Sicherheitsnachweis

Die moderne Festigkeitslehre geht in einer Modellvorstellung von einer elliptischen Grenzkurve für die Schwingfestigkeit von Metallen bei mehrachsiger Belastung aus [1]. In der Konstruktion, insbesondere für überschlägige Berechnungen für die Auslegung, wird jedoch noch häufig das Anstrengungsverhältnis nach Bach verwendet.

1. Anstrengungsverhältnis nach Bach

Das Anstrengungsverhältnis α_0 , von Carl von Bach 1921 eingeführt, berücksichtigt in Festigkeitshypothesen unterschiedliche Lastfälle bei Biegung und Torsion.
Das Problem, welcher Kennwert bei einem gemischt statisch/schwingenden Lastfall als die maßgebliche Größe der Vergleichsspannung gegenüberzustellen ist, wird nach Bach so gelöst, daß die Normalspannung als führende Größe festgelegt wird und die Schubspannung an den zeitlichen Verlauf der Normalspannung angepaßt wird. Der Gewichtungsfaktor wird als Anstrengungsverhältnis bezeichnet und in die üblichen Festigkeitshypothesen eingesetzt. Zum Beispiel in die Gestaltänderungsenergie-Hypothese:

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\left(\alpha_0 \cdot \tau_{xy}\right)^2}$$

Nach Bach wird das Anstrengungsverhältnis mit Hilfe der zulässigen Spannungen definiert, die dem jeweiligen Lastspannungsverlauf angepaßt sind:

$$\alpha_0 = \frac{\text{zul. Spannung in } \sigma \text{ entsprechend zeitl. Verlauf von } \sigma}{\text{zul. Spannung in } \sigma \text{ entsprechend zeitl. Verlauf von } \tau} = \frac{\sigma_{zul}(\sigma)}{\sigma_{zul}(\tau)}$$

Beispiel 1: Welle unter Umlaufbiegung und konstantem Drehmoment

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{zul}(\sigma)}{\sigma_{zul}(\tau)} = \frac{\sigma_{bW}/S_D}{R_m/S_B}$$

Beispiel 2: Exzenterwelle mit konstanter Biegung und schwellendem Drehmoment

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{zul}(\sigma)}{\sigma_{zul}(\tau)} = \frac{R_m/S_B}{\sigma_{Sch}/S_D}$$

In Maschinenelemente-Lehrbüchern wird das Anstrengungsverhältnis meist in der Form

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{Grenz}}{\varphi \cdot \tau_{Grenz}} = \frac{\sigma_{b\,zul}}{\varphi \cdot \tau_{t\,zul}}$$

angegeben. Dabei wird in die NH $\varphi = 1$, in die SH $\varphi = 2$ und in die GEH $\varphi = 1{,}73$ eingesetzt (siehe Haberhauer Tabelle 1.2).

2. Sicherheitsnachweis nach Issler/Ruoß/Häfele (siehe auch Wellenberechnung nach DIN 743)

a) Belastung durch rein wechselnde Biegung und Torsion

Für diesen Lastfall gilt nach der Gestaltänderungsenergie-Hypothese:

$$\sigma_{v,a} = \sqrt{\sigma_{b,a}^2 + 3\ \tau_{t,a}^2} = \sqrt{\sigma_{b,a}^2 + \left(\sqrt{3}\cdot\tau_{t,a}\right)^2}$$

Analog zu $\frac{\tau_{t,F}}{R_e} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ geht die GEH von einem festen Wechselfestigkeitsverhältnis aus.
Da dies jedoch nicht immer mit den experimentellen Ergebnissen übereinstimmt, wird der Faktor $\frac{1}{\sqrt{3}}$ durch den Kehrwert des tatsächlichen Wechselfestigkeitsverhältnisses ersetzt:

$$\sigma_{v,a} = \sqrt{\sigma_{b,a}^2 + \left(\frac{\sigma_{bW}}{\tau_{tW}}\cdot\tau_{t,a}\right)^2}$$

Durch Umformen erhält man:

$$\sigma_{v,a}^2 = \sigma_{b,a}^2 + \frac{\sigma_{bW}^2}{\tau_{tW}^2}\cdot\tau_{t,a}^2$$

$$\frac{\sigma_{v,a}^2}{\sigma_{bW}^2} = \frac{\sigma_{b,a}^2}{\sigma_{bW}^2} + \frac{\tau_{t,a}^2}{\tau_{tW}^2}$$

mit $S_D = \frac{\sigma_{bW}}{\sigma_{v,a}}$ gilt:

$$\boxed{\frac{1}{S_D} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{b,a}}{\sigma_{bW}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{t,a}}{\tau_{tW}}\right)^2}}$$

b) Mittelspannungsbehaftete Biegung und Torsion

Unter Berücksichtigung der Mittelspannungen, der Kerbwirkung und des Größen- und Oberflächeneinflusses als unbedingt zu berücksichtigende Haupteinflussfaktoren, können aus den Dauerfestigkeitskennwerten ($\sigma_{b,W}$ bzw. $\tau_{t,W}$) die ertragbaren Spannungsamplituden ($\sigma_{b,ADK}$ bzw. $\tau_{t,ADK}$) berechnet werden. Die aktuellen Regelwerke [2, 3] geben noch weitere Einflußfaktoren auf die Schwingfestigkeit an.

Analog zur reinen Biegung/Torsion wird dann die Sicherheit:

$$\boxed{\frac{1}{S_D} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{b,a}}{\sigma_{b,ADK}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{t,a}}{\tau_{t,ADK}}\right)^2}}$$

c) Mittelspannungsbehaftete Biegung + Zug und Torsion

Tritt zusätzlich eine Zugbeanspruchung auf, erfolgt die Wertung der Zugbeanspruchung bzw. der Torsionsbeanspruchung gegenüber der Biegung nach DIN 743 durch

$$\frac{\sigma_{b,ADK}}{\sigma_{zd,ADK}} \text{ bzw. } \frac{\sigma_{b,ADK}}{\tau_{t,ADK}}.$$

Für die Vergleichsspannung gilt dann:

$$\sigma_{v,a} = \sqrt{\left(\sigma_{b,a} + \frac{\sigma_{b,ADK}}{\sigma_{zd,ADK}} \cdot \sigma_{zd,a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{b,ADK}}{\tau_{t,ADK}}\right)^2 \cdot \tau_{t,a}^2}$$

und die Sicherheit wird analog zur reinen Biegung/Torsion:

$$\boxed{\frac{1}{S_D} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{b,a}}{\sigma_{b,ADK}} + \frac{\sigma_{zd,a}}{\sigma_{zd,ADK}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{t,a}}{\tau_{t,ADK}}\right)^2}}$$

Literatur:

[1] Issler/Ruoß/Häfele: Festigkeitslehre – Grundlagen, Springer-Verlag
[2] DIN 743: Tragfähigkeitsberechnung von Wellen und Achsen
[3] FKM-Richtlinie, VDMA