

6.1 Stirnradgetriebe

Elemente zur Übertragung gleichförmiger Drehbewegungen

Übersetzungsverhältnis:
$$i = \frac{n_{an}}{n_{ab}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{d_2}{d_1} = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{T_{ab}}{T_{an}}$$

Mehrere Stufen:
$$i = \frac{n_{an}}{n_{ab}} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{n_2}{n_3} \cdot \frac{n_3}{n_4} = i_{1/2} \cdot i_{2/3} \cdot i_{3/4} \quad (\text{z.B. dreistufig})$$

Zähnezahlverhältnis:
$$u = \left| \frac{z_2}{z_1} \right| \geq 1 \quad \text{mit} \quad z_1 \leq z_2$$

Beachte:

Bei **außenverzahnten** Stirnrädern entsteht eine Drehrichtungsumkehr: $n_1 = -i \cdot n_2$ (Drehrichtungen von Ritzel und Rad sind entgegengesetzt). Deshalb wird die Übersetzung negativ.

Bei **innenverzahnten** Stirnrädern werden Radius und Zähnezahl des Hohlrades negativ (siehe Kap. 6.1.1.7). Dadurch wird die Übersetzung positiv, das heißt, es erfolgt keine Drehrichtungsumkehr: $n_1 = i \cdot n_2$

6.1.1 Verzahnungsgeometrie geradverzahnter Stirnräder

Geradverzahnung \equiv Zahnflanken parallel zur Wellenachse ($\beta = 0^\circ$)

Herstellungseingriffswinkel: $\alpha = 20^\circ$

Teilung: $p = m \cdot \pi$

Modul (DIN 780 / Reihe 1)

m	0,1	0,12	0,16	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	1	1,25	1,5	2	2,5	3	4	5	6		8	
[mm]	10	12	16	20	25	32	40	50	60			

Durchmesser bzw. Radien

Teilkreis: $d = \frac{p}{\pi} z = m \cdot z$

$$r = \frac{p \cdot z}{2\pi} = \frac{m \cdot z}{2}$$

Grundkreis: $d_b = d \cdot \cos \alpha$

$$r_b = r \cdot \cos \alpha$$

Fußkreis: $d_f = d - 2(m + c) + 2xm$

$$r_f = r - (m + c) + xm$$

Kopfkreis: $d_a = d + 2m + 2xm + 2k$

$$r_a = r + m + xm + k$$

Wälzkreis: $d_w = d \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}$

$$r_w = r \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}$$

Achsabstand

Achsabstand ohne Profilverschiebung: $a_d = r_1 + r_2 = \frac{m}{2}(z_1 + z_2)$

Achsabstand allgemein: $a = r_{w1} + r_{w2} = (r_1 + r_2) \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} = a_d \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}$

Betriebseingriffswinkel

Fall I: Profilverschiebungsfaktoren und Zähnezahlen gegeben.

$$\operatorname{inv} \alpha_w = 2 \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \tan \alpha + \operatorname{inv} \alpha$$

Daraus lässt sich mit Hilfe der Evolventenfunktionstabelle (Tabelle 6.1) der Betriebseingriffswinkel α_w bestimmen.

Fall II: Achsabstand und Zähnezahlen sind gegeben.

$$\cos \alpha_w = \frac{a_d}{a} \cdot \cos \alpha = \frac{m(z_1 + z_2)}{2 \cdot a} \cdot \cos \alpha$$

ProfilverschiebungTheoretische Grenzzähnezahl: $z_g = 17$ Praktische Grenzzähnezahl: $z'_g = 14$ Theoretische Mindestprofilverschiebung: $x_{min} = \frac{17 - z}{17}$ Praktische Mindestprofilverschiebung: $x_{min} = \frac{14 - z}{17}$.Summe der Profilverschiebungsfaktoren: $x_1 + x_2 = \frac{z_1 + z_2}{2 \tan \alpha} (\operatorname{inv} \alpha_w - \operatorname{inv} \alpha)$ **Zahndicke**Zahndicke im Teilkreis: $s = \frac{p}{2} + 2 x m \cdot \tan \alpha = m \left(\frac{\pi}{2} + 2 x \cdot \tan \alpha \right)$ Zahndicke im Kopfkreis: $s_a = 2 r_a \left[\frac{1}{z} \left(\frac{\pi}{2} + 2 x \cdot \tan \alpha \right) - (\operatorname{inv} \alpha_a - \operatorname{inv} \alpha) \right]$

$$\text{mit } \cos \alpha_a = \frac{r}{r_a} \cos \alpha$$

Die Zahndicke im Kopfkreis sollte mindestens $s_a \geq 0,2 \cdot m$ sein.Bei gehärteten Zähnen wird $s_a \geq 0,4 \cdot m$ vorgeschlagen.Erforderliche **Kopfhöhenveränderung** um ein vorgegebenes Kopfspiel c einzuhalten:

$$k = k^* m = a - a_d - m (x_1 + x_2).$$

Überdeckungsgrad (Profilüberdeckung):

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a \cdot \sin \alpha_w}{\pi \cdot m \cdot \cos \alpha} > 1$$

Innenverzahnung

Mit $a < 0$ ist die Profilüberdeckung:

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} - \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a \cdot \sin \alpha_w}{\pi \cdot m \cdot \cos \alpha}$$

Zahnstange

Die Ritzel-Zahnstange-Paarung lässt sich näherungsweise berechnen, indem anstatt der Zahnstange ein Hohlrad mit sehr großem Durchmesser (bzw. Zähnezahl) verwendet wird.

Zum Beispiel: $z_2 = -5000$

In diesem Falle wird der Betriebseingriffswinkel $\alpha_w \approx \alpha = 20^\circ$

6.1.2 Verzahnungsgeometrie schrägverzahnter Stirnräder

Herstellungseingriffswinkel: $\alpha_n = 20^\circ$ (im Normalschnitt)

Schrägungswinkel: $\beta = 10^\circ \dots 30^\circ$ (empfohlener Richtwert)

Schrägungswinkel

auf dem Grundkreis: $\tan \beta_b = \cos \alpha_t \cdot \tan \beta$

Teilung: $\cos \beta = \frac{p_n}{p_t} = \frac{m_n \cdot \pi}{m_t \cdot \pi}$

Stirnmodul: $m_t = \frac{m_n}{\cos \beta}$

Modul (DIN 780 / Reihe 1)

m_n	0,1	0,12	0,16	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
	1	1,25	1,5	2	2,5	3	4	5	6		8	
[mm]	10	12	16	20	25	32	40	50	60			

Stirneingriffswinkel: $\tan \alpha_t = \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta}$

Betriebseingriffswinkel

Fall I: Profilverschiebungsfaktoren und Zähnezahlen sind gegeben.

$$\operatorname{inv} \alpha_{wt} = 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \cdot \tan \alpha_n + \operatorname{inv} \alpha_t$$

Daraus lässt sich mit Hilfe der Evolventenfunktionstabelle (Tabelle 6.1) der Betriebseingriffswinkel α_{wt} bestimmen.

Fall II: Achsabstand und Zähnezahlen sind gegeben.

$$\cos \alpha_{wt} = \frac{a_d}{a} \cdot \cos \alpha_t = \frac{m_n (z_1 + z_2)}{\cos \beta \cdot 2 \cdot a} \cdot \cos \alpha_t$$

Ersatzzähnezahl: $z_n = z / \cos^3 \beta$

Erforderliche **Kopfhöhenveränderung** um ein vorgegebenes Kopfspiel c einzuhalten:

$$k = k^* m_n = a - a_d - m_n (x_1 + x_2)$$

Durchmesser bzw. Radien

Teilkreis: $d = \frac{m_n}{\cos \beta} \quad z = m_t \cdot z \quad r = \frac{m_n \cdot z}{2 \cos \beta} = \frac{m_t \cdot z}{2}$

Grundkreis: $d_b = d \cdot \cos \alpha_t \quad r_b = r \cdot \cos \alpha_t$

Fußkreis: $d_f = d - 2(m_n + c) + 2xm_n \quad r_f = r - (m_n + c) + xm_n$

Kopfkreis: $d_a = d + 2m_n + 2xm_n + 2k \quad r_a = r + m_n + xm_n + k$

Wälzkreis: $d_w = d \cdot \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_{wt}} \quad r_w = r \cdot \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_{wt}}$

Achsabstand

Achsabstand ohne Profilverschiebung: $a_d = r_1 + r_2 = \frac{m_t}{2} (z_1 + z_2)$

Achsabstand allgemein: $a = r_{w1} + r_{w2} = (r_1 + r_2) \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_{wt}} = a_d \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_{wt}}$

Profilverschiebung

Theoretische Mindestprofilverschiebung: $x_{min} = \frac{17 - z_n}{17}$

Praktische Mindestprofilverschiebung: $x_{min} = \frac{14 - z_n}{17}$

Summe der Profilverschiebungsfaktoren: $x_1 + x_2 = \frac{z_1 + z_2}{2 \tan \alpha_n} (\operatorname{inv} \alpha_{wt} - \operatorname{inv} \alpha_t)$

Zahndicke

Zahndicke im Teilkreis
(Stirnschnitt):

$$s_t = \frac{p_t}{2} + 2 x m_t \cdot \tan \alpha_n = \frac{m_n}{\cos \beta} \left(\frac{\pi}{2} + 2 x \cdot \tan \alpha_n \right)$$

Zahndicke im Kopfkreis
(Stirnschnitt):

$$s_{ta} = 2 r_a \left[\frac{1}{z} \left(\frac{\pi}{2} + 2 x \cdot \tan \alpha_n \right) - (\operatorname{inv} \alpha_{ta} - \operatorname{inv} \alpha_t) \right]$$

mit $\cos \alpha_{ta} = \frac{r}{r_a} \cos \alpha_t$

Zahndicke im Kopfkreis
(Normalschnitt):

$$s_{na} = s_{ta} \cdot \cos \beta \quad \begin{array}{l} s_{na} \geq 0,2 \cdot m \quad (\text{ungeh\u00e4rtet}) \\ s_{na} \geq 0,4 \cdot m \quad (\text{geh\u00e4rtet}) \end{array}$$

Überdeckungsgrad

Profilüberdeckung:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a \cdot \sin \alpha_{wt}}{\pi \cdot m_t \cdot \cos \alpha_t} > 1$$

Sprungüberdeckung:

$$\varepsilon_\beta = \frac{b \cdot \sin \beta}{m_n \cdot \pi}$$

Gesamtüberdeckung:

$$\varepsilon_\gamma = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$$

6.1.3 Zahnkräfte

Die Umfangskraft (Tangentialkraft) wirkt am treibenden Rad (Ritzel) **entgegen** der Drehrichtung und am getriebenen Rad **in** Drehrichtung!

Tangentialkraft:

$$F_t = \frac{T}{r} = \frac{2 \cdot T}{d}$$

Axialkraft:

$$F_a = F_t \cdot \tan \beta$$

Radialkraft:

$$F_r = F_t \cdot \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta}$$

6.1.4 Grundlagen der Tragfähigkeitsberechnungen (DIN 3990-Methode C)

Zahnfußtragfähigkeit

Zahnfußspannung:

$$\sigma_F = \sigma_{F0} \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{F\beta} \cdot K_{F\alpha} \quad \text{mit} \quad \sigma_{F0} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_{Fa} \cdot Y_{Sa} \cdot Y_\varepsilon \cdot Y_\beta$$

Zahnfußgrenzfestigkeit:

$$\sigma_{FG} = \sigma_{FE} \cdot Y_{NT} \cdot Y_{\delta rel T} \cdot Y_{Rrel T} \cdot Y_X \quad (\sigma_{FE} \text{ nach Tabelle 6.12})$$

Sicherheit gegen Zahnbruch:

$$S_F = \frac{\sigma_{FG}}{\sigma_F}$$

Flankentragfähigkeit

Flankenpressung im Wälzpunkt ($Z_B = 1$):

$$\sigma_H = \sigma_{H0} \sqrt{K_A \cdot K_V \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha}} \quad \text{mit} \quad \sigma_{H0} = Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\varepsilon \cdot Z_\beta \sqrt{\frac{F_t}{d_1 \cdot b} \cdot \frac{u+1}{u}}$$

Flankengrenzfestigkeit:

$$\sigma_{HG} = \sigma_{H \lim} Z_{NT} \cdot Z_L \cdot Z_V \cdot Z_R \cdot Z_W \cdot Z_X \quad (\sigma_{H \lim} \text{ nach Tabelle 6.12})$$

Sicherheit gegen Grübchenbildung:

$$S_H = \frac{\sigma_{HG}}{\sigma_H}$$

Allgemeine Faktoren

Anwendungsfaktor: K_A (Abb. 6.7)

Dynamikfaktor: $K_V \approx 1$ (für manuelle Berechnungen)

Breitenfaktor: $K_{F\beta}$ und $K_{H\beta}$ (Abb. 6.41)

Stirnfaktor: $K_{F\alpha}$ und $K_{H\alpha}$ (Tabelle 6.11)

Einflußfaktoren

Einflussfaktoren für Zahnfußspannung:

Formfaktor: Y_{Fa} (Abb. 6.43)

Spannungskorrekturfaktor: Y_{Sa} (Abb. 6.44)

Überdeckungsfaktor: $Y_\varepsilon = 0,25 + \frac{0,75}{\varepsilon_\alpha} \cos^2 \beta_b$

Schrägungsfaktor: $Y_\beta = 1 - \varepsilon_\beta \frac{\beta}{120^\circ}$ für $\varepsilon_\beta > 1$ wird $\varepsilon_\beta = 1$ und
für $\beta > 30^\circ$ wird $\beta = 30^\circ$ gesetzt

Einflussfaktoren für Zahnfußgrenzfestigkeit:

Lebensdauerfaktor: Y_{NT} (Abb. 6.45)

für manuelle Berechnungen gilt: $Y_{\delta rel T} \cdot Y_{R rel T} \cdot Y_X \approx 1$

Einflussfaktoren für Flankenpressung:

Zonenfaktor: $Z_H = \sqrt{\frac{2 \cdot \cos \beta_b \cdot \cos \alpha_{wt}}{\cos^2 \alpha_t \cdot \sin \alpha_{wt}}}$

Elastizitätsfaktorfaktor: $Z_E = \sqrt{0,175 \cdot E}$

Überdeckungsfaktor:
$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{4 - \varepsilon_\alpha}{3} (1 - \varepsilon_\beta) + \frac{\varepsilon_\beta}{\varepsilon_\alpha}} \quad \text{für } \varepsilon_\beta < 1$$

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_\alpha}} \quad \text{für } \varepsilon_\beta \geq 1$$

Schrägungsfaktor:
$$Z_\beta = \sqrt{\cos \beta}$$

Einflussfaktoren für Flankengrenzfestigkeit:

Lebensdauerfaktor: Z_{NT} (Abb. 6.47)

für manuelle Berechnungen gilt: $Z_L \cdot Z_V \cdot Z_R \cdot Z_W \cdot Z_X \approx 1$

Beachte:

Normalerweise werden die Zähne schwellend beansprucht. Es kann jedoch auch eine Wechselbelastung auftreten (z.B. bei einem Zwischenrad mit mehreren Zahneingriffen). In diesen Fällen sind die Dauerfestigkeitswerte nach Tabelle 6.12 auf 70% zu reduzieren.