4.2 Wellen

4.2.1 Wellen – Bemessung auf Tragfähigkeit

Überschlägige Wellenberechnung

a) Nur Drehmoment berücksichtigen

Mindestdurchmesser einer **Voll**welle: $d \geq \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}\frac{T}{\tau_{t,zul}}}$ mit $\tau_{t\,zul} = \frac{\tau_{t\,Sch}}{10}$

- Die Torsionsschwellfestigkeit $\boldsymbol{\tau_{t\,Sch}}$ kann **Anhang A1** entnommen werden.

Mindestdurchmesser einer **Hohl**welle: $D \geq \frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(d/D\right)^4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{16}{\pi}\frac{T}{\tau_{t,zul}}}$

- Der Durchmesser-Vergrößerungsfaktor $K_D = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(d/D\right)^4}}$ ist **Tabelle 4.1** zu entnehmen.

b) Biegung und Drehmoment berücksichtigen

Mindestdurchmesser einer **Voll**welle: $d \geq \sqrt[3]{\frac{32}{\pi}\frac{M_V}{\sigma_{V\,zul}}}$ mit $\sigma_{V\,zul} = \frac{\sigma_{b\,W}}{4}$

Vergleichsmoment: $M_V = \sqrt{M_b^2 + \frac{1}{2}\cdot T^2}$

- Die Biegewechselfestigkeit $\boldsymbol{\sigma_{b\,W}}$ kann **Anhang A.1** Anhang entnommen werden.

Mindestdurchmesser einer **Hohl**welle: $D \geq \frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(d/D\right)^4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{32}{\pi}\frac{M_V}{\sigma_{V\,zul}}}$

- Der Durchmesser-Vergrößerungsfaktor $K_D = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(d/D\right)^4}}$ ist **Tabelle 4.1** zu entnehmen.

Wellenberechnung nach DIN 743 (Nachrechnung)

1. Belastungsgrößen

Belastung nach den Regeln der Technischen Mechanik bestimmen.

Amplituden: $F_{zd,a}$, $M_{b,a}$ und T_a

Mittelwerte: $F_{zd,m}$, $M_{b,m}$ und T_m

2. Wirksame Spannungen

	Amplituden	Mittelwerte	Maximalwerte
Zug/Druck	$\sigma_{zd,a} = \frac{F_{zd,a}}{A}$	$\sigma_{zd,m} = \frac{F_{zd,m}}{A}$	$\sigma_{zd,\max} = \sigma_{zd,m} + K_A \cdot \sigma_{zd,a}$
Biegung	$\sigma_{b,a} = \frac{M_{b,a}}{W_b}$	$\sigma_{b,m} = \frac{M_{b,m}}{W_b}$	$\sigma_{b,\max} = \sigma_{b,m} + K_A \cdot \sigma_{b,a}$
Torsion	$\tau_{t,a} = \frac{T_a}{W_t}$	$\tau_{t,m} = \frac{T_m}{W_t}$	$\tau_{t,\max} = \tau_{t,m} + K_A \cdot \tau_{t,a}$

Der Anwendungsfaktor (Stoßfaktor) $\boldsymbol{K_A}$ kann Tabelle 6.7 entnommen werden.

3. Gestaltfestigkeit

Für die Bauteil-Wechselfestigkeit gilt:

$$\sigma_{zd,WK} = \frac{\sigma_{zd,W} \cdot K_1(d_{eff})}{K_\sigma} \quad ; \qquad \sigma_{b,WK} = \frac{\sigma_{b,W} \cdot K_1(d_{eff})}{K_\sigma} \quad ; \qquad \tau_{t,WK} = \frac{\tau_{t,W} \cdot K_1(d_{eff})}{K_\tau}$$

Wechselfestigkeiten $\sigma_{zd,W}, \sigma_{b.W}$ und $\tau_{t;W}$ (Anhang A1)

Technologischer Größeneinflußfaktor $K_1(d_{eff})$ (Tabelle 4.3a)

Gesamteinflußfaktor: $K_\sigma = \left(\frac{\beta_\sigma}{K_2(d)} + \frac{1}{K_{F\sigma}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_V}$ bzw. $K_\tau = \left(\frac{\beta_\tau}{K_2(d)} + \frac{1}{K_{F\tau}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{K_V}$

Kerbwirkungsfaktoren β_σ bzw. β_τ (Tabelle 4.2)

Geometrischer Größeneinfluß $K_2(d)$ (Tabelle 4.3b)

Oberflächeneinfluß $K_{F\sigma}$ bzw. $K_{F\tau}$ (Tabelle 4.3c)

Für den Tragfähigkeitsnachweis wird empfohlen $K_V = 1$ zu setzen!

4. *Ertragbare Spannungen (Amplituden)*

Fall 1: $\sigma_m = konst.$

Wenn bei Änderung der Betriebsbelastung die Amplitude der Spannung sich ändert und die Mittelspannung konstant bleibt gilt:

$$\sigma_{zd,ADK} = \sigma_{zd,WK} - \psi_{zd,\sigma K} \cdot \sigma_{mv} \;; \quad \sigma_{b,ADK} = \sigma_{b,WK} - \psi_{b,\sigma K} \cdot \sigma_{mv} \;; \quad \tau_{t,ADK} = \tau_{t,WK} - \psi_{\tau K} \cdot \tau_{mv}.$$

Fall 2: $\sigma_o / \sigma_u = konst.$ bzw. $\sigma_a / \sigma_{mv} = konst.$

Wenn bei einer Änderung der Betriebsbelastung das Verhältnis zwischen Unter- und Oberspannung, bzw. das Verhältnis von Ausschlagspannung zur Mittelspannung konstant bleibt gilt:

$$\sigma_{zd,ADK} = \frac{\sigma_{zd,WK}}{1 + \psi_{zd,\sigma K} \cdot \sigma_{mv} / \sigma_{zd,a}} \;; \quad \sigma_{b,ADK} = \frac{\sigma_{b,WK}}{1 + \psi_{b,\sigma K} \cdot \sigma_{mv} / \sigma_{b,a}} \;; \quad \tau_{t,ADK} = \frac{\tau_{t,WK}}{1 + \psi_{\tau K} \cdot \tau_{mv} / \tau_{t,a}}.$$

mit den Einflußfaktoren der Mittelspannungsempfindlichkeit:

$$\psi_{zd,\sigma K} = \frac{\sigma_{zd,WK}}{2 \cdot K_1(d_{eff}) \cdot R_m - \sigma_{zd,WK}}$$

$$\psi_{b,\sigma K} = \frac{\sigma_{b,WK}}{2 \cdot K_1(d_{eff}) \cdot R_m - \sigma_{b,WK}}$$

$$\psi_{\tau K} = \frac{\tau_{t,WK}}{2 \cdot K_1(d_{eff}) \cdot R_m - \tau_{t,WK}}.$$

Für die Vergleichsmittelspannung gilt:

$$\sigma_{mv} = \sqrt{\left(\sigma_{zd,m} + \sigma_{b,m}\right)^2 + 3 \cdot \tau_{t,m}^2} \qquad \text{bzw.} \qquad \tau_{mv} = \frac{\sigma_{mv}}{\sqrt{3}}$$

5. *Bauteilfließgrenze*

Fließgrenzen für Zug/Druck: $\sigma_{zd,FK} = K_1(d_{eff}) \cdot K_{2F} \cdot \gamma_F \cdot R_e$

Biegung: $\sigma_{b,FK} = K_1(d_{eff}) \cdot K_{2F} \cdot \gamma_F \cdot R_e$

Torsion: $\tau_{t,FK} = K_1(d_{eff}) \cdot K_{2F} \cdot \gamma_F \cdot R_e / \sqrt{3}$

Technologischer Größenfaktor $K_1(d_{eff})$ (Tabelle 4.3a)

Statische Stützwirkung K_{2F} (Tabelle 4.3d)

Der Erhöhungsfaktor der Fließgrenze γ_F ist abhängig von der Beanspruchungsart und der Kerbwirkung:

Beanspruchungsart	Kerbwirkung	Erhöhungsfaktor
Zug/Druck oder Biegung	$\beta_\sigma \leq 1{,}5$	$\gamma_F = 1{,}00$
	$1{,}5 < \beta_\sigma \leq 2{,}0$	$\gamma_F = 1{,}05$
	$2{,}0 < \beta_\sigma \leq 3{,}0$	$\gamma_F = 1{,}10$
	$\beta_\sigma > 3{,}0$	$\gamma_F = 1{,}15$
Torsion	beliebig	$\gamma_F = 1{,}00$

6. *Festigkeitsnachweis*

Sicherheit bezüglich *Dauerfestigkeit:*

$$\frac{1}{S_D} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zd,a}}{\sigma_{zd,ADK}} + \frac{\sigma_{b,a}}{\sigma_{b,ADK}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{t,a}}{\tau_{t,ADK}}\right)^2}$$

Sicherheit gegen *Überschreiten der Fließgrenze:*

$$\frac{1}{S_F} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{zd,\max}}{\sigma_{zd,FK}} + \frac{\sigma_{b,\max}}{\sigma_{b,FK}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{t,\max}}{\tau_{t,FK}}\right)^2}$$

Liegen keine speziellen Vorschriften oder Vereinbarungen vor, ist $S_{\min} \geq 1{,}2$ zu setzen.

4.2.2 Wellen – Bemessung auf Verformung

Verdrehung

Für konstante Wellenquerschnitte gilt:

Verdrehwinkel: $\widehat{\varphi} = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_p}$

Vollwelle: $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$

Hohlwelle: $I_p = \frac{\pi \cdot \left(D^4 - d^4\right)}{32}$

Für abgesetzte Wellen (unterschiedliche Wellendurchmesser) gilt:

Verdrehwinkel: $\widehat{\varphi} = \frac{T}{G} \cdot \left(\frac{l_1}{I_{p1}} + \frac{l_2}{I_{p2}} + \ldots \right)$

***Auslegung*:** Erforderlicher Mindestdurchmesser, wenn ein zulässiger Verdrehwinkel φ nicht überschritten werden darf (gültig für konstante Wellendurchmesser).

Mindestdurchmesser einer **Voll**welle: $d \geq \sqrt[4]{\frac{32}{\pi} \frac{T \cdot l}{G \cdot \widehat{\varphi}_{zul}}}$

Mindestdurchmesser einer **Hohl**welle: $D \geq \frac{1}{\sqrt[4]{1 - (d/D)^4}} \cdot \sqrt[4]{\frac{32}{\pi} \frac{T \cdot l}{G \cdot \widehat{\varphi}_{zul}}}$

Durchbiegung

***Annahme*:** konstanter Wellenquerschnitt, Einzellast in der Mitte der Lager (Tabelle 1.4)

***Auslegung*:** Erforderlicher Mindestdurchmesser, wenn eine zulässige Durchbiegung f nicht überschritten werden darf.

Mindestdurchmesser einer **Voll**welle: $d \geq \sqrt[4]{\frac{4}{3 \cdot \pi} \frac{F \cdot l^3}{E \cdot f_{zul}}}$

***Auslegung*:** Erforderlicher Mindestdurchmesser, wenn ein zulässiger Neigungswinkel α nicht überschritten werden darf.

Mindestdurchmesser einer **Voll**welle: $d \geq \sqrt[4]{\frac{4}{\pi} \cdot \frac{F \cdot l^2}{E \cdot \tan \alpha_{zul}}}$

4.2.3 Dynamisches Verhalten

Drehschwingungen

Kritische Winkelgeschwindigkeit (Eigenfrequenz):

$$\omega_k = \sqrt{\frac{R_t}{\Theta_g}}$$

Drehfederkonstante: $R_t = \frac{T}{\widehat{\varphi}} = \frac{G \cdot I_p}{l}$

Massenträgheitsmoment: $\Theta = m\frac{R^2}{2}$ (für Vollwelle)

Ersatzdrehmasse: $\Theta_g = \frac{\Theta_1 \cdot \Theta_2}{\Theta_1 + \Theta_2}$ (für zwei Drehmassen)

Biegeschwingungen

Kritische Winkelgeschwindigkeit der masselosen Welle mit Einzelmasse:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{R_b}{m}} = \sqrt{\frac{g}{f_G}}$$

mit g : Fallbeschleunigung
f_G : statische Durchbiegung

Biegefederkonstante: $R_b = \frac{m \cdot g}{f_G}$

Kritische Winkelgeschwindigkeit der massebehafteten Welle:

$$\omega_{k1} = \frac{d}{l} \cdot \frac{\pi^2}{4} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$ (für Vollwelle)

Kritische Winkelgeschwindigkeit der massebehafteten Welle mit Einzelmassen:

$$\frac{1}{\omega_k^2} = \frac{1}{\omega_{k1}^2} + \frac{1}{\omega_{kA}^2} + \frac{1}{\omega_{kB}^2} + \frac{1}{\omega_{kC}^2} + \ldots$$ (nach Dunkerly)