.11.12 Lineare Funktionen

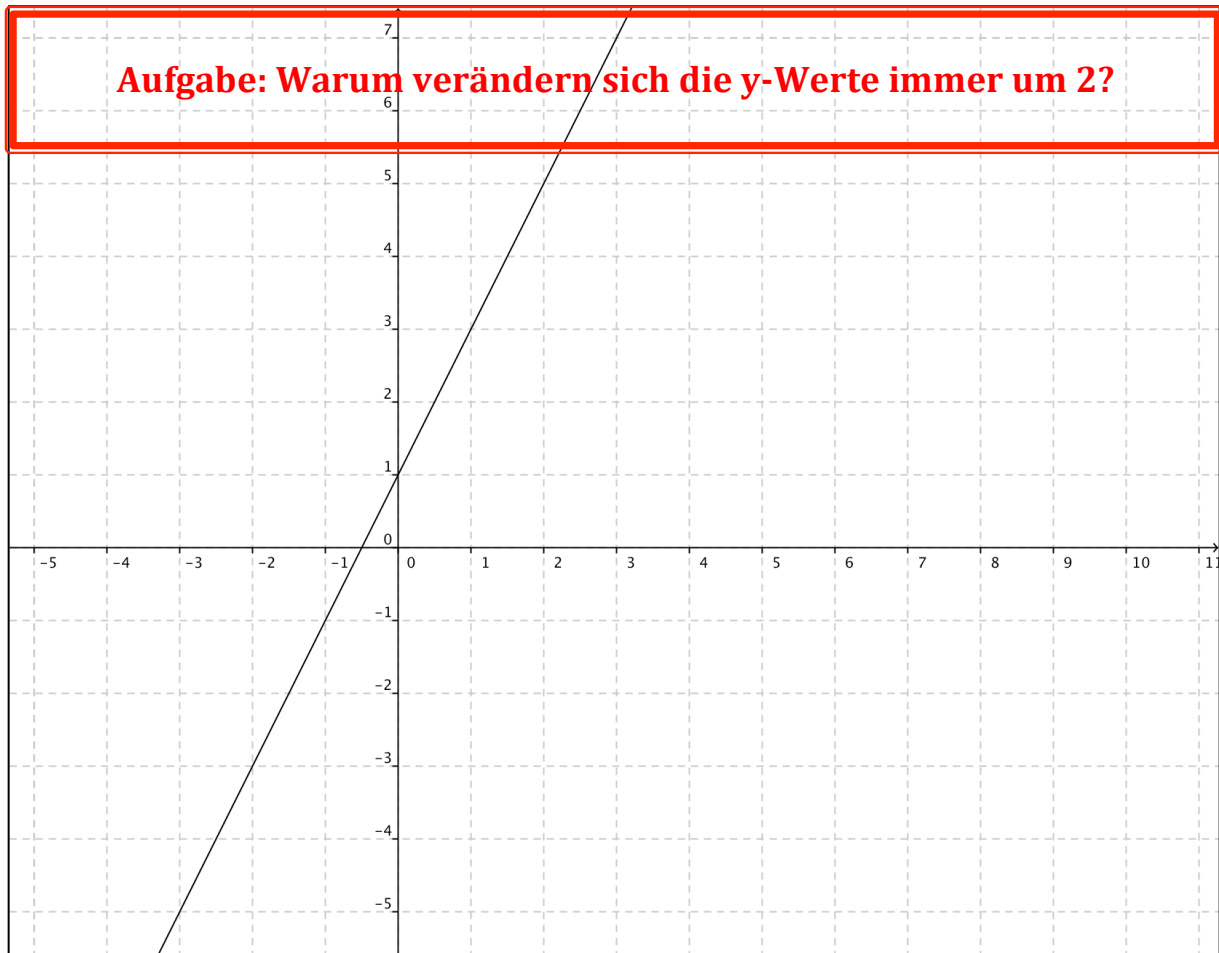
Eine lineare Funktion hat die Form $y = m \cdot x + b$. Du kannst y ausrechnen, indem du verschiedene Werte für x einsetzt.

- 1) Gegeben ist die lineare Funktion $y = 2x + 1$. Berechne die y -Werte für die fehlenden x -Werte und trage sie in die Tabelle ein!

x	-2	-1	0	1	2	3
y						

Dies ist der Graph zu der Funktion $y = 2x + 1$

Aufgabe: Warum verändern sich die y -Werte immer um 2?

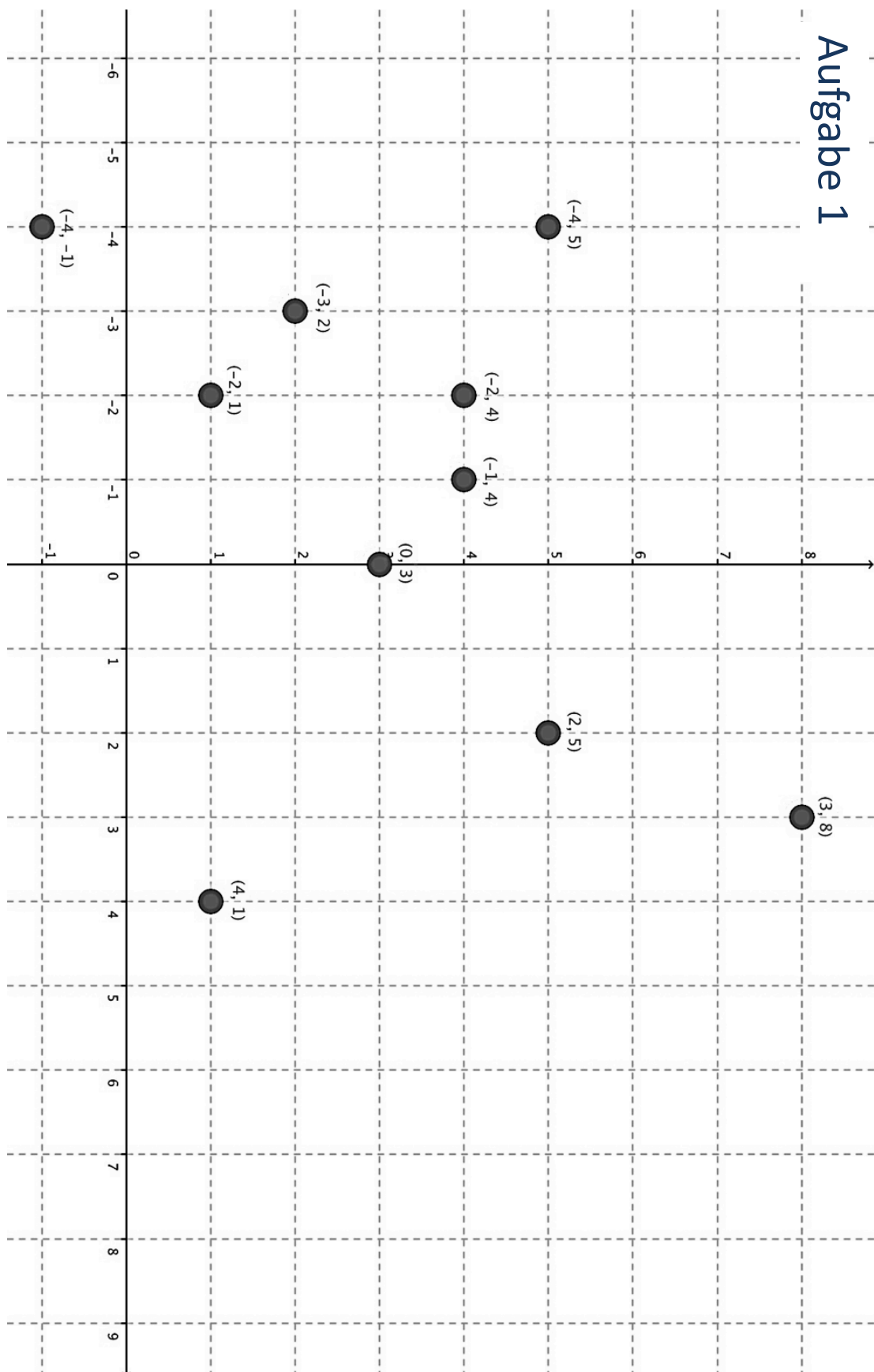


Suche die Punkte, die du in der Wertetabelle berechnet hast auf dem Graph, und markiere sie.

- 2) Berechne die Werte für die Funktion $y = \frac{1}{2}x - 1,5$.

x	-2	-1	0	1	2	3
y						

Aufgabe 1



26.11.12 Lineare Funktionen

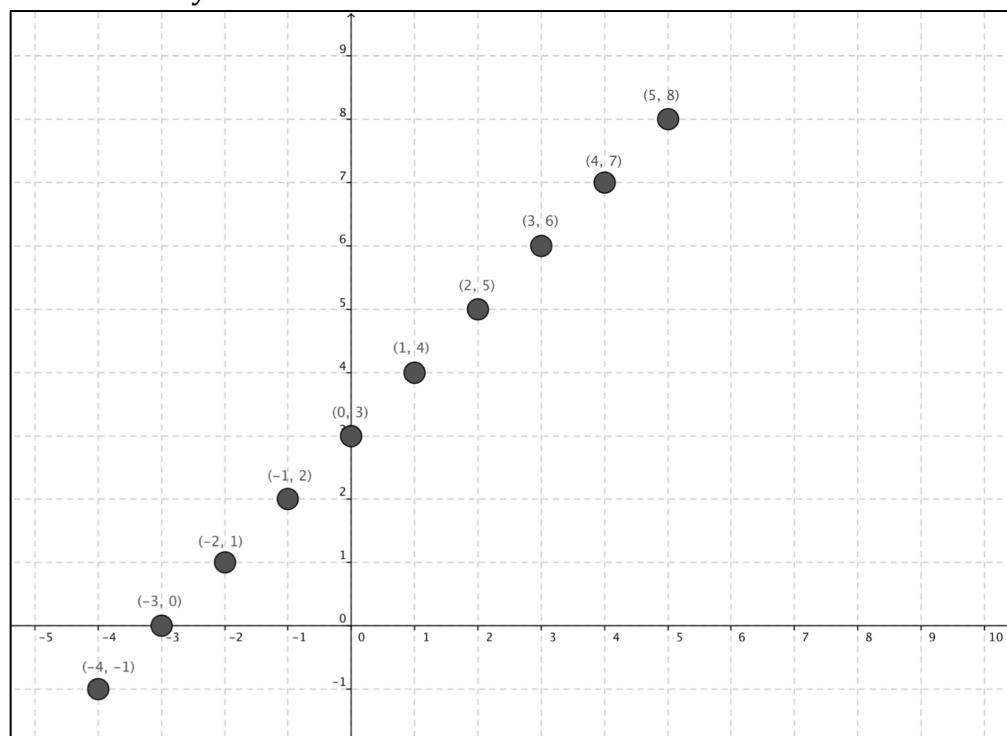
1) Gesucht ist die Gleichung einer linearen Funktion $y = m \cdot x + b$

In der nachfolgenden Wertetabelle und im Koordinatensystem sind einige Punkte der Funktion eingetragen.

Wertetabelle:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Koordinatensystem:



Vervollständigt folgende Sätze:

Wenn der Wert für x um 1 größer wird, dann _____.

Der Graph der Funktion schneidet die y-Achse bei _____. Wenn man in die Gleichung

$y = m \cdot x + b$ eine 0 für x einsetzt, vereinfacht sich die Gleichung zu _____.

Deshalb schneidet der Graph die y-Achse bei _____.

Die Funktionsgleichung lautet _____.

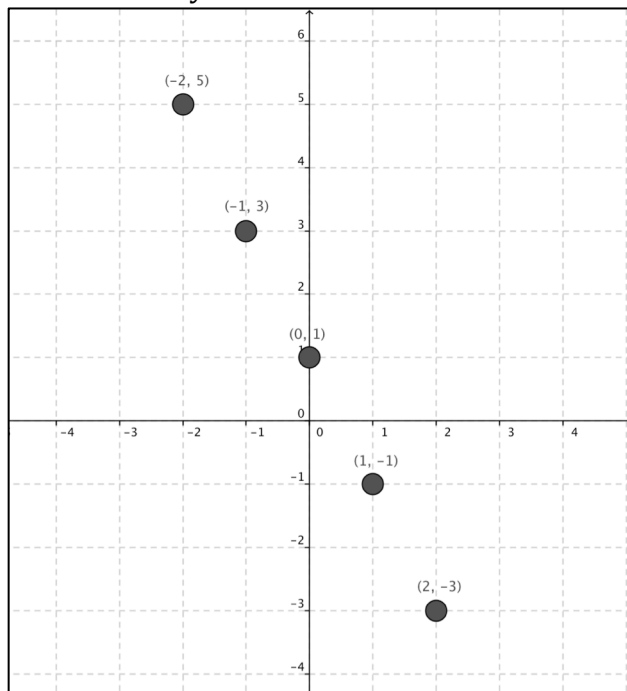
2) Gesucht ist die Gleichung einer linearen Funktion $y = m \cdot x + b$

In der nachfolgenden Wertetabelle und im Koordinatensystem sind einige Punkte der Funktion eingetragen.

Wertetabelle:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	9	7	5	3	1	-1	-3	-5	-7	-9

Koordinatensystem:



Vervollständigt folgende Sätze:

Wenn der Wert für x um 1 größer wird, dann _____.

Der Graph der Funktion schneidet die y-Achse bei _____. Wenn man in die Gleichung $y = m \cdot x + b$ eine 0 für x einsetzt, vereinfacht sich die Gleichung zu _____. Deshalb ist der y-Achsenabschnitt _____.

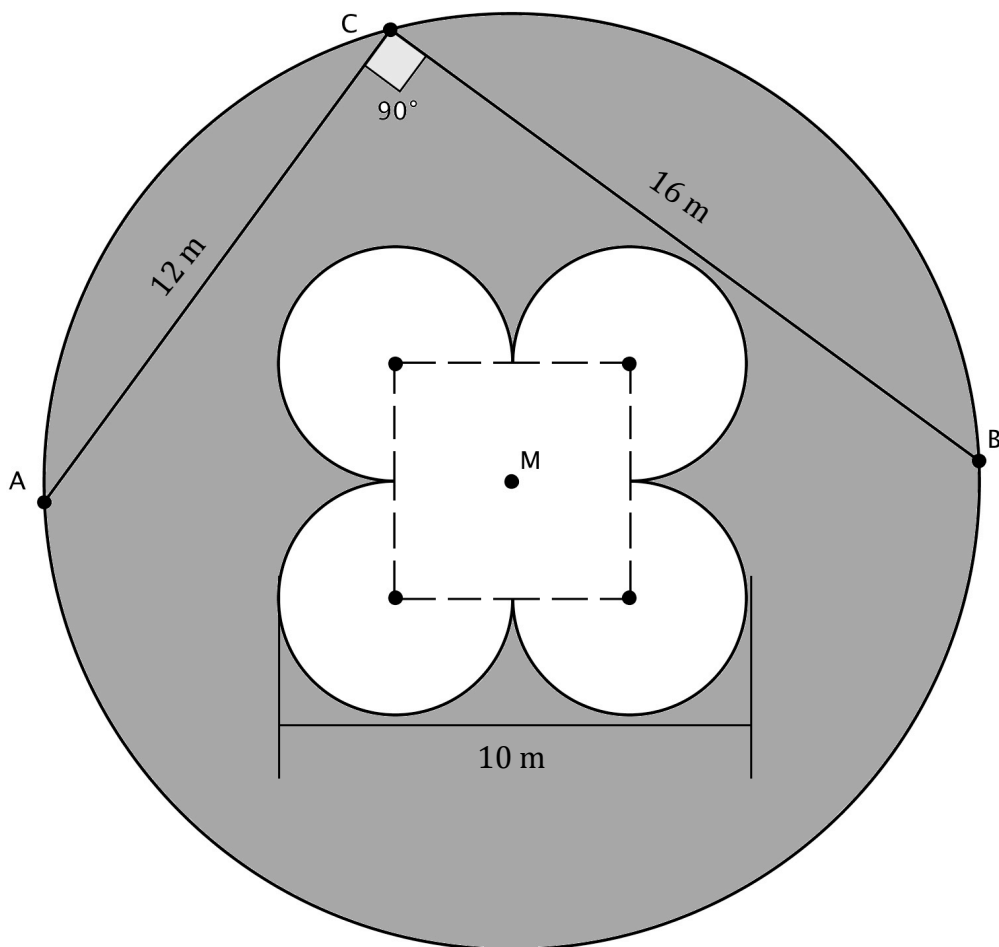
Die Funktionsgleichung lautet _____.

3) Finde eine lineare Funktion, die durch den Punkt (0|2) geht und parallel zu der Funktion aus Aufgabe 2 verläuft.

Die Funktion hat den y-Achsenabschnitt _____ und die Steigung _____.

Also lautet die Funktionsgleichung _____.

10.12.12 Wie groß ist die graue Fläche?



In der Mitte einer Verkehrsinsel in einem Kreisverkehr wurde eine Statue aufgestellt. Nun soll ermittelt werden, wie groß die Rasenfläche um die Statue herum ist.

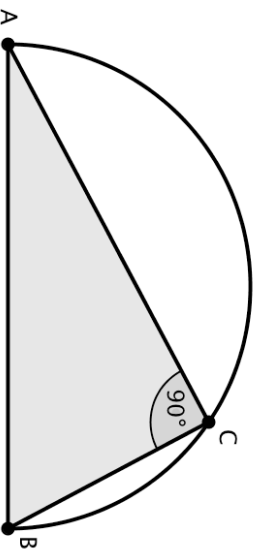
Leider kann man aufgrund der Statue den Durchmesser der Verkehrsinsel nicht direkt messen.

Eure Aufgabe ist es, den Flächeninhalt der grauen Fläche herauszufinden.

In dem Umschlag findet ihr mehrere Kärtchen, die euch bei der Lösung unterstützen können. Nicht alle Kärtchen werden tatsächlich gebraucht!

Viel Erfolg!

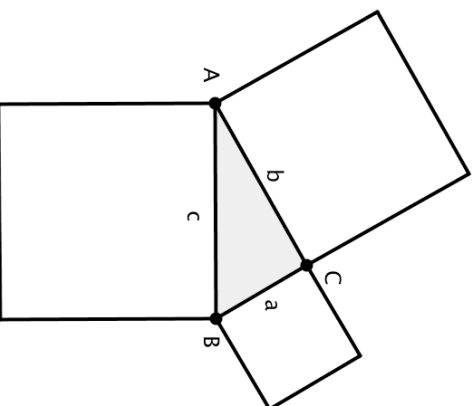
Der Satz von Thales



Wenn $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel im Punkt C ist, dann liegt der Punkt C auf dem Halbkreis über der Strecke \overline{AB} .

Wenn der Punkt C auf dem Halbkreis über der Strecke \overline{AB} liegt, dann ist $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel im Punkt C.

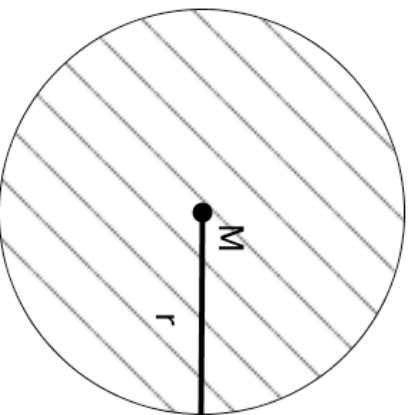
Der Satz von Pythagoras



Für rechtwinklige Dreiecke gilt:
Die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate ist gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse.
Hier: $a^2 + b^2 = c^2$

Wenn die Summe der Quadrate der beiden kürzeren Seiten eines Dreiecks genauso groß ist wie das Quadrat der längeren Seite, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

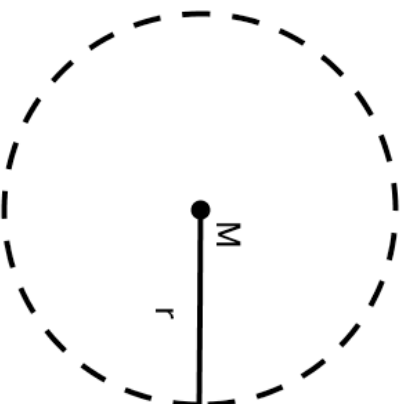
Flächeninhalt eines Kreises



Der Flächeninhalt eines Kreises mit Radius r beträgt:

$$A = r^2 \cdot \pi$$

Umfang eines Kreises

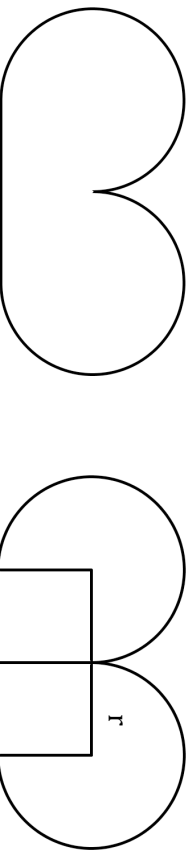


Der Umfang eines Kreises mit Radius r beträgt:

$$U = 2 \cdot r \cdot \pi$$

Tricks mit Flächeninhalten

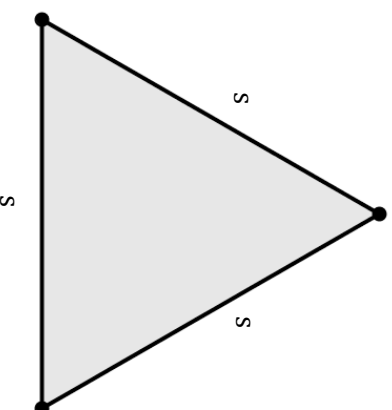
Manchmal lassen sich scheinbar komplizierte Figuren leicht in einfachere Figuren verwandeln.



Die Figur besteht aus 2 kleinen Quadraten mit Seitenlänge r und zwei $\frac{3}{4}$ Kreisen mit Radius r . Der Flächeninhalt der Figur ist also

$$2 \cdot r^2 + 2 \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot r^2 \cdot \pi\right)$$

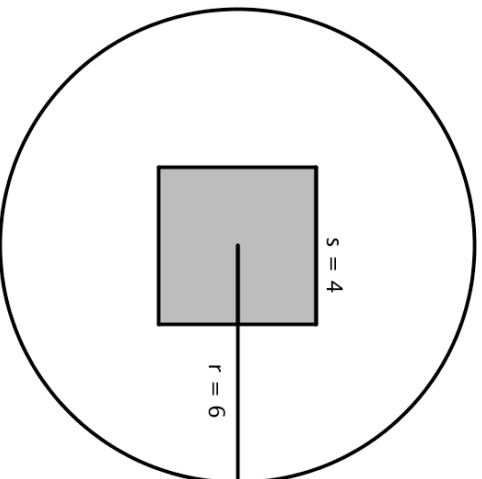
Gleichseitige Dreiecke



Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge s ist

$$A = \frac{s^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Lückenhafte Flächeninhalte



Flächeninhalte lückenhafter Flächen lassen sich oft als Differenz auffassen. Den Inhalt der hellen Fläche links erhält man, wenn man die Fläche des Quadrats von der Kreisfläche abzieht:

$$\begin{aligned} A_{\text{gesucht}} &= A_{\text{Kreis}} - A_{\text{Quadrat}} \\ A_{\text{gesucht}} &= r^2 \cdot \pi - s^2 \\ &= 36 \cdot \pi - 16 \\ &\approx 97,1 \end{aligned}$$

17.12.12 Begründungsaufgabe

a ist eine gerade Zahl und **b** ist eine ungerade Zahl.

a) Kannst du sagen, ob das Produkt **a•b** dann eine gerade oder eine ungerade Zahl ist? Begründe deine Antwort.

b) Nun schau dir die Summe **a+b** an. Ist das Ergebnis immer eine gerade Zahl oder immer eine ungerade Zahl, oder ist das unterschiedlich? Begründe auch diese Antwort.

07.01.13 2013 – Das Jahr der Primzahl

Primzahlen werden all die Zahlen genannt, die nur durch genau 2 natürliche Zahlen teilbar sind: Durch 1 und sich selbst. Die kleinste Primzahl ist die 2.

Aufgabe

Welche Zahlen in dem Muster sind durch 6 teilbar?

Wo sind die Zahlen, die durch 5 teilbar sind?

Wo findet ihr die Zahlen der Siebenerreihe?

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

Aufgabe: Was hat das Siebverfahren des Eratosthenes mit den Multiplikationsreihen zu tun?

In einer Schule gibt es 100 Schließfächer.
Es gehen nacheinander 100 Schüler an den Türen entlang.

Der zweite Schüler schließt jede zweite Tür, beginnend bei Schließfach 2.

Schüler 4 beginnt bei Schließfach 4 und ändert den Zustand jeder vierten Tür (Tür 4 war geschlossen und wird nun geöffnet, Tür 8 ebenfalls und so weiter).
So geht es weiter bis Schüler 100.

Varianten: Was ist die nächste offene Zahl? (Nach 49; nach 64)

- 1) Was haben die übrig gebliebenen Zahlen gemeinsam?
- 2) Stell dir dasselbe Problem vor mit 250 Schließfächern und 250 Schülern. Welche Schließfächer sind dann geöffnet, wenn der 250. Schüler vorbeigelaufen ist?
- 3) Formuliere eine Begründung.

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
42	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

21.01.13 Offene Türen Teil 2 – die Begründung!

Es gehen nacheinander 100 Schüler an den Türen entlang.

Der erste Schüler öffnet die Türen aller Schließfächer.

Der zweite Schüler schließt jede zweite Tür, beginnend bei Schließfach 2.

Der dritte Schüler beginnt bei Schließfach 3 und ändert den Zustand jeder dritten Tür (Tür 3 war offen und wird nun geschlossen, Tür 6 war geschlossen und wird nun geöffnet).

Schüler 4 beginnt bei Schließfach 4 und ändert den Zustand jeder vierten Tür (Tür 4 war geschlossen und wird nun geöffnet, Tür 8 ebenfalls und so weiter).

So geht es weiter bis Schüler 100.

Nach dem 100. Schüler sind die Türen 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 und 100 geöffnet. (Siehe Seite 2).

Bitte sprecht zunächst zusammen über die folgenden Aufgaben. Jede von euch soll dann eine Lösung für die Aufgaben aufschreiben.

- 1) Eine erste Vermutung war letzte Woche, dass es die Primzahlen sein würden, die offen bleiben. Die 11 ist eine Primzahl, aber ihre Tür ist verschlossen. Überlegt eine Begründung, warum das so ist und schreibt diese Begründung auf.
- 2) Bei welchen Schülern wird die Tür von Schließfach 24 bewegt?
- 3) Warum bleibt Schließfach 25 offen?
- 4) Überlegt eine Begründung, warum genau die Schließfächer offen sind, die eine Quadratzahl als Nummer haben.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
42	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

18.02.13 Wenn-Dann-Beziehungen

Bestimmt bei folgenden Sätzen, ob sie in nur eine oder in beide Richtungen wahr sind. Wenn ihr euch nicht sicher seid, schreibt euch zuerst die Umkehrung auf!

„Wenn eine Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist sie auch durch 2 teilbar“.

- ☐ Eine Richtung
- ☐ Beide Richtungen

„Wenn $a=2$ ist und $b=3$ ist, dann ist $a+b=5$ “.

- ☐ Eine Richtung
- ☐ Beide Richtungen

„Wenn eine Zahl durch 2 teilbar ist, dann ist sie gerade“.

- ☐ Eine Richtung
- ☐ Beide Richtungen

„Wenn eine Zahl ungerade ist, dann ist das Doppelte dieser Zahl gerade“.

- ☐ Eine Richtung
- ☐ Beide Richtungen

„Wenn $x=2$ ist, dann ist 6 das Ergebnis von $3 \cdot x$ “.

- ☐ Eine Richtung
- ☐ Beide Richtungen

Schultaschen und Nagelfeilen

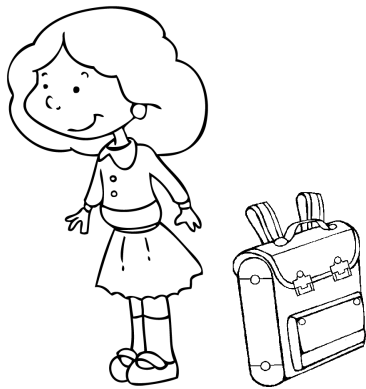
Nun geht es um die Überprüfung dieser Aussage:

„Wenn eine Schultasche einem Mädchen gehört, dann ist eine Nagelfeile darin.“

Vor dir stehen ein Mädchen und ein Junge mit geschlossenen Schultaschen. Außerdem stehen zwei offene Schultaschen da, bei denen du nachschauen kannst, wem sie gehören. In einer der offenen Schultaschen befindet sich eine Nagelfeile, in der anderen keine.

Was musst du alles überprüfen, um herauszufinden, ob die Aussage für diese 4 Fälle stimmt?

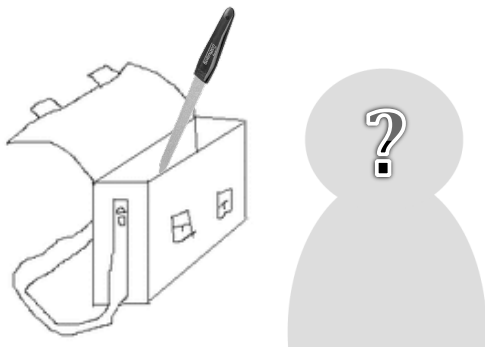
Kreuze an!



- ☐ Tasche öffnen und nachsehen, ob eine Nagelfeile darin ist



- ☐ Tasche öffnen und nachsehen, ob eine Nagelfeile darin ist



- ☐ Prüfen, ob die Tasche einem Mädchen oder einem Jungen gehört



- ☐ Prüfen, ob die Tasche einem oder einem Jungen gehört

25.02.13 Pyramidenschatten – Wie hoch ist die Cheops-Pyramide?

Die Cheops-Pyramide ist eine berühmte Sehenswürdigkeit in Ägypten. Sie ist die größte der drei Pyramiden von Gizeh.



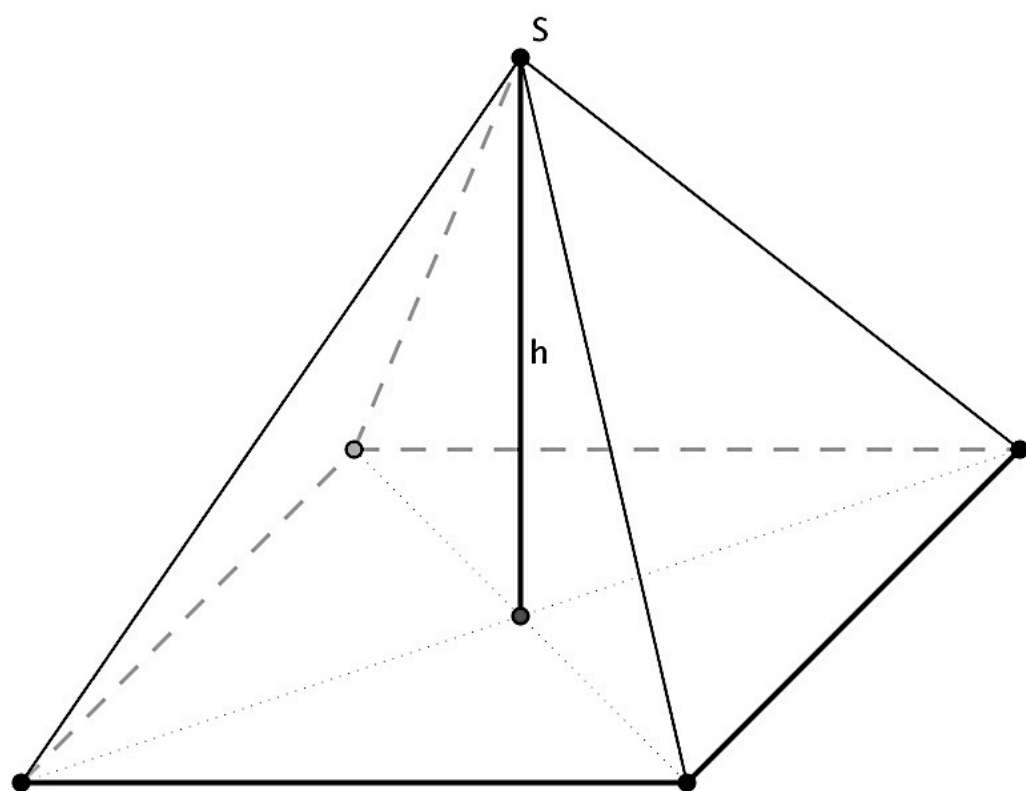
Eure Aufgabe ist es, die Höhe der Pyramide herauszufinden.

Folgende Angaben sind bekannt:

Die Grundfläche ist quadratisch und hat eine Fläche von 52.900 m^2 .

Eine Pyramidenseite hat eine Fläche von 21.595 m^2 .

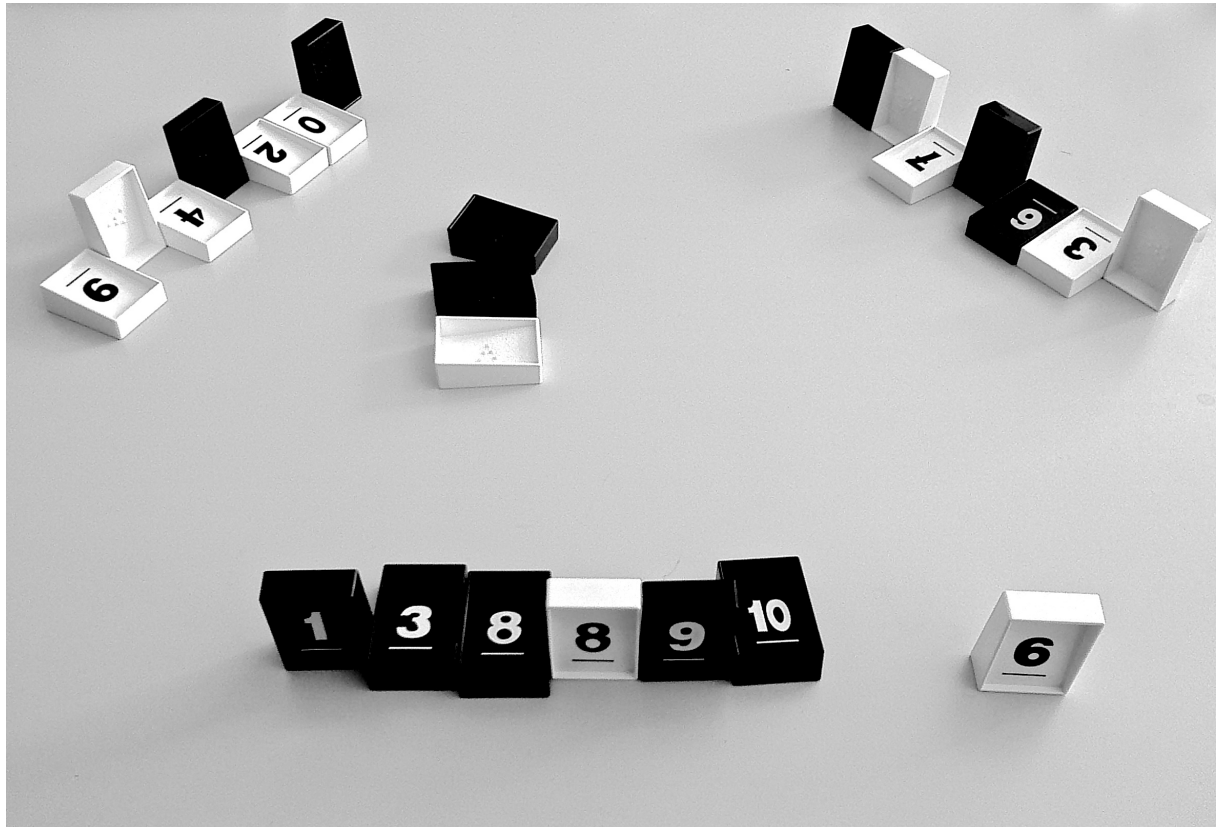
Wie hoch ist die Cheopspyramide?



11.03.13 Da Vinci Code

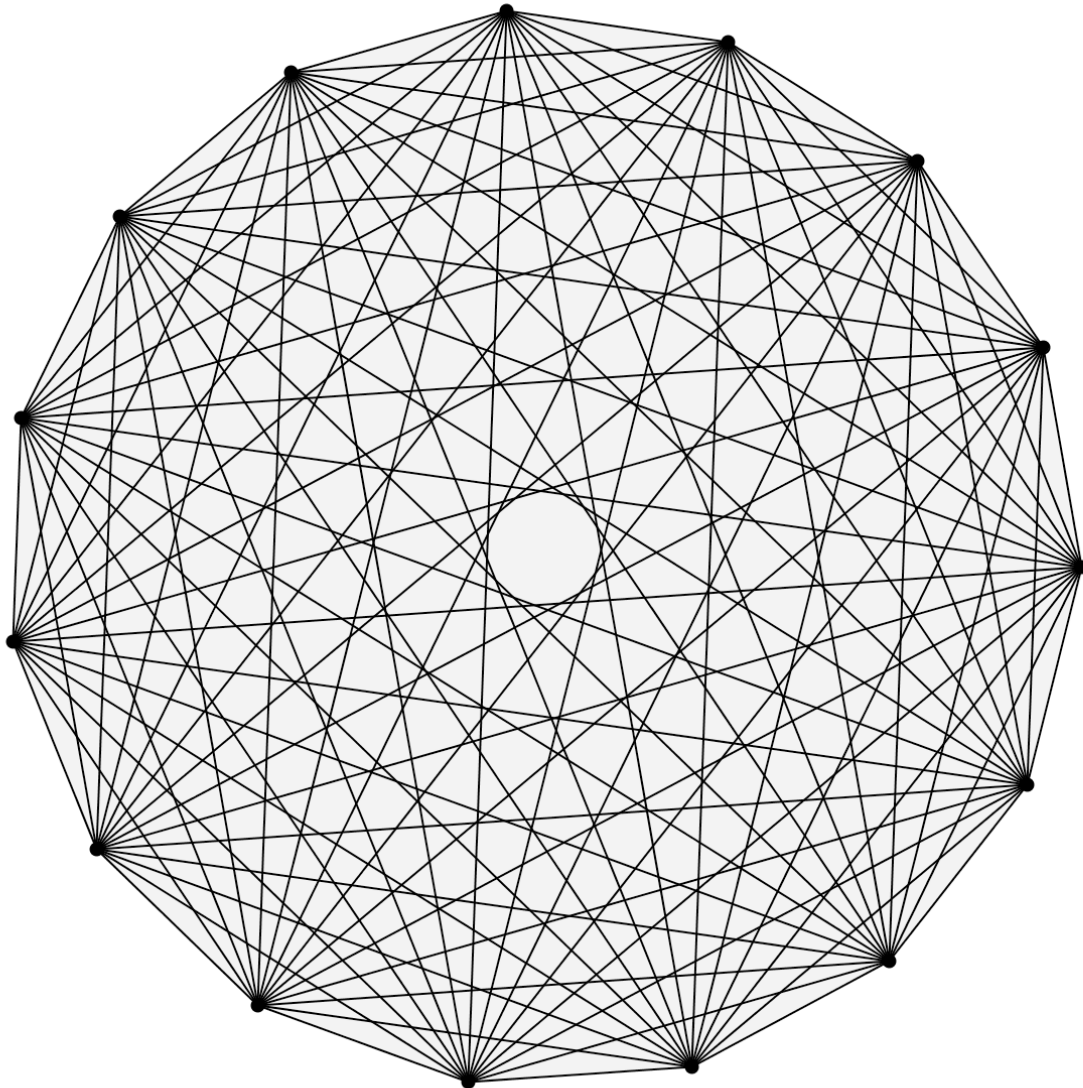
Du spielst mit 2 Mitspielern.

Auf dem Tisch befindet sich folgende Spielsituation:



Wie lauten die Codes deiner Gegner?

15.04.13 Wie viele Linien gibt es im 15-Eck?



29.04.13 Eulerquadrate

Ihr habt 16 Steine zur Verfügung. Es gibt 4 verschiedene Farben (Gelb, Blau, Grün, Rot) und vier unterschiedliche Symbole (Kreis, Blume, Quadrat, Stern). Jede Kombination aus Symbol und Farbe kommt genau einmal vor.

Eure Aufgabe ist es, die Steine in das Quadrat unten so einzuordnen, dass jede Farbe und jedes Symbol **genau einmal** in jeder Spalte und jeder Zeile vorkommt.

Habt ihr eine Lösung gefunden? Dann geht es auf der nächsten Seite weiter.

Übertragt bitte die Farben der Steine in das linke Quadrat und die Symbole in das rechte Quadrat.

Farben:

Symbole:

Fällt euch an den beiden Quadraten etwas auf?

06.05.13 Magische Quadrate

Magische Quadrate sind Quadrate aus Zahlen, bei denen jede Zeile, jede Spalte und beide Diagonalen dieselbe Summe haben.

Es kommen dabei im Quadrat nur unterschiedliche Zahlen vor.

Füllt die Quadrate so aus, dass ein magisches Quadrat entsteht. In jedem Quadrat sollen später alle Zahlen von 1 bis 9 stehen.

Die Summe der Zahlen in jeder Spalte, in jeder Zeile und in jeder Diagonale ist 15.

4	3			6		8			7	2
	5	1		7		3		1		
2		6			9	4			3	

Aufgabe: Warum ist die 5 immer im mittleren Feld?

Bonusrätsel: Bei diesem 5x5 Felder großen magischen Quadrat beträgt die Summe in jeder Zeile, jeder Spalte und den beiden Diagonalen 65. Es sollen die Zahlen von 1 bis 25 eingetragen werden. Als Hilfe sind die fehlenden Zahlen unten angegeben.

3		9	22	
20		21	14	2
	25	13		
24		5	18	6
	4		10	23

Fehlende Zahlen: {1, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 17, 19}

27.05.13 Magische Quadrate – Teil 2

Füllt die Quadrate so aus, dass ein magisches Quadrat entsteht. In jedem Quadrat sollen später alle Zahlen von 1 bis 16 stehen.

	6	3	16
4	15		5
	1	8	
7		13	2

4		15	
9		6	12
	11		8
16		3	

Aufgabe: Was passiert mit der Zeilen- beziehungsweise Spaltensumme, wenn man jedes Feld um den gleichen Wert erhöht?

Legt mit den Quirkle-Steinen ein Quadrat, bei dem auch auf den Diagonalen alle Farben und Symbole vorhanden sind.

Jede Farbe und jedes Symbol bekommen nun eine Zahl.

Farbe	
Gelb	0
Rot	4
Grün	8
Blau	12

Symbol	
Stern	1
Blume	2
Kreis	3
Quadrat	4

Farben			

Symbole			

Summe			

Ist das entstandene Quadrat ein magisches Quadrat?

Bonusrätsel: Bei diesem 5x5 Felder großen magischen Quadrat beträgt die Summe in jeder Zeile, jeder Spalte und den beiden Diagonalen 65. Es sollen die

Zahlen von 1 bis 25 eingetragen werden. Als Hilfe sind die fehlenden Zahlen unten angegeben.

3		9	22	
20		21	14	2
	25	13		
24		5	18	6
	4		10	23

Fehlende Zahlen: {1, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 17, 19}

06.06.13 Gerade und ungerade Zahlen (auch 10.06.13)

a) Über zwei Zahlen **a** und **b** ist bekannt: Das Produkt **a•b** ist eine ungerade Zahl. Kannst du mit dieser Information schon etwas über **a** und **b** sagen? (Sind **a** und **b** gerade oder ungerade?) Begründe deine Antwort

b) Über zwei Zahlen **c** und **d** ist bekannt: Die Summe **c+d** ist eine ungerade Zahl. Kannst du mit dieser Information schon etwas über **c** und **d** sagen? (Sind **c** und **d** gerade oder ungerade?) Begründe deine Antwort.

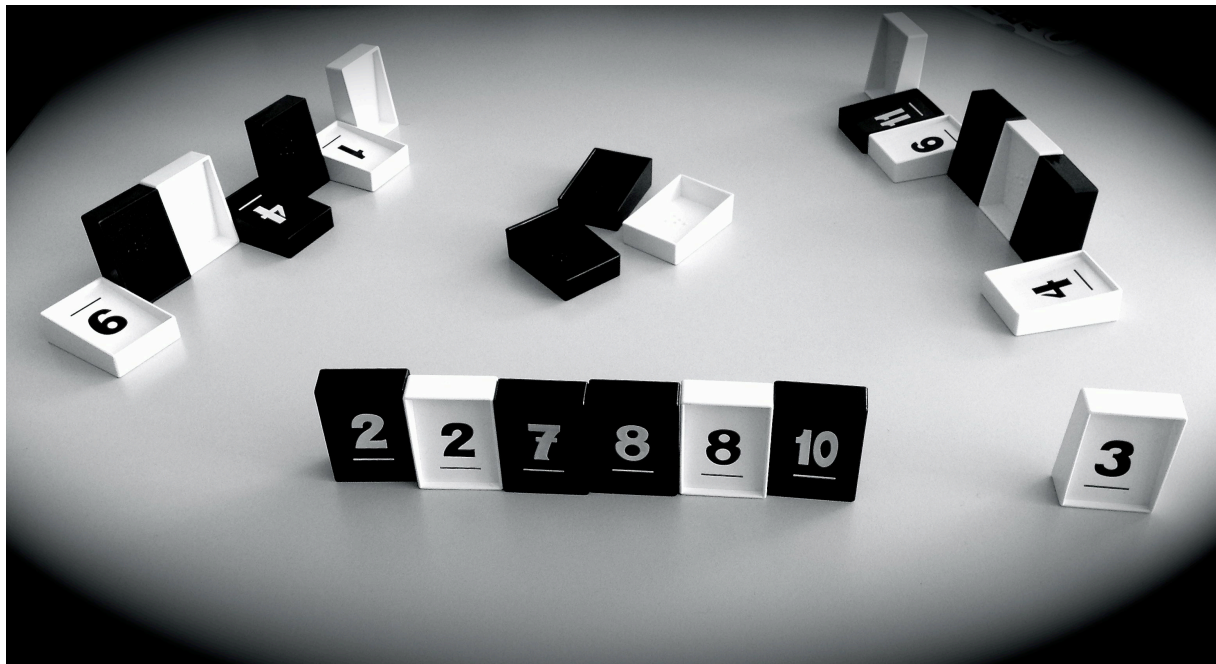
Da Vinci Code

Beim Spiel „Da Vinci Code“ geht es darum, durch geschicktes Kombinieren von Raten und Nachdenken den Code der Gegner herauszubekommen. Die Regeln sind:

- Es gibt Steine mit den Zahlen von 0 bis 11, jeweils einmal in weiß und einmal in schwarz. (Also gibt es zum Beispiel genau eine weiße 7 und genau eine schwarze 7).
- Die Spieler müssen die Zahlen vor sich aufsteigend ordnen, also die kleinste Zahl nach links stellen und die größte nach rechts. Hat man eine Zahl in beiden Farben, steht die schwarze weiter links.
- Die Spieler sind abwechselnd an der Reihe und versuchen, die Steine der Mitspieler zu erraten. Wenn eine Zahl richtig geraten wurde, muss sie umgekippt werden und liegt dann offen. In jeder Runde wird ein neuer Stein aus der Mitte gezogen.

Du bist an der Reihe und hast die weiße 3 gezogen (unten rechts im Bild).

Bereits in dieser Situation kannst du alle anderen Steine bestimmen. Wie lauten die Codes deiner Mitspieler, und welche Steine liegen noch in der Mitte?



Mathematisches Argumentieren als Diskurs
Eine theoretische und empirische Betrachtung
diskursiver Hindernisse

Cramer, J.

2018, XV, 363 S. 50 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-658-22907-8