1 Geschichte der Analysis

1.1 Vorgeschichte der Analysis

Mathematische Analysis befasst sich mit reellwertigen, und auch komplexwertigen, Funktionen einer oder mehr Variablen. Insbesondere ist dabei die Infinitesimalrechnung ein wichtiger und großer Teil der Analysis. Die ersten Entwicklungen zur Infinitesimalrechnung hin liegen weit in der Geschichte, aber erst ab dem 17. Jh. wurden infinitesimale Methoden im modernen Sinn entwickelt, und der Begriff der Funktion wurde erst im 17. Jh. verwendet und im 19. Jh. präzisiert.

Verschiedene Autoren setzen den Ursprung des Funktionskonzepts in verschiedene Zeiten (siehe [42]). Als Ursprung funktionalen Denkens könnte man mathematische Tabellen verschiedener alter Zivilisationen nennen. Die sumerisch-babylonische Zivilisation hinterließ besonders viele Zahlentabellen (von Quadratzahlen, Quadratwurzeln, reziproken Zahlen, ...). Die alten Griechen, Inder und die moslemischen Mathematiker des Mittelalters erstellten verschiedene trigonometrische Tabellen. Im 17. Jh. wurden auch die Logarithmen entdeckt, siehe Abschn. 3.2. Jedoch muss hervorgehoben werden, dass – obwohl man solche Tabellen als frühe Funktionstabellen ansehen kann – in keinem dieser Fälle vom bewussten funktionalen Denken die Rede sein kann. Es dauerte außerordentlich lange, bis sich die Idee einer Funktion, also eines der heute zentralen mathematischen Begriffe, zu formieren begann und noch länger, bis der Begriff zufriedenstellend definiert wurde.

Andererseits kann man, besonders in der griechischen Antike, schon recht früh von infinitesimalen Methoden reden. Im 1. Buch erwähnten wir den Versuch des Philosophen **Antiphon** (ca. Mitte 5. Jh. v. Chr.), das Problem der Quadratur des Kreises durch dem Kreis eingeschriebene Vielecke mit einer immer größer werdenden Seitenzahl zu lösen. Weil es möglich ist, jedes davon mit Zirkel und Lineal zu quadrieren, dachte Antiphon, dass auch das Problem der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal lösbar ist. Mo-

F.M. Brückler, *Geschichte der Mathematik kompakt*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-55574-3_1

dern ausgedrückt dachte er, dass eine konvergente unendliche Folge algebraischer Zahlen notwendigerweise zu einer algebraischen Zahl konvergiert ([49]).

Als Vorläufer der Idee des Grenzwertes muss auch der Philosoph **Zenon von Elea** (ca. 490–430 v. Chr.) genannt werden. Von Zenon stammen, so Aristoteles, vier Paradoxien der Bewegung. In allen vier benutzt Zenon die unendliche Teilbarkeit des Raumes bzw. der Zeit, um das paradoxale Resultat der Unmöglichkeit der Bewegung zu erhalten. Zenons Paradoxien der Bewegung sind die Folgenden:

1. *Dichotomie*: Bewegung ist unmöglich, da man jede Entfernung, die ein Objekt zurückzulegen hat, zunächst halbieren, dann die Hälfte halbieren usw. und in beliebig viele, immer kleinere, Teile zerlegen kann, aber wie viele Teile man auch nimmt, es bleibt immer noch ein Restabstand bis zum Endpunkt.
2. *Achilles und die Schildkröte*: Da Achilles schneller als die Schildkröte ist, gewährt er ihr einen Vorsprung. Doch, obwohl er schneller ist, kann er sie nie fangen. Bis er nämlich den Startpunkt der Schildkröte erreicht hat, ist sie etwas vorwärtsgekommen. Bis Achilles diesen Punkt erreicht, ist die Schildkröte wieder noch etwas weiter gekrochen usw. Zenon schließt daraus, dass Achilles die Schildkröte nie einholen wird.
3. *Der Pfeil*: Zu jedem Zeitpunkt ist der Pfeil in einer Position, die man nicht von einer unbeweglichen Position des Pfeiles unterscheiden kann. Also ist die Bewegung des Pfeiles unmöglich.
4. *Das Stadion*: Wenn zwei Reihen gleich großer Körper, auch gleich in der Anzahl, sich in verschiedenen Richtungen gleich schnell entlang einer genau solchen dritten Reihe von Körpern bewegen, schließt Zenon daraus, dass die halbe Zeit gleich doppelter Zeit ist.

Nicht nur, dass diese Paradoxien die Fragen zur Natur des Kontinuums aufwerfen, welche erst mit der Schaffung der Mengenlehre (Abschn. 5.2) zufriedenstellend genau beschrieben werden konnten, sondern man kann in den ersten zwei auch die Problematik der Bildung von Grenzwerten erkennen. „Die Dichotomie“ und „Achilles und die Schildkröte“ sind diesbezüglich mathematisch äquivalent und führen auf die unendliche geometrische Reihe $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$. Der Fehler Zenons ist, dass er aus der Tatsache, dass keine der Partialsummen dieser Reihe gleich 1 ist, folgert, dass auch der Grenzwert nicht 1 sein kann ([31, 44, 49]).

Zenons Zeitgenosse und berühmter atomistischer Philosoph **Demokrit von Abdera** (ca. 460–370 v. Chr.) soll die Idee der Teilung eines Kegels in unendlich dünne, der Grundfläche parallele, Scheiben beschrieben haben. Bei Demokrit entsteht hieraus ein Dilemma: Wenn man eine solche Scheibe betrachtet, sind ihre zwei Kreisflächen dann gleich oder nicht? Wenn ja, wäre die Gesamtheit kein Kegel, sondern ein Zylinder, wenn nicht, wäre der Rand des Kegels ungleichmäßig ([12, 43, 49]).

Erste präzise infinitesimale Betrachtungen scheinen von **Eudoxos von Knidos** (ca. 408–355 v. Chr.) zu stammen. Seine Lehre von Verhältnissen und Proportionen wurde schon in unserem 1. Buch beschrieben, für dieses Thema ist sein anderer großer Beitrag von Interesse. Eudoxos schuf nämlich eine frühe Form der Grenzwertberechnung, die für Flächen- und Voluminaberechnungen verwendbar ist, quasi eine antike Form der Integration. Diese Methode erhielt im 17. Jh. den Namen Exhaustionsmethode ([49]). Die Methode basiert auf einem Satz, der im X. Buch Euklids *Elemente* enthalten ist:[1]

Theorem 1.1 (EEX1: Eudoxos Exhaustionsprinzip) *Gegeben seien zwei verschiedene, aber gleichartige Größen. Wenn man von der größeren mindestens die Hälfte wegnimmt, vom Rest wieder mindestens seine Hälfte, und wenn man dies wiederholt, wird irgendwann ein Rest übrig bleiben, der kleiner als die kleinere der zwei Größen ist.*

Modern formuliert: Für jedes $0 < \varepsilon < a$ und jede Folge (a_n) mit den Eigenschaften $a_0 = a$ und $a_{n+1} \leq \frac{a_n}{2}$ existiert eine natürliche Zahl n mit der Eigenschaft

$$a - \sum_{i=1}^{n} a_i < \varepsilon.$$

Insbesondere bedeutet dies, dass alle geometrischen Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n$ mit $q \leq \frac{1}{2}$ konvergieren.

In dem Beweis dieses Satzes wird eine, auch von Eudoxos stammende, Definition benutzt, die in den *Elementen* als 4. Definition im V. Buch enthalten ist.

▶ **Definition 1.1** Zwei (gleichartige) Größen haben ein Verhältnis, wenn ein Vielfaches einer der Größen größer als die andere ist.

Euklid benutzt Theorem 1.1 in dem XII. Buch der *Elemente* (der Inhalt dieses Buches wird allgemein Eudoxos zugeschrieben), um zu beweisen, dass sich Kreisflächen wie Quadratflächen über deren Durchmessern verhalten[2] und dass das Volumen einer Pyramide bzw. eines Kegels gleich einem Drittel des Volumens eines Prismas bzw. eines Zylinders mit gleicher Grundfläche und Höhe ist ([27, 45, 49]).

Theorem 1.2 (EEXII2) *Die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Flächen der Quadrate über deren Durchmessern.*

Beweis Wir beschreiben die groben Züge des Originalbeweises Euklids (siehe z. B. [27]) nach [45]:

Man betrachte die ein- und umgeschriebenen regulären Vielecke V_n und $\overline{V}_n$ eines Kreises: Quadrat, regelmäßiges Achteck usw. (siehe Abb. 1.1). Also hat das n-te Vieleck V_n

---

[1] Wie im 1. Buch wird auch hier mit EENn die n-te Proposition im N-ten Buch der *Elemente* bezeichnet.

[2] Dieser Satz wird oft Hippokrates von Chios zugeschrieben. Falls dies stimmt, musste schon ihm, im 5. Jh. v. Chr., eine Variante des Satzes 1.1 bekannt gewesen sein ([24]).

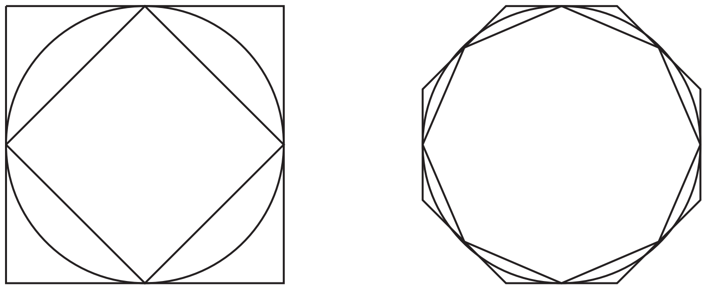


Abb. 1.1 Illustration zum Beweis der Proportionalität der Kreisfläche und dem Quadrat des Durchmessers

bzw. $\overline{V}_n$ 2^{n+1} Seiten. Die Differenz der Flächen $F(\overline{V}_n)-F(V_n)$ kann, nach Satz 1.1, beliebig klein gemacht werden, und es folgt, dass die Fläche $F(V_n)$ die Kreisfläche beliebig genau approximiert.

Andererseits kann man elementargeometrisch zeigen, dass sich die Flächen ähnlicher, verschiedenen Kreisen eingeschriebener, Vielecke wie die Quadrate über den Kreisdurchmessern verhalten (dies wird in der Proposition EEXII1 gezeigt). Wenn jetzt für zwei Kreise K_1 und K_2 das Verhältnis $F(K_1) : F(K_2)$ deren Flächen kleiner (oder größer) als das Verhältnis v der Quadrate deren Durchmesser wäre, könnte man ein n wählen, für welches $F(V_{1,n}) : F(V_{2,n})$ auch kleiner bzw. größer wäre als v, in beiden Fällen also eine Kontradiktion (hier haben wir natürlich mit $V_{1,n}$ und $V_{2,n}$ die den Kreisen K_1 und K_2 eingeschriebenen 2^{n+1}-Ecke bezeichnet). Es verbleibt dann die Behauptung des Satzes als einzige Möglichkeit. □

Archimedes aus Syrakuse (ca. 287–212 v. Chr.) benutzte die Exhaustionsmethode in seinen Flächen- und Voluminaberechnungen. Er beruft sich explizit auf Eudoxos und verändert die Definition 1.1 in ein Lemma, welches als Axiom von Archimedes bekannt ist:

Lemma 1.1 (Axiom von Archimedes) *Die größere von zwei gegebenen Längen oder zwei gegebenen Flächen oder zwei gegebenen Volumina überragt die kleinere um eine Differenz, welche, genügend oft vervielfacht, beide Größen überragt.*

Besonders berühmt ist Archimedes' Beweis, dass die Proportionalitätskonstante zwischen Kreisumfang und Kreisdurchmesser gleich ist wie die zwischen Kreisfläche und Quadrat über dem Radius (Abb. 1.2):

Theorem 1.3 (Archimedes' Kreissatz) *Jeder Kreis K hat die gleiche Fläche wie das rechtwinklige Dreieck D, dessen eine Kathete die Länge des Kreisradius hat und die andere die Länge u des Kreisumfanges.*

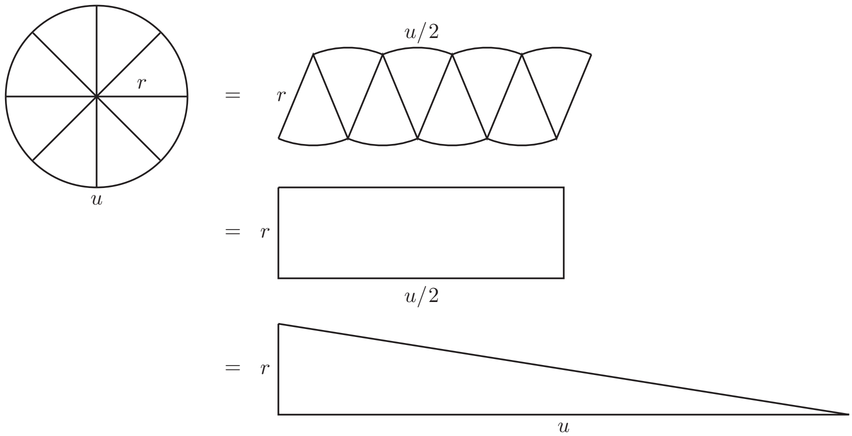


Abb. 1.2 Archimedes' Kreissatz

Beweis Wir geben die Grundzüge des Originalbeweises (nach [1, 10]) in moderner Notation. Wir bezeichnen mit $F(A)$ die Fläche der Figur A.

Zunächst beweist man, dass $F(K)$ nicht größer als $F(D)$ sein kann. Man nehme das Gegenteil $F(K) - F(D) > 0$ an. Da jedes dem Kreis eingeschriebene Vieleck durch Entfernung von Kreisabschnitten entsteht, ist die Fläche jedes eingeschriebenen n-Ecks V_n kleiner als $F(K)$, also ist für jedes n die Differenz $\delta_n = F(K) - F(V_n) > 0$. Man kann auch beweisen (dies ist z. B. in Euklids *Elementen* Teil des Beweises der Proposition EEX2), dass für jedes n auch $\delta_{2n} < \delta_n/2$, also vermindert sich die Fläche der Kreisabschnitte bei Verdoppelung der Anzahl der Seiten um mehr als die Hälfte.

Man betrachtet jetzt die eingeschriebenen 2^k-Ecke V_4 (Quadrat), V_8, V_{16}, ... Das Exhaustionsprinzip (Satz 1.1) führt zum Schluss: Für ein genügend großes k gilt

$$0 < \delta_{2^k} = F(K) - F(V_{2^k}) < F(K) - F(D). \tag{1.1}$$

Andererseits gilt für jedes eingeschriebene reguläre n-Eck (siehe Abb. 1.3 links; mit $u(V_n)$ bezeichnen wir den Umfang von V_n):

$$F(V_n) = n \cdot \frac{|ON| \cdot |AB|}{2} < n \cdot \frac{r \cdot |AB|}{2} = \frac{r}{2} u(V_n) < \frac{r}{2} u = F(D),$$

also ist für jedes n die Differenz $F(V_n) - F(D)$ negativ, eine Kontradiktion mit Ungl. 1.1. Also gilt nicht $F(K) - F(D) > 0$.

Archimedes nimmt jetzt an, dass $F(D) - F(K) > 0$. Jetzt werden umgeschriebene reguläre Vielecke $\overline{V}_n$ betrachtet. Offensichtlich gilt $\Delta_n = F(\overline{V}_n) - F(K) > 0$ für jedes n. Wieder kann bewiesen werden, dass $\Delta_{2n} < \frac{\Delta_n}{2}$, und die Betrachtung umgeschriebener 2^k-Ecke führt dann, analog wie im ersten Fall, zu

$$0 < \Delta_{2^k} = F(\overline{V}_{2^k}) - F(K) < F(D) - F(K)$$

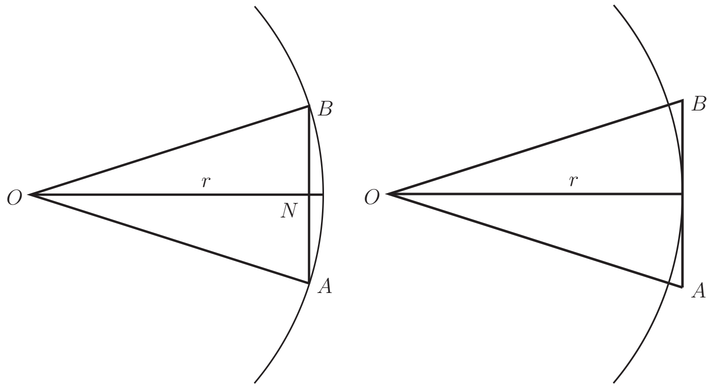


Abb. 1.3 Illustrationen zum Beweis von Archimedes' Kreisatz

für ein genügend großes k und (siehe Abb. 1.3 rechts)

$$F(\overline{V}_n) = n \cdot \frac{r \cdot |AB|}{2} = \frac{r}{2} u(\overline{V}_n) > \frac{r}{2} u = F(D)$$

für alle n, was für $n = 2^k$ zwei kontradiktorische Ungleichungen ergibt. Also gilt auch nicht $F(D) - F(K) > 0$, und es bleibt nur die Möglichkeit $F(K) = F(D)$. $\square$

Die Bezeichnung π für die Proportionalitätskonstante aus obigem Satz Archimedes' stammt nicht, wie manche denken könnten, von den alten Griechen. Der Erste, der den griechischen Buchtstaben π in der heutigen mathematischen Bedeutung verwendet hat, war der Engländer William Jones (1675–1749) in seinem Lehrbuch *Synopsis palmariorum matheseos* (1706). Er gibt keine Erklärung seiner Wahl und benutzt den gleichen Buchstaben auch, wie vor ihm J. Wallis, für den „Umfang“, den der Schwerpunkt einer Figur während einer Rotation beschreibt. Auf jeden Fall wurde Jones Symbol nicht gleich populär, sondern erst, nachdem L. Euler ab 1736 den gleichen Buchstaben für das Verhältnis des Kreisumfangs zum Kreisdurchmesser zu benutzen begann ([7]). Neben dem Beweis des obigen Kreissatzes enthält Archimedes' *Kreisrechnung* auch seine berühmte Schätzung des π-Wertes, welche er durch ein iteratives Verfahren, das wir im Abschn. 3.1 beschreiben werden, erhalten hat.

Dank einer erst vor etwas mehr als 100 Jahren entdeckten Schrift[3] von Archimedes, *Methodenlehre*, wissen wir, dass Archimedes die meisten seiner Sätze heuristisch (durch „mechanische“ Überlegungen, meist auf dem Hebelprinzip basierend) entdeckt hat und sie danach rigoros (unter Verwendung der Exhaustionsmethode) bewiesen hat. Archimedes erklärt: „Natürlich ist es einfacher, einen Beweis anzugeben, wenn man davor einiges

[3]Dies ist der berühmte Archimedes-Palimpsest, siehe dazu http://www.archimedespalimpsest.org/.

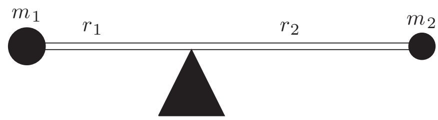


Abb. 1.4 Archimedes' Hebelprinzip: Im Gleichgewicht gilt $m_1 r_1 = m_2 r_2$

Wissen erworben hat über die Fragen der Methode, als ihn ohne Vorkenntnisse zu finden" ([45, 49]).

Archimedes' Hebelprinzip ist durch Abb. 1.4 illustriert: Der Hebel ist im Gleichgewicht, wenn die Drehmomente beider Gewichte in Bezug auf den Stützpunkt des Hebels gleich sind. Da hier als einzige Kraft die Gravitation betrachtet wird, vereinfacht sich dieses zur Gleichung $m_1 r_1 = m_2 r_2$, wenn m_1 und m_2 die Massen der Gewichte und r_1 und r_2 deren Entfernungen zum Stützpunkt sind.

Archimedes benutzte sein Hebelprinzip, um das Kugelvolumen zu bestimmen. Dieses Resultat findet man in Archimedes' Schrift *Über Kugel und Zylinder*. Archimedes beweist als Proposition 34:

Theorem 1.4 (Kugelvolumen) *Das Volumen einer Kugel ist gleich $\frac{2}{3}$ des Volumens des Zylinders mit gleichem Radius und Höhe (bzw. viermal so groß wie das Volumen eines Konus mit gleichem Radius und Höhe gleich Radius).*

Modern schreiben wir dies als

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi .$$

Die Entdeckung dieser Regel mittels Hebelprinzip war die Folgende. Archimedes stellte sich eine Kugel vor, sowie einen Zylinder und einen Konus, deren Radius und die Höhe beide gleich dem Kugeldurchmesser sind[4] (Abb. 1.5). Wenn diese drei Körper aus gleichem Material sind, ist deren Volumen proportional zur Masse, also kann man aus Gleichgewichtsbetrachtungen auf die Relation zwischen Volumina schließen. Archimedes konnte unter Verwendung des Hebelprinzips argumentieren, dass, wenn man diese Körper wie in Abb. 1.6 aufhängen würde, der Waagebalken horizontal wäre, also die ganze Konstruktion im Gleichgewicht wäre.

Um dieses Gleichgewicht zu argumentieren, stellte sich Archimedes vor, dass die drei Körper parallel zur Zylinderbasis geschnitten wurden (Gerade AD in Abb. 1.5), in dünne zylinderförmige Schichten (die Länge der Strecke $\overline{AX}$ bezeichnen wir mit x). Die Radien

[4]Eigentlich nahm er an, dass der Zylinder viermal dichter ist als die Kugel und dass sein Radius gleich dem der Kugel ist, aber unsere Variante ist dieser Annahme äquivalent und kann deswegen auf Dichtebetrachtungen verzichten. Da nämlich die Dichte die Proportionalitätskonstante zwichen Masse und Volumen ist, bedeutet bei gleicher Masse eine viermal größere Dichte einen doppelt kleineren Radius des Zylinders [3]).

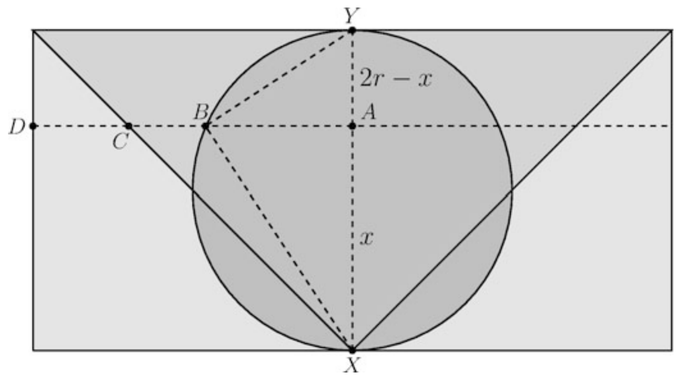


Abb. 1.5 Illustration zur Archimedes' Bestimmung des Kugelvolumens

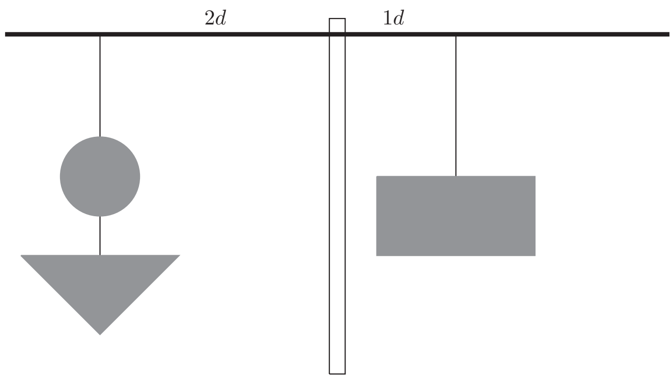


Abb. 1.6 Archimedes Argument zur Beziehung zwischen den Volumina von Kugel, Zylinder und Konus

der drei Schichten sind dann, wenn man den Radius der Kugel mit r bezeichnet, der Reihe nach: $|AB| = \sqrt{x(2r-x)}$ (Kugelschicht), $|AC| = x$ (Konusschicht) und $|AD| = 2r$ (Zylinderschicht). Die Volumina der Schichten sind jeweils den Quadraten dieser Radien proportional. Wenn man die Momente[5] dieser Schichten in Bezug auf der Geraden XY liegenden Punkt, der von X um ein Durchmesser der Kugel entfernt ist, vergleicht, bemerkt man: Das kombinierte Moment der Kugelschicht und der Konusschicht ist für jedes x zwischen 0 und $2r$ gleich dem Moment der Zylinderschicht. Als Formel geschrieben:

$$x(2r-x)\pi\,\Delta x + x^2\pi\,\Delta x = 4r^2\pi\,\Delta x, \quad 0 \le x \le 2r.$$

[5]Der Moment eines Körpers in Bezug auf einen Punkt ist das Produkt des Körpervolumens mit der Entfernung des Punktes zum geometrischen Schwerpunkt des Körpers.

Da Archimedes, wie schon vor ihm Euklid, wusste, dass das Verhältnis der Volumina eines Zylinders und eines Kegels mit gleichem Radius und Höhe gleich $3 : 1$ ist, erhält man, wenn man jetzt alle Schichten addiert, dies entspricht der modernen Integration zur Bestimmung des Volumens eines Rotationskörpers mit bekannten Querschnittflächen, dass $2(V + v) = 3v$ ist, wenn mit v das Volumen des Zylinders und mit V das Kugelvolumen bezeichnet ist. Also ist $V = \frac{v}{2}$, bzw. das Kugelvolumen ist gleich einem Sechstel des Volumens eines Zylinders, dessen Radius und Höhe dem Kugeldurchmesser gleich sind. Da dieser Zylinder ein viermal größeres Volumen als der im Satz 1.4 beschriebene hat, folgt die Behauptung des Satzes.

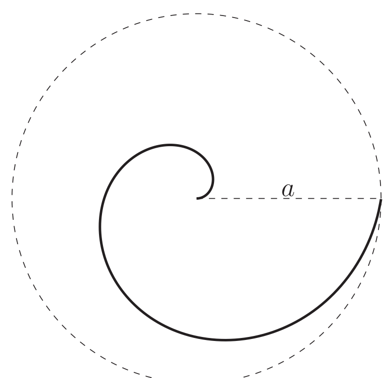
Nach dieser „physikalischen Entdeckung“ gibt Archimedes auch einen geometrischen, exakten Beweis mittels Exhaustionsmethode (ähnlich wie im Beweis des Kreissatzes, durch doppelte *Reductio ad absurdum*). Archimedes konnte auch zeigen, dass die Oberfläche einer Kugel genau viermal so groß ist wie die Fläche eines Kreises mit gleichem Radius, oder anders ausgedrückt (man vergleiche mit der Aussage des Satzes 1.4), dass die Oberfläche einer Kugel genau $\frac{2}{3}$ der Oberfläche des sie umschreibenden Zylinders ist ([1, 6, 15, 25, 37, 40]).

Archimedes beschrieb in *Über Spiralen* auch die Spirale, die nach ihm benannt ist. Die Archimedische Spirale (Abb. 1.7) entsteht als Trajektorie eines Punktes, welcher sich gleichmäßig auf einem Strahl von seinem Ausgangspunkt fortbewegt, wobei der Strahl gleichmäßig um diesen Ausgangspunkt rotiert. Dies bedeutet, dass die Gleichung der Archimedischen Spirale in Polarkoordinaten[6]

$$r = a\varphi$$

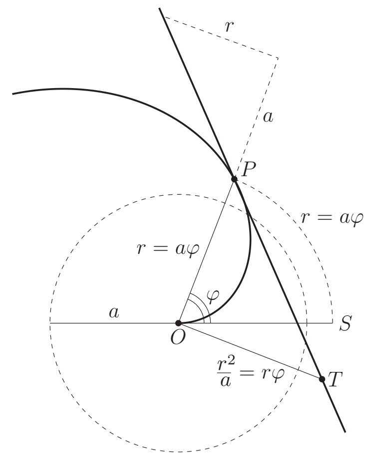
ist. Archimedes zeigte:

Abb. 1.7 Archimedische Spirale



[6]Der Erste, der Polarkoordinaten benutzte, war Newton, die erste Veröffentlichung mit deren Benutzung stammt aber von Jakob Bernoulli (1691) ([4]).

Abb. 1.8 Tangente an Archimedischer Spirale



Theorem 1.5 (Archimedische Spirale: Tangente) *Gegeben sei die Archimedische Spirale $r = a\varphi$, O der Ausgangspunkt, P ein beliebiger Punkt auf der Spirale und T der Schnittpunkt der Spiralentangente durch P mit der Senkrechten durch zu OP, welche durch O geht (Abb. 1.8). Die Strecke $\overline{OT}$ wird dann Subtangente genannt.*

Das Verhältnis der Länge der Subtangente zu dem Abstand $r = |OP|$ ist für jeden Spiralenpunkt P gleich $r : a$.[7]

Genauer gesagt, zeigte Archimedes durch doppelte *Reductio ad absurdum* (wie im Beweis des Kreissatzes 1.3), dass die Länge der Subtangente gleich der Länge des Kreisbogens $\widehat{PS}$ um O durch P ist, wobei (siehe Abb. 1.8) S der Schnittpunkt dieses Kreises mit der sogenannten Grundlinie (also Polarachse) ist ([25]).

Durch (gedanklichen) Vergleich von Gewichten (wenn man die Fläche einer Spiralumdrehung dreifach aus dem gleichen Material schneidet, wie einmal die gestrichelt begrenzte Kreisfläche, siehe Abb. 1.7, wiegen die drei „Spiralscheiben" gleich viel wie die Kreisscheibe) kam Archimedes zu der Feststellung: Die durch eine Drehung der Archimedischen Spirale bestimmte Fläche ist einem Drittel der Fläche des umschriebenen Kreises gleich. Dies generalisierte er zu:

Theorem 1.6 (Archimedische Spirale: Fläche) *Die von zwei Radiusvektoren begrenzte Fläche der Archimedischen Spirale ist die Differenz der Kuben der Längen dieser Radiusvektoren, geteilt durch $6a$:*

$$F = \frac{r_2^3 - r_1^3}{6a} = a^2 \frac{\varphi_2^3 - \varphi_1^3}{6}.$$

[7] Man bemerke, dass dies die Konstruktion der Tangente in einem beliebigen Punkt der Spirale ermöglicht.

Springer
http://www.springer.com/978-3-662-55573-6

Geschichte der Mathematik kompakt
Das Wichtigste aus Analysis,
Wahrscheinlichkeitstheorie, angewandter Mathematik,
Topologie und Mengenlehre
Brückler, F.M.
2018, XII, 159 S. 67 Abb., 9 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-662-55573-6