

Fragen

1. Wie lässt sich die „Größe“ einer Funktion bzw. der „Abstand“ zweier Funktionen messen?
2. Welche Konvergenzbegriffe für Funktionenfolgen sind Ihnen bekannt? Lassen diese sich über einen Abstandsbegriff definieren?
3. In welchen Fällen wird die Konvergenz einer Funktionenfolge durch Integration bzw. Differentiation respektiert?

In diesem Kapitel werden *Banachräume*, d. h. *vollständige normierte Räume*, vorgestellt; *stetige lineare Operatoren* zwischen Banachräumen folgen ab [Kap. 3](#). Die Untersuchung dieser für die Funktionalanalysis grundlegenden Konzepte erfolgt durch ein *Zusammenspiel algebraischer und analytischer Methoden*. Ihr Verständnis erfordert daher eine gewisse Vertrautheit mit elementaren Tatsachen über *Vektorräume* und über *metrische Räume*, wie sie in den Grundvorlesungen vermittelt werden. An einige dieser elementaren Begriffe und Resultate wird im Text erinnert, weitere sind in den Anhängen [A.1](#) und [A.2](#) knapp zusammengestellt. Ausführlichere Darstellungen findet man natürlich in Lehrbüchern über *Lineare Algebra* und *Analysis*.

Die Untersuchung von Operatoren zwischen Banachräumen wird durch das Studium von *Differential- und Integralgleichungen* motiviert. Diese sind in *Räumen stetiger, differenzierbarer oder integrierbarer Funktionen* formuliert, die unter *Supremums-Normen* oder *Integralnormen* vollständig sind. Für den Umgang mit Integralnormen und Räumen integrierbarer Funktionen ist eine gewisse Vertrautheit mit *Lebesgue-Integralen*, wie sie in Analysis-Vorlesungen vermittelt wird, von Vorteil. Einige Tatsachen der Maß- und Integrationstheorie sind in [Abschn. 1.3](#) zusammengestellt; insbesondere führen wir dort

die L_p -Räume ein, wodurch auch die Folgenräume ℓ_p erfasst werden. In [Anhang A.3](#) werden dann ein Zugang zur Maß- und Integrationstheorie und die in diesem Buch benötigten Resultate ausführlich erklärt.

1.1 Normen und Metriken

Wir beginnen mit der Vorstellung grundlegender Begriffe der Funktionalanalysis. Das abstrakte Konzept eines *normierten Raumes* wurde 1920 von S. Banach und N. Wiener eingeführt. *Vektorräume* waren bereits 1888 von G. Peano definiert, aber erst 1918 von H. Weyl „wiederentdeckt“ worden.

Normierte Räume

Es sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine Abbildung $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ heißt *Norm* auf X , falls stets gilt:

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad (1.1)$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{K} \text{ und } x \in X, \quad (1.2)$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{Dreiecks-Ungleichung}). \quad (1.3)$$

Das Paar $(X, \|\cdot\|)$ heißt *normierter Raum*. Statt $(X, \|\cdot\|)$ schreibt man kurz X , wenn klar ist, welche Norm gemeint ist. Zur Verdeutlichung schreibt man manchmal auch $\| \cdot \|_X$ für die Norm des Raumes X .

Metrische Räume

a) Auf einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ wird durch

$$d(x, y) := \|x - y\| \quad \text{für } x, y \in X$$

eine *Metrik* definiert.

b) Eine *Metrik* auf irgendeiner Menge M ist eine Funktion $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ mit den Eigenschaften

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad (1.4)$$

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{Symmetrie}) \quad \text{und} \quad (1.5)$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{Dreiecks-Ungleichung}). \quad (1.6)$$

Das Paar (M, d) heißt dann *metrischer Raum*. Statt (M, d) schreibt man kurz M , wenn klar ist, welche Metrik gemeint ist. *Metrische Räume* und *topologische Grundbegriffe* in diesen wurden von M. Fréchet 1906 eingeführt.

c) Die Eigenschaften (1.4)–(1.6) folgen leicht aus (1.1)–(1.3). Zum Nachweis von (1.5) genügt an Stelle von (1.2) auch die schwächere Bedingung „ $\| -x \| = \| x \|$ für alle $x \in X$ “.

- d) Jede *Teilmenge* eines metrischen Raumes ist ebenfalls ein metrischer Raum; dagegen sind nur *Unterräume* normierter Räume ebenfalls normierte Räume.
- e) Eine Folge (x_n) in einem metrischen Raum M *konvergiert* gegen $x \in M$, falls $d(x_n, x) \rightarrow 0$ gilt; man schreibt dann $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ oder $x_n \rightarrow x$.
- f) Metriken, Normen, Addition und Skalarmultiplikation sind stets *stetig* auf ihren Definitionsbereichen (vgl. [Anhang A.2](#) und [Aufgabe 1.1](#)).

Vollständige Räume

- a) Eine Folge (x_n) in einem metrischen Raum M heißt *Cauchy-Folge*, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon. \quad (1.7)$$

- b) Der Raum M heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in X konvergiert. Ein vollständiger Raum ist in jedem Oberraum *abgeschlossen* (vgl. S. 343). Die Körper $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ der reellen und komplexen Zahlen sind vollständig.
- c) Ein vollständiger normierter Raum heißt *Banachraum*.

Kugeln und konvexe Mengen

- a) Es seien M ein metrischer Raum, $a \in M$ und $r > 0$. Mit

$$U_r(a) := U_r^M(a) := \{x \in M \mid d(x, a) < r\} \quad \text{und} \\ B_r(a) := B_r^M(a) := \{x \in M \mid d(x, a) \leq r\}$$

werden die *offene* und die *abgeschlossene* Kugel um $a \in M$ mit *Radius* $r > 0$ bezeichnet. Die offene bzw. abgeschlossene *Einheitskugel* eines *normierten* Raumes X bezeichnen wir kurz mit $U := U_X := U_1(0)$ und $B := B_X := B_1(0)$.

- b) Eine Teilmenge C eines Vektorraums E heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in C$ auch die Verbindungsstrecke

$$\text{co} \{x, y\} := \{(1-t)x + ty \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

in C enthalten ist. Allgemeiner wird für irgendeine Menge $A \subseteq E$ die Menge

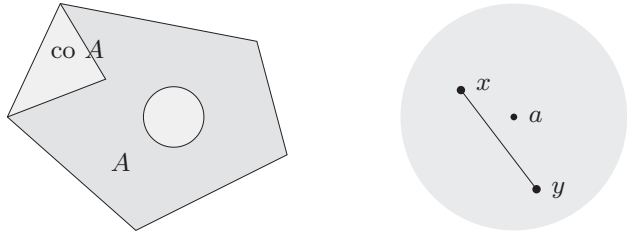
$$\text{co}(A) := \left\{ \sum_{k=1}^n s_k x_k \mid n \in \mathbb{N}, x_k \in A, s_k \in [0, 1], \sum_{k=1}^n s_k = 1 \right\} \quad (1.8)$$

aller *Konvexkombinationen* von Elementen aus A als *konvexe Hülle* von A bezeichnet. Es ist $\text{co}(A)$ der Durchschnitt aller konvexen Obermengen von A (vgl. [Aufg. 1.4](#)).

- c) Kugeln in *normierten* Räumen sind *konvex*. Für $x, y \in U_r(a)$ und $0 \leq t \leq 1$ ist in der Tat auch

$$\begin{aligned} \|(1-t)x + ty - a\| &= \|(1-t)(x-a) + t(y-a)\| \\ &\leq (1-t)\|x-a\| + t\|y-a\| < r, \end{aligned}$$

Abb. 1.1 Eine Menge A mit konvexer Hülle $\text{co } A$ und eine konvexe Kugel $U_r(a)$



und man hat $\text{co } \{x, y\} \subseteq U_r(a)$. Für abgeschlossene Kugeln argumentiert man genauso.

Äquivalente Normen

Zwei Normen $\| \cdot \|_1$ und $\| \cdot \|_2$ auf einem Vektorraum X heißen *äquivalent*, falls die folgenden Abschätzungen gelten:

$$\exists c, C > 0 \forall x \in X : c \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \|x\|_1. \quad (1.9)$$

Äquivalente Normen liefern den *gleichen Konvergenzbegriff* auf X , d. h. eine Folge (x_n) in X *konvergiert* gegen $x \in X$ bezüglich $\| \cdot \|_1$ genau dann, wenn dies bezüglich $\| \cdot \|_2$ der Fall ist.

Unsere ersten Beispiele normierter Räume sind endlichdimensional:

Normen auf $\mathbb{K}^n$

a) Der *Satz des Pythagoras* suggeriert, insbesondere auf $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, die Verwendung der *Euklidischen Norm* oder ℓ_2 -Norm (vgl. [Abb. 1.2](#))

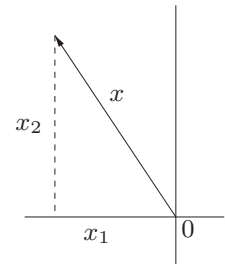
$$\|x\| := \|x\|_2 := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n.$$

Diese wird von dem *Skalarprodukt*

$$\langle x | y \rangle := \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$$

Abb. 1.2 Satz des Pythagoras:

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$$



mittels $|x|^2 = \langle x|x \rangle$ induziert, und die Dreiecks-Ungleichung (1.3) folgt aus der *Schwarzschen Ungleichung* (vgl. Satz 6.1).

b) Die Euklidische Norm beschreibt die *koordinatenweise Konvergenz*: Für eine Folge $(x^{(\ell)}) = ((x_j^{(\ell)}))$ in $\mathbb{K}^n$ und $x = (x_j) \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$|x^{(\ell)} - x| \rightarrow 0 \Leftrightarrow x_j^{(\ell)} \rightarrow x_j \text{ für } j = 1, \dots, n.$$

Entsprechendes gilt für *Cauchy-Folgen*; mit $\mathbb{K}$ ist daher auch $\mathbb{K}^n$ unter der Euklidischen Norm *vollständig*.

c) In manchen Situationen ist es günstig, andere Normen auf $\mathbb{K}^n$ zu verwenden, z. B. bei der Berechnung von *Matrizenormen* auf S. 51. Für $1 \leq p < \infty$ wird auf $\mathbb{K}^n$ die ℓ_p -Norm durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad (1.10)$$

erklärt; die Euklidische Norm ist der Spezialfall $p = 2$. Die Dreiecks-Ungleichung (1.3) ist für $p = 1$ klar und für $p \geq 1$ die Aussage der *Minkowskischen Ungleichung*; diese wiederum ergibt sich aus der *Hölderschen Ungleichung*

$$\left| \sum_{j=1}^n x_j y_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (1.11)$$

Die beiden Ungleichungen werden in den Sätzen 1.3 und 1.4 allgemeiner für Integrale gezeigt.

d) Neben der ℓ_2 -Norm werden vor allem die ℓ_1 -Norm und die durch

$$\|x\|_\infty := \max_{j=1}^n |x_j|, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad (1.12)$$

erklärte ℓ_∞ -Norm oder *Maximum-Norm* auf $\mathbb{K}^n$ verwendet. Die Notation wird durch

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p \quad \text{für } x \in \mathbb{K}^n$$

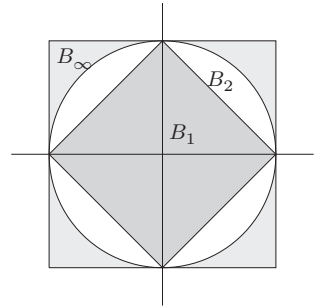
motiviert. Für $1 \leq p \leq \infty$ schreibt man kurz ℓ_p^n oder $\ell_p^n(\mathbb{K})$ für $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$.

e) Es zeigt Abb. 1.3 die Einheitskugeln von $\ell_1^2(\mathbb{R})$, $\ell_2^2(\mathbb{R})$ und $\ell_\infty^2(\mathbb{R})$. „Kugeln“ sind also nicht immer „rund“.

Satz 1.1

Alle Normen auf $\mathbb{K}^n$ sind äquivalent.

Abb. 1.3 Einheitskugeln B_p
von $\ell_p^2(\mathbb{R})$ für $p = 1, 2, \infty$



BEWEIS. a) Es sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{K}^n$. Die *Einheitsvektoren* $e_k := (\delta_{kj})_{j=1,\dots,n}$, lassen sich mit dem *Kronecker-Symbol* $\delta_{kj} := \begin{cases} 1 & , \quad k=j \\ 0 & , \quad k \neq j \end{cases}$ bequem notieren. Für $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \in \mathbb{K}^n$ gilt die Abschätzung

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^n x_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \|e_k\| \leq C \|x\|_1$$

mit $C = \max_{k=1}^n \|e_k\|$. Insbesondere ist $\|\cdot\| : \ell_1^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

b) Nun ist die Einheitskugel $S = \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_1 = 1\}$ kompakt in ℓ_1^n (vgl. Kap. 2). Die auf S stetige positive Funktion $\|\cdot\|$ nimmt dort ihr *Minimum* an (vgl. Satz A.2.8); es gibt also ein $\alpha > 0$ mit $\|y\| \geq \alpha$ für alle $y \in S$. Ist nun $0 \neq x \in \mathbb{K}^n$, so gilt $\frac{x}{\|x\|_1} \in S$, also $\|\frac{x}{\|x\|_1}\| \geq \alpha$ und damit $\|x\| \geq \alpha \|x\|_1$. $\diamond$

Somit beschreiben *alle* Normen auf $\mathbb{K}^n$ die koordinatenweise Konvergenz, und $\mathbb{K}^n$ ist unter jeder Norm *vollständig*.

1.2 Supremums-Normen

Nun stellen wir Banachräume beschränkter Funktionen und beschränkter Folgen vor:

Räume beschränkter Funktionen

a) Eine Teilmenge $A \subseteq Y$ eines normierten Raums Y heißt *beschränkt*, wenn es $r > 0$ mit $A \subseteq B_r(0)$ gibt; eine *Funktion* $f : M \rightarrow Y$ heißt *beschränkt*, wenn ihr Bild $f(M)$ in

Y beschränkt ist. Beachten Sie bitte, dass dieser Beschränktheitsbegriff nur in normierten, *nicht* aber in metrischen Räumen verwendet wird (vgl. dazu [Aufgabe 1.8](#)).

b) Auf dem Vektorraum $\mathcal{B}(M, Y) = \ell_\infty(M, Y)$ aller auf einer Menge M beschränkten Funktionen mit Werten in Y wird die *Supremums-Norm* oder *sup-Norm* erklärt durch

$$\|f\|_{\text{sup}} := \|f\|_\infty := \|f\|_M := \sup_{t \in M} \|f(t)\|_Y, \quad f \in \mathcal{B}(M, Y).$$

Für $Y = \mathbb{K}$ erhält man den Raum $\mathcal{B}(M) = \ell_\infty(M)$ aller beschränkten skalaren Funktionen auf M .

c) Die sup-Norm beschreibt die *gleichmäßige Konvergenz* von Funktionenfolgen; für eine Folge (f_n) in $\mathcal{B}(M, Y)$, eine Funktion $f \in \mathcal{B}(M, Y)$ und $\varepsilon > 0$ gilt in der Tat

$$\|f - f_n\|_{\text{sup}} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \forall t \in M : \|f(t) - f_n(t)\|_Y \leq \varepsilon. \quad (1.13)$$

d) Für eine endliche Menge $M = \{1, \dots, n\}$ kann $\mathcal{B}(M, \mathbb{K})$ mit $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) = \ell_\infty^n(\mathbb{K})$ identifiziert werden.

e) Für eine *abzählbare* Menge M ist $\ell_\infty(M, Y)$ ein *Folgenraum*; speziell hat man die Notation $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N}_0, \mathbb{K})$. Interessante abgeschlossene Unterräume von ℓ_∞ sind (vgl. [Aufgabe 1.12](#)) der Raum aller *Nullfolgen*

$$c_0 := \{x = (x_j)_{j=0}^\infty \mid \lim_{j \rightarrow \infty} x_j = 0\}$$

und der Raum aller *konvergenten Folgen*

$$c := \{x = (x_j)_{j=0}^\infty \mid \lim_{j \rightarrow \infty} x_j \text{ existiert}\}.$$

Räume stetiger Funktionen

Es sei K ein *kompakter metrischer Raum* (vgl. [Kap. 2](#) und Anhang 2), z. B. ein kompaktes Intervall $K = [a, b]$ in $\mathbb{R}$. Für eine *stetige Funktion* $f \in \mathcal{C}(K, Y)$ ist die stetige reellwertige Funktion $t \mapsto \|f(t)\|$ auf K beschränkt (und nimmt ihr Maximum an). Somit ist der Raum $\mathcal{C}(K, Y)$ aller stetigen Funktionen von K nach Y ein *Unterraum* von $\ell_\infty(K, Y)$. Dieser ist *abgeschlossen*, da sich bei *gleichmäßiger Konvergenz* die Stetigkeit auf die Grenzfunktion vererbt (vgl. [Satz A.2.1](#)). Bei nur *punktweiser Konvergenz* ist dies i. a. nicht der Fall, wie etwa das Beispiel der Funktionenfolge $(f_n(t) := t^n)$ in $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ zeigt (vgl. [Abb. 1.4](#)).

Eine Kugel $B_\varepsilon(f)$ vom Radius $\varepsilon > 0$ in $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ kann als ε -*Schlauch* veranschaulicht werden (vgl. [Abb. 1.5](#)).

Satz 1.2

Es seien M eine Menge und Y ein Banachraum. Dann ist auch $\ell_\infty(M, Y)$ vollständig, also ein Banachraum.

Abb. 1.4 Die Funktionen
 t, t^2, t^4, t^8

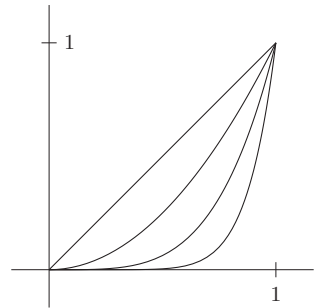
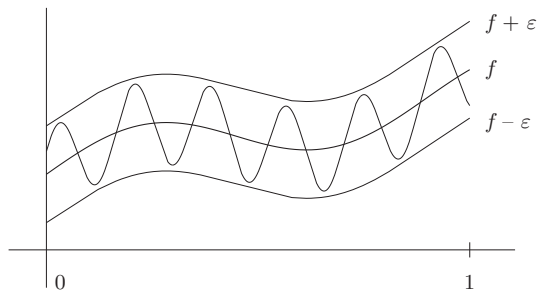


Abb. 1.5 Ein ε -Schlauch



BEWEIS. Es sei (f_n) eine Cauchy-Folge in $\ell_\infty(M, Y)$. Für festes $t \in M$ gilt

$$\|f_n(t) - f_m(t)\|_Y \leq \|f_n - f_m\|_{\sup},$$

und daher ist $(f_n(t))$ eine Cauchy-Folge in Y . Wegen der Vollständigkeit von Y ist diese konvergent, und wir definieren $f : M \rightarrow Y$ durch

$$f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t), \quad t \in M.$$

Da (f_n) eine Cauchy-Folge bezüglich der sup-Norm ist, gilt gemäß (1.7) und (1.13)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 \forall t \in M : \|f_n(t) - f_m(t)\|_Y \leq \varepsilon.$$

Für festes $t \in M$ und $n \in \mathbb{N}$ liefert dann $m \rightarrow \infty$ auch $\|f_n(t) - f(t)\|_Y \leq \varepsilon$, und daraus folgt $\|f_n - f\|_{\sup} \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Insbesondere gilt $f - f_n \in \ell_\infty(M, Y)$, daher auch $f = (f - f_n) + f_n \in \ell_\infty(M, Y)$, und man hat $f_n \rightarrow f$ in $\ell_\infty(M, Y)$. $\diamond$

Folgerungen

- a) Zunächst ergibt sich noch einmal die Vollständigkeit von $\ell_\infty^n(\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$, nach [Satz 1.1](#) also auch die des Raumes $\mathbb{K}^n$ unter jeder Norm.
- b) Der Raum ℓ_∞ aller beschränkten Folgen ist vollständig; dies gilt dann auch für die abgeschlossenen Unterräume c_0 und c aller Nullfolgen und konvergenten Folgen.
- c) Für einen kompakten Raum K und einen Banachraum Y ist $\mathcal{C}(K, Y)$ als abgeschlossener Unterraum von $\ell_\infty(K, Y)$ ebenfalls ein Banachraum.

1.3 L_p -Normen und Quotientenräume

Im Gegensatz zur letzten Folgerung sind Räume stetiger Funktionen unter *Integralnormen* nicht vollständig; durch *Vervollständigung* erhält man dann Räume integrierbarer Funktionen.

Vervollständigungen

- a) Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen metrischen Räumen heißt *Isometrie*, falls stets $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ gilt, falls sie also Distanzen nicht ändert.
- b) Ein metrischer Raum M kann in einen vollständigen metrischen Raum $\widehat{M}$ eingebettet werden, d. h. es gibt eine Isometrie $\iota : M \rightarrow \widehat{M}$, sodass $\iota(M)$ in $\widehat{M}$ dicht ist. Der Raum $\widehat{M}$ ist bis auf Isometrie eindeutig und heißt die *Vervollständigung* von M .
- c) Man kann $\widehat{M}$ etwa als Menge von Äquivalenzklassen der Cauchy-Folgen in M konstruieren, analog zu G. Cantors Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen (vgl. etwa [\[Kaballo 2000\]](#), 15.4); dies liefert eine „abstrakte Vervollständigung“ von M . Eine „konkretere Vervollständigung“ kann man erhalten, indem man M in einen „konkreten“ vollständigen Raum isometrisch einbettet und dort *abschließt*.
- d) Für normierte Räume X ist $\widehat{X}$ ein Banachraum. Man kann diesen als Abschluss einer isometrischen Kopie von X in dessen vollständigem *Bidualraum* konstruieren, vgl. [Abschn. 9.3](#).
- e) Die L_1 -Norm oder *Integralnorm* auf $\mathcal{C}[a, b]$ ist gegeben durch

$$\|f\|_{L_1} := \int_a^b |f(t)| \, dt, \quad f \in \mathcal{C}[a, b];$$

sie beschreibt die *Konvergenz im Mittel*. Unter dieser Norm ist der Raum $\mathcal{C}[a, b]$ nicht vollständig; die Vervollständigung wird mit $L_1[a, b]$ bezeichnet. Diese kann mit dem Raum der (Äquivalenzklassen von) *Lebesgue-integrierbaren Funktionen* auf $[a, b]$ (vgl. [S. 15](#)) identifiziert werden.

Wir stellen nun einige Grundtatsachen der Maß- und Integrationstheorie vor, die wir in diesem Buch benötigen; insbesondere führen wir die L_p -Räume ein.

Maße, Integrale und $\mathcal{L}_p$ -Räume

a) Wir betrachten ein *positives Maß* μ auf einer σ -Algebra Σ in einer Menge Ω ; die Elemente von Σ heißen *messbare Mengen*. Diese Begriffe werden in [Anhang A.3](#) ausführlich erklärt. Wir nehmen stets an, dass der Maßraum (Ω, Σ, μ) *vollständig* ist; dies bedeutet, dass jede Teilmenge einer Nullmenge in Σ liegt und somit ebenfalls eine Nullmenge ist.

b) Ein wichtiges Beispiel ist das *Lebesgue-Maß* $\lambda = \lambda^n$ auf der σ -Algebra $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ der *Lebesgue-messbaren Mengen* in $\mathbb{R}^n$. Dieses kann auf jede Lebesgue-messbare Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eingeschränkt werden, insbesondere also auf offene oder auf abgeschlossene Mengen.

c) Für $1 \leq p < \infty$ werden die zugehörigen $\mathcal{L}_p$ -Räume definiert durch

$$\mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ ist } \Sigma\text{-messbar und} \\ \|f\|_{\mathcal{L}_p} := \left(\int_{\Omega} |f(t)|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty \}.$$

Insbesondere ist $\mathcal{L}_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ der Raum der μ -integrierbaren Funktionen auf Ω . Messbarkeit für Funktionen ist ein *schwacher Regularitätsbegriff*, der bei punktwiser Konvergenz (fast überall, d. h. ausserhalb einer Nullmenge) erhalten bleibt. Stetige Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ sind stets Lebesgue-messbar. Für $r > 0$ liegt die Funktion $t \mapsto t^{-r}$ genau dann in $\mathcal{L}_p(0, 1)$, wenn $rp < 1$ gilt.

d) Wir schreiben meist kürzer $\mathcal{L}_p(\Omega, \mu)$, $\mathcal{L}_p(\Omega)$ oder $\mathcal{L}_p(\mu)$, wenn klar ist, welche σ -Algebra, welches Maß bzw. welcher Grundraum gemeint ist. An Stelle von $d\mu$ schreibt man auch $d\mu(t)$, wenn die Integrationsvariable betont werden soll, im Falle des Lebesgue-Maßes auch einfach $d\lambda^n(t) = d^n t$ oder $d\lambda(t) = dt$.

e) Für eine beliebige Teilmenge A von $\Omega := \mathbb{N}$ definieren wir $\mu(A)$ als Anzahl der Elemente von A . Dieses *Zählmaß* μ liefert die *Folgenräume*

$$\ell_p := \{x = (x_j)_{j=0}^{\infty} \mid \|x\|_p := \left(\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} < \infty \}.$$

Für $r > 0$ liegt die Folge $((j+1)^{-r})$ genau dann in ℓ_p , wenn $rp > 1$ gilt.

f) Für $\Omega := \{1, \dots, n\}$ und das Zählmaß μ ergibt sich insbesondere $\mathcal{L}_p(\Omega, \mu) = \ell_p^n$.

g) Eine Σ -messbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *wesentlich beschränkt*, Notation: $f \in \mathcal{L}_{\infty}(\Omega, \Sigma, \mu)$, wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, sodass $|f(t)| \leq C$ für *fast alle* $t \in \Omega$, d. h. außerhalb einer μ -Nullmenge gilt. Das Infimum dieser Konstanten $C \geq 0$ heißt *wesentliches Supremum* von $|f|$ und wird so bezeichnet:

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{\infty}} = \operatorname{ess-sup}_{t \in \Omega} |f(t)|.$$

h) Für $f \in \mathcal{L}_{\infty}(\Omega, \mu)$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt also $|f(t)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}_{\infty}} + \frac{1}{k}$ für $t \notin A_k$ und $\mu(A_k) = 0$. Dann ist auch $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ eine Nullmenge, und man hat

$$|f(t)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}_{\infty}} \quad \text{für fast alle } t \in \Omega. \quad (1.14)$$

Das Infimum in g) ist also sogar ein Minimum.

Satz 1.3 (Höldersche Ungleichung)

Es seien $p, q \in [1, \infty]$ konjugierte Exponenten, d. h. es gelte $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für Funktionen $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mu)$ und $g \in \mathcal{L}_q(\Omega, \mu)$ gilt $f \cdot g \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mu)$ sowie

$$\|f \cdot g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_q}. \quad (1.15)$$

BEWEIS. a) Für $p = 1$ ist $q = \infty$. Nach (1.14) gilt dann $|f(t)g(t)| \leq |f(t)| \cdot \|g\|_{L_\infty}$ μ -fast überall (μ -f.ü.) und somit

$$\int_{\Omega} |f(t)g(t)| d\mu \leq \|g\|_{L_\infty} \int_{\Omega} |f(t)| d\mu.$$

b) Nun gelte $1 < p, q < \infty$. Für $a, b > 0$ seien $x = \log a$ und $y = \log b$; die Konvexität der Exponentialfunktion liefert dann

$$a \cdot b = e^x \cdot e^y = e^{x+y} \leq \frac{1}{p} \exp(px) + \frac{1}{q} \exp(qy) = \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q. \quad (1.16)$$

Dies ist auch noch richtig für $a, b \geq 0$.

c) Für $\varepsilon \geq 0$ setzen wir

$$A_\varepsilon := \left(\int_{\Omega} |f(t)|^p d\mu \right)^{1/p} + \varepsilon, \quad B_\varepsilon := \left(\int_{\Omega} |g(t)|^q d\mu \right)^{1/q} + \varepsilon.$$

Da $A_0 = 0$ oder $B_0 = 0$ möglich ist, sei nun $\varepsilon > 0$. Für $t \in \Omega$ wenden wir (1.16) auf $a := \frac{|f(t)|}{A_\varepsilon}$, $b := \frac{|g(t)|}{B_\varepsilon}$ an und erhalten

$$\frac{|f(t)g(t)|}{A_\varepsilon B_\varepsilon} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(t)|^p}{A_\varepsilon^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(t)|^q}{B_\varepsilon^q}.$$

Integration über Ω liefert dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_\varepsilon B_\varepsilon} \int_{\Omega} |f(t)g(t)| d\mu &\leq \frac{1}{p A_\varepsilon^p} \int_{\Omega} |f(t)|^p d\mu + \frac{1}{q B_\varepsilon^q} \int_{\Omega} |g(t)|^q d\mu \\ &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \text{also} \\ \int_{\Omega} |f(t)g(t)| d\mu &\leq A_\varepsilon \cdot B_\varepsilon. \end{aligned}$$

Mit $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt daraus die Behauptung (1.15). $\diamond$

Satz 1.4 (Minkowskische Ungleichung)

Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $\mathcal{L}_p(\Omega, \mu)$ ein Vektorraum, und für $\|\cdot\|_{L_p}$ gilt die Dreiecks-Ungleichung (1.3). Für $1 \leq p < \infty$ und Funktionen $f, g \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mu)$ gilt also

$$\left(\int_{\Omega} |f+g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega} |g|^p d\mu \right)^{1/p}. \quad (1.17)$$

BEWEIS. a) Für $p = 1$ ist das klar, ebenso für $p = \infty$ aufgrund von (1.14).

b) Nun sei $1 < p < \infty$. Die Konvexität der Funktion $t \rightarrow t^p$ auf $[0, \infty)$ liefert

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(a^p + b^p) \quad \text{für } a, b \geq 0.$$

Aus $f, g \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mu)$ folgt also auch $f + g \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mu)$.

c) Für $f, g \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mu)$ gilt zunächst

$$\int_{\Omega} |f + g|^p d\mu \leq \int_{\Omega} |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int_{\Omega} |g| |f + g|^{p-1} d\mu;$$

wegen $(p-1)q = p$ liefert dann die Höldersche Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f + g|^p d\mu &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |f + g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{1/q} \\ &\quad + \left(\int_{\Omega} |g|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} |f + g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{1/q} \\ &= (\|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}) \left(\int_{\Omega} |f + g|^p d\mu\right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Für $\|f + g\|_{L_p} \neq 0$ folgt dann (1.17) mittels Division durch $\left(\int_{\Omega} |f + g|^p d\mu\right)^{1/q}$. $\diamond$

Nullfunktionen

a) Für $1 \leq p \leq \infty$ werden auf den Räumen $\mathcal{L}_p(\Omega, \mu)$ durch $\|\cdot\|_{L_p}$ Halbnormen definiert, d. h. es gelten (1.2) und (1.3), letzteres aufgrund der Minkowskischen Ungleichung, an Stelle von (1.1) hat man aber nur $\|\cdot\|_{L_p} \geq 0$. Weiter gilt

$$\|f\|_{L_p} = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0 \text{ fast überall} \quad (1.18)$$

(vgl. S. 353). Der Kern der L_p -Halbnorm ist also (unabhängig von p) gegeben durch den Raum der Nullfunktionen

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(\Omega, \Sigma, \mu) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid f(t) = 0 \text{ f.ü.}\}.$$

b) Für das Zählmaß μ auf $\mathbb{N}_0$ ist $\mathcal{N}(\mathbb{N}_0, \mu) = \{0\}$, und somit ist $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf dem Folgenraum ℓ_p . Dieser ist vollständig, also ein Banachraum (s. Aufgabe 1.9).

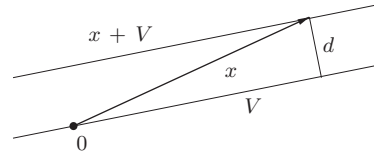
Halbnormen und Äquivalenzklassen

a) Halbnormen spielen eine große Rolle in der Funktionalanalysis. Wichtige Funktionenräume können nicht durch eine Norm, wohl aber durch unendlich viele Halbnormen beschrieben werden; auf die Untersuchung solcher lokalkonvexer Räume gehen wir im Aufbaukurs ein.

b) Zu einem halbnormierten Raum $(E, \|\cdot\|)$ kann man einen normierten Raum von Äquivalenzklassen assoziieren: Der Kern

$$\mathcal{N} := \{x \in E \mid \|x\| = 0\} \quad (1.19)$$

Abb. 1.6 Eine Äquivalenzklasse $\pi x = x + V$ in $Q = X/V$ und ihre Norm $d = \|\pi x\|$.



der Halbnorm ist offenbar ein Unterraum von E . Durch

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in N \Leftrightarrow \|x - y\| = 0$$

wird eine Äquivalenzrelation (vgl. S. 340) auf E definiert. Die Äquivalenzklassen

$$\tilde{x} = \{y \in E \mid y \sim x\} = x + N := \{x + n \mid n \in N\}, \quad x \in E, \quad (1.20)$$

sind affine Unterräume von E „parallel“ zu N (vgl. Abb. 1.6 und S. 17).

c) Offenbar folgt aus $x \sim x'$ und $y \sim y'$ auch $x + y \sim x' + y'$ und $\alpha x \sim \alpha x'$ für $\alpha \in \mathbb{K}$. Daher kann man auf den Äquivalenzklassen Addition und Skalarmultiplikation durch

$$\tilde{x} + \tilde{y} := \widetilde{x + y}, \quad \alpha \tilde{x} := \widetilde{\alpha x}, \quad x, y \in E, \quad \alpha \in \mathbb{K}, \quad (1.21)$$

definieren. Diese bilden damit einen Vektorraum, den Quotientenraum E/N .

d) Auf diesem Quotientenraum wird durch

$$\|\tilde{x}\| := \|x\|, \quad x \in E,$$

dann eine Norm definiert: Aus $\|\tilde{x}\| = 0$ folgt nämlich sofort $x \in N$, und somit ist $\tilde{x}$ das Nullelement von E/N . Man nennt $(E/N, \|\cdot\|)$ den zu $(E, \|\cdot\|)$ assoziierten normierten Raum.

L_p -Räume

Der zu $(\mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu), \|\cdot\|_{L_p})$ assoziierte normierte Raum wird mit

$$L_p(\Omega, \Sigma, \mu) = \mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu) / \mathcal{N}(\Omega, \Sigma, \mu)$$

bezeichnet; er besteht also aus Äquivalenzklassen fast überall gleicher messbarer Funktionen. Die L_p -Norm beschreibt die Konvergenz im p -ten Mittel, im wichtigen Spezialfall $p = 2$ die Konvergenz im quadratischen Mittel. In diesem Fall wird die Norm von einem Skalarprodukt induziert; $L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$ ist ein Hilbertraum (vgl. Kap. 6). In der Notation wird zwischen einer Funktion $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mu)$ und ihrer Äquivalenzklasse $\tilde{f} \in L_p(\Omega, \mu)$ meist nicht unterschieden.

Theorem 1.5

Die Räume $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ sind vollständig, also Banachräume.

Für $p = \infty$ lässt sich dieses wichtige Resultat wegen (1.14) wie Satz 1.2 beweisen, da eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}_\infty(\mu)$ außerhalb einer Nullmenge eine Cauchy-Folge bezüglich der sup-Norm ist (vgl. Aufgabe 1.13). Für $1 \leq p < \infty$ ist dieses Argument nicht anwendbar, da aus einer Cauchy-Bedingung für eine Folge in $\mathcal{L}_p(\mu)$ nicht eine punktweise Cauchy-Bedingung (fast überall) folgt (vgl. Aufgabe 1.6). Jedoch sind absolut konvergente Reihen in $L_p(\mu)$ fast überall punktweise und im Raum $L_p(\mu)$ konvergent; dies ist der Inhalt des für die Integrationstheorie fundamentalen Satzes von Beppo Levi (vgl. die Sätze A.3.4 und A.3.14 im Anhang). Theorem 1.5 ergibt sich dann aus dem folgenden Satz 1.6.

Reihen

a) Eine (unendliche) Reihe $\sum_k a_k$ in einem normierten Raum X heißt *konvergent*, falls die Folge der Partialsummen $(s_n := \sum_{k=1}^n a_k)$ konvergiert; die Summe der Reihe ist dann gegeben durch

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n. \quad (1.22)$$

b) Eine Reihe $\sum_k a_k$ heißt *absolut konvergent*, falls $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\| < \infty$ gilt.

Satz 1.6

Ein normierter Raum X ist genau dann vollständig, wenn in X jede absolut konvergente Reihe konvergiert.

BEWEIS. „ $\Rightarrow$ “: Für $m > n$ gilt $\|s_m - s_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m a_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|a_k\|$; wegen $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\| < \infty$ ist (s_n) eine Cauchy-Folge in X und damit konvergent.

„ $\Leftarrow$ “: Es sei (s_n) eine Cauchy-Folge in X . Zu $\varepsilon := 2^{-j}$ gibt es dann $n_j \in \mathbb{N}$ mit $\|s_n - s_m\| \leq 2^{-j}$ für $n, m \geq n_j$. Man kann $n_j > n_{j-1}$ annehmen. Es seien nun $a_1 := s_{n_1}$ und $a_k := s_{n_k} - s_{n_{k-1}}$ für $k \geq 2$; für die Teilfolge (s_{n_j}) von (s_n) gilt dann

$$s_{n_j} = \sum_{k=1}^j a_k \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Nach Konstruktion ist $\|a_k\| \leq 2^{-(k-1)}$, also $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\| < \infty$. Nach Voraussetzung ist (s_{n_j}) konvergent, und nach dem folgenden Lemma konvergiert dann auch die Folge (s_n) gegen den gleichen Limes. $\diamond$

Lemma 1.7

Gegeben sei eine Cauchy-Folge (x_n) in einem metrischen Raum M . Hat (x_n) eine konvergente Teilfolge $x_{n_j} \rightarrow x \in M$, so konvergiert auch (x_n) gegen x .

BEWEIS. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für $n, m \geq n_0$ und $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(x_{n_j}, x) < \varepsilon$ für $j \geq j_0$. Man wählt dann $m = n_j$ mit $j \geq \max\{j_0, n_0\}$ und erhält $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x) < 2\varepsilon$ für $n \geq n_0$. $\diamond$

Eine weitere Anwendung von [Satz 1.6](#) ist [Satz 1.8](#) unten über die Vollständigkeit von Quotientenräumen.

Quotientenräume

a) Es seien X ein Vektorraum und $V \subseteq X$ ein Unterraum. Wie in (1.19) wird durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in V$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert. Wie in (1.20) sind die Äquivalenzklassen

$$\pi x := \{y \in X \mid y \sim x\} = x + V = \{x + v \mid v \in V\}, \quad x \in X,$$

affine Unterräume von X „parallel“ zu V (vgl. [Abb. 1.6](#) auf S. 15) und bilden den Quotientenraum $Q := X/V$.

b) Die Quotientenabbildung $\pi = \pi_V : X \rightarrow Q = X/V$ ist linear, da wie in (1.21)

$$\pi(x + y) = \pi x + \pi y \quad \text{und} \quad \pi(\alpha x) = \alpha \pi x, \quad x, y \in X, \quad \alpha \in \mathbb{K},$$

gilt. Weiter ist $\pi : X \rightarrow Q$ offenbar surjektiv.

c) Ist nun $\|\cdot\|_X$ eine Norm auf X , so wird durch

$$\|q\|_Q := \inf \{\|x\|_X \mid x \in X, \pi x = q\} \quad \text{oder} \quad (1.23)$$

$$\|\pi x\|_Q := \inf \{\|x - v\|_X \mid v \in V\} \quad (1.24)$$

eine Halbnorm auf dem Quotientenraum Q definiert. Für $x \in X$ ist $\|\pi x\|_Q$ nach (1.24) die Distanz von x zu V (vgl. [Abb. 1.6](#) und (1.26) unten). Es handelt sich genau dann um eine Norm, wenn V in X abgeschlossen ist; diese heißt dann Quotientennorm von $\|\cdot\|_X$ auf Q (vgl. [Aufgabe 1.15](#)).

d) Es ist $\|\pi(x)\|_Q \leq \|x\|_X$ für alle $x \in X$. Daraus ergibt sich sofort

$$\|\pi x - \pi y\|_Q = \|\pi(x - y)\|_Q \leq \|x - y\|_X$$

für $x, y \in X$, und somit ist die Quotientenabbildung $\pi : X \rightarrow Q$ (gleichmäßig) stetig (vgl. auch [Satz 3.1](#) auf S. 40).

e) Weiter gilt $\pi(U_X) = U_Q$ nach (1.23). Daher ist für jede offene Menge $D \subseteq X$ auch $\pi(D)$ offen in Q : Zu $q \in \pi(D)$ wählt man $x \in D$ mit $\pi x = q$. Da D offen ist, gibt es $r > 0$ mit

$x + rU_X = U_r(x) \subseteq D$, und wegen der Linearität von π folgt

$$U_r(q) = q + rU_Q = \pi(x + rU_X) \subseteq \pi(D).$$

Die Quotientenabbildung ist also eine *stetige und offene lineare Abbildung*.

Im kurzen Beweis der Aussage e) wurden die Notationen

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}, \quad \alpha B := \{\alpha b \mid b \in B\} \quad (1.25)$$

für Teilmengen A, B eines Vektorraumes und $\alpha \in \mathbb{K}$ verwendet. Für $\{a\} + B$ schreibt man einfach $a + B$.

Satz 1.8

Es seien X ein Banachraum und $V \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist auch der Quotientenraum $Q = X/V$ vollständig, also ebenfalls ein Banachraum.

BEWEIS. Es sei $\sum_k q_k$ eine Reihe in Q mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|q_k\| < \infty$. Nach (1.23) gibt es $x_k \in X$ mit $\pi x_k = q_k$ und $\|x_k\| \leq 2\|q_k\|$. Dann ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$, und nach Satz 1.6 existiert $x := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in X$. Daraus folgt dann $\pi x = \sum_{k=1}^{\infty} q_k$ wegen der Linearität und Stetigkeit von π . Wiederum nach Satz 1.6 ist also Q vollständig. $\diamond$

Proxima

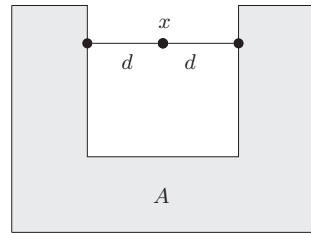
a) Es sei M ein metrischer Raum. Die *Distanz* oder der *Abstand* eines Punktes $x \in M$ zu einer Teilmenge $A \subseteq M$ von M wird definiert durch

$$d_A(x) := \inf \{d(x, a) \mid a \in A\}. \quad (1.26)$$

Es gilt $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$ für $x, y \in M$ (vgl. Satz A.2.2 im Anhang), und daher ist die Distanzfunktion d_A (gleichmäßig) *stetig* auf M .

b) Ein Punkt $a \in A$ mit $d(x, a) = d_A(x)$ heißt *Bestapproximation* oder *Proximum* zu x in A . Im Fall einer *kompakten* Menge A gibt es stets ein Proximum, das aber i. a. nicht eindeutig ist (vgl. Abb. 1.7 und Aufgabe 1.16). Auf die Frage der Existenz und Eindeutigkeit von Proxima gehen wir später mehrmals ein, insbesondere auch für den Fall eines abgeschlossenen Unterraumes V eines Banachraumes X .

Abb. 1.7 Distanz $d = d_A(x)$ eines Punktes zu einer Menge



1.4 Aufgaben

Aufgabe 1.1

Es seien (x_n) und (y_n) Folgen in einem metrischen Raum X , und es gelte $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ in X .

- Zeigen Sie $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$.
- Nun seien X ein normierter Raum und (α_n) eine Folge in $\mathbb{K}$ mit $\alpha_n \rightarrow \alpha$ in $\mathbb{K}$. Zeigen Sie $\|\alpha_n x_n\| \rightarrow \|\alpha x\|$ und $\alpha_n x_n + y_n \rightarrow \alpha x + y$.

Aufgabe 1.2

Definieren Sie auf einem Produkt $X := X_1 \times \dots \times X_n$ metrischer bzw. normierter Räume analog zu (1.10) und (1.12) Metriken bzw. Normen, die die koordinatenweise Konvergenz auf X induzieren. Beweisen Sie, dass aus der Vollständigkeit von $X_1, \dots, X_n$ auch die des Produkts X folgt.

Aufgabe 1.3

- Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum mit offener bzw. abgeschlossener Einheitskugel U bzw. B . Zeigen Sie

$$\|x\| = \inf \{t > 0 \mid \tfrac{1}{t}x \in U\} = \inf \{t > 0 \mid \tfrac{1}{t}x \in B\}, \quad x \in X.$$

- Nun seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ Normen auf X , und es gelte $U_1 = U_2$ oder $B_1 = B_2$ für die Einheitskugeln. Folgern Sie $\|x\|_1 = \|x\|_2$ für alle $x \in X$.

Eine Norm wird also durch ihre Einheitskugel eindeutig bestimmt.

Aufgabe 1.4

Zeigen Sie, dass die nach (1.8) gebildete Menge $\text{co}(A)$ die kleinste konvexe Obermenge einer Teilmenge $A \subseteq E$ eines Vektorraumes E ist.

Aufgabe 1.5

Untersuchen Sie, ob folgende Mengen A in den angegebenen normierten Räumen beschränkt sind:

- a) $A = \{(z, w) \mid z^2 + w^2 = 1\}$ in $\ell_2^2(\mathbb{C})$,
 b) $A = \{f \in \mathcal{C}[0, 1] \mid \|f\|_{\sup} \leq 1\}$ in $L_p[0, 1]$,
 c) $A = \{f \in \mathcal{C}^1[0, 1] \mid \|f'\|_{\sup} \leq 1\}$ in $\mathcal{C}[0, 1]$,
 d) $A = \{f \in \mathcal{C}[0, 1] \mid \|f\|_{L_1} \leq 1\}$ in $\mathcal{C}[0, 1]$.

Aufgabe 1.6

- a) Sind die Normen $\|\cdot\|_{\sup}$ und $\|\cdot\|_1$ auf $\mathcal{C}[a, b]$ äquivalent?
 b) Sind die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf $\mathcal{C}[a, b]$ äquivalent?
 c) Impliziert die punktweise Konvergenz auf $\mathcal{C}[a, b]$ die im Mittel? Gilt die umgekehrte Implikation?

Aufgabe 1.7

Beweisen Sie die Formel $\|x\|_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p$ für $x \in \mathbb{K}^n$.

Aufgabe 1.8

Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie, dass durch

$$d^*(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

eine neue Metrik auf M definiert wird. Zeigen Sie $d^* \leq \min\{1, d\}$ und

$$d^*(x_n, x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow d(x_n, x) \rightarrow 0$$

für Folgen in M . Gilt auch $d \leq C d^*$ mit einer Konstanten $C \geq 0$?

Aufgabe 1.9

Beweisen Sie die Vollständigkeit der Folgenräume ℓ_p für $1 \leq p < \infty$.

HINWEIS. Sie können ähnlich wie im Fall $p = \infty$ verfahren.

Aufgabe 1.10

- a) Es sei Ω ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$, z. B. $\Omega = [a, b]$. Für $1 \leq r < s \leq \infty$ zeigen Sie $\mathcal{L}_s(\Omega) \subseteq \mathcal{L}_r(\Omega)$ und $\|f\|_{L_r} \leq \mu(\Omega)^{1/r - 1/s} \|f\|_{L_s}$ für $f \in \mathcal{L}_s(\Omega)$.
 b) Zeigen Sie $\ell_r \subseteq \ell_s$ und $\|x\|_s \leq \|x\|_r$ für $x \in \ell_r$ und $1 \leq r < s \leq \infty$.

Aufgabe 1.11

Der Raum der *endlichen* Folgen ist definiert durch

$$\varphi := \{x = (x_j)_{j=0}^{\infty} \mid \exists k \forall j > k : x_j = 0\}.$$

Bestimmen Sie die Abschlüsse von φ in den Räumen ℓ_p für $1 \leq p \leq \infty$.

Aufgabe 1.12

Zeigen Sie, dass die Folgenräume c aller konvergenten Folgen und c_0 aller Nullfolgen Banachräume sind und beweisen Sie $\dim c/c_0 = 1$.

Aufgabe 1.13

Beweisen Sie die Vollständigkeit der normierten Räume $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Aufgabe 1.14

Es seien X ein normierter Raum, $V \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum und $\pi : X \rightarrow Q = X/V$ die Quotientenabbildung. Zeigen Sie:

- Zu einer konvergenten Folge (q_n) in Q gibt es eine konvergente Folge (x_n) in X mit $\pi x_n = q_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Eine Menge $W \subseteq Q$ ist genau dann offen in Q , wenn $\pi^{-1}(W)$ offen in X ist.
- Eine Abbildung $f : Q \rightarrow M$ von Q in einen metrischen Raum M ist genau dann stetig, wenn $f \circ \pi : X \rightarrow M$ stetig ist.

Aufgabe 1.15

Es seien $(E, \|\cdot\|)$ ein halbnormierter Raum und $V \subseteq E$ ein Unterraum. Zeigen Sie, dass durch

$$\|\pi x\|_Q := \inf \{ \|x - v\|_E \mid v \in V \} \quad \text{für } \pi x \in Q = E/V$$

eine Halbnorm auf dem Quotientenraum $Q = E/V$ definiert wird. Wann ist diese sogar eine Norm?

Aufgabe 1.16

- Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass das Infimum in (1.26) nicht immer angenommen wird.
- Gegeben seien die Banachräume $X = \ell_\infty^2(\mathbb{R})$ und $X = \ell_1^2(\mathbb{R})$. Finden Sie jeweils einen Unterraum V von X und einen Vektor $x \in X \setminus V$, sodass es unendlich viele Vektoren $v \in V$ mit $\|x - v\| = d_V(x)$ gibt.

Aufgabe 1.17

Es seien X ein normierter Raum und $\emptyset \neq A, B \subseteq E$. Zeigen Sie:

- Mit A ist auch $A + B$ offen in X .
- Sind A und B konvex, so gilt dies auch für $A + B$.
- Ist A kompakt und B abgeschlossen, so ist auch $A + B$ abgeschlossen.
- Gilt Aussage c) auch für nur abgeschlossene Mengen $A \subseteq X$?

Fragen

1. Gegeben sei eine punktweise konvergente Folge stetiger Funktionen. Finden Sie Bedingungen, die die Stetigkeit der Grenzfunktion implizieren.
2. Gegeben sei eine beschränkte Folge in einem konkreten Banachraum wie $\mathcal{C}[a, b]$, c_0 oder ℓ_p . Finden Sie Bedingungen, die die Existenz einer konvergenten Teilfolge implizieren.
3. Lassen sich Banachräume „der Größe nach“ vergleichen?

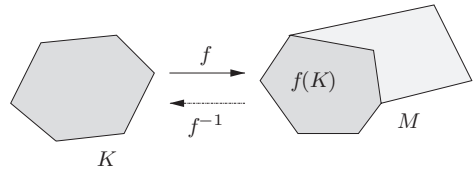
In diesem Kapitel bestimmen wir die kompakten Teilmengen des Banachraums $\mathcal{C}(K)$ der stetigen Funktionen auf einem kompakten metrischen Raum K (*Satz von Arzelà-Ascoli 1883*) und beweisen auch die *Separabilität* dieses Raumes. Beispiele für kompakte Teilmengen von $\mathcal{C}[a, b]$ sind Funktionenmengen, die bezüglich einer *Hölder-Norm* oder einer *Sobolev-Norm* beschränkt sind.

Wir beginnen mit knappen Erinnerungen an den Kompaktheitsbegriff (fehlende Beweise findet man in [Anhang A.2](#)).

Kompakte Räume

- a) Ein metrischer Raum K heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge in K eine in K konvergente Teilfolge besitzt.
- b) Ein metrischer Raum K heißt *überdeckungskompakt*, wenn jede *offene Überdeckung* von K eine *endliche Teilüberdeckung* besitzt. Dies bedeutet: Ist $\mathcal{U}$ ein System offener Mengen von K mit $K \subseteq \bigcup \{U \mid U \in \mathcal{U}\}$, so genügen bereits endlich viele Mengen $U_1, \dots, U_r \in \mathcal{U}$ zur Überdeckung von K , d. h. man hat $K \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_r$.
- c) Die in a) und b) formulierten Eigenschaften sind *äquivalente* Formulierungen der *Kompaktheit* eines metrischen Raumes ([Satz A.2.11](#)).

Abb. 2.1 Eine injektive Abbildung



d) Es seien K, M metrische Räume und K kompakt. Dann ist eine stetige Abbildung $f : K \rightarrow M$ *gleichmäßig stetig* mit *kompakter Bildmenge* $f(K) \subseteq M$. Ist f zusätzlich *injektiv*, so ist auch die *Umkehrabbildung* $f^{-1} : f(K) \rightarrow K$ stetig (vgl. [Abb. 2.1](#)).

e) Ein kompakter Raum ist wegen [Lemma 1.7](#) vollständig und daher in jedem Oberraum abgeschlossen. Kompakte Teilmengen $K \subseteq X$ *normierter* Räume sind beschränkt und abgeschlossen; kompakte Mengen $K \subseteq \mathbb{R}$ besitzen ein Maximum und ein Minimum.

f) Nach dem *Satz von Bolzano-Weierstraß* ist umgekehrt in $\mathbb{K}^n$ jede beschränkte und abgeschlossene Menge auch kompakt; dies gilt jedoch *nicht in unendlichdimensionalen* normierten Räumen (vgl. das Beispiel auf der folgenden Seite sowie [Satz 3.10](#) auf S. 50).

Präkompakte Mengen

a) Für $\varepsilon > 0$ heißt eine Menge $N \subseteq M$ ein ε -*Netz* des metrischen Raumes M , wenn $M \subseteq \bigcup \{U_\varepsilon(a) \mid a \in N\}$ gilt (vgl. [Abb. 2.2](#)).

b) Ein metrischer Raum M heißt *präkompakt* oder *total beschränkt*, wenn er für jedes $\varepsilon > 0$ ein *endliches* ε -*Netz* besitzt.

c) Ein metrischer Raum M ist genau dann präkompakt, wenn jede Folge in M eine Cauchy-Teilfolge besitzt ([Satz A.2.10](#)).

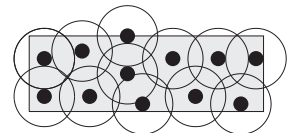
d) Aufgrund von c) ist ein metrischer Raum M genau dann kompakt, wenn er präkompakt und vollständig ist.

e) Eine Teilmenge $A \subseteq M$ eines metrischen Raumes heißt *relativ kompakt* in M , wenn ihr Abschluss $\bar{A}$ in M kompakt ist. Der Begriff der relativen Kompaktheit hängt also von der *Wahl eines Oberraums* ab; im Gegensatz dazu sind „kompakt“, „präkompakt“ und auch „vollständig“ absolute Begriffe.

f) Relativ kompakte Mengen sind präkompakt, da wegen c) Teilmengen präkompakter Räume wieder präkompakt sind.

g) Ist $A \subseteq M$ präkompakt, so auch $\bar{A}$. Ist in der Tat N ein endliches ε -*Netz* von A , so ist N auch ein endliches 2ε -*Netz* von $\bar{A}$. Wegen d) sind daher in vollständigen Räumen die Begriffe „präkompakt“ und „relativ kompakt“ äquivalent.

Abb. 2.2 Ein ε -Netz



g) Präkompakte Teilmengen $A \subseteq X$ normierter Räume sind *beschränkt*, da sie ja endliche ε -Netze besitzen. Nach dem *Satz von Bolzano-Weierstraß* ist umgekehrt in $\mathbb{K}^n$ jede beschränkte Menge auch präkompakt; dies gilt jedoch *nicht in unendlichdimensionalen* normierten Räumen (vgl. wiederum das folgende Beispiel und [Satz 3.10](#) auf S. 50).

2.1 Der Satz von Arzelà-Ascoli

Das erste Ziel dieses Kapitels ist der Beweis des *Satzes von Arzelà-Ascoli* [2.5](#). Dieser besagt, dass eine Teilmenge des Banachraumes $\mathcal{C}(K)$ der stetigen Funktionen auf einem kompakten metrischen Raum K genau dann präkompakt ist, wenn sie beschränkt und *gleichstetig* ist. Zur Motivation dieses Begriffs diene das folgende

Beispiel

a) Für die durch $f_n(t) := \cos 2^n t$ definierte Funktionenfolge (f_n) in $\mathcal{C}[0, 2\pi]$ (vgl. [Abb. 2.3](#)) gilt stets $\|f_n\| = 1$; wegen $f_n(2^{-n}\pi) = \cos \pi = -1$ und $f_m(2^{-n}\pi) = \cos 2^{m-n}\pi = +1$ für $m > n$ hat man $\|f_m - f_n\| = 2$ für $m \neq n$. Daher hat die Folge (f_n) keine Cauchy-Teilfolge; die abgeschlossene Einheitskugel B von $\mathcal{C}[0, 2\pi]$ ist nicht präkompakt und erst recht nicht kompakt.

b) Wegen $\|f'_n\| = \|-2^n \sin 2^n t\| = 2^n$ gilt nach dem *Mittelwertsatz der Differentialrechnung* $|f_n(t) - f_n(s)| \leq 2^n |t - s|$ für $t, s \in [0, 2\pi]$. Folglich hat man für f_n die *gleichmäßige Stetigkeit* (vgl. auch [S. 342](#)):

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t, s \in [0, 2\pi] : |t - s| < \delta \Rightarrow |f_n(t) - f_n(s)| < \varepsilon \quad (2.1)$$

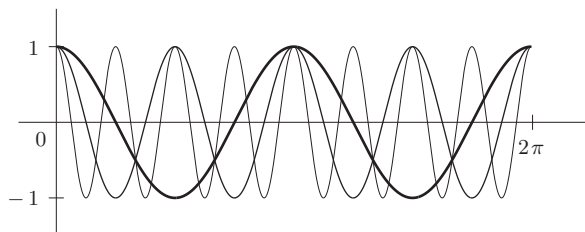
mit $\delta = 2^{-n} \varepsilon$. Wegen $f_n(0) = 1$ und $f_n(2^{-n}\pi) = -1$ muss für $\varepsilon \leq 2$ in der Tat zwingend $\delta = \delta_n \leq 2^{-n}\pi$ gewählt werden. Wegen $\delta_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ kann also δ *nicht unabhängig von n* gewählt werden!

Das soeben beobachtete Phänomen führt auf den folgenden Begriff:

Gleichstetige Funktionenmengen

a) Es seien M und N metrische Räume. Eine *Funktionenmenge* $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(M, N)$ mit der Eigenschaft

Abb. 2.3 Die Funktionen $\cos 2t, \cos 4t$ und $\cos 8t$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t, s \in M \forall f \in \mathcal{H} : d(t, s) < \delta \Rightarrow d(f(t), f(s)) < \varepsilon \quad (2.2)$$

heißt *gleichstetig* oder *gleichgradig stetig*.

b) Eine Funktionenmenge $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(M, N)$ ist also genau dann gleichstetig, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Zahl $\delta > 0$ aus der Stetigkeitsbedingung (2.1) *unabhängig* von $f \in \mathcal{H}$ (und auch von $t, s \in M$) wählbar ist.

Satz 2.1

Für eine Folge (f_n) in $\mathcal{C}(M, N)$ existiere $f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ punktweise auf M , und die Menge $\{f_n\}$ sei gleichstetig. Dann ist auch die Menge $\{f_n\} \cup \{f\}$ gleichstetig, und insbesondere ist die Grenzfunktion stetig.

BEWEIS. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ mit $d(f_n(t), f_n(s)) \leq \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t, s \in M$ mit $d(t, s) \leq \delta$. Mit $n \rightarrow \infty$ folgt sofort auch $d(f(t), f(s)) \leq \varepsilon$ für $d(t, s) \leq \delta$. $\diamond$

Beispiele

a) Die Menge der Monome $\{p_n(t) := t^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ in $\mathcal{C}[0, 1]$ (vgl. Abb. 1.4 auf S. 10) ist nicht gleichstetig. Dies folgt sofort aus Satz 2.1; man sieht aber auch leicht, dass (2.2) nicht erfüllt ist.

b) Die Beschränktheit der Ableitung impliziert die gleichmäßige Stetigkeit einer Funktion. Ist entsprechend $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}^1[a, b]$ eine Funktionenmenge mit $\|f'\|_{\sup} \leq C$ für alle $f \in \mathcal{H}$ und ein $C > 0$, so ergibt sich aus dem *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* sofort

$$|f(t) - f(s)| = \left| \int_s^t f'(\tau) d\tau \right| \leq \|f'\|_{\sup} |t - s| \leq C |t - s|$$

für $f \in \mathcal{H}$ und $t, s \in [a, b]$; somit ist (2.2) mit $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ erfüllt, und die Funktionenmenge $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}[a, b]$ ist gleichstetig.

Satz 2.2

Es seien K ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(K)$ präkompakt. Dann ist $\mathcal{H}$ gleichstetig.

BEWEIS. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es Funktionen $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{H}$ mit $\mathcal{H} \subseteq \bigcup_{j=1}^r U_\varepsilon(f_j)$. Jede Funktion f_j ist *gleichmäßig* stetig, d. h. es gibt $\delta_j > 0$ mit $|f_j(t) - f_j(s)| < \varepsilon$ für $d(t, s) < \delta_j$. Es seien nun $\delta := \min_{j=1}^r \delta_j > 0$ und $f \in \mathcal{H}$. Wir wählen $j \in \{1, \dots, r\}$ mit $\|f - f_j\| < \varepsilon$ und erhalten für $d(t, s) < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &\leq |f(t) - f_j(t)| + |f_j(t) - f_j(s)| + |f_j(s) - f(s)| \\ &\leq \|f - f_j\| + \varepsilon + \|f - f_j\| \leq 3\varepsilon. \end{aligned} \quad \diamond$$

Der Satz von Arzelà-Ascoli besagt, dass $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(K)$ genau dann präkompakt ist, wenn $\mathcal{H}$ gleichstetig und beschränkt ist. Dem Beweis von „ $\Leftarrow$ “ schicken wir zwei Hilfsaussagen voraus, die wir auch später noch verwenden werden:

Lemma 2.3

Es seien A eine abzählbare Menge und (f_n) eine punktweise beschränkte Folge von Funktionen auf A , d. h. für alle $a \in A$ seien die Folgen $(f_n(a))$ in $\mathbb{K}$ beschränkt. Dann hat (f_n) eine punktweise konvergente Teilfolge.

BEWEIS. Es sei $A = \{a_j \mid j \in \mathbb{N}\}$. Da $(f_n(a_1))$ in $\mathbb{K}$ beschränkt ist, hat (f_n) eine Teilfolge $(f_n^{(1)})$, für die $(f_n^{(1)}(a_1))$ konvergiert. Dann hat $(f_n^{(1)})$ eine Teilfolge $(f_n^{(2)})$, für die $(f_n^{(2)}(a_2))$ konvergiert. So fortfahrend wählen wir für $j \in \mathbb{N}$ rekursiv Teilfolgen $(f_n^{(j)})$ von $(f_n^{(j-1)})$, für die $(f_n^{(j)}(a_j))$ konvergiert. Nach Konstruktion konvergiert dann $(f_n^{(j)}(a_k))$ für $k \leq j$. Aus diesen sukzessive ausgewählten Teilfolgen

$$\begin{array}{ccccccc}
 f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & \cdots \\
 f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & f_3^{(1)} & f_4^{(1)} & f_5^{(1)} & f_6^{(1)} & \cdots \\
 f_1^{(2)} & f_2^{(2)} & f_3^{(2)} & f_4^{(2)} & f_5^{(2)} & f_6^{(2)} & \cdots \\
 f_1^{(3)} & f_2^{(3)} & f_3^{(3)} & f_4^{(3)} & f_5^{(3)} & f_6^{(3)} & \cdots \\
 f_1^{(4)} & f_2^{(4)} & f_3^{(4)} & f_4^{(4)} & f_5^{(4)} & f_6^{(4)} & \cdots \\
 f_1^{(5)} & f_2^{(5)} & f_3^{(5)} & f_4^{(5)} & f_5^{(5)} & f_6^{(5)} & \cdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
 \end{array}$$

bilden wir nun die *Diagonalfolge* $(f_n^*) := (f_n^{(n)})$. Diese ist Teilfolge von (f_n) und, für $n \geq j$, auch von $(f_n^{(j)})$; daher konvergiert $(f_n^*(a_j))$ für alle $j \in \mathbb{N}$. $\diamond$

Lemma 2.4

Es seien M, N metrische Räume, und N sei vollständig. Weiter sei (g_n) eine gleichstetige Folge in $\mathcal{C}(M, N)$, die auf einer dichten Menge $A \subseteq M$ punktweise konvergiert. Dann ist (g_n) auf ganz M punktweise konvergent, und die Konvergenz ist gleichmäßig auf präkompakten Teilmengen von M .

BEWEIS. a) Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta > 0$ mit $d(g_n(t), g_n(s)) < \varepsilon$ für $n \in \mathbb{N}$ und $d(t, s) < 2\delta$. Für eine präkompakte Menge $K \subseteq M$ gibt es $b_1, \dots, b_r \in K$ mit $K \subseteq \bigcup_{j=1}^r U_\delta(b_j)$. Für $j = 1, \dots, r$ wählen wir $a_j \in A$ mit $d(a_j, b_j) < \delta$. Da $(g_n(a_j))$ konvergiert, gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(g_n(a_j), g_m(a_j)) < \varepsilon$ für $n, m \geq n_0$ und $j = 1, \dots, r$.

b) Es seien nun $n, m \geq n_0$ und $t \in K$. Wir wählen $j \in \{1, \dots, r\}$ mit $d(t, a_j) < 2\delta$ und erhalten

$$d(g_n(t), g_m(t)) \leq d(g_n(t), g_n(a_j)) + d(g_n(a_j), g_m(a_j)) + d(g_m(a_j), g_m(t)) < 3\varepsilon.$$

Somit gilt $\sup_{t \in K} d(g_n(t), g_m(t)) \leq 3\varepsilon$ für $n, m \geq n_0$, und wegen der Vollständigkeit von N ist die Folge (g_n) auf K gleichmäßig konvergent (vgl. [Satz 1.2](#)). Insbesondere konvergiert dann $(g_n(t))$ für alle Punkte $t \in M$. $\diamond$

Nun benötigen wir noch die *Separabilität* präkompakter Räume:

Separable Räume

- a) Ein metrischer Raum M heißt *separabel*, falls es in M eine abzählbare dichte Teilmenge gibt.
- b) Der Raum $\mathbb{R}^n$ ist separabel, da die abzählbare Menge $\mathbb{Q}^n$ der rationalen n -Tupel in $\mathbb{R}^n$ dicht ist.
- c) Präkompakte metrische Räume M sind separabel: Zu $\varepsilon := \frac{1}{j}$ gibt es ein endliches $\frac{1}{j}$ -Netz A_j in M . Dann ist $A := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ eine abzählbare dichte Teilmenge von M ; in der Tat gibt es zu $x \in M$ und $j \in \mathbb{N}$ ein $a_j \in A_j \subseteq A$ mit $d(x, a_j) < \frac{1}{j}$.

Insgesamt ergibt sich nun:

Theorem 2.5 (Arzelà-Ascoli)

Es sei K ein kompakter metrischer Raum. Eine Funktionenmenge $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(K)$ ist genau dann

- a) präkompakt, wenn $\mathcal{H}$ beschränkt und gleichstetig ist,
- b) kompakt, wenn $\mathcal{H}$ beschränkt, abgeschlossen und gleichstetig ist.

BEWEIS. a) „ $\Rightarrow$ “: Präkompakte Mengen sind stets beschränkt, und die Gleichstetigkeit ist gerade [Satz 2.2](#).

„ $\Leftarrow$ “: Wie wir soeben gesehen haben, ist K separabel; es gibt also eine abzählbare dichte Teilmenge A in K . Es sei nun (f_n) eine Folge in $\mathcal{H}$. Da $\mathcal{H}$ beschränkt ist, besitzt diese nach [Lemma 2.3](#) eine Teilfolge, die auf A punktweise konvergiert. Da $\mathcal{H}$ gleichstetig ist, muss diese Teilfolge nach [Lemma 2.4](#) sogar gleichmäßig konvergent sein.

b) Wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{C}(K)$ folgt nun b) aus a) und der Tatsache, dass Kompaktheit zu Präkompaktheit und Vollständigkeit äquivalent ist. $\diamond$

Bemerkungen

- a) Der Beweis des Satzes von Arzelà-Ascoli zeigt, dass eine gleichstetige Menge $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(K)$ bereits dann präkompakt ist, wenn sie nur *punktweise* beschränkt ist.
- b) Es gilt die folgende Erweiterung des Satzes von Arzelà-Ascoli für vektorwertige Funktionen (s. [Aufgabe 2.7](#)): Für einen kompakten metrischen Raum K und einen normierten Raum Y ist eine Menge $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(K, Y)$ genau dann präkompakt, wenn $\mathcal{H}$ gleichstetig ist und für alle $t \in K$ die Mengen $\{f(t) \mid f \in \mathcal{H}\}$ in Y präkompakt sind.

c) Es gibt zum Satz von Arzelà-Ascoli analoge Kompaktheitskriterien in anderen Funktionenräumen, die in diesem Buch allerdings nicht benötigt werden. Wir verweisen, insbesondere für L_p -Räume, etwa auf (Appell und Väh 2005), Kap. 3; beachten Sie auch die Aufgaben 2.8, 2.9, 2.16 und 2.17.

2.2 Separable Räume und ein Approximationssatz

In diesem Abschnitt zeigen wir einen Approximationssatz, der u. a. die Separabilität wichtiger Funktionenräume impliziert. Wir beginnen mit der folgenden nicht ganz offensichtlichen Tatsache:

Satz 2.6

Es sei M ein separabler metrischer Raum. Dann ist auch jede Teilmenge $N \subseteq M$ separabel.

BEWEIS. a) Es sei $A \subseteq M$ eine abzählbare dichte Menge in M . Wir betrachten das System $\mathfrak{A}_1 := \{U_r(a) \mid a \in A, 0 < r \in \mathbb{Q}\}$ der offenen Kugeln mit rationalen Radien um Punkte aus A und dessen Teilsystem $\mathfrak{A}_2 := \{U_r(a) \in \mathfrak{A}_1 \mid U_r(a) \cap N \neq \emptyset\}$; dann sind $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ abzählbare Mengen. Für jede Kugel $U_r(a) \in \mathfrak{A}_2$ wählen wir ein $b \in U_r(a) \cap N$ und erhalten so eine abzählbare Menge $B \subseteq N$. Dieses Verfahren wird in Abb. 2.4 veranschaulicht.

b) Es seien nun $t \in N$ und $\varepsilon > 0$. Wir wählen $a \in A$ mit $d(t, a) < \frac{\varepsilon}{3}$ und $r \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{\varepsilon}{3} < r < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist $t \in U_r(a)$ und somit $U_r(a) \in \mathfrak{A}_2$; es gibt also $b \in B \cap U_r(a)$. Es folgt $d(t, b) \leq d(t, a) + d(a, b) < \frac{\varepsilon}{3} + r < \varepsilon$; B ist also dicht in N . $\diamond$

Für kompakte metrische Räume K sind die Banachräume $\mathcal{C}(K)$ separabel. Zum Nachweis dieser Tatsache benutzen wir spezielle

Stetige Zerlegungen der Eins

a) Es seien M ein metrischer Raum und Y ein normierter Raum. Für eine Funktion $f : M \rightarrow Y$ heißt die in M abgeschlossene Menge

$$\text{supp } f := \overline{\{t \in M \mid f(t) \neq 0\}}$$

der Träger (oder *support*) der Funktion f .

Abb. 2.4 Illustration des Beweises von Satz 2.6

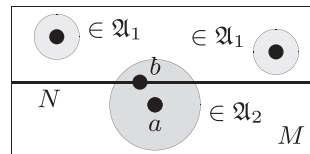
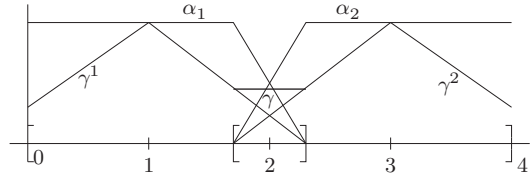


Abb. 2.5 Illustration der Konstruktion stetiger Zde's



b) Ein metrischer Raum M werde durch offene Kugeln $\{U_j = U_{r_j}(s_j)\}_{j=1}^m$ überdeckt. Mit $U_j^c = M \setminus U_j$ gilt für die auf M stetigen Distanzfunktionen $\gamma_j = d_{U_j^c}$ dann offenbar $\text{supp } \gamma_j \subseteq B_j := B_{r_j}(s_j)$ und $\gamma(t) := \sum_{j=1}^m \gamma_j(t) > 0$ auf M . Für die Funktionen $\alpha_j := \frac{\gamma_j}{\gamma} \in \mathcal{C}(M)$ hat man dann

$$0 \leq \alpha_j \leq 1, \quad \text{supp } \alpha_j \subseteq B_j, \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j = 1; \quad (2.3)$$

sie bilden eine der Überdeckung $\{U_j\}_{j=1}^m$ von M untergeordnete *stetige Zerlegung der Eins* (Zde) auf M . Die folgende Abbildung illustriert die Konstruktion auf einem Intervall.

Zur bequemen Abb. 2.5 illustriert Formulierung des wichtigen Approximationssatzes 2.7 unten dient die folgende Notation:

Tensorprodukte

a) Für eine Menge M und einen Vektorraum E bezeichnen wir mit $\mathcal{F}(M, E)$ den Raum aller Funktionen von M nach E . Für Teilmengen $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}(M) = \mathcal{F}(M, \mathbb{K})$ und $A \subseteq E$ wird das *Tensorprodukt* definiert durch

$$\mathcal{H} \otimes A := \left\{ \sum_{k=1}^n \phi_k y_k \mid n \in \mathbb{N}, \phi_k \in \mathcal{H}, y_k \in A \right\} \subseteq \mathcal{F}(M, E). \quad (2.4)$$

b) Es ist $\mathcal{F}(M) \otimes E$ der Raum der E -wertigen Funktionen auf M mit *endlichdimensionalem Bild*. In der Tat ist das Bild einer Funktion wie in (2.4) in der linearen Hülle $[y_1, \dots, y_n]$ der Vektoren $y_1, \dots, y_n \in E$ enthalten. Für $f \in \mathcal{F}(M, E)$ gelte umgekehrt $f(M) \subseteq V$ für einen Unterraum V von E mit $\dim V < \infty$. Ist dann $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V , so hat man $f(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(t) v_k$ mit skalaren Funktionen $\alpha_k \in \mathcal{F}(M)$.

Theorem 2.7 (Approximationssatz)

Es seien K ein kompakter metrischer Raum und Y ein normierter Raum. Zu einer Funktion $f \in \mathcal{C}(K, Y)$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $g \in \mathcal{C}(K) \otimes Y$ mit $g(K) \subseteq \text{co}(f(K))$ und $\|f - g\|_{\text{sup}} \leq \varepsilon$.

BEWEIS. Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f(t) - f(s)\| \leq \varepsilon$ für $d(t, s) \leq \frac{1}{n}$. Der präkompakte Raum K besitzt ein endliches $\frac{1}{n}$ -Netz: $K \subseteq \bigcup_{j=1}^r U_j$ mit

$U_j = U_{1/n}(t_j)$, $t_j \in K$. Mit den Funktionen α_j gemäß (2.3) setzen wir

$$g(t) := \sum_{j=1}^r \alpha_j(t) f(t_j) \in \mathcal{C}(K) \otimes Y. \quad (2.5)$$

Wegen (2.3) ist $g(t)$ eine Konvexkombination von Werten von f , liegt also in der konvexen Hülle $\text{co}f(K)$ des Bildes von f . Weiter gilt für $t \in K$

$$\|f(t) - g(t)\| = \left\| \sum_{j=1}^r \alpha_j(t) (f(t) - f(t_j)) \right\| \leq \varepsilon \sum_{j=1}^r \alpha_j(t) \leq \varepsilon,$$

da ja für $\alpha_j(t) \neq 0$ stets $t \in B_j$ ist und somit $\|f(t) - f(t_j)\| \leq \varepsilon$ gilt. $\diamond$

Die Argumente im Beweis des Approximationssatzes zeigen auch:

Satz 2.8

Es seien K ein kompakter metrischer Raum und Y ein separabler normierter Raum. Dann ist auch der Raum $\mathcal{C}(K, Y)$ separabel.

BEWEIS. a) Für festes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\mathcal{Z}_n \subseteq \mathcal{C}(K)$ der im Beweis von Theorem 2.7 konstruierten Funktionen $\{\alpha_j\}$ endlich, ihre Vereinigung $\mathcal{Z} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{Z}_n$ also abzählbar. Für die Funktion g aus (2.5) gilt offenbar $g \in \mathcal{Z} \otimes Y$.

b) Nun sei $A \subseteq Y$ eine abzählbare dichte Menge; dann ist auch die Menge $\mathcal{Z} \otimes A$ abzählbar. Zu $f \in \mathcal{C}(K, Y)$ und $\varepsilon > 0$ wählen wir $g \in \mathcal{Z} \otimes Y$ wie in (2.5) und $a_j \in A$ mit $\|f(t_j) - a_j\| < \varepsilon$. Für $h(t) := \sum_{j=1}^r \alpha_j(t) a_j \in \mathcal{Z} \otimes A$ gilt dann $\|h - g\|_{\text{sup}} \leq \varepsilon$ und somit $\|h - f\|_{\text{sup}} \leq 2\varepsilon$. Folglich ist $\mathcal{Z} \otimes A$ dicht in $\mathcal{C}(K, Y)$. $\diamond$

Aus Satz 2.8 folgt auch die Separabilität von L_p -Räumen. Dazu benutzen wir

Räume stetiger Funktionen mit kompaktem Träger

Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ definieren wir den Raum

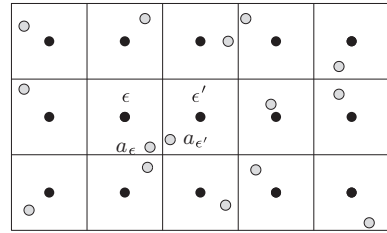
$$\mathcal{C}_c(M) := \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \mid \text{supp } f \text{ ist kompakte Teilmenge von } M\}.$$

Der Raum $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ mit kompaktem Träger ist *dicht* in $L_p(\mathbb{R}^n, \lambda)$ für $1 \leq p < \infty$ (vgl. S. 364 in Anhang A.3).

Satz 2.9

Für $1 \leq p < \infty$ und jede messbare Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $L_p(\Omega, \lambda)$ separabel.

Abb. 2.6 Illustration zum Beispiel



BEWEIS. a) Für eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\mathcal{C}_c(K) \subseteq \mathcal{C}(K)$ aufgrund der Sätze 2.8 und 2.6 bezüglich der sup -Norm separabel. Dies gilt erst recht bezüglich der schwächeren L_p -Norm.

b) Mit $B_j := B_j(0)$ gilt $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{C}_c(B_j)$, da jede kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ in einem geeigneten B_j liegt. Somit ist der dichte Unterraum $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ von $L_p(\mathbb{R}^n)$ separabel und daher auch $L_p(\mathbb{R}^n)$ separabel.

c) Für eine messbare Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ können wir $L_p(\Omega)$ mit einem abgeschlossenen Unterraum von $L_p(\mathbb{R}^n)$ identifizieren, indem wir die Funktionen aus $L_p(\Omega)$ durch 0 auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortsetzen. Nach Satz 2.6 ist also auch $L_p(\Omega)$ separabel. $\diamond$

Es gibt auch interessante Banachräume, die *nicht separabel* sind:

Beispiel

Der Folgenraum ℓ_{∞} ist *nicht* separabel. In der Tat enthält ℓ_{∞} die überabzählbare Menge

$$E := \{\epsilon = (\epsilon_j)_{j=0}^{\infty} \mid \epsilon_j = \pm 1 \text{ für } j \in \mathbb{N}_0\}.$$

Es ist $\|\epsilon - \epsilon'\| = 2$ für $\epsilon, \epsilon' \in E$ mit $\epsilon \neq \epsilon'$. Nun sei A eine dichte Menge in ℓ_{∞} . Zu $\epsilon \in E$ wählen wir $a_{\epsilon} \in A$ mit $\|\epsilon - a_{\epsilon}\| < 1$. Dann gilt $a_{\epsilon} \neq a_{\epsilon'}$ für $\epsilon, \epsilon' \in E$ mit $\epsilon \neq \epsilon'$, und daher kann A nicht abzählbar sein (vgl. Abb. 2.6).

Dagegen sind die Folgenräume c_0 , c und ℓ_p für $1 \leq p < \infty$ separabel (s. Aufgabe 2.11).

2.3 Hölder- und Sobolev-Normen

Nun stellen wir weitere wichtige Funktionenräume vor. *Hölder-Bedingungen* wurden 1934 von J.P. Schauder für Abschätzungen bei elliptischen Differentialgleichungen verwendet; sie liefern eine Skala von Räumen stetiger Funktionen durch Quantifizierung ihrer (gleichmäßigen) Stetigkeit.

Räume Hölder-stetiger Funktionen

a) Es seien K ein kompakter metrischer Raum und $0 < \alpha \leq 1$. Eine Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{K}$ erfüllt eine *O-Hölder-Bedingung* zum Exponenten α , falls es $C > 0$ gibt mit

$$|f(t) - f(s)| \leq C d(t, s)^\alpha \quad \text{für alle } t, s \in K.$$

Der Raum all dieser Funktionen ist gegeben durch

$$\Lambda^\alpha(K) := \{f : K \rightarrow \mathbb{K} \mid [f]_\alpha := \sup_{t \neq s} \frac{|f(t) - f(s)|}{d(t, s)^\alpha} < \infty\}.$$

Der Ausdruck $[f]_\alpha$ ist eine *Halbnorm* auf $\Lambda^\alpha(K)$. Mit

$$\|f\|_{\Lambda^\alpha} := [f]_\alpha + \|f\|_{\sup}$$

erhält man eine *Norm*, unter der $\Lambda^\alpha(K)$ dann ein *Banachraum* ist (vgl. [Aufgabe 2.14](#)). Eine Hölder-Bedingung zum Exponenten $\alpha = 1$ heißt auch *Lipschitz-Bedingung*.

b) Ein abgeschlossener Unterraum von $\Lambda^\alpha(K)$ ist für $0 < \alpha < 1$ der Raum

$$\lambda^\alpha(K) := \{f \in \Lambda^\alpha(K) \mid \lim_{d(t, s) \rightarrow 0} \frac{|f(t) - f(s)|}{d(t, s)^\alpha} = 0\}$$

aller Funktionen, die eine *o-Hölder-Bedingung* zum Exponenten α erfüllen.

Satz 2.10

Für $0 < \alpha \leq 1$ ist eine in $\Lambda^\alpha(K)$ beschränkte Funktionenmenge $\mathcal{H}$ in $\mathcal{C}(K)$ relativ kompakt.

BEWEIS. Die Funktionenmenge $\mathcal{H}$ ist *gleichstetig*, da

$$|f(t) - f(s)| \leq [f]_\alpha |t - s|^\alpha$$

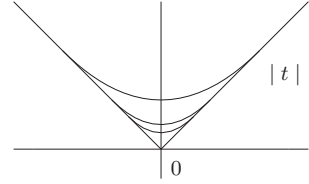
für alle $f \in \mathcal{H}$ gilt. Die Behauptung folgt also aus dem Satz von Arzelà-Ascoli. $\diamond$

Ab jetzt beschränken wir uns auf Funktionen von *einer* Variablen, da wir dann bequem mit dem *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* argumentieren können. Entsprechende Räume in *mehreren* Variablen werden im Aufbaukurs untersucht.

Räume differenzierbarer Funktionen

a) Der Raum $\mathcal{C}^1[a, b]$ der stetig differenzierbaren Funktionen ist im Banachraum $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_{\sup})$ nicht abgeschlossen, da die $\mathcal{C}^1$ -Eigenschaft bei gleichmäßiger Konvergenz *nicht* erhalten bleibt. In der Tat gibt es eine Folge in $\mathcal{C}^1[-1, 1]$, die gleichmäßig gegen

Abb. 2.7 C^1 -Approximation
der Betragsfunktion



die Betragsfunktion $A : t \mapsto |t|$ konvergiert (vgl. Abb. 2.7); nach dem *Weierstraßschen Approximationssatz* 5.7 ist sogar $C^1[a, b]$ *dicht* in $C[a, b]$.

b) Zur Vererbung der C^1 -Eigenschaft auf Grenzfunktionen benötigt man gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge *und* die der *Folge der Ableitungen* (vgl. etwa [Kaballo 2000], Satz 22.14 für eine etwas schärfere Aussage); diese wird von der C^1 -Norm

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_{\sup} + \|f'\|_{\sup}$$

beschrieben. Unter dieser Norm ist $C^1[a, b]$ dann ein *Banachraum*.

c) Für $0 < \alpha < \beta \leq 1$ gelten die *Inklusionen*

$$C^1[a, b] \subseteq \Lambda^1[a, b] \subseteq \Lambda^\beta[a, b] \subseteq \lambda^\alpha[a, b] \subseteq \Lambda^\alpha[a, b] \subseteq C[a, b],$$

und für $f \in C^1[a, b]$ hat man mit geeigneten Konstanten $C_\beta^\alpha \geq 0$

$$\|f\|_{\sup} \leq \|f\|_{\Lambda^\alpha} \leq C_\beta^\alpha \|f\|_{\Lambda^\beta} \text{ sowie } \|f\|_{\Lambda^1} \leq \|f\|_{C^1}.$$

d) Analog zu b) hat man für $m \in \mathbb{N}$ die Banachräume $C^m[a, b]$ der m -mal stetig differenzierbaren Funktionen mit der C^m -Norm

$$\|f\|_{C^m} := \sum_{k=0}^m \|f^{(k)}\|_{\sup}. \quad (2.6)$$

e) Für $m \in \mathbb{N}_0$ und $0 < \alpha \leq 1$ ist

$$\Lambda^{m,\alpha}[a, b] := \{f \in C^m[a, b] \mid f^{(m)} \in \Lambda^\alpha[a, b]\}$$

ein Banachraum unter der Norm

$$\|f\|_{\Lambda^{m,\alpha}} := \|f\|_{C^m} + [f^{(m)}]_\alpha$$

mit dem abgeschlossenen Unterraum

$$\lambda^{m,\alpha}[a, b] := \{f \in C^m[a, b] \mid f^{(m)} \in \lambda^\alpha[a, b]\}.$$

Sobolev-Normen

gehen für Funktionen von *einer* Variablen bereits auf S. Banach (1922) zurück und wurden für Funktionen von *mehreren* Variablen 1938 von S.L. Sobolev eingeführt. Für $1 \leq p < \infty$ werden sie auf $C^m[a, b]$ definiert durch

$$\|f\|_{W_p^m} := \left(\sum_{k=0}^m \int_a^b |f^{(k)}(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Unter diesen Normen sind die Räume $C^m[a, b]$ nicht vollständig; ihre *Vervollständigungen* heißen *Sobolev-Räume* $W_p^m(a, b)$. Diese Räume liefern, insbesondere für $p = 2$, „natürliche Definitionsbereiche“ für Differentialoperatoren. Sobolev-Räume in mehreren Variablen spielen eine große Rolle bei der Untersuchung *partieller Differentialgleichungen*.

Satz 2.11 (Sobolev-Abschätzungen)

a) Für $1 \leq p < \infty$ gibt es eine Konstante $C = C_p > 0$ mit

$$\|f\|_{\sup} \leq C \|f\|_{W_p^1} \quad \text{für } f \in C^1[a, b]. \quad (2.7)$$

b) Für $1 < p < \infty$ sei $\alpha = \frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{p}$. Es gibt eine Konstante $C' = C'_p > 0$ mit

$$\|f\|_{\Lambda^\alpha} \leq C' \|f\|_{W_p^1} \quad \text{für } f \in C^1[a, b]. \quad (2.8)$$

c) Für $1 < p < \infty$ ist eine bezüglich der Sobolev-Norm $\|\cdot\|_{W_p^1}$ in $C^1[a, b]$ beschränkte Menge $\mathcal{H}$ in $C[a, b]$ relativ kompakt.

BEWEIS. a) Für $f \in C^1[a, b]$ gibt es nach dem *Mittelwertsatz der Integralrechnung* einen Punkt $t_0 \in [a, b]$ mit

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(s) ds = f(t_0).$$

Aus dem *Hauptsatz* ergibt sich dann

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t f'(\tau) d\tau = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t f'(\tau) d\tau$$

für alle $t \in [a, b]$, und daraus folgt (2.7) mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ aus der *Hölderschen Ungleichung*:

$$\|f\|_{\sup} \leq \frac{1}{b-a} \|f\|_{L_1} + \|f'\|_{L_1} \leq (b-a)^{-1/p} \|f\|_{L_p} + (b-a)^{1/q} \|f'\|_{L_p}.$$

b) Für $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ergibt sich weiter (2.8) aus

$$|f(t) - f(s)| = \left| \int_s^t f'(\tau) d\tau \right| \leq \|f'\|_{L_p} |t - s|^{1/q}.$$

c) Die Funktionenmenge $\mathcal{H}$ ist in $\Lambda^{1/q}[a, b]$ beschränkt, nach [Satz 2.10](#) also in $\mathcal{C}[a, b]$ *relativ kompakt*. $\diamond$

Aussage c) ist für $p = 1$ nicht richtig, vgl. [Aufgabe 5.13](#). Wir zeigen in [Abschn. 5.4](#), dass die Sobolev-Räume $W_p^1(a, b)$ als *Unterräume* von $\mathcal{C}[a, b]$ *realisiert* werden können, vgl. auch die Bemerkungen am Ende von [Abschn. 3.2](#). Genauer identifizieren wir $W_p^1(a, b)$ mit dem Raum der stetigen Funktionen auf $[a, b]$, die eine *schwache Ableitung* in $L_p[a, b]$ besitzen.

2.4 Aufgaben

Aufgabe 2.1

Es seien M, N metrische Räume und $A \subseteq M \times N$ kompakt. Zeigen Sie $A \subseteq K \times L$ für geeignete kompakte Mengen $K \subseteq M$ und $L \subseteq N$.

Aufgabe 2.2

Es seien X ein normierter Raum und $x_1, \dots, x_r \in E$. Zeigen Sie, dass die konvexe Hülle $\text{co}\{x_1, \dots, x_r\}$ dieser Punkte kompakt ist.

Aufgabe 2.3

Es sei M ein metrischer Raum, sodass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein *präkompaktes* ε -Netz in M gibt. Zeigen Sie, dass M präkompakt ist.

Aufgabe 2.4

Es seien X ein normierter Raum und $A, B \subseteq X$ beschränkt, präkompakt oder kompakt. Untersuchen Sie, ob auch $A \cap B$, $A \cup B$, $A + B$, $\bar{A}$ und $\text{co} A$ beschränkt, präkompakt oder kompakt sind.

Aufgabe 2.5

Gilt [Lemma 2.3](#) auch für überabzählbare Mengen A ?

Aufgabe 2.6

Es seien M, N metrische Räume. Eine Funktionenmenge $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(M, N)$ heißt *punktweise gleichstetig*, falls folgendes gilt:

$$\forall a \in M \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \in M \forall f \in \mathcal{H} : d(t, a) < \delta \Rightarrow d(f(t), f(a)) < \varepsilon.$$

Zeigen Sie, dass für *kompakte* metrische Räume K jede punktweise gleichstetige Menge $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(K, N)$ sogar gleichstetig ist.

Aufgabe 2.7

Beweisen Sie die auf S. 28 formulierte Erweiterung des Satzes von Arzelà-Ascoli für vektorwertige Funktionen.

Aufgabe 2.8

Es sei $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie, dass eine beschränkte Menge $A \subseteq \ell_p$ genau dann präkompakt ist, falls gilt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x = (x_j) \in A} \sum_{j=m}^{\infty} |x_j|^p = 0.$$

Aufgabe 2.9

Zeigen Sie für eine beschränkte Menge $A \subseteq c_0$ die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (a) Die Menge A ist präkompakt.
- (b) Es gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{x = (x_j) \in A} |x_m| = 0$.
- (c) Es gibt eine Nullfolge $b = (b_j) \in c_0$ mit $|x_j| \leq b_j$ für alle $x \in A$ und $j \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.10

Es sei M ein metrischer Raum. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (a) Der Raum M ist separabel.
- (b) Jede offene Überdeckung von M besitzt eine *abzählbare* Teilüberdeckung.
- (c) Für jedes $\varepsilon > 0$ besitzt M ein abzählbares ε -Netz.

Aufgabe 2.11

Beweisen Sie die Separabilität der Folgenräume c_0 und ℓ_p für $1 \leq p < \infty$.

Aufgabe 2.12

Bestimmen Sie den Abschluss des Raumes $C_c(\mathbb{R}^n)$ in $\ell_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 2.13

Zeigen Sie, dass der Raum $L_\infty[0, 1]$ nicht separabel ist.

Aufgabe 2.14

Zeigen Sie, dass die Räume $\Lambda^\alpha(K)$, $\lambda^\alpha(K)$, $C^m[a, b]$, $\Lambda^{m,\alpha}[a, b]$ und $\lambda^{m,\alpha}[a, b]$ Banachräume sind.

Aufgabe 2.15

Es sei $0 < \alpha < 1$. Zeigen Sie $\|e^{ikt}\|_{\Lambda^\alpha[-\pi, \pi]} = 1 + ck^\alpha$ für alle $k \geq 0$ mit einer von k unabhängigen Konstanten $c = c(\alpha) > 0$.

Aufgabe 2.16

Charakterisieren Sie die präkompakten Teilmengen von $(\mathcal{C}^1[a, b], \| \cdot \|_{\mathcal{C}^1})$. Ist die abgeschlossene Einheitskugel dieses Banachraums auch im Banachraum $(\mathcal{C}[a, b], \| \cdot \|_{\sup})$ abgeschlossen?

Aufgabe 2.17

Es seien K ein kompakter metrischer Raum und $0 < \alpha < \beta \leq 1$.

a) Zeigen Sie, dass eine beschränkte Menge $A \subseteq \lambda^\alpha(K)$ genau dann präkompakt ist, falls gilt:

$$\lim_{d(s,t) \rightarrow 0} \sup_{f \in A} \frac{|f(s) - f(t)|}{d(s,t)^\alpha} = 0.$$

b) Folgern Sie, dass eine beschränkte Teilmenge von $\Lambda^\beta(K)$ in $\lambda^\alpha(K)$ präkompakt ist.

Aufgabe 2.18

a) Zeigen Sie, dass für $0 < \alpha \leq 1$ eine beschränkte Teilmenge von $\Lambda^{m,\alpha}[a, b]$ in $\mathcal{C}^m[a, b]$ präkompakt ist.

b) Zeigen Sie, dass für $1 < p < \infty$ eine bezüglich der Sobolev-Norm $\| \cdot \|_{W_p^{m+1}}$ in $\mathcal{C}^{m+1}[a, b]$ beschränkte Menge auch in $\Lambda^{m, 1/q}[a, b]$ beschränkt und in $\mathcal{C}^m[a, b]$ relativ kompakt ist.

Fragen

1. Wie kann man die „Größe“ einer Matrix messen oder abschätzen?
2. Zeigen Sie, dass ein linearer Operator zwischen endlichdimensionalen Banachräumen automatisch stetig ist. Gilt dies auch im unendlichdimensionalen Fall?
3. Wie kann man lineare Differentialoperatoren als stetig auffassen?

In diesem Kapitel stellen wir *stetige* oder *beschränkte lineare Operatoren* zwischen normierten Räumen vor und behandeln erste wichtige Beispiele, insbesondere *Integral-* und *Differentialoperatoren*. Wir diskutieren *Isometrien* und *Isomorphismen* und zeigen ein einfaches *Fortsetzungsprinzip*, das u. a. bei *Integralkonstruktionen* verwendet wird.

Lineare Abbildungen

Es seien E, F Vektorräume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine Abbildung $T : E \rightarrow F$ heißt *linear*, falls

$$T(\alpha x_1 + x_2) = \alpha T(x_1) + T(x_2) \quad \text{für } x_1, x_2 \in E, \alpha \in \mathbb{K},$$

gilt. Der *Nullraum* oder *Kern* von T ,

$$N(T) = T^{-1}\{0\} = \{x \in E \mid T(x) = 0\}$$

ist ein Unterraum von E , das *Bild* („*Range*“)

$$R(T) = T(E) = \{T(x) \mid x \in E\}$$

von T ist ein Unterraum von F .

3.1 Operatornormen

Wir beginnen mit Charakterisierungen der Stetigkeit linearer Abbildungen:

Satz 3.1

Für normierte Räume X, Y und lineare Operatoren $T : X \rightarrow Y$ sind äquivalent:

- (a) $\exists C \geq 0 \forall x \in X : \|T(x)\| \leq C \|x\|$.
- (b) T ist gleichmäßig stetig auf X .
- (c) T ist in einem Punkt $a \in X$ stetig.
- (d) T ist im Nullpunkt $0 \in X$ stetig.
- (e) Es gilt $\|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\| < \infty$.

BEWEIS. „(a) $\Rightarrow$ (b)“: Man hat $\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq C \|x - y\|$ aufgrund der Linearität von T ; in (2.1) kann also $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ gewählt werden.

„(b) $\Rightarrow$ (c)“ ist klar.

„(c) $\Rightarrow$ (d)“: Für eine Folge $x_n \rightarrow 0$ gilt $x_n + a \rightarrow a$, nach (c) also $T(x_n) + T(a) = T(x_n + a) \rightarrow T(a)$ und somit $T(x_n) \rightarrow 0$.

„(d) $\Rightarrow$ (e)“: Andernfalls gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ Vektoren $x_n \in X$ mit $\|x_n\| \leq 1$ und $\|T(x_n)\| > n$. Dies liefert den Widerspruch $\frac{1}{n}x_n \rightarrow 0$, aber $T(\frac{1}{n}x_n) \not\rightarrow 0$.

„(e) $\Rightarrow$ (a)“: Für $x \neq 0$ ist $\|\frac{x}{\|x\|}\| = 1$, also $\|T(\frac{x}{\|x\|})\| \leq \|T\|$, und daher gilt

$$\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\| \quad \text{für alle } x \in E. \quad \diamond \quad 3.1$$

Bemerkungen und Definitionen

a) Nach Satz 3.1 ist also ein linearer Operator $T : X \rightarrow Y$ genau dann stetig, wenn er die Einheitskugel $B = B_X$ von X in eine beschränkte Teilmenge von Y abbildet oder wenn er alle beschränkten Teilmengen von X in beschränkte Teilmengen von Y abbildet. Daher nennt man stetige lineare Operatoren oder Linearformen auch *beschränkte* lineare Operatoren oder Linearformen.

b) Im Fall $\dim X < \infty$ ist ein linearer Operator $T : X \rightarrow Y$ automatisch stetig; wir zeigen dies in den Ausführungen a) zu Matrizen-Normen auf S. 51. Typische Beispiele unstetiger linearer Operatoren in normierten Räumen sind *Differentialoperatoren*, vgl. das Beispiel auf S. 56. Dort wird auch ein unstetiger linearer Operator auf einem *Banachraum* konstruiert; die Existenz solcher Beispiele ist wegen des Satzes vom abgeschlossenen Graphen 8.10 nicht offensichtlich.

c) Das in Satz 3.1 (e) definierte Supremum $\|T\|$ ist wegen (3.1) die minimal mögliche Konstante C in Satz 3.1 (a) und definiert eine *Norm* auf dem Vektorraum $L(X, Y)$ aller stetigen linearen Abbildungen von X nach Y . Statt $L(X, X)$ schreiben wir einfach $L(X)$. Der



<http://www.springer.com/978-3-662-54747-2>

Grundkurs Funktionalanalysis

Kaballo, W.

2018, XX, 398 S. 117 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-54747-2