

In diesem Kapitel werden wir Trajektorien geladener Teilchen in elektromagnetischen Feldern behandeln. Kollektive Effekte des Plasmas spielen hier keine Rolle. Für die Plasmaphysik ist die Einzelteilchenbewegung jedoch von besonderem Interesse. In der kinetischen Theorie werden daraus die Flüssigkeitsgleichungen des Plasmas hergeleitet. Aus der Bewegung der Teilchen werden dann Flüssigkeitsströmungen und elektrische Ströme. Im nächsten Kapitel werden wir die Flüssigkeitsgleichungen analysieren. Dabei ist es sehr interessant, wie die Einzelteilchenbewegung aus diesem Kapitel in der Flüssigkeitsbewegung, die aus ganz anderen Gleichungen hergeleitet wird, ihr Pendant findet. Die Einzelteilchenbewegung ist außerdem sehr wichtig für die Beschreibung von Verlustmechanismen bei magnetisch eingeschlossenen Plasmen, aber auch in vielen Bereichen der extraterrestrischen Physik.

Wir beginnen mit Trajektorien geladener Teilchen in homogenen Feldern, erlauben dann Inhomogenitäten und betrachten abschließend den Einfluss zeitabhängiger elektromagnetischer Felder. Als Beispiel behandeln wir Teilchenbahnen im Magnetfeld der Erde.

2.1 Homogene Magnetfelder

Ausgangspunkt ist die Bewegungsgleichung für ein geladenes Teilchen im räumlich und zeitlich konstanten Magnetfeld. Neben der Lorentz-Kraft soll eine konstante Kraft \mathbf{F} auf das Teilchen wirken. Für ein Teilchen der Masse m und der Ladung q gilt die Newton'sche Bewegungsgleichung der Form

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{F}. \quad (2.1)$$

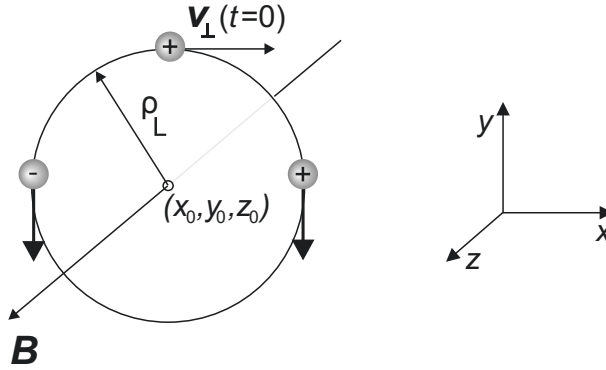


Abb. 2.1 Gyrationbewegung geladener Teilchen im Magnetfeld

Die z -Achse des in [Abb. 2.1](#) dargestellten Koordinatensystems zeige in Richtung des Magnetfeldes. Aus (2.1) folgt dann das gekoppelte System von Differentialgleichungen

$$\dot{v}_x = +\frac{qB}{m} v_y + \frac{F_x}{m}, \quad (2.2)$$

$$\dot{v}_y = -\frac{qB}{m} v_x + \frac{F_y}{m}, \quad (2.3)$$

$$\dot{v}_z = \frac{F_z}{m}. \quad (2.4)$$

Die Bewegungsgleichung parallel zum Feld ist identisch mit dem Fall ohne Magnetfeld. Man findet eine gleichförmig beschleunigte Bewegung. Durch Integration folgt, mit den entsprechenden Anfangsbedingungen, für die z -Komponente der Trajektorie:

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t + \frac{F_z}{2m}t^2. \quad (2.5)$$

Die Gleichungen senkrecht zu \mathbf{B} entkoppeln wir durch Differenzieren von (2.2) und Einsetzen von (2.3). Das Resultat ist eine Differentialgleichung für den harmonischen Oszillator, modifiziert mit einem zusätzlichen Kraftterm:

$$\ddot{v}_x = \frac{qB}{m} \dot{v}_y = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x + \frac{qB}{m^2} F_y \quad (2.6)$$

und entsprechend für die andere Komponente:

$$\ddot{v}_y = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y - \frac{qB}{m^2} F_x. \quad (2.7)$$

Wir sehen schon hier, dass das Magnetfeld die Wirkung einer Kraft in die Richtung senkrecht zu \mathbf{B} und \mathbf{F} umlenkt. Eine Kraft in y -Richtung erscheint nur in der Gleichung für die x -Komponente, wogegen F_x in dieser Gleichung fehlt.

2.1.1 Teilchenbewegung ohne zusätzliche Kraft

Für den Fall ohne externe Kraft liefern (2.6) und (2.7) periodische Lösungen für die beiden Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zum Magnetfeld. Die Winkelfrequenz der periodischen Bewegung ist als *Gyrationsfrequenz* gegeben durch

$$\omega_c = \frac{qB}{m}. \quad (2.8)$$

Wir definieren die Gyrationsfrequenz so, dass sie für Elektronen negative Werte annimmt. Dies ist bei der Behandlung von Plasmawellen von Vorteil.

Für Anwendungen werden meist Werte für die Frequenz $f_c = |\omega_c/2\pi|$ benötigt, zu deren Berechnung die Beziehungen

$$f_c \approx \begin{cases} 28B \text{ (GHz)} & \text{für Elektronen} \\ 15Z_i B/A_i \text{ (MHz)} & \text{für Ionen} \end{cases}$$

nützlich sind. Hier stehen A_i für die Massenzahl und Z_i für die Ladungszahl der Ionen.

Zur Berechnung der Teilchenbahn stellen wir die Anfangsbedingung $\mathbf{v}(t=0) = v_\perp \mathbf{e}_x$. Aus dem homogenen Anteil der Differentialgleichung (2.6) folgt die Lösung für v_x und daraus, mit (2.2), die Lösung für v_y . Wir finden:

$$v_x = +v_\perp \cos \omega_c t, \quad (2.9)$$

$$v_y = -v_\perp \sin \omega_c t. \quad (2.10)$$

Durch Integration der Geschwindigkeiten über die Zeit erhalten wir, mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $y(0) = y_0 + \rho_L$, die Bahnkoordinaten

$$x(t) - x_0 = \frac{v_\perp}{\omega_c} \sin \omega_c t, \quad (2.11)$$

$$y(t) - y_0 - \rho_L = \frac{v_\perp}{\omega_c} \cos \omega_c t - \frac{v_\perp}{\omega_c} \quad \text{oder} \quad (2.12)$$

$$y(t) - y_0 = \frac{v_\perp}{\omega_c} \cos \omega_c t,$$

wobei aus der y -Komponente bei $t = 0$ eine Bedingung für den Bahnradius, genannt *Larmor-Radius*, folgt:

$$\rho_L = \left| \frac{v_\perp}{\omega_c} \right| = \left| \frac{m v_\perp}{qB} \right|. \quad (2.13)$$

Das Teilchen bewegt sich also auf einer Kreisbahn mit dem Radius ρ_L um den Punkt (x_0, y_0) .

Der Energieinhalt von Plasmen wird in der Regel durch die Temperatur charakterisiert. In einem solchen Fall macht es Sinn, einen charakteristischen Larmor-Radius anzugeben, indem man v_{\perp} durch die mittlere thermische Geschwindigkeit bei der Temperatur T ersetzt. Aus $\frac{1}{2}mv_{\perp}^2 = T$ (zwei Freiheitsgrade) folgt

$$\rho_L = \frac{\sqrt{2mT}}{|q|B}. \quad (2.14)$$

Um den Drehsinn der Bahn herauszufinden, verfolgen wir ein Ion, das bei $(x_0, y_0 + \rho_L)$ in die positive x -Richtung startet (siehe Abb. 2.1). An (2.10) sehen wir, dass v_y für $t > 0$ negativ wird. Das heißt, positive Ladungen werden nach rechts unten abgelenkt. Eine negative Ladung lassen wir mit $v_{\perp} < 0$ starten. Wegen $q < 0$ werden der Sinus und damit v_y negativ. Negative Ladungen laufen also nach links unten.

Schaut man also den Feldlinien entgegen, so bewegen sich Ionen im und Elektronen gegen den Uhrzeigersinn. Oder man nimmt die Hände zur Hilfe, wobei der Daumen in Richtung der Feldlinie zeigen muss. Dann zeigen die Finger der rechten Hand die Drehrichtung der Elektronen an und die der linken Hand, die der Ionen.

Wie in Abb. 2.2 zu sehen, kann der Gyrationbewegung eine Geschwindigkeit parallel zum Magnetfeld überlagert sein, sodass die Bewegung der Teilchen spiralförmig um die Feldlinie erfolgt. Der Gyrationmittelpunkt, genannt *Führungszentrum* der Bewegung, folgt der Feldlinie. Bei Kenntnis des Larmor-Radius und der Gyrationfrequenz ist die Bewegung des Teilchens mit der Trajektorie des Führungszentrums bestimmt.

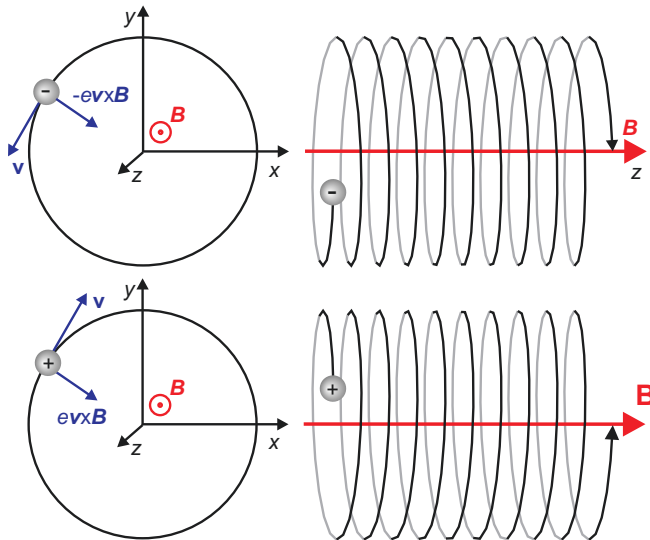


Abb. 2.2 Den Gyrationbewegungen eines Elektrons (*oben*) und eines Ions (*unten*) ist eine gleichförmige Bewegung parallel zum Magnetfeld überlagert

2.1.2 Einfluss einer Kraft auf die Teilchenbahn

Wir haben gesehen, dass eine Kraft parallel zum Magnetfeld zu einer gleichförmig beschleunigten Bewegung führt. Jetzt werden wir den Einfluss einer Kraft senkrecht zum Magnetfeld untersuchen. Wir drehen das Koordinatensystem so, dass die Kraft in x -Richtung zeigt (vgl. Abb. 2.1). Wegen (2.6) bleibt die Bewegung in x -Richtung unverändert, und v_x wird weiter durch (2.9) beschrieben. Die Lösung für die y -Richtung folgt durch Einsetzen von v_x in (2.2). Wir lösen die Gleichung auf und finden:

$$v_y = -v_{\perp} \sin \omega_c t - \frac{F_x}{qB}. \quad (2.15)$$

Der Gyrationbewegung ist eine gleichmäßige Bewegung in Richtung senkrecht zu \mathbf{B} und zu \mathbf{F} überlagert. Bei Untersuchungen, in denen die Teilchenbahnen eine Rolle spielen, ist meist der genaue Verlauf der Gyrationbewegung von untergeordnetem Interesse. Die relevante Größe ist der über eine Gyration gemittelte Aufenthaltsort, das sog. *Führungszentrum*. In dieser *Führungszentrumsnäherung* bewegen sich *Quasiteilchen* im Führungszentrum der richtigen Teilchen. Die Kräfte treten nur noch als Driftbewegung des Führungszentrums zutage.

Die *Driftbewegung*, oder die Bewegung des Führungszentrums senkrecht zum Magnetfeld, folgt aus der Mittelung der senkrechten Geschwindigkeitskomponente über die Gyrationbewegung

$$\mathbf{v}_D = \langle \mathbf{v}_{\perp} \rangle_t = \frac{\omega_c}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_c}} \mathbf{v}_{\perp} dt. \quad (2.16)$$

Die x -Komponente der Geschwindigkeit sowie der erste Term von (2.15) verschwinden durch die Mittelung. Der zweite Term resultiert in der Driftbewegung und die Komponente parallel zu \mathbf{B} bleibt unverändert. Für beliebige Kraftvektoren können wir die *Drift* schreiben als

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2}. \quad (2.17)$$

Das Vektorprodukt trägt der Tatsache Rechnung, dass die Bewegung senkrecht zum Magnetfeld und zur Kraft erfolgt. Das Vorzeichen ist positiv, denn eine Kraft in x -Richtung erzeugt bei einem Magnetfeld parallel zu z eine Ionendrift in die negative y -Richtung.

Das Zustandekommen der Drift können wir durch Abb. 2.3 anschaulich verstehen. Dazu stellen wir uns vor, ein Elektron starte am unteren Scheitel seiner Gyrationbahn in Richtung der Kraft \mathbf{F} . Durch die Komponente der Kraft parallel zur Bewegungsrichtung wird das Elektron zunächst beschleunigt, sodass v_{\perp} zunimmt. Erst im nächsten Quadranten des Gyrationkreises läuft das Elektron der Kraft entgegen. Es wird nun abgebremst, um am oberen Scheitel wieder auf seine Ausgangsgeschwindigkeit zu kommen. Im Mittel läuft das Elektron also mit erhöhter Geschwindigkeit durch die rechte Bahnhälfte, wogegen die gleiche Überlegung für die linke Hälfte zu einer verringerten Geschwindigkeit führt.

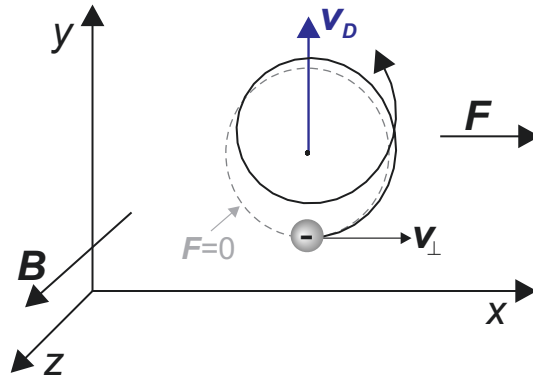


Abb. 2.3 Entstehung einer Teilchendrift durch eine Kraft, gezeigt für die Drehrichtung eines Elektrons

Daraus folgern wir, dass der Larmor-Radius (2.13) bei dieser Bewegung nicht konstant sein kann. In der rechten Hälfte der Bahn wird der Larmor-Radius größer ausfallen als in der linken. Dies hat aber zur Folge, dass sich die Bahn nicht mehr schließt und das Elektron nach Ablauf eines Zyklus' nach oben versetzt ist. Für ein Ion führt die analoge Überlegung zu einer Drift nach unten.

Wichtige Beispiele für die Drift resultieren aus der Coulomb-Kraft und der Gravitationskraft. Das Vorzeichen der Coulomb-Kraft hängt von der Ladung des Teilchens ab,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}.$$

Daraus resultiert die $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift

$$\mathbf{v}_D^{E \times B} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (2.18)$$

Wie auch in Abb. 2.4 zu sehen, ist die $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift für positiv und negativ geladene Teilchen gleichgerichtet, und Elektronen und Ionen driften mit derselben Geschwindigkeit. In einem Plasma führt die $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift daher in der Regel nicht zu einem elektrischen Strom.

Die Gravitationskraft

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} = \gamma_g \frac{mM}{r^3} \mathbf{r}, \quad (2.19)$$

die ein Teilchen durch einen Körper der Masse M im Abstand r erfährt,¹ führt zur *Gravitationsdrift*

$$\mathbf{v}_D^g = \frac{m\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{qB^2}. \quad (2.20)$$

Wir haben \mathbf{g} so definiert, dass an der Erdoberfläche dafür die Gravitationskonstante eingesetzt werden kann. Im allgemeinen Fall muss \mathbf{g} aber aus (2.19) berechnet werden.

¹ $\gamma_g = 3,57627 \times 10^{-38} \text{ m}^3 \text{c}^2 / \text{kg s}^2 = 1,07 \times 10^{-29} \text{ m}^5 / \text{eV s}^4$

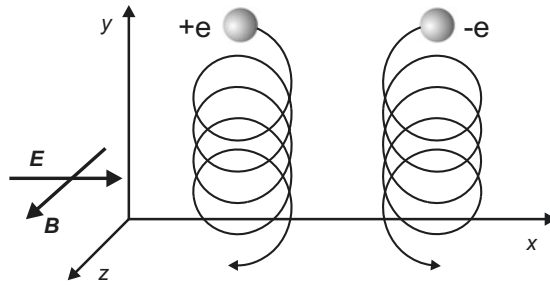


Abb. 2.4 Qualitative Trajektorien geladener Teilchen im Magnetfeld unter Einwirkung eines elektrischen Feldes

Die Gravitationsdrift hängt vom Vorzeichen der Ladung ab und führt für Elektronen und Ionen in entgegengesetzte Richtungen. Bei Anwesenheit vieler Teilchen entsteht aus den Driften der Ionen und Elektronen eine elektrische Stromdichte $\mathbf{j} = en(\mathbf{v}_{Di} - \mathbf{v}_{De})$ der Form

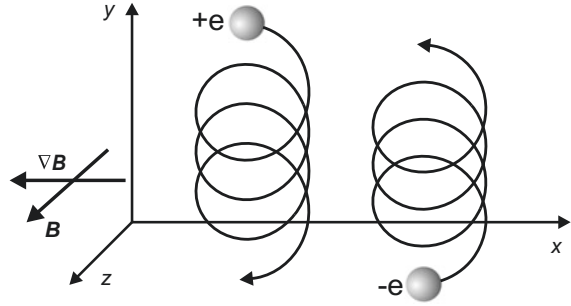
$$\mathbf{j}^g = n(m_e + m_i) \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (2.21)$$

Diese Ströme spielen in astrophysikalischen Plasmen eine wichtige Rolle. So kann man die Entstehung von Rayleigh-Taylor-artigen Instabilitäten über die Gravitationsdrift erklären. Es sei aber eindringlich davor gewarnt, die Einzelteilchendriften direkt in Plasmaströmungen zu übertragen. Zur Berechnung von Teilchenströmungen und elektrischen Strömen muss sorgfältig über die Verteilungsfunktionen der Teilchen gemittelt werden. Das Resultat ist nicht unbedingt gleich der Summe der Einzelteilchendriften. $E \times B$ - und Gravitationsdrift überleben den Mittelungsprozess, und wir werden die gleichen Driften in den Flüssigkeitsgleichungen wiederfinden. Die Driften im nächsten Abschnitt tauchen in den Flüssigkeitsgleichungen aber nur versteckt wieder auf.

2.2 Inhomogene Magnetfelder

In einem nächsten Schritt lassen wir eine räumliche Variation der Magnetfelder zu. Drei Fälle wollen wir unterscheiden: Feldstärkenänderungen senkrecht und parallel zur Magnetfeldlinie sowie gekrümmte Feldlinien. Natürlich lassen die Maxwell-Gleichungen nicht jede beliebige Feldkonfiguration zu. Ein gekrümmtes Magnetfeld wird immer auch eine räumlich variierende Feldstärke aufweisen. Doch die betrachteten Effekte verhalten sich additiv und können somit einzeln untersucht werden. Wir vernachlässigen hier die externe Kraft und legen den Ursprung des Koordinatensystems in das Zentrum der Gyrationbewegung zum Zeitpunkt $t = 0$.

Abb. 2.5 Trajektorien geladener Teilchen im inhomogenen Magnetfeld



2.2.1 Inhomogenität senkrecht zum Magnetfeld

Wir beginnen mit einem Magnetfeld in die z -Richtung mit veränderlicher Feldstärke nur in y -Richtung (siehe Abb. 2.5). Weiterhin sei die Änderung der Feldstärke auf einer Strecke der Länge ρ_L klein gegen B selbst, also $|\nabla B|\rho_L \ll B$. Damit können wir uns bei der Entwicklung des Magnetfeldes um das Führungszentrum bei $(0, 0)$ auf Terme erster Ordnung in y beschränken. Es ist also

$$\mathbf{B} = B(y)\mathbf{e}_z \approx B_0\mathbf{e}_z + \left. \frac{\partial B}{\partial y} \right|_0 y\mathbf{e}_z. \quad (2.22)$$

Unter diesen Voraussetzungen können wir davon ausgehen, dass sich die Gyrationenbahn der Teilchen von der Bahn im homogenen Magnetfeld nur wenig unterscheidet.

Wir wollen zunächst berechnen, wie sich die Inhomogenität auf die Lorentz-Kraft auswirkt. Wir setzen die Entwicklung bis zur ersten Ordnung in die Formel für die Lorentz-Kraft ein und finden für die Kraftkomponenten senkrecht zum Magnetfeld:

$$F_x \approx +qv_y \left(B_0 + \frac{\partial B}{\partial y} y \right), \quad (2.23)$$

$$F_y \approx -qv_x \left(B_0 + \frac{\partial B}{\partial y} y \right). \quad (2.24)$$

Da die Variation des Feldes über die Bahn gering sein soll, können wir zur Berechnung von \mathbf{F} die Parameter der ungestörten Bahn (2.9)–(2.12) einsetzen. Aus diesem störungstheoretischen Ansatz folgt:

$$F_x = -qv_{\perp}B_0 \sin \omega_c t - \frac{qv_{\perp}^2}{\omega_c} \frac{\partial B}{\partial y} \sin(\omega_c t) \cos(\omega_c t), \quad (2.25)$$

$$F_y = -qv_{\perp}B_0 \cos \omega_c t - \frac{qv_{\perp}^2}{\omega_c} \frac{\partial B}{\partial y} \cos^2(\omega_c t). \quad (2.26)$$

Uns interessiert nicht, wie der Korrekturterm die schnelle Gyrationbewegung im Detail modifiziert. Wichtig ist nur der mittlere Einfluss des Gradienten auf die Bahn. Daher führen wir wieder eine Zeitmittelung über eine Gyration nach (2.16) durch. Dadurch verschwinden F_x sowie der erste Terme von F_y , und der Einfluss des Gradienten im Magnetfeld resultiert in einer effektiven Kraft, die nach Einsetzen der Gyrationenfrequenz die Form hat²:

$$\langle F_x \rangle_t = 0 \quad (2.27)$$

$$\langle F_y \rangle_t = -\frac{1}{2}mv_{\perp}^2 \frac{1}{B_0} \frac{\partial B}{\partial y}. \quad (2.28)$$

Bei einer beliebigen Richtung des Feldgradienten senkrecht zum Magnetfeld kann man die Beziehung verallgemeinert schreiben als

$$\langle \mathbf{F} \rangle_t = -\frac{1}{2}mv_{\perp}^2 \frac{\nabla_{\perp} B}{B}. \quad (2.29)$$

Die Kraft auf die Teilchen wirkt in Richtung geringerer Magnetfeldstärke. Es handelt sich dabei um den gleichen Mechanismus, der diamagnetische Stoffe aus einem Magnetfeld herausdrückt. Durch ihre Gyrationbahnen und den damit verbundenen Strömen senken Elektronen und Ionen das Magnetfeld ab, d. h. beide Teilchensorten verhalten sich diamagnetisch.

Die mittlere Kraft führt nach (2.17) zu einer Drift. Mit der Energie W_{\perp} in der Senkrechtbewegung der Teilchen erhalten wir einen allgemeinen Ausdruck für die *Gradientendrift* (auch ∇B -Drift genannt):

$$\mathbf{v}_D^{\nabla B} = -\frac{W_{\perp}}{q} \frac{\nabla_{\perp} B \times \mathbf{B}}{B^3}. \quad (2.30)$$

Die Driftrichtung ist wieder leicht nachzuvollziehen: In Abb. 2.5 drehen sich die Elektronen gegen den Uhrzeigersinn. Da das Magnetfeld rechts erhöht ist, ist dort der Larmor-Radius kleiner als auf der linken Seite, was für die Elektronen zu einer Drift nach unten führt. Für Ionen, die sich im Uhrzeigersinn drehen, führt diese Überlegung zu einer Drift nach oben.

2.2.2 Gekrümmte Magnetfeldlinien

Als Nächstes betrachten wir gekrümmte Feldlinien. Wie in Abb. 2.6 zu sehen, liege der Krümmungsradius R_k , der die Krümmung der Feldlinie definiert, in der θ - r -Ebene eines Koordinatensystems. Eine schnelle Lösung des Problems resultiert daraus, dass wir ein

² $(\omega_c/2\pi) \int_0^{2\pi/\omega_c} \cos^2 dt = \frac{1}{2}$

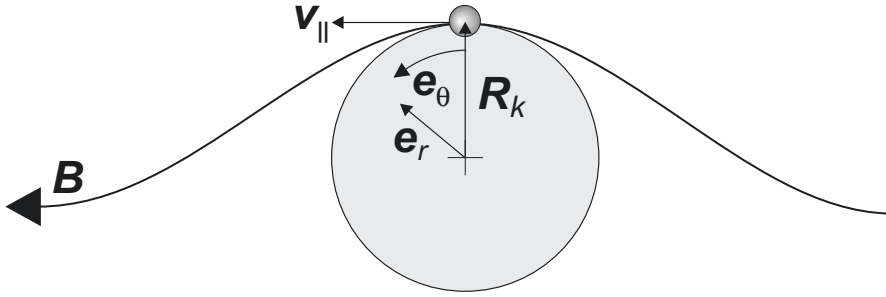


Abb. 2.6 Geometrie zur Berechnung der Krümmungsdrift

mitbewegtes Koordinatensystem verwenden, in dem das Teilchen eine Zentrifugalkraft erfährt, der Form

$$\mathbf{F}_r = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_k} \mathbf{e}_r = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_k^2} \mathbf{R}_k. \quad (2.31)$$

Mit (2.17) folgt daraus die *Krümmungsdrift*. Sie hängt von der kinetischen Energie W_{\parallel} der Teilchen in der Parallelbewegung ab und ist gegeben durch

$$\mathbf{v}_D^k = \frac{2W_{\parallel}}{qR_k^2} \frac{\mathbf{R}_k \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (2.32)$$

Für eine formale Ableitung transformieren wir die Bewegungsgleichung in ein beschleunigtes Koordinatensystem, das dem auf einer Kreisbahn bewegten Teilchen folgt. Der Ursprung des Systems bewege sich mit $r\dot{\theta} = v_{\parallel}$ entlang der Feldlinie. Dann gilt für die Koordinaten r und z im mitbewegten System

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\omega_c \dot{z}, \quad (2.33)$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0, \quad (2.34)$$

$$\ddot{z} = \omega_c \dot{r}. \quad (2.35)$$

Die Gyrationbewegung um die Feldlinie führt dazu, dass im zeitlichen Mittel $r = R_k$ sein wird, sodass $\ddot{r} = 0$ ist. Durch Einsetzen von $\dot{\theta} = v_{\parallel}/R_k$ folgt aus (2.33) direkt die Krümmungsdrift $v_D = \dot{z}$.

Wie schon erwähnt, wird die Form des Magnetfeldes durch die Maxwell-Gleichungen eingeschränkt. So muss im stromfreien Raum

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad (2.36)$$

erfüllt sein. Wir wollen jetzt untersuchen, welche Konsequenzen das für ein gekrümmtes Magnetfeld hat. Dazu beschreiben wir das Feld in Zylinderkoordinaten und nähern die

Feldlinie am Ort des Teilchens durch ein Kreissegment an. Das Feld hat dann nur eine θ -Komponente ($B = B_\theta$), und es folgen aus r - und z -Komponente von (2.36):

$$(\nabla \times \mathbf{B})_r = -\frac{\partial B}{\partial z} = 0, \quad (2.37)$$

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} rB = 0. \quad (2.38)$$

Die erste Gleichung besagt, dass das Magnetfeld nicht von z abhängen kann und also in Richtung senkrecht zum Krümmungskreis konstant sein muss. Nach der zweiten Gleichung muss die Feldstärke eines gekrümmten Magnetfeldes umgekehrt proportional zu r sein. Mit der Nebenbedingung, dass die Feldstärke für $r = R_k$ gleich B_0 ist, muss gelten:

$$B = B_0 \frac{R_k}{r}. \quad (2.39)$$

Eine Krümmung von Feldlinien geht daher immer mit einem Gradienten in der Feldstärke in Richtung Kreismittelpunkt einher. Bei gekrümmten Feldlinien treten daher immer Krümmungs- und Gradientendrift auf. Beide Driften kann man in die gleiche Form überführen. Denn es gilt:

$$\left. \frac{\nabla_\perp B}{B} \right|_{r=R_k} = -\frac{\mathbf{R}_k}{R_k^2}. \quad (2.40)$$

Die Gesamtdrift in einem gekrümmten Magnetfeld ist mit (2.30) also gegeben durch

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_D^{\nabla B} + \mathbf{v}_D^k = (W_\perp + 2W_\parallel) \frac{\mathbf{R}_k \times \mathbf{B}}{qR_k^2 B^2} \quad (2.41)$$

$$= -(W_\perp + 2W_\parallel) \frac{\nabla B \times \mathbf{B}}{qB^3}. \quad (2.42)$$

Diese Zusammenfassung gilt nur in stromfreien Gebieten. Wenn Ströme am Ort der Drift das Magnetfeld stark verändern, gilt (2.36) nicht mehr, und die beiden Driften müssen getrennt aus dem tatsächlichen Feld berechnet werden.

2.2.3 Inhomogenität parallel zum Magnetfeld

In den bisherigen Überlegungen war die Bewegung parallel zum Magnetfeld identisch mit einer Bewegung im feldfreien Raum. Das ändert sich, wenn wir eine Variation der Feldstärke entlang der Feldlinie zulassen. Eine Anordnung, die diese Voraussetzung erfüllt, ist der in Abb. 2.7 zu sehende *magnetische Spiegel*. Die Feldstärke entspricht der Feldliniendichte, und nimmt mit der z -Koordinate zu. Wir nehmen an, dass das Magnetfeld rotationssymmetrisch um die z -Achse ist. In Zylinderkoordinaten (r, θ, z) hat das Feld dann die Form $(B_r, 0, B_z)$. Weiterhin fordern wir, dass $|B_r| \ll |B_z|$ sein soll.

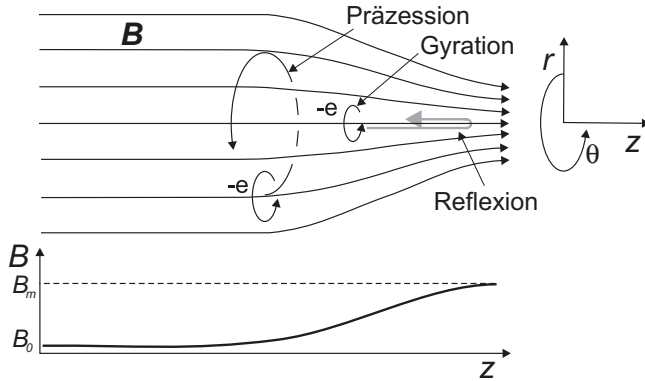


Abb. 2.7 Magnetfeldgradient parallel zu den Feldlinien. Gyrationen- und Präzessionsbahn sowie die Reflexion eines Elektrons im magnetischen Spiegel sind eingezeichnet

Welche Driften können wir aus unseren Kenntnissen heraus erwarten? Wie gezeigt, nimmt bei gekrümmten Feldlinien die Feldstärke in Richtung des Krümmungsradius ab. Dieser Gradient zusammen mit der Krümmung der Feldlinien führt zu einer azimuthalen (θ) Drift, die für Elektronen in die positive θ -Richtung geht (siehe Abb. 2.7). Die Teilchen präzedieren also um die Symmetrieachse der Konfiguration. Da das Feld keine θ -Komponente hat, sind dagegen keine Driften in radialer Richtung zu erwarten.

Der neue Aspekt liegt in der Bewegung parallel zum Magnetfeld. Zur Berechnung benötigen wir die Komponenten des Magnetfeldes, die aus seiner Divergenzfreiheit folgen:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (2.43)$$

Wie zu erwarten, hängt die radiale Komponente des Feldes mit der Änderung der Feldstärke in axialer (z) Richtung zusammen. Wir lösen die Gleichung durch Integration über r und finden:

$$B_r(r, z) = -\frac{1}{r} \int_0^r dr' r' \frac{\partial B_z(r')}{\partial z} \approx -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (2.44)$$

Bei der Integration wurde verwendet, dass im Integranden der Gradient eine langsam veränderliche Funktion von r ist, verglichen mit r selbst. Das Resultat kann dann angenähert werden durch den Gradienten an einer charakteristischen Stelle, multipliziert mit dem Integral über r' . Im Folgenden ist diese Forderung sehr gut erfüllt, denn wir werden unsere Analyse auf die Nähe der Achse beschränken.

Das Führungszentrum des Teilchens befindet sich bei $r = 0$. Das Teilchen ist also um einen Larmor-Radius von der Achse entfernt. Wegen $B_r \neq 0$ hat die Lorentz-Kraft eine Komponente in z -Richtung und die Parallelbewegung folgt der Bewegungsgleichung

$$m\dot{v}_z = -qv_\theta B_r. \quad (2.45)$$

Mit (2.44) folgt:

$$m\dot{v}_z = qv_\theta \frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -|qv_\theta| \frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (2.46)$$

wobei das Vorzeichen für positive und negative Ladungen gleich ist, denn bei Elektronen ist die Ladung und bei Ionen v_θ negativ. Die Größen r und v_θ sind durch die schnelle Gyrationbewegung um die Feldlinie bestimmt. Wir setzen dafür den Larmor-Radius (2.13) und die Senkrechtgeschwindigkeit ein. Dies führt uns zum Ergebnis

$$m\dot{v}_z = -\frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{B} \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (2.47)$$

Die Inhomogenität der Feldstärke resultiert also in einer Kraft, die dem Gradienten der Feldstärke entgegengerichtet ist. Die Teilchen werden auf ihrem Weg nach rechts abgebremst und können, wenn v_\parallel nicht zu groß ist, im ansteigenden Magnetfeld reflektiert werden. Man spricht dann von einem *magnetischen Spiegel*.

Verallgemeinert auf eine nicht axiale Feldlinie lautet die Bewegungsgleichung

$$m\dot{\mathbf{v}}_\parallel = -\mu \nabla_\parallel B. \quad (2.48)$$

Dabei haben wir das *magnetische Moment* des Teilchens eingeführt, das Thema des nächsten Abschnitts. Es ist definiert als

$$\mu = \frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{B}. \quad (2.49)$$

Zunächst wollen wir die Frage beantworten, wie es um die Erhaltung der kinetischen Energie des Teilchens steht. Die Energieerhaltung kann nur erfüllt sein, wenn sich die Senkrechtkomponente der Geschwindigkeit entgegengesetzt zur parallelen Komponente ändert. Dass das auch tatsächlich geschieht, folgt aus dem *Faraday-Gesetz*, welches für einen geschlossenen Stromleiter das Integral des elektrischen Feldes im Leiter c mit der Änderung des magnetischen Flusses durch die eingeschlossene Fläche S verbindet:

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.50)$$

Wir wenden diese Gleichung entsprechend Abb. 2.8 auf ein gyrierendes Elektron an, begeben uns dazu in das mit v_\parallel bewegte Bezugssystem und ersetzen die Gyrationbahn durch einen Ringleiter. Dann definiert der Larmor-Radius die Fläche und den Umfang des Leiters. Die aufgespannte Fläche liegt senkrecht zum Magnetfeld am Ort des Führungszentrums. Für ein nicht explizit zeitabhängiges Magnetfeld gilt damit:

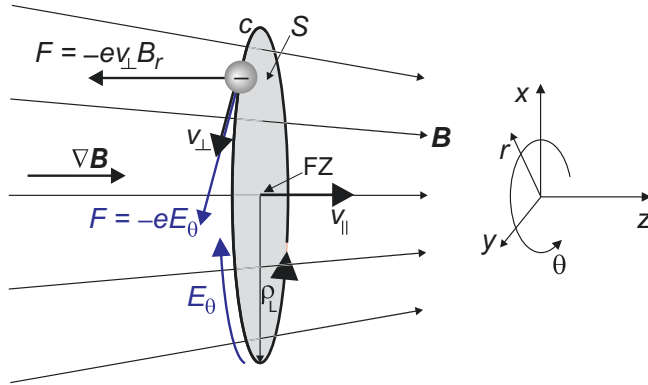


Abb. 2.8 Umwandlung von Parallelenergie in Senkrechterenergie eines Elektrons durch einen Gradienten im Magnetfeld parallel zu **B**. FZ deutet das Führungszentrum der Teilchenbahn an

$$2\pi\rho_L E_\theta = -\pi\rho_L^2 \frac{dB}{dt} = -\pi\rho_L^2 (\nabla_{||} B) v_{||}. \quad (2.51)$$

Für ein Elektron, das ja in die positive θ -Richtung gyriert, resultiert aus dem induzierten elektrischen Feld eine Kraft der Form

$$m\dot{v}_\theta = m\dot{v}_\perp = -eE_\theta = \frac{1}{2}mv_\perp v_{||} \frac{\nabla_{||} B}{B}. \quad (2.52)$$

Die Richtungen der Vektoren sind Abb. 2.8 zu entnehmen. Während die Parallelbewegung verlangsamt wird, beschleunigt das elektrische Feld die Senkrechtbewegung.

Bei der Anwendung des Faraday-Gesetzes auf die Gyrationbahn in (2.51) haben wir den Larmor-Radius als konstant angenommen. Indem sich v_\perp und B ändern, ändert sich natürlich auch $\rho_L = mv_\perp/eB$. Wenn wir diese zeitlichen Abhängigkeiten in (2.51) berücksichtigen, so würde sich, wie in Abschn. 2.2.4 nachzulesen, der Fluss durch die Bahn nicht ändern und daraus $E_\theta = 0$ resultieren. Die hier durchgeführte Rechnung liefert den physikalischen Grund für die Beschleunigung der Senkrechtbewegung der Teilchen, die letztlich dazu führt, dass der magnetische Fluss durch die Teilchenbahn erhalten bleibt. Für die Abhängigkeit des Larmor-Radius von einem zeitlich variablen Magnetfeld können wir aus (2.52) mit E_θ aus (2.51), wobei die totale Zeitableitung durch eine partielle zu ersetzen ist, auch folgende Beziehung ableiten:

$$\frac{\dot{v}_\perp}{v_\perp} = \frac{1}{2} \frac{\dot{B}}{B} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{\rho}_L}{\rho_L} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{B}}{B} \quad (2.53)$$

Um die Energieerhaltung im Spiegel zu überprüfen, müssen wir die zeitlichen Änderungen in der parallelen und der senkrechten Geschwindigkeit vergleichen. Dazu berechnen wir die zeitliche Änderung der kinetischen Teilchenenergie

$$\dot{W} = m(v_{\perp} \dot{v}_{\perp} + v_{\parallel} \dot{v}_{\parallel}) = m v_{\perp} v_{\parallel} \left(\frac{\dot{v}_{\perp}}{v_{\parallel}} + \frac{\dot{v}_{\parallel}}{v_{\perp}} \right). \quad (2.54)$$

Wir setzen (2.52) und (2.47) ein und finden

$$\dot{W} = \frac{1}{2} m v_{\perp} v_{\parallel} (v_{\perp} - v_{\parallel}) \frac{\nabla_{\parallel} B}{B} = 0.$$

Durch das Magnetfeld wird somit kinetische Energie aus der Parallelbewegung in die Senkrechtbewegung gekoppelt und umgekehrt. Das Teilchen wird im Magnetfeld reflektiert, wenn die gesamte Energie in der Senkrechtbewegung steckt.

Dass die kinetische Energie im zeitunabhängigen Magnetfeld eine Erhaltungsgröße ist, liegt natürlich daran, dass die Lorentz-Kraft senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor wirkt und somit keine Arbeit leisten kann. Formell zeigt man die Energieerhaltung durch

$$\dot{W} = m \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = q \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (2.55)$$

Ein explizit zeitabhängiges Magnetfeld kann hingegen die Senkrechte Energie der Teilchen über Induktion verändern ohne die Parallelbewegung zu beeinflussen.

2.2.4 Magnetisches Moment und magnetischer Spiegel

Die durch (2.49) vorgenommene Definition des magnetischen Momentes ist konform mit der Definition aus der Elektrodynamik. Ein gyrierendes Teilchen kann man nämlich als Ringstrom auffassen, dessen Stärke sich aus der Ladungsdichte des auf seiner Gyrobahn verschmierten Teilchens und dessen Geschwindigkeit berechnet. Der Betrag der Stromes ist damit gegeben durch

$$I = \left| \frac{q}{2\pi \rho_L} v_{\perp} \right|. \quad (2.56)$$

In der Elektrodynamik ist das magnetische Moment eines Ringstroms definiert als Produkt aus der Stromstärke und der vom Strom umschlossenen Fläche. Entsprechend finden wir für ein geladenes Teilchen im Magnetfeld die Definition (2.49) wieder:

$$\mu = I \pi \rho_L^2 = \frac{\frac{1}{2} m v_{\perp}^2}{B}. \quad (2.57)$$

Das magnetische Moment ist weiterhin proportional zum von der Bahn des Teilchens eingeschlossenen *magnetischen Fluss* ψ . Es ist nämlich

$$\mu = \frac{q^2}{2\pi m} \pi \rho_L^2 B = \frac{q^2}{2\pi m} \psi \sim \psi. \quad (2.58)$$

Wir wollen nun zeigen, dass das magnetische Moment und damit auch der magnetische Fluss Erhaltungsgrößen sind, wenn das Magnetfeld nur schwach vom Ort abhängt. Dazu berechnen wir die Zeitableitung von (2.57) und finden:

$$\dot{\mu} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{1}{2} m v_{\perp}^2}{B} \right) = \frac{m v_{\perp} \dot{v}_{\perp}}{B} - \frac{\frac{1}{2} m v_{\perp}^2}{B^2} \frac{dB}{dt} = \mu \left(2 \frac{\dot{v}_{\perp}}{v_{\perp}} - \frac{\nabla_{\parallel} B}{B} v_{\parallel} \right) = 0.$$

Der Ausdruck verschwindet wegen (2.52), sodass das magnetische Moment bei langsam veränderlichen Magnetfeldstärken eine Erhaltungsgröße ist. Wir haben hier eine explizite Zeitabhängigkeit des Magnetfeldes vernachlässigt. In Abschn. 2.3.3 werden wir aber die Gültigkeit dieser Aussage auf explizit zeitabhängige Felder erweitern. Wie in Abschn. 2.2.3 diskutiert, kommt das Teilchen der Forderung nach Erhaltung des magnetischen Flusses dadurch nach, dass sich sein Larmor-Radius verringert, wenn das Magnetfeld ansteigt und umgekehrt. Das durch den Ringstrom selbst induzierte Magnetfeld ist schwach und spielt für die Erhaltung des magnetischen Flusses keine Rolle.

Erhaltungsgrößen vereinfachen oft die Behandlung von sonst komplizierten Fragestellungen. Ein Beispiel dafür sind Teilchenbahnen in einem *magnetischen Spiegel*. Wir haben gesehen, dass geladene Teilchen im ansteigenden Magnetfeld reflektiert werden können. Stellen wir uns also eine Anordnung vor, die wie Abb. 2.7 skizziert aussieht, nur dass sie zusätzlich einen an der Ebene $z = 0$ gespiegelten Teil hat. Dann können Teilchen an beiden Enden reflektiert und so im Magnetfeld eingeschlossen werden. Solche Anordnungen wurden tatsächlich verwendet, um Hochtemperaturplasmen magnetisch einzuschließen. Wir werden in Kap. 11 darauf zurückkommen. Um zu einer Einschlussbedingung für die Plasmateilchen zu gelangen, definieren wir in Abb. 2.9 den *Neigungswinkel* oder, aus dem Englischen, *Pitch-Winkel* α eines Teilchens über das Verhältnis aus senkrechter und paralleler Geschwindigkeitskomponente

$$\tan \alpha = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}}. \quad (2.59)$$

Das magnetische Moment können wir nun als Funktion des Neigungswinkels ausdrücken:

$$\mu = \frac{m v^2 \sin^2 \alpha}{2 B} = \text{konst.}$$

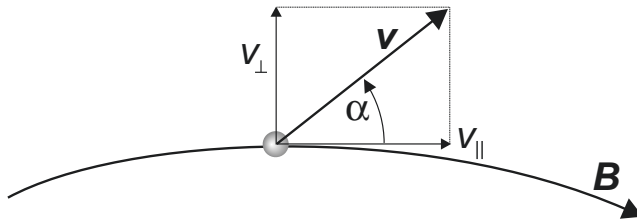


Abb. 2.9 Neigungswinkel (Pitch-Winkel) α des Geschwindigkeitsvektors eines Teilchens bezogen auf eine Magnetfeldlinie

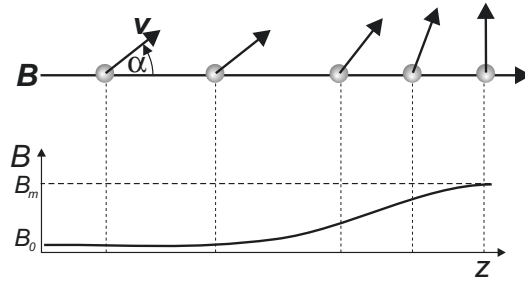


Abb. 2.10 Aufsteilen des Neigungswinkels eines Teilchens, das im Magnetfeld bei B_m reflektiert wird

Da sowohl μ als auch die kinetische Energie Erhaltungsgrößen sind, muss weiter gelten:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{B} = \text{konst.} \quad (2.60)$$

Wenn die Magnetfeldstärke wie in einem Spiegel zunimmt, dann muss demnach auch der Neigungswinkel anwachsen. Das kann so weit gehen, bis die parallele Bewegung des Teilchens zur Ruhe kommt. Dieser Sachverhalt ist in [Abb. 2.10](#) dargestellt. Zur Berechnung der Reflexionsbedingung verwenden wir, dass im Reflexionspunkt die Parallelgeschwindigkeit verschwindet und daher $\alpha = \pi/2$ gelten muss. Insbesondere gilt, wenn der Reflexionspunkt an der Stelle maximalen Feldes B_M (siehe [Abb. 2.7](#)) liegt:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \frac{\pi}{2}} = \sin^2 \alpha = \frac{B}{B_M}. \quad (2.61)$$

Damit können wir die *Einfangsbedingung für den magnetischen Spiegel* aufstellen. Teilchen am Minimum des Feldes B_0 sind eingeschlossen, wenn für den Neigungswinkel gilt:

$$\sin \alpha > \sin \alpha_0 = \sqrt{\frac{B_0}{B_M}} = \frac{1}{\sqrt{R_{Sp}}}. \quad (2.62)$$

Da für den Quotienten von an zwei Orten im Spiegel genommenen magnetischen Feldstärken B_0/B_M der kleinste realisierbare Wert ist, kann die Bedingung für $\alpha < \alpha_0$ nicht eingehalten werden, was bedeutet, dass solche Teilchen nicht eingeschlossen sind. Die Größe R_{Sp} nennt man das *Spiegelverhältnis*, definiert als

$$R_{Sp} = \frac{B_M}{B_0}. \quad (2.63)$$

Die Einschlussbedingung gilt also unabhängig von der kinetischen Energie des Teilchens. Ist die Senkrechtenergie des Teilchens höher als durch α_0 vorgeschrieben, dann würde

bis zum Feldmaximum die Senkrechtenergie über den Wert der Gesamtenergie ansteigen müssen. Da dies nicht möglich ist, wird das Teilchen schon bei geringerer Feldstärke reflektiert. Ist dagegen der Neigungswinkel kleiner als α_0 , dann ist am Feldmaximum noch Parallelenergie übrig, und das Teilchen kann den Spiegel verlassen. Je größer das Spiegelverhältnis ist, umso kleiner wird der Grenzwinkel α_0 , unterhalb dessen der Neigungswinkel von nicht eingeschlossenen Teilchen liegt. Bei einem maxwellschen Plasma steigt der Anteil der eingeschlossenen Teilchen mit R_{sp} an. Spiegeleffekte spielen für geladene Teilchen von magnetisch eingeschlossenen Plasmen eine wichtige Rolle, wie sie in der Fusionsforschung untersucht werden.

2.3 Teilchen in periodischen Feldern

Wir gehen jetzt dazu über, den Einfluss von in Raum und Zeit periodischen Feldern auf die Trajektorien einzelner Teilchen zu untersuchen. Für Plasmen sind solche Aspekte aus verschiedenen Gründen wichtig. Die Beeinflussung von elektromagnetischen Wellen durch das Plasma ist über die Driften zu verstehen. Die Driften und damit die dielektrischen Eigenschaften des Plasmas werden modifiziert, wenn die Wellenlänge der Störung von der Größenordnung der Larmor-Radien ist. Zum anderen können Plasmen instabil auf periodische Störungen des Dichtegradienten reagieren. Auch die Dynamik der Instabilitäten erklärt sich über die Plasmadriften. Diese erfahren wieder eine Korrektur, wenn die räumliche Skala der Störung von der Ordnung des Larmor-Radius ist. Zusätzlich werden wir hier eine neue Drift aufgrund eines zeitabhängigen elektrischen Feldes einführen und zeigen, wie zeitabhängige Magnetfelder Energie auf geladene Teilchen übertragen können.

Wir beginnen mit einem räumlich variablen elektrischen Feld und betrachten danach zeitabhängige elektrische und magnetische Felder.

2.3.1 Räumlich-periodisches elektrisches Feld

Wir betrachten das in [Abb. 2.11](#) dargestellte elektrische Feld mit der Wellenlänge λ . Der Feldvektor ist senkrecht zum Magnetfeld und hat nur eine x -Komponente. Die Feldstärke ist eine Funktion von x und zunächst nicht explizit zeitabhängig:

$$\mathbf{E} = E_0 \cos kx \mathbf{e}_x, \quad (2.64)$$

wobei $k = 2\pi/\lambda$ der Wellenvektor ist. Es gelten die Bewegungsgleichungen (2.2–2.4) für den Fall einer externen Kraft $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$:

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \omega_c v_y + \omega_c E_x / B, \\ \dot{v}_y &= -\omega_c v_x. \end{aligned}$$

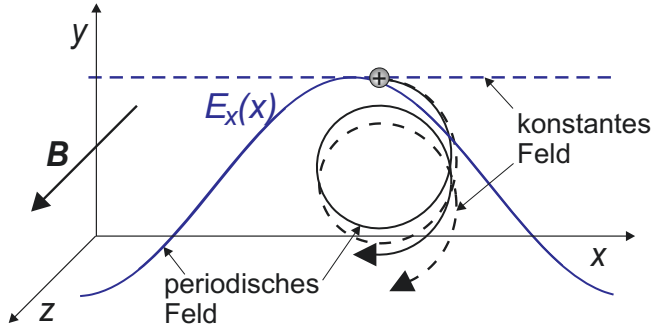


Abb. 2.11 $E \times B$ -Drift eines Ions in einem konstanten und einem periodischen elektrischen Feld. Larmor-Radius-Effekte reduzieren die Driftgeschwindigkeit

Wir entkoppeln die Gleichungen wieder durch Differenzieren und gegenseitiges Einsetzen:

$$\ddot{v}_x + \omega_c^2 v_x = \omega_c \dot{E}_x / B, \quad (2.65)$$

$$\ddot{v}_y + \omega_c^2 v_y = -\omega_c^2 E_x / B. \quad (2.66)$$

Das Näherungsverfahren zur Lösung der Differentialgleichungen ist uns schon geläufig. Die linken Seiten ergeben die uns bekannte Gyrationbewegung (2.9–2.12) um das Führungszentrum x_{Fz} . Diese Bewegung wird durch die Terme auf der rechten Seite gestört. Wie bei der Herleitung der Krümmungsdrift nutzen wir einen Störungsansatz und setzen voraus, dass das elektrische Feld nicht zu einer wesentlichen Abweichung von einer Gyrationbewegung führt. Dann können wir die Lösung für den Fall ohne elektrisches Feld nehmen, um den Einfluss des elektrischen Feldes zu berechnen. Die mittlere Coulomb-Kraft bestimmt dann die zeitgemittelte Bewegung der Teilchen und damit die gesuchte Driftgeschwindigkeit. Durch die Gyrationbewegung ändert sich das elektrische Feld am Ort des Teilchens wie

$$E_x = E_0 \cos(k(x_{Fz} + \rho_L \sin \omega_c t)). \quad (2.67)$$

Untersuchen wir zuerst, wie die $E \times B$ -Drift durch die räumliche Variation des elektrischen Feldes modifiziert wird. Dazu berechnen wir mit (2.16) das Zeitmittel von (2.66). Die Mittelung über v_y ergibt die Driftgeschwindigkeit. Nach (2.16) ist die Driftgeschwindigkeit zeitunabhängig, also verschwindet der Term mit der zweifachen Zeitableitung, und wir finden:

$$v_{Dy} = -\langle E_x \rangle_t / B. \quad (2.68)$$

Aus (2.67) folgt mithilfe eines Additionstheorems der Ausdruck

$$E_x = E_0 (\cos(kx_{Fz}) \cos(k\rho_L \sin \omega_c t) - \sin(kx_{Fz}) \sin(k\rho_L \sin \omega_c t)).$$

Wir berechnen die Korrektur für den Fall, dass die Wellenlänge groß gegen den Larmor-Radius ist:

$$k\rho_L < 1. \quad (2.69)$$

Damit können wir die trigonometrischen Funktionen entwickeln.³ Die Terme bis zur zweiten Ordnung sind somit gegeben durch

$$E_x \approx E_0 \left(\cos(kx_{Fz}) \left(1 - (k\rho_L \sin \omega_c t)^2 / 2 \right) - \sin(kx_{Fz}) k\rho_L \sin \omega_c t \right).$$

Nach (2.68) führt das Mitteln über eine Gyration zu einer Driftgeschwindigkeit der Form

$$v_{Dy} = -\frac{E_0}{B} \cos kx_{Fz} \left(1 - \left(\frac{k\rho_L}{2} \right)^2 \right) = \frac{E(x_{Fz})}{B} \left(1 - \left(\frac{k\rho_L}{2} \right)^2 \right). \quad (2.70)$$

In vektorieller Schreibweise und für eine beliebige Richtung des elektrischen Feldes können wir schreiben:

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \left(1 - \left(\frac{k\rho_L}{2} \right)^2 \right). \quad (2.71)$$

Das Resultat ist also die bekannte $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift, die allerdings durch die sogenannte *Bahnkorrektur* reduziert wird. Die anschauliche Erklärung ist in Abb. 2.11 dargestellt, wo eine ungestörte und eine gestörte Bahn gezeigt sind. Das mittlere elektrische Feld, das während einer Gyration auf die Teilchen wirkt, ist kleiner als das Feld am Ort des Führungszentrums. Am offensichtlichsten ist das, wenn das Führungszentrum an einem Feldmaximum liegt. Auf seiner Bahn spürt das Teilchen dann immer, außer an zwei Punkte seiner Bahn, ein kleineres Feld. Man spricht bei Korrekturen dieser Art, die hauptsächlich für Ionen wichtig werden können, auch von *Larmor-Radius-Effekten*.

In x -Richtung, also parallel zum elektrischen Feld, tritt keine Modifikation auf. Wie bei einem konstanten Feld gibt es die Drift nur in die y -Richtung. Dies ist leicht nachzuvollziehen, indem man eine entsprechende Mittelung für v_x durchführt, die nach (2.65) in eine Mittelung über \dot{E} mündet. Man findet, dass alle Terme verschwinden. Das ändert sich für explizit zeitabhängige Felder.

2.3.2 Zeitabhängige elektrische Felder

Nun wollen wir uns der Bewegungsgleichung (2.65) parallel zum elektrischen Feld zuwenden, um den Einfluss eines explizit zeitabhängigen elektrischen Feldes zu untersuchen. Es soll die Form haben

$$\mathbf{E} = E_0 \cos \omega t \mathbf{e}_x. \quad (2.72)$$

³ $\sin \epsilon \approx \epsilon$; $\cos \epsilon \approx 1 - \epsilon^2/2$

Zeitlich veränderliche elektrische Felder spielen für die Plasmadynamik eine wesentliche Rolle. Oft entwickeln sich die Plasmaparameter langsam im Vergleich mit der Gyrationfrequenz. Daher beschränken wir uns zuerst auf den Fall

$$\omega/\omega_c \ll 1. \quad (2.73)$$

Weiterhin sind (2.65–2.66) die gültigen Bewegungsgleichungen. Die langsame Zeitabhängigkeit des elektrischen Feldes führt zu einer zeitabhängigen $E \times B$ -Drift in y -Richtung. In den Ausdruck für die Driftgeschwindigkeit ist dann einfach das zeitabhängige Feld einzusetzen.

Neu ist, dass der inhomogene Anteil von (2.65) nicht verschwindet. Daraus entsteht eine x -Komponente in der Driftgeschwindigkeit, die durch den Ansatz $v_x = v_\perp \sin \omega_c t + v_D^{\text{pol}}$ berechnet werden kann. Dies ist die *Polarisationsdrift*, die in vektorieller Schreibweise die allgemeine Form hat:

$$\mathbf{v}_D^{\text{pol}} = \frac{1}{\omega_c B} \dot{\mathbf{E}}_\perp = \frac{m}{qB^2} \dot{\mathbf{E}}_\perp, \quad (2.74)$$

wobei \mathbf{E}_\perp der Anteil des Vektors senkrecht zu \mathbf{B} ist. Die Polarisationsdrift ist wegen ihrer Massenabhängigkeit besonders für die Ionen wichtig. In Abb. 2.12 wurde eine anschauliche Deutung dieser Drift anhand der Bahn eines Elektrons vorgenommen: Dazu wurde der Gyrationzyklus in 4 Quadranten unterteilt und angenommen, die Zunahme des elektrischen Feldes sei linear, d. h., das Feld steige um δE , während das Elektron einen Quadranten durchläuft. Dadurch ergibt sich eine Energieänderung um $\delta W = m v_\perp \delta v_\perp$ für jedes δE , die im Vorzeichen, entsprechend der beigefügten Tabelle, von der Richtung der Bewegung bezogen auf das elektrische Feld abhängt. Mit der

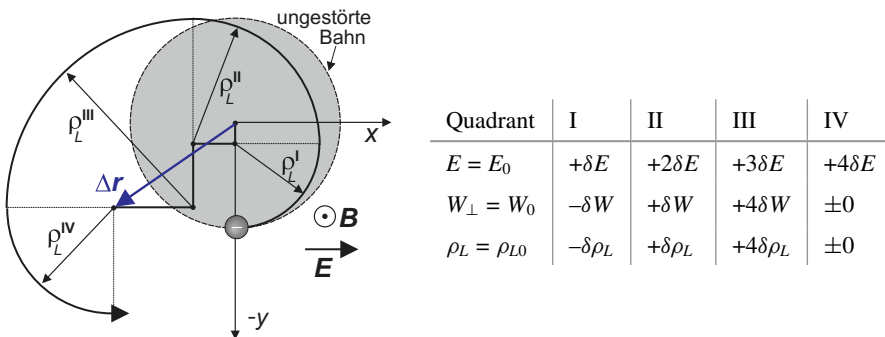


Abb. 2.12 Anschauliche Darstellung der Polarisationsdrift eines Elektrons. Dazu ist die Gyrationbewegung in 4 Quadranten unterteilt, für die jeweils der Larmor-Radius aus einer mittleren Geschwindigkeit abgeschätzt ist, die sich entsprechend der Senkrechterenergie W_\perp durch ein linear mit der Zeit wachsendes elektrisches Feld ändert (siehe Tabelle). Nach dem 4. Quadranten ist die Ausgangsgeschwindigkeit wieder erreicht, das Führungszentrum aber um $\Delta \mathbf{r}$ versetzt

Geschwindigkeit ändert sich der Larmor-Radius. Nach Ablauf eines Zyklus' ist die ausgängliche Senkrechtgeschwindigkeit wiederhergestellt, das Führungszentrum ist aber um Δr versetzt. Die Versetzung in x -Richtung repräsentiert die Polarisationsdrift, die in die y -Richtung die $E \times B$ -Drift. Die Polarisationsdrift tritt auch im Flüssigkeitsbild auf. Da die Richtung der Polarisationsdrift vom Vorzeichen der Ladung abhängt, resultiert daraus ein *Polarisationsstrom*.

Für höhere Frequenzen, wenn (2.73) nicht mehr erfüllt ist, tritt analog zu den Larmor-Radius-Effekten eine Reduktion der Driften ein. Aus dem Zeitmittel der Terme mit dem elektrischen Feld und anschließender Entwicklung bis zur dritten Ordnung in $2\pi\omega/\omega_c$ folgen die Korrekturen

$$\begin{aligned}\langle E_x \rangle_t &= E_0 \frac{\omega_c}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_c} dt \cos(\omega t) \approx E_0 \left\{ 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{2\pi\omega}{\omega_c} \right)^2 \right\}, \\ \langle \dot{E}_x \rangle_t &= -\omega E_0 \frac{\omega_c}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_c} dt \sin \omega t \approx \dot{E}_0 \left\{ 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{2\pi\omega}{\omega_c} \right)^2 \right\},\end{aligned}$$

die direkt in die Driften eingesetzt werden können.

2.3.3 Zeitabhängige Magnetfelder

Zum Abschluss wollen wir noch den Einfluss von zeitabhängigen Magnetfeldern auf Teilchenbahnen untersuchen. Der Einfachheit halber sei $v_{\parallel} = 0$. Wie schon in Abschn. 2.2.3, so nutzen wir auch hier das Faraday-Gesetz (2.50), das eine magnetische Flussänderung innerhalb der Gyrationbahn mit einem elektrischen Feld auf der Bahn verbindet. Wenn die Feldvariation während einer Gyrationperiode linear ist, erhalten wir analog zu (2.51) das induzierte elektrische Feld

$$E_{\theta} = -\frac{\rho_L}{2} \dot{B}. \quad (2.75)$$

Wie in Abb. 2.8 erläutert, entsteht bei einem ansteigenden Magnetfeld für Elektronen und Ionen eine beschleunigende Kraft in senkrechter Richtung zum Magnetfeld. Die Änderung des mit der Teilchenbewegung verknüpften elektrischen Stroms erzeugt ein Magnetfeld, das in beiden Fällen dem Anstieg der äußeren Feldstärke entgegenwirkt (Lenz'sche Regel). Die Energie in der Senkrechtbewegung der Teilchen nimmt dabei zu:

$$\dot{W}_{\perp} = m v_{\perp} \dot{v}_{\perp} = -|q v_{\perp}| E_{\theta} = \left| q \frac{\rho_L}{2} v_{\perp} \right| \dot{B} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \frac{\dot{B}}{B},$$

oder

$$\dot{W}_{\perp} = \mu \dot{B}. \quad (2.76)$$

Da die Parallelenergie, anders als im Fall eines parallelen Magnetfeldgradienten, unbeeinflusst bleibt, wird die Gesamtenergie durch das Magnetfeld verändert.

Auch in diesem Prozess ist das magnetische Moment erhalten. Aus

$$\frac{d}{dt}(\mu B) = \frac{d\mu}{dt}B + \mu \dot{B}$$

folgt wegen $W_{\perp} = \mu B$ das bekannte Ergebnis

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{B} \left(\frac{d}{dt}(\mu B) - \mu \dot{B} \right) = \frac{1}{B} (\dot{W}_{\perp} - \mu \dot{B}) = 0. \quad (2.77)$$

Das heißt, in langsam veränderlichen Feldern ist das magnetische Moment eine Erhaltungsgröße. Wegen (2.58) ist dies äquivalent mit der Aussage, dass der magnetische Fluss durch die Gyrationbahn konstant bleibt. Daraus folgt wiederum, dass sich der Larmor-Radius verkleinert, wenn das Magnetfeld ansteigt. Wenn viele Teilchen im Spiel sind, spricht man bei dieser Kontraktion auch von *adiabatischer Kompression*. Wenn die Geschwindigkeit durch Stöße thermalisiert, so kann man die adiabatische Kompression benutzen, um das Plasma aufzuheizen.

2.4 Adiabatische Invarianten

Wir haben gezeigt, dass das magnetische Moment eines geladenen Teilchens eine Erhaltungsgröße ist, vorausgesetzt die Ortsabhängigkeit des Feldes ist schwach auf der Skala des Larmor-Radius, sodass sie sich während eines Gyrationzyklus wenig ändern. Das magnetische Moment ist somit ein Beispiel für eine Größe, die auf einer periodischen Bahn in guter Näherung erhalten ist. Man nennt solche Größen *adiabatische Invarianten*.

Es lässt sich ganz allgemein zeigen, dass in einem System, das sich in einer Koordinate q periodisch verhält, das Integral des Produkts dieser Koordinate mit dem dazu gehörigen Impuls p (den Separationsvariablen), genommen über eine geschlossene Bahn

$$\mathcal{J} = \oint p d^3q, \quad (2.78)$$

eine adiabatische Invariante ist. Sie ist also definiert als die von der Bahn im Phasenraum umschlossenen Fläche.

Diese Größen sind von Bedeutung in der Mechanik, bei der Berechnung von Planetenbahnen, in der Quantenmechanik, beim Auffinden von Erhaltungsgrößen und eben für die Berechnung von Teilchenbahnen in Magnetfeldern. In der klassischen Mechanik nennt man sie auch *Wirkungsvariablen*, denn die Definition (2.78) ist ähnlich zum Wirkungsintegral, das die Form

$$A = \int_{t_1}^{t_2} p \dot{q} dt \quad (2.79)$$

hat und nach dem Hamilton-Prinzip für eine Teilchenbahn zwischen den Zeiten t_1 und t_2 ein Extremum annehmen muss.

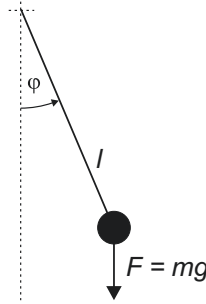


Abb. 2.13 Das Pendel mit veränderlicher Pendellänge l zur Erläuterung von adiabatischen Invarianten

2.4.1 Adiabatische Invariante am Beispiel eines Pendels

Am mathematischen Pendel lassen sich die Vorteile von adiabatischen Variablen demonstrieren. Für kleine Auslenkwinkel φ (siehe Abb. 2.13) lautet die Bewegungsgleichung

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi \approx -mg\varphi. \quad (2.80)$$

Das Ergebnis ist bekannt: Wir definieren die Winkelfrequenz $\omega = \sqrt{g/l}$ mit der Gravitationskonstanten g und erhalten aus der Anfangsbedingung $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$, $\varphi(0) = 0$ die Lösung

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \dot{\varphi}_0 \cos \omega t, \\ \varphi(t) &= (\dot{\varphi}_0 / \omega) \sin \omega t. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Die periodische Variable ist hier $l\varphi$ und der dazugehörige Impuls $ml\dot{\varphi}$. Die adiabatische Invariante berechnet sich nun nach (2.78) aus

$$\mathcal{J} = ml^2 \oint d\varphi \dot{\varphi}(\varphi). \quad (2.82)$$

Die Trajektorie im Phasenraum $\dot{\varphi}(\varphi)$ folgt aus (2.81), indem wir die beiden Gleichungen quadrieren und aufsummieren:

$$\left(\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}_0} \right)^2 + \left(\frac{\varphi \omega}{\dot{\varphi}_0} \right)^2 = 1. \quad (2.83)$$

Es gilt also das elliptische Integral in den Grenzen der Umkehrpunkte φ_1 und φ_2 zu lösen

$$\mathcal{J} = ml^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \sqrt{\dot{\varphi}_0^2 - (\varphi \omega)^2}. \quad (2.84)$$

Das Ergebnis ist⁴

$$\mathcal{J} = \frac{ml^2}{2\omega} \left\{ \varphi\omega\sqrt{\dot{\varphi}_0^2 - (\varphi\omega)^2} + \dot{\varphi}_0^2 \arcsin \frac{\varphi\omega}{\dot{\varphi}_0} \right\}_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$

An den Umkehrpunkten verschwindet die Geschwindigkeit und aus (2.83) folgt $\varphi_{1,2} = \pm \dot{\varphi}_0/\omega$. Also ist

$$\mathcal{J} = \frac{\pi}{2} m \frac{(l\dot{\varphi}_0)^2}{\omega} = \pi \frac{W_0}{\omega} = \pi W_0 \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2.85)$$

Im Fall einer konstanten Seillänge l ist die adiabatische Invariante proportional zur kinetischen Energie W_0 im Scheitel der Bewegung, und sowohl W_0 als auch \mathcal{J} sind natürlich erhalten. Wenn sich aber die Seillänge ändert, ändert sich auch die kinetische Energie des Pendels. Die kinetische Energie im Scheitel der Bewegung W_0 ist dann keine Erhaltungsgröße mehr. Wird der Faden länger, so muss W_0 kleiner werden. Die genaue Berechnung des Energieübertrages ist nicht trivial. Man kann aber zeigen, dass \mathcal{J} Erhaltungsgröße bleibt, wenn sich die Seillänge adiabatisch, d. h. langsam verglichen mit der Periodendauer des Pendels ändert.

2.4.2 Die transversale adiabatische Invariante

Wir wollen nun mit dem eingeführten Formalismus zeigen, dass das *magnetische Moment* eine adiabatische Invariante ist. Man nennt es auch die *transversale adiabatische Invariante*.

Die Gyrationbewegung weist zwei periodische Variablen auf, nämlich die Koordinaten senkrecht zum Magnetfeld. Aus beiden Variablen resultiert die gleiche adiabatische Invariante. Wir nehmen $q = x$ und $p = mv_x$ als Wirkungsvariablen. Um das Wirkungsintegral (2.78) zu berechnen, müssen wir die Funktion $v_x(x)$ kennen. Nach (2.9) und (2.11) gilt für die Bahn eines gyrierenden Teilchens im Phasenraum:

$$\left(\frac{v_x}{v_\perp} \right)^2 + \left(\frac{x\omega_c}{v_\perp} \right)^2 = 1. \quad (2.86)$$

Die adiabatische Invariante folgt also aus dem Integral

$$\mathcal{J} = 2m \int_{-\rho_L}^{\rho_L} dx \sqrt{v_\perp^2 - (x\omega_c)^2}. \quad (2.87)$$

⁴ $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right)$

Dieses Integral haben wir schon für das Pendel gelöst. Entsprechend finden wir nach elementaren Umformungen:

$$\mathcal{J} = \frac{2\pi m}{q} \mu. \quad (2.88)$$

Der Formalismus liefert eine Größe proportional zum magnetischen Moment, womit gezeigt ist, dass es sich bei μ um eine adiabatische Invariante handelt.

2.4.3 Die longitudinale adiabatische Invariante

Eine weitere adiabatische Invariante tritt im geschlossenen magnetischen Spiegel auf, bei dem Teilchen entsprechend [Abb. 2.7](#) an beiden Enden eingeschlossen sind. Die Parallelbewegung verläuft periodisch zwischen den Reflexionspunkten an beiden Enden. Entsprechend muss die Größe

$$\mathcal{J} = \oint v_{\parallel} ds \quad (2.89)$$

eine adiabatische Invariante sein. Dabei ist s der Weg, den das Führungszentrum des Teilchens in einem Zyklus im Spiegel zurücklegt. Diese Größe ist auch dann noch erhalten, wenn sich der Abstand der beiden Enden langsam ändert und das Magnetfeld eine schwache explizite Zeitabhängigkeit aufweist. Wir werden die longitudinale Invariante für einen einfachen Fall explizit berechnen. Zunächst wollen wir aber zeigen, dass sie tatsächlich eine Erhaltungsgröße ist.

Dazu ersetzen wir die Parallelgeschwindigkeit durch das magnetische Moment, von dem wir wissen, dass es ebenfalls eine Invariante ist:

$$W = \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 + \mu B. \quad (2.90)$$

Damit ist

$$\mathcal{J} = \oint ds \sqrt{\frac{2}{m} (W - \mu B)}. \quad (2.91)$$

Nun können wir zeigen, dass es sich dabei in guter Näherung um eine Konstante handelt. Es gilt dazu zu berechnen:

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{J}(W, s, t)) = \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \right)_{W, s} + \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial W} \right)_{s, t} \frac{dW}{dt} + \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial s} \right)_{W, t} \frac{ds}{dt}. \quad (2.92)$$

Der Index an den Klammern gibt die bei den Ableitungen konstant zu haltenden Größen an. Mit der Kenntnis, dass μ konstant ist, ergeben die einzelnen Terme:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \right)_{W, s} = - \oint ds \left(\frac{2}{m} (W - \mu B) \right)^{-1/2} \frac{\mu}{m} \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Für den zweiten Term verwenden wir $dB/dt = \partial B/\partial t + (\nabla_{\parallel} B)v_{\parallel}$ und (2.90). Daraus folgt:

$$\frac{dW}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial W} \right)_{s,t} = \left\{ m v_{\parallel} \dot{v}_{\parallel} + \mu \frac{\partial B}{\partial t} + \mu (\nabla_{\parallel} B) v_{\parallel} \right\} \frac{1}{m} \oint ds \left(\frac{2}{m} (W - \mu B) \right)^{-1/2}.$$

Und schließlich:

$$\frac{ds}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial s} \right)_{W,t} = v_{\parallel} \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial s} \right)_{W,t}.$$

Alle Größen sind an den Reflexionspunkten zu nehmen, für die $v_{\parallel} = 0$ ist. Insgesamt folgt daraus:

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = - \int_{s_1}^{s_2} ds \frac{\mu}{m} \frac{\partial B}{\partial t} \left(\frac{2}{m} (W - \mu B) \right)^{-1/2} + \frac{\mu}{m} \frac{\partial B}{\partial t} \int_{s_1}^{s_2} ds \left(\frac{2}{m} (W - \mu B) \right)^{-1/2}.$$

Der Ausdruck verschwindet, denn μ ist eine Erhaltungsgröße und die explizite Zeitabhängigkeit von B soll schwach sein. Also können beide Größen aus dem Integral herausgezogen werden.

Abschließend berechnen wir die longitudinale adiabatische Invariante für einen speziellen Fall, der für die Entstehung der hochenergetischen Höhenstrahlung von Bedeutung ist. Nehmen wir an, zwei magnetische Spiegel, die sehr weit voneinander entfernt sind, bewegen sich langsam aufeinander zu. Das Magnetfeld entlang der Verbindungslinie s sei im Wesentlichen konstant, nur an den Enden, wo die Teilchen reflektiert werden, steigt es auf relativ kurzer Strecke an. Für diesen Fall verhalten sich die Phasenraumvariablen s und v_{\parallel} wie in Abb. 2.14 dargestellt. Das Wirkungsintegral können wir also annähern durch $\mathcal{J} \approx 2s_1 v_{\parallel 1}$, wobei $v_{\parallel 1}$ der Betrag der nahezu konstanten Parallelgeschwindigkeit in einiger Entfernung von den Endpunkten ist. Ändert sich nun der Abstand der Spiegel auf s_2 , so folgt daraus eine Änderung der Parallelgeschwindigkeit nach

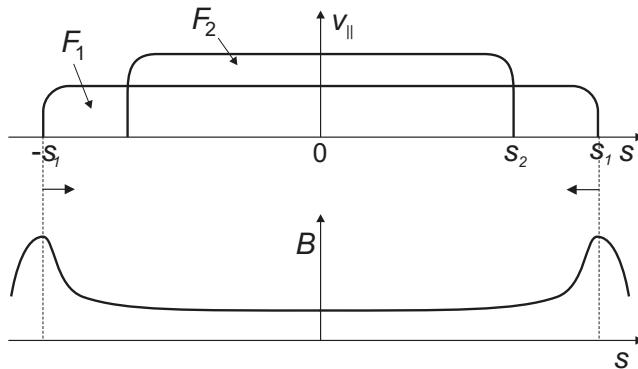


Abb. 2.14 Magnetischer Spiegel (unten) und Phasenraumtrajektorie eines Teilchens im magnetischen Spiegel bei veränderlicher Spiegelgröße

$$v_{\parallel 2} = \frac{s_1}{s_2} v_{\parallel 1}. \quad (2.93)$$

Das heißt, die Parallelgeschwindigkeit wächst, wenn der Abstand der Spiegel kleiner wird. Geht man weiter von einem konstanten Magnetfeld bei $s = 0$ aus, so muss an dieser Stelle, wegen der Invarianz des magnetischen Momentes, die Senkrechterenergie konstant sein. Insgesamt wächst also die kinetische Energie des Teilchens. Dieser Prozess geht solange weiter, bis die Einschlussbedingung (2.62) verletzt wird und das Teilchen aus dem Spiegel entkommen kann. E. Fermi hat erstmals vorgeschlagen, dass dieser Prozess für die Entstehung von hochenergetischer Höhenstrahlung bis zu Energien von 10^{18} eV verantwortlich sein kann, daher bezeichnet man ihn als *Fermi-Beschleunigung*.

2.4.4 Die dritte adiabatistische Invariante

Eine weitere adiabatistische Invariante tritt in toroidalsymmetrischen Magnetfeldern auf, wie z. B. im idealisierten Dipolfeld der Erde (s. Abb. 2.16) oder im Feld eines Tokamaks oder eines toroidalen Pinches (s. Abb. 10.1). Das Feld des z -Pinches und die für die Invariante wichtige Teilchenbewegung sind in Abb. 2.15 dargestellt. Für die Betrachtung der dritten adiabatistischen Invarianten spielt nur die azimutale Komponente des Magnetfeldes B_θ eine Rolle, um die das eingezeichnete Ion gyriert. Da die Feldlinien gekrümmt sind, erfährt das Ion die eingezeichnete Krümmungsdrift. Die Bedeutung der dritten adiabatistischen Invariante wird klar, wenn wir, wie in Abb. 2.15 zu sehen, dem Torus noch ein schwaches homogenes in z -Richtung zeigendes Magnetfeld überlagern, dessen Stärke mit der Zeit zunehmen soll. Ein solches Magnetfeld symbolisiert das Transformatorfeld in einem Tokamak, durch das ein toroidaler elektrischer Strom I_φ getrieben werden kann.

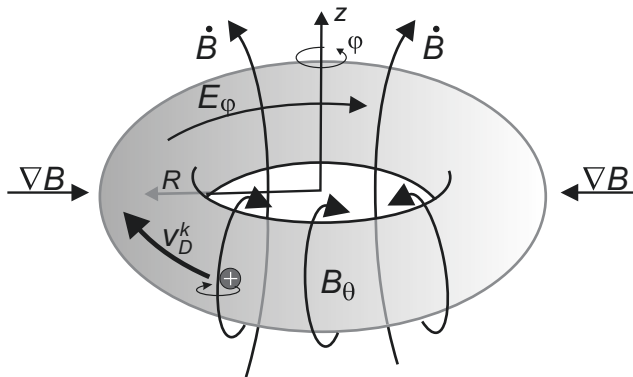


Abb. 2.15 Toroidalsymmetrisches Magnetfeld im z -Pinch und toroidale Drift eines Ions, dessen Bahn periodisch ist. Daraus entsteht eine adiabatistische Invariante, die durch den magnetischen Fluss durch die Driftbahn gegeben ist

Wir gehen hier nicht von der formalen Definition (2.78) für eine adiabatische Invariante aus, sondern untersuchen, wie sich die geschlossene Driftbahn des Ions, die aus Krümmungs- und Gradientendrift entsteht, unter dem Einfluss des zeitabhängigen Magnetfeldes ändert. Da dessen Feldstärke ansteigt, ändert sich der magnetische Fluss durch die Bahn. Es wird ein toroidales elektrisches Feld in die negative φ -Richtung induziert der Größe

$$E_\varphi = -\frac{R}{2} \dot{B}. \quad (2.94)$$

Durch das elektrische Feld entsteht eine $E \times B$ -Drift des Teilchens zum Toruszentrum hin:

$$v_D^{E \times B} = \frac{E_\varphi}{B} = -\frac{R}{2} \frac{\dot{B}}{B}. \quad (2.95)$$

Mit $v_D^{E \times B} = dR/dt$ und dB/dt können wir daraus folgende Gleichung formen:

$$2 \frac{dR}{R} = -\frac{dB}{B}, \quad (2.96)$$

die sich direkt integrieren lässt. Mit der Integrationskonstanten C finden wir

$$\ln R^2 = -\ln B + C, \quad (2.97)$$

woraus die *dritte adiabatische Invariante* folgt:

$$R^2 B \sim \psi = \text{const.} \quad (2.98)$$

Der magnetische Fluss durch die geschlossene Driftbahn ist also konstant. Hält sich das Ion auf der Außenseite des Torus auf, so erhöht es den magnetischen Fluss durch seine Bahn, indem es nach innen driftet. Dadurch werden wegen B_θ nach oben zeigende Feldlinien aus der Bahn herausgedrängt. Hält es sich dagegen auf der Innenseite des Torus auf, so driftet es zu größeren R , um mehr nach unten zeigende Feldlinien in die Bahn einzuschließen. Die Elektronen verhalten sich wie die Ionen. Bei ansteigendem Feld führen die Driften also dazu, dass sich der Plasmatorus einschnürt, d. h. schlanker wird.

2.5 Teilchenbahnen im Erdmagnetfeld

Das Magnetfeld der Erde ist ein Tummelplatz für geladene Teilchen. Zumeist handelt es sich dabei um Elektronen und Protonen. Ihre Bahnen unterliegen den verschiedenen Driften und führen zu zahlreichen Phänomenen, von denen die Nordlichter am bekanntesten sind. Wir wollen hier die Teilchenbahnen im Erdmagnetfeld als Anwendungsbeispiel der Teilchendriften behandeln.

Der erste Hinweis darauf, dass in der Magnetosphäre der Erde erhöhte Populationen energetischer Teilchen vorkommen, stammt aus auf Satelliten durchgeführten Messungen. Im Jahr 1958 gingen Strahlungsdetektoren auf dem Satelliten *Explorer I* ab einer Höhe von 700 km über der Erdoberfläche in Sättigung. Das deutete auf ein verglichen mit der bekannten Höhenstrahlung um den Faktor 10^4 erhöhtes Strahlungsniveau hin. Zunächst unterschied man zwischen einem inneren Strahlungsgürtel bei einigen Tausenden Kilometern Höhe und einem äußeren Gürtel bei etwa 20.000 km. Doch diese Einteilung ist etwas willkürlich, denn es gibt in den Höhen dazwischen ebenfalls wesentliche Populationen an energetischen Teilchen. Im inneren Strahlungsgürtel, zwischen 1000 und 2000 km über der Erdoberfläche, findet man Protonen mit sehr hohen Energien. Man spricht daher auch vom *harten Strahlungsgürtel*.

Bald fand der amerikanische Wissenschaftler James Van Allen die Erklärung für die erhöhten Teilchendichten. Das Erdmagnetfeld bildet für geladenen Teilchen eine magnetische Falle. Die Teilchen werden auf den Feldlinien eingefangen und folgen ihnen zu den Polen, an denen die Feldstärke ansteigt. Dort werden die Teilchen reflektiert und gelangen so zum gegenüberliegenden Pol. Die Teilchen reflektieren zwischen den Polen hin und her.

Es klingt heutzutage unglaublich, aber man hat diese Vermutung experimentell in der geheimen Mission *Operation Argus* untersucht, indem man 1958 eine Reihe von Atombomben in einer Höhe von knapp 1 km zur Explosion gebracht hat. Die dabei entstandenen geladenen Teilchen und ihre lange Verweildauer auf den Feldlinien wurden dann mit *Explorer IV* nachgewiesen. Im Folgenden beschreiben wir zunächst das Erdfeld, um dann charakteristische Teilchenbahnen zu berechnen.

2.5.1 Die Magnetosphäre der Erde

Das Erdmagnetfeld wird durch einen Plasmadynamo im Erdinnern erzeugt (siehe [Abschn. 3.2.2](#)). Der Feldverlauf in Erdnähe kann durch ein Dipolfeld angenähert werden und wird in Kugelkoordinaten beschrieben durch

$$\mathbf{B} = -2c_B \frac{R_E^3}{r^3} \sin \theta \, \mathbf{e}_r + c_B \frac{R_E^3}{r^3} \cos \theta \, \mathbf{e}_\theta. \quad (2.99)$$

Der Erdradius ist $R_E = 6371$ km und die Konstante $c_B = 3 \times 10^{-5}$ T. Die Feldlinien sind in [Abb. 2.16](#) dargestellt. Der magnetische Äquator liegt bei $\theta = 0$. Allerdings ist die magnetische Achse um $11,4^\circ$ gegen die Rotationsachse der Erde verkippt. Der magnetische Südpol S_M ist in Richtung Kanada vom geografischen Nordpol N_G verschoben, der magnetische Nordpol liegt im südlichen Australien. Die Position der magnetischen Pole wandert langsam mit der Zeit. Momentan nimmt die Feldstärke mit bis zu 0,5 % pro Jahr ab, ja das Magnetfeld polt sich sogar von Zeit zu Zeit um. Natürlich ist das geomagnetische Feld nicht genau ein Dipolfeld. Die stärkste Abweichung wird als *südatlantische Anomalie* bezeichnet. Dort ist die Feldstärke 60 % geringer als durch das Dipolfeld beschrieben.

2.5.2 Teilchen in den Van-Allen-Strahlungsgürteln

Wir verwenden die Parametrisierung des Erdfeldes um die Trajektorien einiger charakteristischer Teilchen zu untersuchen. Dabei handelt es sich um Teilchen, die im inneren und äußeren Strahlungsgürtel gefangen sind. Im inneren Gürtel, bei $L \approx 9000$ km, sind Elektronen und Ionen mit Energien E_0 von typisch 40 MeV zu finden. Sie werden erzeugt durch hochenergetische Strahlung, die Neutralteilchen ionisiert. Die Elektronen sind relativistisch und werden nicht weiter behandelt. Im Bereich des zweiten Gürtels, bei 26.000 km, findet man Teilchen, die direkt aus dem Sonnenwind stammen. Es handelt sich dabei um Elektronen mit 40 keV und Ionen mit 1 MeV. Nach (2.99) ist das äquatoriale Magnetfeld für die beiden Gürtel $B_L^i \approx 10^{-5}$ T und $B_L^o \approx 5 \times 10^{-7}$ T.

Wir wollen nun die Driftgeschwindigkeiten sowie Umlauf- und Reflexionsfrequenzen für diese Teilchen abschätzen. Die Ergebnisse zusammen mit den Larmor-Radien und Gyrationfrequenzen der Teilchen am Äquator sind in Tabelle 2.1 zusammengestellt.

Zunächst berechnen wir die äquatorialen Driften, die wegen der gekrümmten Magnetfeldlinien und der Gravitationskraft zu erwarten sind. Für den Feldgradienten bei $\theta = 0$ folgt aus (2.99)

$$\frac{\nabla B}{B} = -\frac{3}{r} \mathbf{e}_r. \quad (2.103)$$

Die Driftgeschwindigkeit durch das inhomogene Erdfeld berechnen wir aus (2.42), wobei wir den Vorfaktor durch die Gesamtenergie approximieren:

$$\mathbf{v}_D^{\nabla B} \approx -E_0 \left. \frac{\nabla_r B}{qB^2} \right|_{r=L} \mathbf{e}_\varphi = \frac{3}{c_B} \frac{E_0 L^2}{qR_E^3} \mathbf{e}_\varphi. \quad (2.104)$$

Teilchendriften bewirken also eine mittlere Bewegung der Ionen in Richtung Westen und der Elektronen in Richtung Osten. Daraus resultiert ein elektrischer Strom in Richtung Westen, der sog. *Ringstrom*. Dieser erniedrigt das Erdfeld innerhalb der Teilchenbahnen und erhöht es außerhalb. Teilchen des Sonnenwindes weiter von der Erde entfernt, dort wo die Larmor-Radien noch vergleichbar mit dem Abstand zur Erde sind, werden durch die Lorentz-Kraft in Richtungen abgelenkt, die den Driften weiter innen entgegengesetzt sind. Der von diesen Teilchen getragene elektrische Strom erniedrigt das Erdfeld außerhalb der Teilchenbahnen. Die Wirkung des Erdfeldes wird dadurch räumlich beschränkt. So entsteht die *Magnetopause*, eine Trennfläche, die alle geschlossenen von der Erde ausgehenden Feldlinien umschließt und damit das Ende der Magnetosphäre beschreibt. Die aus Krümmungs- und Gradientendrift resultierenden Umlauffrequenzen sind in Tab. 2.1 eingetragen.

Vergleicht man die Gravitationsdrift mit der Gradientendrift, so findet man mit (2.20) und der Gravitationsbeschleunigung $g_L = gR_E^2/L^2$:

$$\frac{v_D^{\nabla B}}{v_D^g} \approx -3 \frac{E_0 L}{mgR_E^2} \approx -4 \times 10^9 \frac{E_0}{m} \frac{L}{R_E}. \quad (2.105)$$

Tab. 2.1 Trajektorienparameter von charakteristischen Teilchen im inneren und äußeren Van-Allen-Strahlungsgürtel

Teilchen	L (m)	E_0 (eV)	ω_c (Hz)	ρ_L (m)	v_D (m/s)	T_φ (s)	T_θ (s)
Proton	9×10^6	40×10^6	2×10^6	87×10^3	$1,1 \times 10^6$	$5,3 \times 10^1$	0,5
Elektron	26×10^6	40×10^3	78×10^3	15×10^2	$8,9 \times 10^3$	$1,8 \times 10^4$	1,5
Proton	26×10^6	1×10^6	42×10^0	33×10^4	$2,2 \times 10^5$	$7,4 \times 10^2$	12,4

Die Gravitationsdrift wirkt zwar der Gradientendrift entgegen, ist aber für die betrachteten Teilchen gänzlich vernachlässigbar.

Letztlich kann man noch fragen, wie groß der Neigungswinkel des Geschwindigkeitsvektors sein muss, damit die Teilchen entlang der Feldlinie gerade bis zur Erdoberfläche kommen, bevor sie reflektiert werden. Die Reflexionsbedingung ist durch (2.62) gegeben und die Feldstärke der Feldlinie auf der Erdoberfläche durch (2.102), wobei der Winkel aus (2.101) berechnet wird. Es folgt

$$\sin \alpha_0 = \left(\frac{R_E}{L} \right)^{3/2} \left(4 - 3 \frac{R_E}{L} \right)^{-1/4}. \quad (2.106)$$

Die Neigungswinkel sind also 34° für den inneren Strahlungsgürtel und 6° für den äußeren Gürtel. Die Flugzeit zwischen den Reflexionen berechnet sich aus

$$T_\theta = 4 \int_0^{S_r} \frac{ds}{v_\parallel}, \quad (2.107)$$

wobei vom Äquator bis zum Reflexionspunkt S_r integriert wird. Die Parallelgeschwindigkeit folgt aus der Erhaltung der Gesamtenergie und des magnetischen Momentes, welches aus α_0 am Äquator berechnet wird, wie folgt:

$$v_\parallel = \sqrt{\frac{2E_0}{m} \left(1 - \frac{B}{B_L} \cos^2 \alpha_0 \right)}. \quad (2.108)$$

Wegen (2.102) hängt dieser Ausdruck nur von θ ab. Also wandeln wir das Kurvenintegral in ein Integral über den Winkel um. Dazu verwenden wir die Feldliniengleichung $dr/B_r = r d\theta/B_\theta$ und formen diese mit (2.99) und (2.101) weiter um zu:

$$ds = \sqrt{d^2 r + r^2 d^2 \theta} = \sqrt{4 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} L \cos \theta d\theta. \quad (2.109)$$

Die Zeit bis zur Reflexion ist also zu berechnen aus

$$T_\theta = \frac{4L}{\sqrt{2E_0/m}} \int_0^{\theta_{\max}} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta} \left(1 - \frac{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \theta}}{\cos^6 \theta} \cos^2 \alpha_0 \right)^{-1/2} \cos \theta d\theta. \quad (2.110)$$

Das Integral muss numerisch gelöst werden. Es wird oft angenähert durch die Beziehung

$$T_{\theta} = \frac{L}{\sqrt{E_0/m}} (3.7 - 1.6 \sin \alpha_0). \quad (2.111)$$

Werte daraus sind ebenfalls in [Tab. 2.1](#) zu finden.

Weitere Literaturhinweise

Das Konzept der adiabatischen Invarianten wird beschrieben in H. Goldstein, *Klassische Mechanik* (Akad. Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main, 1972), die Magnetosphäre der Erde und Teilchenbahnen darin findet man in W. Baumjohann und A. Treumann, *Basic Space Plasma Physics* (Imperial College Press, London, 1997) und J. Büchner und L. M. Zelenyi, *Regular and Chaotic Charged Particle Motion in Magnetotaillike Field Reversals, 1. Basic Theory of Trapped Motion* (J. Geophys. Res. **94**, 11821 (1989)).

Plasmaphysik

Phänomene, Grundlagen und Anwendungen

Stroth, U.

2018, XV, 568 S. 255 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-55235-3