Peter Hartmann

Mathematik für Informatiker

7. Auflage

Lösungsskizzen zu Teil 2: Analysis

12 Die reellen Zahlen

Verständnisfragen

1. Warum kann der Körper GF(p) keine Ordnung tragen mit der er ein angeordneter Körper wird?

Weil dann $0 < p-1 < p = 0$ wäre.

2. Woher kommt der Begriff Dreiecksungleichung in einer Metrik?

Aus der anschaulichen Bedeutung im $\mathbb{R}^2$: Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist länger als die dritte Seite.

3. Was ist der Unterschied zwischen einem Randpunkt und einem Berührungspunkt einer Menge?

Ein Randpunkt kann nicht im Inneren der Menge liegen.

4. Was sind die inneren Punkte, Berührungspunkte und Randpunkte des Intervalls $[0,\pi[$ in $\mathbb{R}$?

Innere Punkte: $]0, \pi[$, Berührungspunkte: $[0, \pi]$, Randpunkte $0, \pi$.

5. Was sind die Randpunkte des Intervalls $[0,\pi[\cap\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$?

Nur 0!

6. In einem metrischen Raum sei $\overline{U_\varepsilon(x)}$ der Abschluss einer ε-Umgebung von x. Gibt es zu jedem $y \in \overline{U_\varepsilon(x)}$ eine Umgebung $U_\delta(y)$ mit $U_\delta(y) \subset \overline{U_\varepsilon(x)}$?

Nein, nicht für die Randpunkte!

7. Richtig oder falsch: Durch die Festlegung $x < y :\Leftrightarrow d(x,0) < d(y,0)$ für komplexe Zahlen x, y wird auf der Menge $\mathbb{C}$ eine Anordnung definiert und $\mathbb{C}$ somit ein angeordneter Körper.

Nein. Bezüglich dieser Vorschrift sind nicht alle Elemente von $\mathbb{C}$ vergleichbar (alle Elemente mit gleichem Abstand von 0). Nach Satz 12.3 muss das aber sein.

Übungsaufgaben

1. Beweisen Sie von Satz 12.3 die Aussagen c, d, e, f:

   c) $x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$.

   d) $x < y, z \leq w \Rightarrow x + z < y + w$.

   e) $x < y, z > 0 \Rightarrow xz < yz$,
   $x < y, z < 0 \Rightarrow xz > yz$.

   f) $x > 0 \Rightarrow -x < 0$ und $x < y \Rightarrow -y < -x$,
   $0 < x < y \Rightarrow y^{-1} < x^{-1}$.

   Die Aussagen lassen sich alle auf die Axiome zurückführen:

   c): Wegen $x \leq y$, gilt $y - x \in P \cup \{0\}$ und wegen $y \leq x$ gilt $x - y \in P \cup \{0\}$, das heißt $-(x-y) = y - x \in -P \cup \{0\}$. Da P und $-P$ disjunkt sind kann nur $y - x = 0$ sein.

   d): Ist $z < w$, so gilt $y - x \in P$ und $w - z \in P$, d.h. $y - x + w - z = (y + w) - (x + z) \in P$, d.h. $x + z < y + w$. Ähnlich für $z = w$.

   e): $x < y, z > 0 \Rightarrow y - x \in P, z \in P \Rightarrow (y - x)z = yz - xz \in P \Rightarrow xz < yz$. Ist $z < 0$, so ist $-z \in P$ (siehe e)) und entsprechend folgt $xz > yz$.

   f): $x > 0$ heißt $x \in P$. Dann ist $-x \in -P$, also $0 - x \in P$, d.h. $0 > x$.

   $x < y \Rightarrow y - x \in P \Rightarrow -x - (-y) \in P \Rightarrow -y < -x$. Mit $x = 0$ ergibt sich auch $y > 0 \Rightarrow -y < 0$.

   Zum zweiten Teil: Zunächst gilt für alle $x > 0$ auch $x^{-1} > 0$, sonst wäre nach d) $0 > xx^{-1} = 1$, aber $1 > 0$. Angenommen es wäre $x^{-1} < y^{-1}$, so ergäbe sich, wieder nach d): $1 = xx^{-1} < yx^{-1} < yy^{-1} = 1$, ein Widerspruch.

2. Seien M, N Teilmengen von $\mathbb{R}$, die ein Maximum besitzen. Es sei $M + N := \{x + y \mid x \in M, y \in N\}$. Zeigen Sie: Max $(M + N)$ = Max M + Max N.

   Sei $m = \operatorname{Max} M$, $n = \operatorname{Max} N$. Dann ist $m + n \in M + N$ und ist $z \in M + N, z = x + y$ mit $x \in M, y \in N$, so gilt wegen $x \leq m$ und $y \leq n$ auch $x + y \leq m + n$, also ist $m + n$ das Maximum.

3. Prüfen Sie die Dreiecksungleichung für $x, y \in \mathbb{R}$ nach: $|x + y| \leq |x| + |y|$;

   Sie können hierzu viele Fallunterscheidungen machen, oder Sie verwenden dass $|x|$ = Max $\{x,-x\}$ ist und wenden Aufgabe 2 an.

   Wegen $|x| = \operatorname{Max}\{x, -x\}, |y| = \operatorname{Max}\{y, -y\}$ ist

   $$|x| + |y| = \operatorname{Max}\{x + y, x - y, -x + y, -x - y\} \ni |x + y|$$

   und damit $|x + y| \leq |x| + |y|$;

4. a) Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt: $-3a - 2 \le 5 \le -3a + 4$?

   b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt $|a+1| - |a-1| = 1$?

   c) Skizzieren Sie die Bereiche in $\mathbb{R}^2$, für die gilt:

$$|x| + |y| = 2,$$
$$|x| \le 5 \text{ und } |y| \le 5,$$
$$|x| \le 5 \text{ oder } |y| \le 5.$$

a): $-3a-2 \le 5 \Rightarrow a \ge -7/3$; $5 \le -3a + 4 \Rightarrow a \le -1/3 \Rightarrow a \in [-7/3, -1/3]$.

b): 4 Fälle sind zu unterscheiden:

$$\left.\begin{array}{r} a+1 \ge 0 \Rightarrow a \ge -1 \\ a-1 \ge 0 \Rightarrow a \ge 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a \ge 1 \Rightarrow (a+1)-(a-1) = 1, \text{ aber } 2 \ne 1, \text{ keine Lösung.}$$

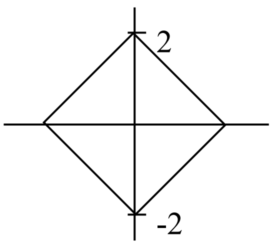
$$\left.\begin{array}{r} a+1 \le 0 \Rightarrow a \le -1 \\ a-1 \le 0 \Rightarrow a \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a \le -1 \Rightarrow -(a+1)+(a-1) = 1, \text{ aber } -2 \ne 1, \text{ keine Lösung.}$$

$$\left.\begin{array}{r} a+1 \ge 0 \Rightarrow a \ge -1 \\ a-1 \le 0 \Rightarrow a \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow (a+1)+(a-1) = 1, \text{ Lösung } a = 1/2.$$

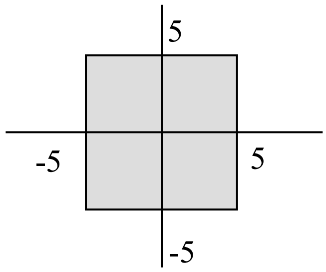
$$\left.\begin{array}{r} a+1 \le 0 \Rightarrow a \le -1 \\ a-1 \ge 0 \Rightarrow a \ge 1 \end{array}\right\} \text{ keine Lösung.}$$

c):

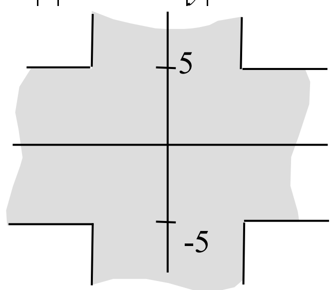
$|x|+|y| = 2$



$|x| \le 5$ und $|y| \le 5$



$|x| \le 5$ oder $|y| \le 5$



5. Beweisen oder widerlegen Sie: Der Körper $\mathbb{C}$ ist mit der lexikographischen Anordnung (siehe Beispiel 3 zu Ordnungsrelationen in Kapitel 1) ein angeordneter Körper.

   Die Aussage ist falsch. Sonst wäre $i = (0,1) > (0,0)$, aber $i^2 = (-1,0) < (0,0)$. Quadrate müssen aber immer positiv sein.

6. Untersuchen Sie ob die folgenden Abbildungen Metriken sind:

   a) Sei X eine Menge und für $x, y \in X$ sei

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ falls } x \ne y \\ 0 \text{ falls } x = y \end{cases}.$$

b) Sei G ein bewerteter Graph. Das Gewicht $w(x,y)$ sei immer positiv und $w(x,x) = 0$ für alle x. Ist w eine Metrik auf der Menge der Knoten von G?

a): Die Eigenschaften M1, M2 sind natürlich erfüllt. Setzt man in M3 ein, erhält man für:

x, y, z paarweise verschieden:	$1 \leq 1 + 1$,
$x = y = z$:	$0 \leq 0 + 0$,
$x = y \neq z$:	$0 \leq 1 + 1$,
$x = z \neq y$ oder $y = z \neq x$:	$1 \leq 1$,

also jedenfalls eine wahre Aussage. Damit ist d eine Metrik.

b): Nein, denn $w(x,y)$ ist nur für benachbarte Knoten definiert, nicht für beliebige Knotenpaare. Können Sie selbst auf solchen Graphen eine vernünftige Metrik definieren?

7. Zeigen Sie, dass für den Hamming-Abstand von Codeworten die Dreiecksungleichung gilt: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Es sei $d(x,y) = r$, ohne Einschränkung sollen sich x und y gerade an den ersten r Positionen unterscheiden, die restlichen Positionen stimmen überein. z unterscheide sich von x in den ersten r Positionen an r_1 Stellen und an den restlichen Positionen um r_2 Stellen. Dann muss sich z von y in den ersten r Positionen an $r - r_1$ Stellen und an den restlichen Positionen wieder um r_2 Stellen unterscheiden. Es ist also $d(x,z) = r_1 + r_2$, $d(y,z) = (r - r_1) + r_2$ und damit

$$d(x,z) + d(z,y) = r_1 + r_2 + r - r_1 + r_2 = r + 2r_2 \geq r = d(x,y).$$

8. Formulieren Sie mit Hilfe des Begriffs der ε-Umgebung die Aussage "$\mathbb{Z}$ ist dicht in $\mathbb{R}$" und beweisen oder widerlegen Sie diese Aussage.

$\mathbb{Z}$ dicht in $\mathbb{R}$ heißt: jeder Punkt von $\mathbb{R}$ ist Berührungspunkt von $\mathbb{Z}$. Das heißt: für $r \in \mathbb{R}$ gilt: in jeder Umgebung $U_\varepsilon(r)$ liegt ein $z \in \mathbb{Z}$. Aber in $U_{1/4}(1/2)$ liegt z.B. keine ganze Zahl, also ist die Behauptung falsch.

13 Folgen und Reihen

Verständnisfragen

1. Kann eine Zahlenfolge mehrere Grenzwerte haben?

Nein, siehe Satz 13.3.

2. Gibt es beschränkte reelle Zahlenfolgen, die nicht konvergieren?

Ja, $(a_n) = (-1^n)$ ist ein Beispiel dafür.

3. Welche Ordnung ist größer: $O(n^{1000})$ oder $O(2^n)$?

$O(2^n)$

4. Eine komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soll beschränkt heißen, wenn die Folge der Beträge $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Ist jede konvergente komplexe Zahlenfolge beschränkt?

Ja. Die Begründung ist ähnlich wie in Satz 13.5 für reelle Zahlenfolgen.

5. Eine Reihe ist nichts anderes als eine Folge. Wieso?

Sie ist die Folge der Partialsummen.

6. Die Formel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hat in der Theorie der unendlichen Reihen zwei unterschiedliche Bedeutungen. Welche sind das?

Die Reihe selbst und, falls diese konvergent ist, der Grenzwert der Reihe.

7. Gibt es im Körper der reellen Zahlen in der Dezimalsystemschreibweise einen Unterschied zwischen $0.\overline{9}$ und 1?

Nein. Es ist $0.\overline{9} = 1$.

8. Welche Eigenschaft hat die Dezimalbruchentwicklung für eine nicht rationale Zahl?

Sie ist nicht periodisch.

Übungsaufgaben

1. Geben Sie ein Beispiel für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

$a_n = -1/n, \; b_n = 1/n$

2. Finden Sie die Grenzwerte der Folgen (falls sie existieren):

a) $\dfrac{3n^2+2n+1}{n^3-3n^2-1}$ b) $\dfrac{n^2+5}{n^2-5}$ c) $\left(1+\dfrac{3}{n!}\right)^7$

a): $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+2n+1}{n^3-3n^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n^3}\left(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{\cancel{n^3}\left(1-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3}\right)} = \dfrac{0}{1} = 0$. b): $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+5}{n^2-5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2\left(1+\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{5}{n^2}\right)} = 1$

c): $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{n!}\right)^7 = \left(\lim\limits_{n\to\infty} 1+\dfrac{3}{n!}\right)^7 = 1^7 = 1$

3. Zeigen Sie oder widerlegen sie die Aussagen:

a) Sind a_n und b_n divergent, so sind auch $a_n + b_n$ divergent und $a_n \cdot b_n$ divergent.

b) Ist a_n beschränkt und b_n eine Nullfolge, so ist auch $a_n \cdot b_n$ eine Nullfolge.

a): $a_n = n$, $b_n = -n$ sind divergent, $a_n + b_n = 0$ ist konvergent.

$a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^n$ sind divergent, aber $a_n \cdot b_n = 1$ ist konvergent.

Vorsicht: a_n divergent heißt nicht, dass a_n gegen unendlich geht!

b): Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und c eine Schranke für a_n. Aus $|a_n| < c$ und $|b_n| < \varepsilon/c$ für großes n folgt $|a_n \cdot b_n| \le c \cdot |b_n| < \varepsilon$ für großes n. Also ist $a_n b_n$ eine Nullfolge.

4. Sie kennen sicher die Geschichte von Achilles und der Schildkröte: Bei einem Wettlauf bekommt die Schildkröte einen Vorsprung vor Achilles. Achilles kann die Schildkröte niemals einholen, denn er muss immer erst den Punkt erreichen, an dem die Schildkröte gerade war. Dann ist die Schildkröte aber schon weitergelaufen. Können Sie Achilles helfen?

Am einfachsten sieht man es an einem Zahlenbeispiel: Angenommen Achilles (A) läuft 1 m/s, die Schildkröte (S) ½ m/sec. S habe 1 m Vorsprung. Dann hat

nach 1 Sek.	S einen Vorsprung von 1/2 m,
nach 1+1/2 Sek.	S einen Vorsprung von 1/4 m,
nach 1+1/2+1/4 Sek.	S einen Vorsprung von 1/8 m, und
nach 1+1/2+1/4+...+1/2^n Sek.	S einen Vorsprung von 1/2^{n+1} m.

Es ist $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$ (geometrische Reihe) und daher ist im Grenzübergang nach 2 Sekunden der Vorsprung von S auf 0 geschrumpft.

5. Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n!}$

Hier muss das Quotientenkriterium angewendet werden:

a): $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{(n+1)^2 2^n}{n^2 2^{n+1}}\right|=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{2}<\frac{3}{4}$ für großes n, also konvergent.

b): $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(n+1)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)n!}\right|=\left|\frac{n+1}{2n+1}\right|<\frac{2}{3}$ für $n>1$, also konvergent.

c): $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{2^{n+2}n!}{(n+1)!2^{n+1}}\right|=\frac{2}{n+1}<\frac{1}{2}$ für $n > 3$, also konvergent.

6. Bestimmen Sie die Ordnung des Algorithmus

$$x^n=\begin{cases}1 & \text{falls } n=0\\ x^{n/2}\cdot x^{n/2} & \text{falls } n \text{ gerade}\\ x^{n-1}\cdot x & \text{sonst}\end{cases}$$

Vergleichen Sie dazu die Aufgabe 9 in Kapitel 3.

Im besten Fall ist nach der genannten Aufgabe die Laufzeit: $f(n)=\log_2 n\cdot c+d$, im schlimmsten Fall $f(n)=\log_2(n+1)\cdot 2c+e$. Die Ordnung ist jeweils O(log n). Dazu können Sie die Definition 13.9 anwenden: Dividieren Sie $f(n)$ jeweils durch $b_n=\log_2 n$. Sie erhalten im ersten Fall:

$$f(n)/\log_2 n=c+d/\log_2 n$$

im zweiten Fall:

$$f(n)/\log_2 n = 2c\log_2(n+1)/\log_2(n) + e/\log_2(n) \leq$$
$$2c\log_2(2n)/\log_2(n) + e/\log_2(n) = \big(2c(\log_2 2 + \log_2 n)\big)/\log_2 n + e/\log_2(n)$$
$$= 2c\log_2 2/\log_2 n + 2c + e/\log_2(n)$$

In beiden Fällen sind die Folgen $f(n)/b_n$ beschränkt.

7. Geben Sie natürliche Zahlen p, q an, für die gilt:

   a) $\dfrac{p}{q} = 0.4711\overline{4711}$

   b) $\dfrac{p}{q} = 0.1230\overline{434}$

   c) $\dfrac{p}{q} = \sqrt{2}$

   a): $10000p - p = 4711.\overline{4711} - 0.\overline{4711} = 4711 \Rightarrow 9999p = 4711, p/q = 4711/9999$.
   b): Geht genauso, es ist p/q = 1229204/9990000.
   c): Ist natürlich nicht möglich.

8. Zeigen Sie: Ist in einem metrischen Raum $\varepsilon < d(a, b)/2$, so gilt $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \varnothing$.

   Anschaulich ist die Aussage einleuchtend: siehe Bild 13.2. Zum Beweis muss die Dreiecksungleichung verwendet werden: Angenommen es gibt ein Element $c \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)$, dann ist $\varepsilon + \varepsilon > d(a,c) + d(c,b) \geq d(a,b) > 2\varepsilon$, also $2\varepsilon > 2\varepsilon$, ein Widerspruch.

9. Entwickeln Sie die Zahl 1/5! in einen Dezimalbruch, einen Dualbruch und einen Hexadezimalbruch.

   $1/120 = (0.008\overline{3})_{10} = (0.000\overline{0001})_2 = (0.0\overline{2})_{16}$

10. Suchen Sie endliche Dezimalzahlen, die sich nicht in endliche Dualbrüche umwandeln lassen.

    Zum Beispiel ist $(0.1)_{10} = (0.0\overline{0011})_2$.

14 Stetige Funktionen

Verständnisfragen

1. Was bedeutet die Stetigkeit der Funktion *f* im Punkt *x*?

Für jede Folge im Definitionsbereich, die gegen *x* konvergiert, konvergiert die Folge der Funktionswerte gegen *f*(*x*).

2. Warum ist es oft leichter zu zeigen, dass eine Funktion in einem Punkt unstetig ist, als dass sie dort stetig ist?

Es genügt zwei konkrete Folgen mit verschiedenem Grenzwert im fraglichen Punkt anzugeben.

3. Auch auf $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ gibt es Funktionen. Warum hat für solche Funktionen der Begriff der Stetigkeit keinen Sinn?

Wir kennen keine Metrik auf $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Daher lässt sich der Grenzwertbegriff nicht formulieren.

4. Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Gibt es ein $x_0 \in [a,b]$ mit der Eigenschaft $f(x_0)=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$?

Ja, nach dem Zwischenwertsatz 14.25.

5. Im Nullstellensatz ist als Definitionsbereich der stetigen Funktion *f* ein Intervall erforderlich. Warum? Skizzieren Sie eine stetige Funktion ohne diese Voraussetzung, in welcher der Nullstellensatz nicht gilt.

Die Funktion $f:[-1,0[\cup]0,1]\to\mathbb{R}, x\mapsto\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$ ist stetig, hat aber keine Nullstelle.

6. Wie berechnet der Taschenrechner cos und sin?

Als Grenzwert der trigonometrischen Reihen.

7. sin und cos sind surjektive Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $[-1,+1]$. Warum hat die Umkehrfunktion nicht den Bildbereich $\mathbb{R}$?

Weil die Funktionen nicht injektiv sind. Zur Bildung der Umkehrfunktion wird ein injektiver Abschnitt von sin bzw. cos. ausgewählt.

8. Hat jeder Punkt im $\mathbb{R}^2$ eine eindeutige Darstellung in Polarkoordinaten?

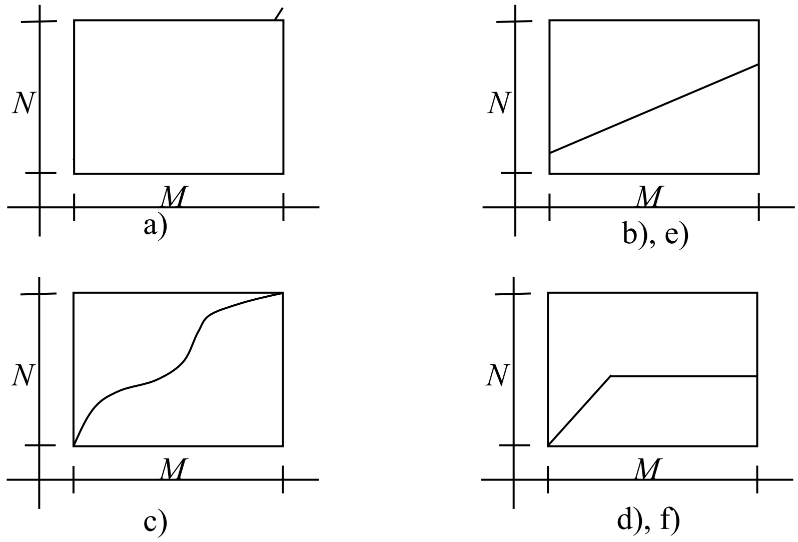
Jeder außer dem Nullpunkt.

Übungsaufgaben

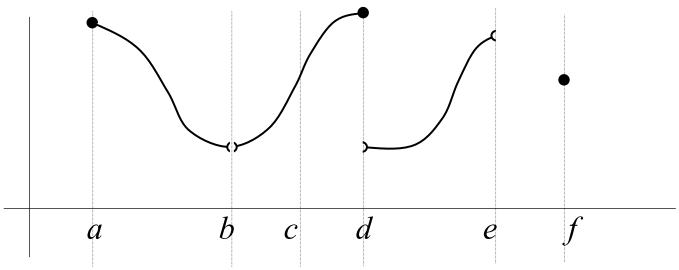
1. Seien M und N Intervalle in $\mathbb{R}$. Skizzieren Sie Graphen von Funktionen von $M \to N$ mit den Eigenschaften:

   a) f ist surjektiv, aber nicht injektiv.
   b) f ist injektiv, aber nicht surjektiv.
   c) f ist bijektiv.
   d) f ist nicht injektiv und nicht surjektiv.
   e) f ist streng monoton wachsend.
   f) f ist monoton wachsend aber nicht streng monoton wachsend.

Hier Beispiele von solchen Graphen:



2. Untersuchen Sie in welchen der Punkte a, b, c, d, e, f die im Folgenden skizzierte Funktion stetig ist:



   Die Funktion ist in a, c und f stetig. In f, weil für die (im Wesentlichen) einzige Folge im Definitionsbereich, die gegen f konvergiert (die konstante Folge), auch die Folge der Funktionswerte gegen den Funktionswert konvergiert. Die Funktion ist nicht stetig in b, e (gar nicht definiert) und in d.

3. Ist die Funktion $f: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2 - |x|/x$ stetig auf die Stelle 0 fortsetzbar?

   Angenommen es geht, und $f(0) = c \in \mathbb{R}$. Dann muss $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = c$ sein. Aber $\lim\limits_{x\to 0, x<0} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x) = 1$, und es kann nicht $c = 1$ und $c = 3$ sein.

4. Zeigen Sie, dass die Funktion $f: \mathbb{R}\backslash\{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3)/(x - 1)$ an der Stelle $x = 1$ stetig fortgesetzt werden kann.

   Mit Polynomdivision erhält man, dass im Definitionsbereich $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 3x - 3$ ist. Dann kann $f(1) = 2\cdot 1 - 4\cdot 1 - 3\cdot 1 - 3 = -8$ gesetzt werden. Da Polynome stetig sind gilt $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -8$.

5. Zeigen Sie: Für $q \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(xq) = \exp(x)^q$. Verwenden Sie die Idee des Beweises von Satz 14.15.

   In Satz 14.15 ersetzen Sie n durch xn: Zunächst sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\exp(xn) = \exp(\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n-\text{mal}}) = \exp(x)^n$.

   Sind n, $m \in \mathbb{N}$ so gilt $\exp\left(x\dfrac{n}{m}\right)^m = \exp\left(\underbrace{x\dfrac{n}{m} + x\dfrac{n}{m} + \cdots + x\dfrac{n}{m}}_{m-\text{mal}}\right) = \exp(xn) = \exp(x)^n$.

   Wurzelziehen ergibt $\exp\left(x\dfrac{n}{m}\right) = \sqrt[m]{\exp(x)^n} = \exp(x)^{\frac{n}{m}}$.

   Für $m/n < 0$ können Sie genau wie in Satz14.15 schließen.

6. Zeigen Sie, dass die reelle Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ injektiv ist. Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für $x \neq 0$ gilt: $\exp(x) \neq \exp(0) = 1$ ist.

   Für $x > 0$ ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} = 1 + R$, $R > 0$ und $\exp(0) = 1$, also $\exp(0) \neq \exp(x)$. Für $x < 0$ ist $\exp(x) = 1/\exp(-x) \neq 0$. Ist jetzt $\exp(x) = \exp(y)$, so folgt $1 = \exp(x)/\exp(y) = \exp(x-y)$, also $x = y$.

7. Berechnen Sie die Zahl π mit Hilfe der Intervallschachtelung auf 8 Stellen genau.

   Nach unserer Definition ist π das Doppelte der ersten Nullstelle des cos und liegt zwischen 0 und 2. Entweder mit der Hand oder mit Hilfe des Programms der Aufgabe 14 von Kapitel 15 können Sie die Nullstelle bestimmen.

8. Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ und $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\sin x)$.

   Verwenden Sie für den ersten Limes die Reihenentwicklung von sin x, für den 2. Limes die Tatsache, dass $|\sin x| \le 1$ für alle x gilt.

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right)=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

$\lim\limits_{x\to 0}|x\cdot\sin x|=\lim\limits_{x\to 0}|x||\sin x|\le\lim\limits_{x\to 0}|x|\cdot 1=0$. Dann ist auch $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin x=0$.

9. Ein berühmter Satz der Zahlentheorie besagt, dass für große n die Anzahl der Primzahlen im Intervall $[1,n]$ etwa $n/\ln(n)$ beträgt. Wie groß ist der Anteil der Primzahlen an allen natürlichen Zahlen der Länge 512 Bit? Dabei soll das erste Bit gleich 1 sein.

   Diese Primzahlen braucht man zur Erzeugung von Schlüsseln im RSA-Algorithmus.

Die Anzahl der Zahlen mit n Bit Länge beträgt gerade 2^n. Ist $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen bis zur Zahl x, so muss also $\pi(512) - \pi(511)$ berechnet werden:

$$\pi(512)-\pi(511)=\frac{2^{512}}{\ln 2^{512}}-\frac{2^{511}}{\ln 2^{511}}=\frac{2^{512}}{512\cdot\ln 2}-\frac{2^{511}}{511\cdot\ln 2}=$$
$$\frac{511\cdot 2^{512}-512\cdot 2^{511}}{511\cdot 512\cdot\ln 2}=\frac{(2\cdot 511-512)2^{511}}{511\cdot 512\cdot\ln 2}=\frac{510}{511\cdot 512\cdot\ln 2}2^{511}$$

Die Anzahl aller Zahlen zwischen 2^{511} und 2^{512} beträgt genau 2^{511}. Um den Anteil der Primzahlen zu bestimmen muss also die Anzahl der Primzahlen durch 2^{511} geteilt werden. Wir erhalten einen Primzahlanteil von etwa: $\dfrac{510}{511\cdot 512\cdot\ln 2}\approx 2{,}81\cdot 10^{-3}$.

10. Was sagen Sie zu dem folgenden Beweis: $\dfrac{1}{-1}=\dfrac{-1}{1}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}=\dfrac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}\Rightarrow\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{1}\Rightarrow 1=i^2$, im Widerspruch zu $i^2 = -1$.

Mit solchen und ähnlichen Aufgaben versuchen seit Generationen Schüler ihre Mathematiklehrer aufs Glatteis zu führen. Ich verrate Ihnen den Fehler nicht, vielleicht nehmen Sie die Aufgabe zum Anlass für eine Internetrecherche. Nur so viel: des Rätsels Lösung können Sie mit Hilfe eines der Beispiele vor Definition 14.13 finden.

15 Differenzialrechnung

Verständnisfragen

1. Ist $f: D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$, so ist der Differenzenquotient eine Abbildung von $D \setminus x_0 \to \mathbb{R}$. Warum muss hier x_0 aus dem Definitionsbereich herausgenommen werden?

Weil sonst der Nenner 0 werden kann.

2. Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Ist dann f ist im offenen Intervall $]a, b[$ differenzierbar?

Nein, siehe das Beispiel im Bild 15.4.

3. Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar und für ein $x_0 \in [a, b]$ sei $f'(x_0) = 0$. Hat dann f an der Stelle x_0 einen lokalen Extremwert?

Nein, es kann auch ein Terassenpunkt vorliegen.

4. Welche Punkte im Definitionsbereich einer stetigen Funktion sind potentielle Kandidaten für Extremwerte?

Nullstellen der Ableitung, Randpunkte und Punkte in denen die Funktion nicht differenzierbar ist.

5. Welche Voraussetzung muss eine Funktion f erfüllen, wenn man eine Taylorreihe dazu aufstellen will?

Sie muss unendlich oft differenzierbar sein.

6. Sei $R_n(x - x_0)$ das Restglied bei der Entwicklung einer Funktion f in eine Taylorreihe Welcher der beiden folgenden Grenzwerte konvergiert jedenfalls gegen 0?

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x - x_0) \text{ oder } \lim_{x \to x_0} R_n(x - x_0)$$

Der zweite, siehe Satz 15.24.

Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie die Ableitungen von $\sqrt{2x-1}$, $\cot x$, $\cos^n(x/n)$.

a): $\left(\sqrt{2x-1}\right)' = \left((2x-1)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = 1\Big/\sqrt{2x-1}$.

b): $(\cot x)' = -1\big/\sin^2 x$ mit Hilfe der Quotientenregel.

c): Zunächst: $\left(\cos^n x\right)' = n\cos^{n-1} x \cdot (-\sin x) = -n\cos^{n-1} x \cdot \sin x$. Dann

$$\cos^n\left(\frac{x}{n}\right)' = \frac{1}{n}\left[-n\cos^{n-1}\left(\frac{x}{n}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{n}\right)\right] = -\cos^{n-1}\left(\frac{x}{n}\right)\cdot\sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

2. Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen jeweils zweimal:

a) $(3x + 5x^2 - 1)^2$ nach Produktregel und Kettenregel,

b) $10/(x^3 - 2x + 5)$ nach Quotientenregel und Kettenregel.

$\left((3x+5x^2-1)^2\right)' = 2(3x+5x^2-1)(3+10x)$ nach der Kettenregel,

$\left((3x+5x^2-1)^2\right)' = (3x+5x^2-1)(3+10x)+(3+10x)(3x+5x^2-1)$ nach der Produktregel.

$$\left(\frac{10}{x^3-2x+5}\right)' = \frac{-10}{(x^3-2x+5)^2}(3x^2-2) .$$

3. An welchen Stellen ist die Funktion $x \mapsto x\,|\sin x|$ differenzierbar? Begründen Sie warum die Funktion nicht überall differenzierbar ist.

In den Nullstellen $x = k\pi$ ($k \neq 0$) ist die Funktion nicht differenzierbar: die Ableitung ist links und rechts der Nullstelle verschieden. Da wo $\sin x > 0$ ist, ist die Ableitung $\sin x + x\cos x$, da wo $\sin x < 0$ ist, ist die Ableitung $-\sin x - x\cos x$. Der Grenzwert des Differenzenquotienten gegen $k\pi$ ist dafür jeweils $+k$ bzw. $-k$, also gibt es dort keinen limes des Differenzenquotienten.

Im Punkt $x = 0$ lautet der Differenzenquotient $\frac{h\cdot|\sin(h)|}{h} = |\sin(h)|$. Der Grenzwert für h gegen 0 existiert, er ist 0. Dort ist die Funktion also differenzierbar, genau wie in allen anderen Punkten des Definitionsbereichs.

4. Ist die Funktion $x \mapsto x\sin|x|$ im Punkt 0 differenzierbar?

Da $\lim\limits_{h\to 0}\frac{h\sin|h|-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\sin|h| = 0$ existiert, ist die Funktion differenzierbar.

5. Sei $f:]-1,+1[\to \mathbb{R}^+, x \mapsto (1+x)/(1-x)$.

   a) Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

   b) Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion f.

   a) Injektivität: $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{1+y}{1-y} \underbrace{\Leftrightarrow}_{|x|,|y|<1} (1+x)(1-y) = (1+y)(1-x) \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{ausmultiplizieren}} x = y$

   Surjektivität: Sei $y = \dfrac{1+x}{1-x}, y > 0$. Auflösen nach x ergibt: $x = \dfrac{y-1}{y+1}$. Für $y > 0$ ist wirklich immer $\left|\dfrac{y-1}{y+1}\right| < 1$.

   b) Die erste Ableitung lautet: $\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1+x}{(1-x)^2}$, die 2. Ableitung lautet: $\dfrac{2}{(1-x)^2} + \dfrac{2(1+x)}{(1-x)^3}$.

6. Zeigen Sie dass die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln|x|$ im gesamten Definitionsbereich differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung. (Verwenden Sie dazu, dass für $x > 0$ $\ln(x)' = 1/x$ ist).

   Nur noch für $x < 0$ ist die Ableitung zu berechnen: Dann gilt nach der Kettenregel: $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = (-1) \cdot \dfrac{1}{-x} = \dfrac{1}{x}$.

7. Berechnen Sie die Ableitung von $\log_a(x)$ mit Hilfe der Aussage, dass $\log_a(x)$ die Umkehrfunktion von a^x ist.

   $a^y = e^{y \ln a} \Rightarrow (a^y)' = (\ln a)e^{y \ln a} = (\ln a)a^y$. Also: $(\log_a x)' = \dfrac{1}{(\ln a)a^y} = \dfrac{1}{(\ln a)a^{\log_a x}} = \dfrac{1}{(\ln a)x}$.

8. Bestätigen Sie das Ergebnis aus Aufgabe 7 mit Hilfe der Aussage $\log_a(x) = \ln(x)/\ln(a)$.

   $(\log_a(x))' = \left(\dfrac{1}{\ln a} \ln x\right)' = \dfrac{1}{\ln a} \dfrac{1}{x}$.

9. Führen Sie mit den beiden folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion durch und skizzieren Sie die Funktionen:

   a) $x^3 + 4x^2 - 3x$. Bestimmen Sie Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte und Krümmungsverhalten.

   b) $x^2 e^{-2x}$ Bestimmen Sie den Definitionsbereich, die Nullstellen, die Extremwerte und die Wendepunkte.

a) $f(x) = x(x^2 + 4x - 3)$. Nullstellen: $x_1 = 0, x_{2/3} = -2 \pm \sqrt{4+3} \approx \begin{cases} -4.65 \\ 0.65 \end{cases}$.

$f'(x) = 3x^2 + 8x - 3$. Nullstellen: $x_{4/5} = -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} + 1} = \begin{cases} 1/3 \text{ (Minimum)} \\ -3 \text{ (Maximum)} \end{cases}$.

$f''(x) = 6x + 8$. Nullstelle $x_6 = -\frac{4}{3}$ ist Wendepunkt,

$f(x_4) > 0$ (Min), $f(x_5) < 0$ (Max).

b) Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$.

Die einzige Nullstelle ist $x = 0$.

Die 1. Ableitung: $2x\exp(-2x) - 2x^2\exp(-2x) = 2(x - x^2)\exp(-2x)$ hat die Nullstellen 0 und 1

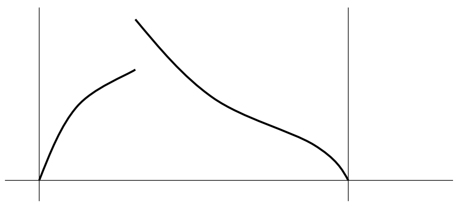
Die 2. Ableitung lautet:
$2\exp(-2x) - 8x\exp(-2x) + 4x^2\exp(-2x) = 2(1 - 4x + 2x^2)\exp(-2x)$

Es ist $f''(0) = 2, f''(1) = -2e^{-2} < 0,$ also ist bei 0 ein Minimum und bei 1 ein Maximum.

Nullstellen der 2. Ableitung sind $1 \pm 1/2\sqrt{2},$ dort sind also Wendepunkte

10. Skizzieren Sie den Graphen einer nicht stetigen Funktion, für die der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung nicht gilt.

Für die folgende Funktion gilt der Mittelwertsatz nicht (der mittlere Anstieg ist 0, es gibt aber keine waagrechte Tangente)



11. Es sei $f: [0,4[\to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} -x + 2 & für 0 \le x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & für 1 \le x < 4 \end{cases}$.

Untersuchen Sie in welchen Punkten die Funktion stetig und differenzierbar ist und berechnen Sie alle Maxima und Minima der Funktion.

Für $0 \le x < 4$ kann höchstens im Punkt $x = 1$ Unstetigkeit oder Nicht-Differenzierbarkeit vorliegen. Da für $x \to 1$ immer gilt $f(x) \to 1 = f(1)$ (sowohl links als auch rechts von 1), liegt im Punkt 1 Stetigkeit vor.

In 1 ist f jedoch nicht differenzierbar: Der Differenzenquotient lautet:

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\begin{cases}\dfrac{-(1+h)+2-1}{h} & h<0\\[2ex] \dfrac{-(1+h)^2+4h-2-1}{h} & h>0\end{cases}$$

Für $h\to 0$ wird der obere Term zu 1 (Ableitung von $-x+2$), der untere Term zu 2 (Ableitung von $-x^2+4x-2$), also existiert der Grenzwert an der Stelle 1 nicht.

Für $0<x<1$ liegt kein Extremwert vor, für $1<x<4$ ist $x=2$ (Nullstelle der Ableitung) ein Maximum. Rechts von 1 ist die Funktion streng monoton wachsend, links davon streng monoton fallend, also ist 1 ein Minimum, am Randpunkt 0 liegt schließlich auch ein Maximum vor.

12. Berechnen Sie von den folgenden Potenzreihen die Konvergenzradien:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{2n+1}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)!}$

a) $a_k=\dfrac{1}{2^k}\Rightarrow\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right|=2=\text{Konvergenzradius.}$

b) $a_k=\dfrac{k^2}{2k+1}\Rightarrow\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\dfrac{k^2(2k+3)}{(k+1)^2(2k+1)}=\dfrac{2k^3+3k^2}{2k^3+\mathrm{O}(k^2)}$. Klammern Sie im Zähler und Nenner k^3 aus, dann erhalten Sie, dass der Grenzwert (=Konvergenzradius) für $k\to\infty$ gleich 1 ist.

c) $a_k=\dfrac{1}{(2k+1)!}\Rightarrow\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\dfrac{(2k+3)!}{(2k+1)!}=(2k+3)(2k+2)$, der Grenzwert ist unendlich.

13. Bestimmen Sie für die Funktion $\sqrt{x}$ das Taylorpolynom 3. Ordnung im Punkt $x=1$. Berechnen Sie damit für h = 0, 0.5, 1 einen Näherungswert für $\sqrt{x+h}$. Bestimmen Sie den dabei entstehenden Fehler im Vergleich zum Wert aus dem Taschenrechner.

$$f'(x)=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},f'(1)=\frac{1}{2},\;\; f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},f''(1)=-\frac{1}{4},f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}f'''(1)=\frac{3}{8}$$

$$\sqrt{1+h}=\underbrace{1+\frac{1}{2}h-\frac{1}{4\cdot 2}h^2+\frac{3}{8\cdot 6}h^3}_{\text{Näherung}}+\frac{f^{(4)}(z)}{3!}h^3,\text{ mit }1<z<1+h.$$

Das Taylorpolynom lautet: $1+\dfrac{1}{2}h-\dfrac{1}{8}h^2+\dfrac{1}{16}h^3$.

h = 0.5: Näherung = 1.226563, Fehler = 0.001818, h = 1: Näherung = 1.4375, Fehler 0.0233, h = 0: Wert ist exakt.

14. Schreiben Sie ein Programm zur Ermittlung von Nullstellen mit dem Bisektionsverfahren. Bilden Sie die Ableitung der Funktion $f: x \mapsto (1/x)\sin(x)$ $(x \neq 0)$ und bestimmen Sie einige Nullstellen der Ableitung numerisch. Skizzieren Sie dann den Graphen der Funktion f.

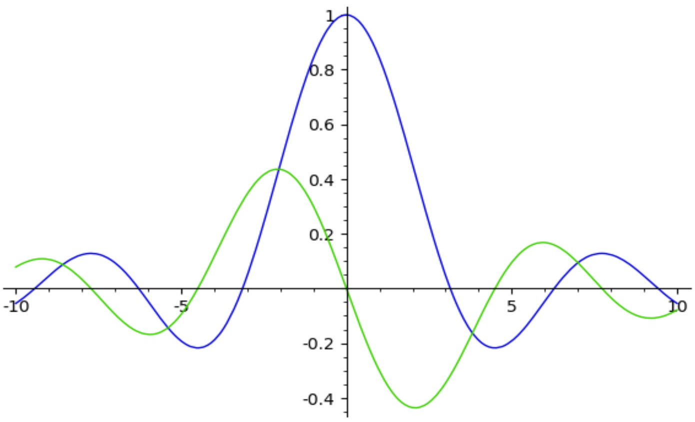
Das folgende sage Programm führt die Bisektion zwischen a und b durch:

```
def bisektion(f,a,b,anz):
    t = []
    if f(a) < 0:
        f = -f      # so muss nur der Fall f(a) > 0 behandelt werden
    for i in range(0,anz):
        c = RR((a + b)/2)
        if(f(c) < 0):
            b = c
        else:
            a = c
        t.append([i+1,c])
    return t
```

Die Nullstellen des gegebenen f sind die Werte $k\pi$, $k \neq 0$, die Nullstellen von f' liegen jeweils dazwischen. Die Werte $k\pi$, $(k+1)\pi$ können also als Startwerte verwendet werden. Es ist $f'(x) = \frac{1}{x}\cos(x) - \frac{1}{x^2}\sin(x)$.

Zum Beispiel ergeben 10 Iterationen zwischen π und 2π für $f'(x)$ die Näherung an die Nullstelle 4.494.

Die Funktionen f (blau) und f' (grün) schauen etwa so aus (erstaunlicherweise ist f auf 0 fortsetzbar und dort sogar noch differenzierbar):



15. Bestimmen Sie sämtliche partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktionen

a) $3x_1^4x_2^3x_3^2x_4^1 + 5x_1x_2 + 8x_3x_4 + 1$.

b) $xe^{yz} + \dfrac{\sqrt{xz}}{\ln y}$, $x, y, z > 0$.

a):

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 12x_1^{3}x_2^{3}x_3^{2}x_4^{1} + 5x_2,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 9x_1^{4}x_2^{2}x_3^{2}x_4^{1} + 5x_1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 6x_1^{4}x_2^{3}x_3^{1}x_4^{1} + 8x_4,\quad \frac{\partial f}{\partial x_4} = 3x_1^{4}x_2^{3}x_3^{2} + 8x_3$$

b): $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{yz} + \sqrt{\frac{z}{x}} \frac{1}{2\ln y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xze^{yz} - \frac{\sqrt{xz}}{y(\ln y)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = xye^{yz} + \sqrt{\frac{x}{z}} \frac{1}{2\ln y}$

16. Bestimmen Sie sämtliche stationären Punkte der folgenden Funktion:

$$x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 + y^3 - 3x - 21y \,.$$

I: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6xy + 3y^2 - 3 = 0$, II: $\frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2 + 6xy + 3y^2 - 21 = 0$.

I+II: $6y^2 - 24 = 0 \Rightarrow y_{1/2} = \pm 2$. Eingesetzt in I:

Für $y_1 = 2$: $3x^2 - 12x + 9 = 0$, bzw. für $y_2 = -2$: $3x^2 + 12x + 9 = 0$. Die Lösungen für y_1 sind $x_1 = 1, x_2 = 3$ und für $y_2 : x_3 = -1, x_4 = -3$. Die Wertepaare (1,2), (3,2), (–1,–2), (–3,–2) sind also Lösungen für I, durch Einsetzen findet man, dass sie auch Gleichung II lösen. Dies sind damit die vier stationären Punkte.

17. Eine quaderförmige Kiste (Länge *x*, Breite *y*, Höhe *z*), die oben offen ist, soll einen Inhalt von 32 Liter haben. Bestimmen Sie *x*, *y* und *z* so, dass der Materialverbrauch für die Kiste minimal ist.

Sei *x* = Länge, *y* = Breite, *z* = Höhe. Es ist *xyz* =32, Daraus z = 32/*xy*. Die Oberfläche ist: $xy + 2xz + 2yz$. *z* eingesetzt erhalten wir: $xy + 2x\frac{32}{xy} + 2y\frac{32}{xy} = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$. Diese Funktion muss minimiert werden. Es muss $\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{64}{x^2} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{64}{y^2} = 0$ sein, also $y = \frac{64}{x^2}$, $x = \frac{64}{y^2}$. *y* eingesetzt: $x = 64\frac{x^4}{64^2} \Rightarrow 64 = x^3 \Rightarrow x = 4$, daraus *y* = 4 und *z* = 2.

Die Hesse-Matrix lautet $\begin{pmatrix} \frac{128}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{128}{y^3} \end{pmatrix}$, es liegt also ein Minimum vor.

16 Integralrechnung

Verständnisfragen

1. Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig. Existiert dann das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$?

Ja.

2. Sei $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ eine integrierbare, gerade Funktion. Was ist $\int_{-a}^{a} f(x)dx$?

Immer = 0.

3. Erläutern Sie den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung.

Siehe Satz 16.9. Kurz gefasst: Stammfunktion bilden und Ableitung bilden sind zueinander inverse Operationen.

4. Wenn die Stammfunktion $F(x)$ der Funktion $f(x)$ existiert, ist dann $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar?

Ja, und die Ableitung ist gerade $f(x)$.

5. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sei eine nicht periodische stetige Funktion. Kann man trotzdem eine Fourierreihe zu f aufstellen?

Ja, man muss dazu die Funktion periodisch fortsetzen.

6. In der Anmerkung zu Satz 16.19 habe ich gesagt, dass die Funktionen $\cos(nx), \sin(nx)$ auf dem Vektorraum der auf $[0,2\pi]$ integrierbaren Funktionen beinahe eine Basis darstellen. Warum nur beinahe? Schauen Sie sich dazu noch einmal die Definitionen 6.16 und 6.5 an.

Die Funktionen lassen sich nicht durch *endliche* Linearkombinationen der „Fastbasis“ darstellen

7. Können Sie den Begriff „Konvergenz im quadratischen Mittel erklären?

Es wird die Fläche der quadrierten Differenz der Funktionen berechnet. Wenn diese Fläche gegen 0 geht spricht man von der Konvergenz im quadratischen Mittel. Siehe hierzu Satz 16.26.

Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(x)dx$ b) $\int x \ln x dx$ c) $\int_a^b x^2 e^x dx$

d) $\int_0^1 (3x-2)^2 dx$ e) $\int_{-2}^2 \frac{1}{2x-8}dx$

a): $$\int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(x)dx = -\cos(x)\cos(x)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (-\cos(x))(-\sin(x))dx \Rightarrow$$
$$2\int_0^{2\pi} \sin(x)\cos(x)dx = -\cos^2 x\Big|_0^{2\pi} = 0$$

b): $$\int \underbrace{x}_{u'} \underbrace{\ln x}_{v} dx = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{u} \underbrace{\ln x}_{v} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{u} \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}.$$

c): $$\int \underbrace{x^2}_{v} \underbrace{e^x}_{u'} dx = \underbrace{x^2}_{v} \underbrace{e^x}_{u} - \int \underbrace{2x}_{v'} \underbrace{e^x}_{u} dx = x^2 e^x - 2 \underbrace{(x-1)e^x}_{\text{berechnet als Beispiel im Buch}} = (x^2-2x+2)e^x$$

d): Entweder ausmultiplizieren und Polynomintegration oder Substitution $y = 3x–2$:
$$\int_0^1 (3x-2)^2 dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (3x-2)^2 3dx = \frac{1}{3}\int_{-2}^1 y^2 dy = \frac{1}{3}\frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{-8}{3}\right) = 1$$

e): $$\int_{-2}^2 \frac{1}{2x-8}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^2 \frac{1}{2x-8}2dx \underset{\substack{\uparrow \\ y=2x-8 \\ dy=2dx}}{=} \frac{1}{2}\int_{-12}^{-4} \frac{1}{y}dy \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stammfunktion} \\ \text{ist } \ln|y|}}{=} \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 12) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} \approx -0,55$$

2. Berechnen Sie $\int_0^{2\pi} \cos^2(nx)dx$, $n \in \mathbb{N}$. Verwenden Sie dazu Beispiel 4 nach den Rechenregeln zur Integration, Satz 16.12.

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(nx)dx = \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \cos^2(nx)ndx \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Substitution} \\ y=nx, dy=ndx}}{=} \frac{1}{n}\int_0^{2\pi n} \cos^2(y)dy = \frac{1}{2n}(\cos x \sin x + x)\Big|_0^{2\pi n} = \pi$$

3. Berechnen Sie eine Stammfunktion zu $\tan(x)$ im Bereich $-\pi/2 < x < \pi/2$. Verwenden Sie dazu Beispiel 6 nach den Rechenregeln zur Integration, Satz 16.12.

Für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ hat $g(x) = \cos(x)$ keine Nullstellen und ist überall positiv. Nach dem Beispiel ist dann: $\int \tan(x)dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx = -\ln(\cos(x))$.

4. Eines der beiden folgenden Integrale können Sie (als eigentliches Integral) berechnen, eines nicht. Berechnen Sie das Integral beziehungsweise begründen Sie, warum es nicht geht:

a) $\int_{-3}^{3} \frac{7}{3x+4} dx$, b) $\int_{-1}^{5} \frac{2}{6x+9} dx$.

a) Die Nullstelle des Nenners liegt im Integrationsbereich, geht also nicht.

b) Substitution: $g(x) = 6x+9$:

$$\int_{-1}^{5} \frac{2}{6x+9} dx = \frac{1}{6}\int_{-1}^{5} \frac{2}{6x+9} \cdot 6dx = \frac{2}{6}\int_{g(-1)}^{g(5)} \frac{1}{y} \cdot dy = \frac{2}{6}(\ln(39) - \ln 3) = \frac{2}{6}\ln(13) \approx 0.855 .$$

5. Berechnen Sie die Länge des Kreisbogens des Einheitskreises zwischen (0,0) und $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Als Ergebnis stellen Sie fest, dass zum Winkel α im Bogenmaß genau der Kreisbogen der Länge α gehört.

Die Parameterdarstellung des Kreisbogens lautet $s:[0,\alpha] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\sin t, \cos t)$. Nach Satz 16.16 ist dann die Bogenlänge: $L = \int_0^\alpha \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = \int_0^\alpha 1 dt = \alpha$.

6. Berechnen Sie das Volumen einer Kugel mit Radius R.

Nach den Beispielen in Abschnitt 16.2 und Satz 16.14 ist:

$$V = \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\pi dx = \left(R^2 \pi x - \frac{x^3}{3}\pi \right)\Bigg|_{-R}^{R} = R^3\pi - \frac{R^3\pi}{3} + R^3\pi - \frac{R^3\pi}{3} = \frac{4}{3}R^3\pi .$$

7. Berechnen Sie die Fourierreihe zu der periodischen "Sägezahnfunktion" $f(x) = x$ für $0 < x \le 2\pi$. Verwenden Sie zur Bestimmung der notwendigen Integrale die Integraltabelle aus der Formelsammlung oder ein Mathematiktool.

Aus der Integraltabelle:

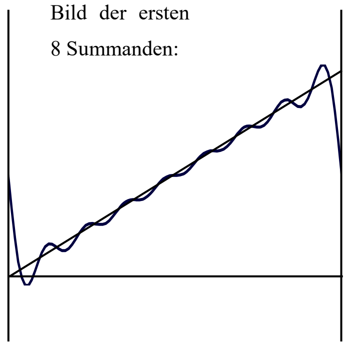
$\int x \cos kx dx = \frac{\cos(kx)}{k^2} + \frac{x \sin(kx)}{k}, \int x \sin kx dx = \frac{\sin(kx)}{k^2} - \frac{x\cos(kx)}{k}$. Damit:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x dx = 2\pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(kx)}{k^2} + \underbrace{\frac{x\sin(kx)}{k}}_{=0}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin(kx)dx = \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\frac{\sin(kx)}{k^2}}_{=0} - \frac{x\cos(kx)}{k}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -\frac{1}{\pi}\frac{2\pi}{k} = -\frac{2}{k}$$

$$f(x) = \pi - 2\sin(x) - \sin(2x) - \frac{2\sin 3x}{3} - \frac{2\sin 4x}{4} - ....$$



8. Implementieren Sie die diskrete Fouriertransformation in beide Richtungen und bestätigen Sie durch Tests den Satz 16.22.

   Die beiden folgenden sage Funktionen führen die DFT hin- und zurück durch. Dabei ist *f* ein Array, das die *N* Funktionswerte an den Stützstellen enthält, *a* und *b* sind Arrays, welche die Fourierkoeffizienten enthalten (dabei ist *b*[0] = 0). Aber Achtung: Das ist natürlich kein Beweis!

```
reset()
def dft(N,f):
    T = 2*pi/N
    a = [2/N*sum(f)]   #a0
    b = [0]            #b0
    for k in range(1,floor(N/2)+1):
        a.append(2/N*sum([f[i]*cos(k*i*T).n() for i in range(N)]))
        b.append(2/N*sum([f[i]*sin(k*i*T).n() for i in range(N)]))

    return a,b

def dft_b(N,a,b):
    T = 2*pi/N
    f = []
    if is_odd(N):
        for i in range(N):
            f.append((a[0]/2)+sum([(a[k]*cos(k*i*T)+b[k]*sin(k*i*T)).n()
                                   for k in range(1,floor(N/2)+1)]))
    else:
        for i in range(N):
            f.append((a[0]/2)+sum([(a[k]*cos(k*i*T)+b[k]*sin(k*i*T)).n()
                                   for k in range(1,floor(N/2))])+a[N/2]/2*cos(N/2*i*T))
    return f
```

9. Überprüfen Sie, ob durch die Beziehung $\langle f,g\rangle = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ auf der Menge der im Intervall $[0,2\pi]$ integrierbaren Funktionen ein Skalarprodukt gegeben ist. Siehe dazu Definition 10.1. Eine der vier Bedingungen ist nicht erfüllt. Welche?

   Die Regeln S1 bis S3 folgen unmittelbar aus den Eigenschaften des Integrals in 16.12 b).

   S4 gilt nicht: Zum Beispiel gilt für die (stückweise stetige) Funktion f, die überall = 0 ist, am Punkt π aber den Wert 1 hat: $\int_0^{2\pi} f(x)^2\,dx = 0$.

17 Differenzialgleichungen

Verständnisfragen

1. Was ist eine trennbare Differenzialgleichung?

Funktion y und Parameter x lassen sich in zwei Faktoren eines Produkts separieren. Siehe Definition 17.3.

2. Sei eine lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung gegeben. Kann man dann neben den Anfangswerten $y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)$ auch noch $y^{(n)}(x_0)$ vorgeben?

Nein, dafür gibt es in der Regel keine Lösung mehr.

3. Sind f und g Lösungen einer linearen Differenzialgleichung, ist dann auch $f \cdot g$ Lösung der Differenzialgleichung?

Nein.

4. Sind f und g Lösungen einer linearen Differenzialgleichung, so auch $f+g$. Gilt diese Aussage auch für nichtlineare Differenzialgleichungen?

Nein.

5. Sind $\sin(x)$ und $\cos(x+\pi/2)$ linear unabhängige Funktionen?

Es ist $\cos(x+\pi/2) = -\sin(x)$, also sind die Funktionen nicht unabhängig.

Übungsaufgaben

1. Lösen Sie die Anfangswertprobleme:

   a) $y' = \frac{1+x}{y}$, $y(1) = 1$ b) $y' = xy + 2y$, $y(1) = 2$.

   Beides sind trennbare Differenzialgleichungen, Satz 17.4 kann angewendet werden. Machen Sie jeweils die Probe!

   Zu a): $y' = (1+x)\frac{1}{y}$, $y(1) = 1$. $\Rightarrow \int_1^y y\,dy = \int_1^x (1+x)dx$. Das heißt:

   $$\left.\frac{y^2}{2}\right|_1^y = \left.\left(x + \frac{x^2}{2}\right)\right|_1^x \Rightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} = x + \frac{x^2}{2} - 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow y^2 = 2x + x^2 - 2 \Rightarrow y = \sqrt{2x + x^2 - 2}\,.$$

   Auf Grund der Anfangsbedingung kommt nur die positive Wurzel in Frage.

   Zu b): $y' = (x+2)y$, $y(1) = 2 \Rightarrow \int_2^y \frac{1}{y}dy = \int_1^x (x+2)dx$. Das heißt:

   $$\ln y - \ln 2 = \left.\frac{x^2}{2} + 2x\right|_1^x = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2} - 2 \Rightarrow \ln\frac{y}{2} = \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{5}{2} \Rightarrow y = 2e^{\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{5}{2}}.$$

2. Finden Sie die vollständigen Lösungen der Differenzialgleichungen:

   a) $y' + \frac{1}{x}y = \sin x$ b) $y' + (2x-1)y = xe^x$.

   Beides sind lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung, Satz 17.6 kann angewendet werden.

   Zu a): Für $a(x) = \frac{1}{x}$, $A(x) = \ln x \Rightarrow \left(\int_{x_0}^x \sin x e^{\ln x} dx + c\right)e^{-\ln x}$ ist für $x > 0$ die vollständige Lösung (für $x < 0$ muss $\ln x$ durch $\ln(-x)$ ersetzt werden, das Ergebnis ist dasselbe). Ausgerechnet ergibt sich:

   $$\left(\int_{x_0}^x \sin x e^{\ln x} dx + c\right)e^{-\ln x} = \left(\int_{x_0}^x x\sin x dx + c\right)\frac{1}{x} = (-x\cos x + \sin x + d)\frac{1}{x} = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{d}{x}.$$

   Zu b): $a(x) = 2x - 1$, $A(x) = x^2 - x \Rightarrow \left(\int_{x_0}^x xe^x e^{x^2 - x} dx + c\right)e^{-x^2 + x}$.

   $\int_{x_0}^x xe^x e^{x^2-x} dx = \frac{1}{2}\int_{x_0}^x 2xe^{x^2} dx \underset{\underset{\text{Substitution}}{\uparrow}}{=} \frac{1}{2}\int_{x_0^2}^{x^2} e^y dy = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$. Damit lautet die Lösung:

   $$y = \left(\frac{1}{2}e^{x^2} + d\right)e^{-x^2+x} = \frac{1}{2}e^x + de^{-x^2+x}$$

3. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die Differenzialgleichungen:

   a) $y''' + -3y'' + 4y' - 2y = 0$ b) $y'' - 6y' + 9y = 0$

   Beides sind lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, das charakteristische Polynom muss untersucht werden.

   Zu a): Suche Nullstellen von $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$. Erste Nullstelle $\lambda_1 = 1$ durch Raten. Nach Polynomdivision durch $(1-\lambda)$ erhält man $\lambda^2 - 2\lambda + 2$. Die beiden weiteren Nullstellen lauten $\lambda_{2/3} = 1 \pm i$ und damit lautet das Fundamentalsystem: $e^x, e^x \cos x, e^x \sin x$.

   Zu b): $\lambda^2 - 6\lambda + 9$ hat die doppelte Nullstelle 3, das Fundamentalsystem lautet e^{3x}, xe^{3x}

4. Zeigen Sie, dass die in Satz 17.5 und Satz 17.6 angegebenen Lösungen der Differenzialgleichung $y' + a(x)y = f(x)$ vollständig sind. Verwenden Sie dazu Satz 17.10.

   Nach Satz 17.10 ist die Dimension des Lösungsraums 1. Damit ist $e^{-A(x)}$ eine Basis und $ce^{-A(x)}$ der Lösungsraum des homogenen Systems.

   $y_s = \int_{x_0}^{x} f(t)e^{A(t)}dt \cdot e^{-A(x)}$ ist eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems, daher ist nach Satz 17.9 $y_s + y_h = \left(\int_{x_0}^{x} f(t)e^{A(t)}dt + c \right) e^{-A(x)}$ vollständig.

5. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen linear unabhängig sind:

   a) $e^{\alpha x}, e^{\beta x}, \ (\alpha \neq \beta)$ b) $e^{\alpha x}, \ xe^{\alpha x}$

   In beiden Fällen ist zu zeigen, dass in einer Linearkombination der Funktionen, welche die Nullfunktion ergibt, die Koeffizienten gleich 0 sind.

   Zu a): Seien λ und μ, so dass für alle x gilt $\lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x} = 0$. Angenommen λ und μ sind ungleich 0. Für $x = 0$ ergibt sich dann $\lambda = -\mu$, das heißt $e^{\alpha x} = e^{\beta x}$. Für $x = 1$ erhält man daraus $\alpha = \beta$, ein Widerspruch, denn die Funktionen sollen natürlich verschieden sein.

   Zu b): $\lambda e^{\alpha x} + \mu x e^{\alpha x} = 0 = e^{\alpha x}(\lambda + \mu x)$. Da $e^{\alpha x} \neq 0$ ist, folgt $(\lambda + \mu x) = 0$ für alle x. Für $x = 0$ folgt $\lambda = 0$, für $x = 1$ dann auch $\mu = 0$.

18 Numerische Verfahren

Verständnisfragen

1. Wenn a und b fehlerbehaftete Zahlen sind, bei welchen Operationen kann der Fehler größere Probleme machen: Bei der Addition oder bei der Multiplikation?

Bei der Multiplikation.

2. Sie möchten eine Nullstellengleichung in eine Fixpunktgleichung umwandeln. Geht das immer?

Ja.

3. Wenn der Banach'sche Fixpunktsatz auf eine nichtlineare Gleichung nicht anwendbar ist, weil sie keine Kontraktion darstellt, kann die Gleichung trotzdem einen Fixpunkt haben?

Ja. Ein Beispiel finden Sie in Bild 18.2.

4. Sie wissen, dass eine Funktion eine Nullstelle hat. Welches Verfahren liefert die Nullstelle immer?

Die Intervallschachtelung.

5. In kubischen Splines hat man die Freiheit die erste oder zweite Ableitung an den Rändern festzulegen. Kann eine solche Festlegung auch Auswirkungen auf die inneren Kurvenstücke eines Splines haben?

Ja, da die Randkurve auch am inneren Rand anders aussieht.

6. Mit Hilfe der Simpsonregel lassen sich Polynome 3. Grades exakt integrieren. Können Sie eine ähnliche Aussage für die Integration mit der Trapezregel aufstellen? Schauen Sie sich dazu noch einmal die angegebenen Fehlerabschätzungen an.

Lineare Polynome lassen sich mit der Trapezregel exakt integrieren (das ist natürlich nicht sehr spannend).

7. Bei der numerischen Lösung von Differenzialgleichungen kann man die Lösung theoretisch beliebig genau erhalten, wenn man nur die Schrittweite klein genug macht. Wodurch sind dieser Genauigkeit in der Praxis Grenzen gesetzt?

Durch die Rechengenauigkeit.

Übungsaufgaben

1. Implementieren Sie den Gauß'schen Algorithmus. Dieser soll rekursiv implementiert werden und es soll Zeilenpivotsuche durchgeführt werden. Zählen Sie die Anzahl der Multiplikationen und Divisionen, die Sie zur Lösung des Systems brauchen.

   Als Input erwartet das Programm eine reelle Matrix *M*, sowie die Zeilenzahl *n* und die Spaltenzahl *m*. Diese sind für die drei Funktionen global. Ich verwende die in sage eingebauten Funktionen zum Vertauschen zweier Zeilen und zur Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen.

```
def gauss(i,j):
    show('i= ',i,' j= ',j)
    show(M)
    if i == n-1 or j > m-1:
        return
    tausche(i,j)    # Pivotsuche
    if M[i,j] == 0: # Tausch war nicht möglich
        gauss(i,j+1)
        return
    subtrahiere(i,j)
    gauss(i+1,j+1)
    return

# Die Pivotsuche und Zeilentausch
def tausche(i,j):
    maxk = i
    max = abs(M[i,j])
    for k in range(i,n):
        if abs(M[k,j]) > max:
            max = abs(M[k,j])
            maxk = k
    if max == 0:
        return
    M.swap_rows(i,maxk)
    return

def subtrahiere(i,j):
    for k in range(i+1,n):
        M.add_multiple_of_row(k,i,-M[k,j]/M[i,j],i+1)
        M[k,j] = 0
    Return
```

2. Implementieren Sie den Gauss'schen Algorithmus für tridiagonale Matrizen. Zählen Sie auch hier die Anzahl der Multiplikationen und Divisionen.

   Hier eine sage-Funktion für tridiagonale Matrizen. Eine Anwendung der Funktion sehen Sie in Aufgabe 6.

   Als Input erwartet die Funktion eine tridiagonale reelle Matrix *M*, den Ergebnisvektor *y* des linearen Gleichungssystems $Mx = y$ und die Dimension der Matrix *n*. Wenn das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung hat (zum Beispiel wenn es spaltendiagonaldominant ist), dann wird die Lösung zurückgegeben.

```
def tridiagonal(M,y,n):
    N = copy(M)
    yy = copy(y)
    for i in range(1,n):
        lamb = -N[i,i-1]/N[i-1,i-1]
        N[i,i-1] = 0
        N[i,i] += lamb*N[i-1,i]
        yy[i] += lamb*yy[i-1]
    for i in range(1,n):
```

```
        k = n-i
        lamb = -N[k-1,k]/N[k,k]
        N[k-1,k] = 0
        N[k-1,k-1] += lamb*N[k,k-1]
        yy[k-1] += lamb*yy[k]

    loes = [yy[i]/N[i,i] for i in range(n)]
    return loes
```

3. Implementieren Sie die Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungen. Bestimmen Sie damit die Lösungen von $e^{-x}+1=x$. Wie genau können Sie die Lösungen berechnen? Wie schnell konvergieren die verschiedenen Verfahren?

Zunächst mit dem Banach'schen Fixpunktsatz. Zu berechnen sind die Fixpunkte von $e^{-x}+1$.

Ein plot zeigt, dass der Fixpunkt zwischen 1 und 2 liegt. Dort ist der Betrag der Ableitung kleiner 1, also liegt eine Kontraktion vor, wir können den Banach'schen Fixpunktsatz anwenden.

```
def banach(f,x0,n):
    x = x0
    t = []
    for i in range(0,n):
        x = RR(f(x))
        t.append([i+1,x])
    return t

f(x) = exp(-x)+1
banach(f,1,10)
```

Ergebnis:

```
[[1, 1.36787944117144],
[2, 1.25464638004358],
[3, 1.28517667455953],
[4, 1.27660171082938],
[5, 1.27898375885919],
[6, 1.27831999701620],
[7, 1.27850479653501],
[8, 1.27845333373792],
[9, 1.27846766409407],
[10, 1.27846367358186]]
```

Bei der Nullstellenberechnung muss x auf die andere Seite gebracht werden: Sie müssen die Nullstellen von $e^{-x}+1-x$ berechnen. Beispielsweise im Intervall [0.2] sind erste und zweite Ableitung $\neq 0$ und beschränkt, es konvergieren also alle Verfahren:

```
def newton(f,a,anz):
    fa = f.diff()
    t = []
    for i in range(0,anz):
        a = RR((a - f(a)/fa(a)))
        t.append([i+1,a])
    return t

def regulafalsi(f,a,b,anz):
    t = []
    for i in range(0,anz):
        c = RR(a + f(a)*(b-a)/(f(a)-f(b)))
        if(f(c) < 0):
            b = c
        else:
            a = c
        t.append([i+1,c])
    return t
```

```
def bisektion(f,a,b,anz):
    t = []
    if f(a) < 0:
        f = -f     # so muss nur der Fall f(a) > 0 behandelt werden
    for i in range(0,anz):
        c = RR((a + b)/2)
        if(f(c) < 0):
            b = c
        else:
            a = c
        t.append([i+1,c])
    return t

f(x) =  exp(-x)+1-x

print('Newton-Verfahren')
print(newton(f,2,10))

print('Regula Falsi')
print(regulafalsi(f,1,2,10))

print('Bisektion')
print(bisektion(f,1,2,10))
```

Ergebnis:

```
Newton-Verfahren
[[1,1.23840584404424],
[2,1.27828662747736],
[3,1.27846453931351],
[4,1.27846454276107],
[5,1.27846454276107],
[6,1.27846454276107],
[7,1.27846454276107],
[8,1.27846454276107],
[9,1.27846454276107],
[10,1.27846454276107]]

Regula Falsi
[[1,1.29847161158740],
[2,1.27910751885152],
[3,1.27848529042433],
[4,1.27846521233755],
[5,1.27846456436999],
[6,1.27846454345845],
[7,1.27846454278358],
[8,1.27846454276180],
[9,1.27846454276110],
[10,1.27846454276107]]

Bisektion
[[1,1.50000000000000],
[2,1.25000000000000],
[3,1.37500000000000],
[4,1.31250000000000],
[5,1.28125000000000],
[6,1.26562500000000],
[7,1.27343750000000],
[8,1.27734375000000],
[9,1.27929687500000],
[10,1.27832031250000]]
```

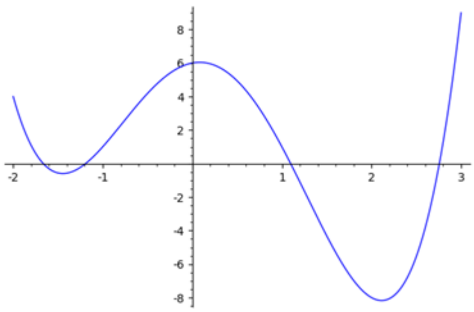
4. Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 3x + 1$. Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion nach dem Newton'schen Näherungsverfahren. Bestimmen Sie zu den Startwerten $x_0 = 0, -1, -2$ jeweils die vier Annäherungen x_1, x_2, x_3, x_4 und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Nullstellen, die Sie durch Auflösen der quadratischen Gleichung erhalten.

Mein Taschenrechner berechnet bei der Auflösung: -0.3819660113 bzw. -2.618033989. Die Funktion aus Aufgabe 3 liefert für diese Funktion die folgenden Ergebnisse:

```
Startwert 0:

[[1, -0.333333333333333],
[2, -0.380952380952381],
[3, -0.381965552178318],
[4, -0.381966011250011]]


Startwert -1:

[[1, 0.000000000000000],
[2, -0.333333333333333],
[3, -0.380952380952381],
[4, -0.381965552178318]]


Startwert -2:

[[1, -3.00000000000000],
[2, -2.66666666666667],
[3, -2.61904761904762],
[4, -2.61803444782168]]
```

5. Berechnen Sie numerisch alle Nullstellen des Polynoms $x^4 - x^3 - 6x^2 + x + 6$.

Erstellen Sie zuerst einen plot mit sage:



Dann rechnen Sie mit dem Programm aus Aufgabe 3 die vier Nullstellen aus, indem Sie günstige Ausgangsintervalle bzw. Startwerte bilden. (Dabei muss man durchaus etwas rumprobieren!)

Es ergibt sich:

-1.664544922250
-1.190909619125
1.097438278655
2.758016262719

6. Berechnen Sie zu n vorgegebenen Punkten im $\mathbb{R}^2$ das Lagrange-Polynom und die natürlichen Splinefunktionen. Verwenden Sie ein Grafikprogramm zum Zeichnen Ihrer Ergebnisse.

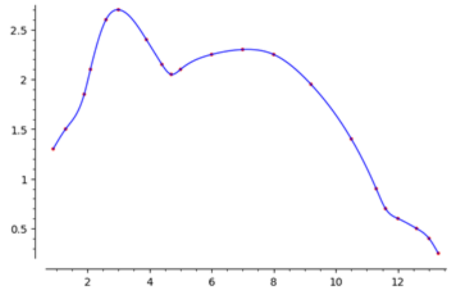
Das folgende Programm nimmt an, dass die Punkte in Form einer zweispaltigen Matrix I gegeben sind und verwendet die Funktion zum Lösen eines tridiagonalen Gleichungssystems aus Aufgabe 2:

```
n = I.nrows()
xx = I.column(0)
y = I.column(1)
dx = [xx[i+1]-xx[i] for i in range (0,n-1)]
al = dx
be = [2*(dx[i]+dx[i+1]) for i in range (0,n-2)]
ga = [dx[i+1] for i in range (0,n-2) ]
de = [6*((y[i+2]-y[i+1])/dx[i+1] - (y[i+1]-y[i])/dx[i]) for i in range (0,n-2) ]

M  = Matrix(RR,[[0 for i in range (0,n)] for i in range (0,n)])

for i in range(1,n-1):
        M[i,i-1] = al[i-1]
        M[i,1+i-1] = be[i-1]
        M[i,2+i-1] = ga[i-1]
M[0,0]= 1
M[n-1,n-1]= 1

# M ist die tridiagonale Koeffizientenmatrix

dd = [0]
for i in range (0,n-2):
    dd.append(de[i])
dd.append(0)

# dd ist der Ergebnisvektor

z = tridiagonal(M,dd,n)

a = [(z[i+1]-z[i])/(6*dx[i]) for i in range (0,n-1)]
b = [z[i]/2 for i in range(0,n-1)]
c = [(y[i+1]-y[i])/dx[i] - 1/6*dx[i]*(z[i+1]+2*z[i]) for i in range (0,n-1)]
d = y

#Der Plot:

P = list_plot(I)
for i in range (0,n-1):
    P += plot(a[i]*(x-xx[i])^3+b[i]*(x-xx[i])^2+c[i]*(x-xx[i])+d[i],xmin = xx[i], xmax = 
xx[i+1])
show(P)
```

Mit den Eingabedaten

```
I = Matrix([[.9,1.3],
[1.3, 1.5],
[1.9, 1.85],
[2.1, 2.1],
[2.6, 2.6],
[3,2.7],
[3.9, 2.4],
[4.4, 2.15],
[4.7, 2.05],
[5,2.1],
[6,2.25],
[7,2.3],
[8,2.25],
[9.2, 1.95],
[10.5, 1.4],
[11.3, .9],
[11.6, .7],
[12,.6],
[12.6, .5],
[13,.4],
[13.3, .25]])
```

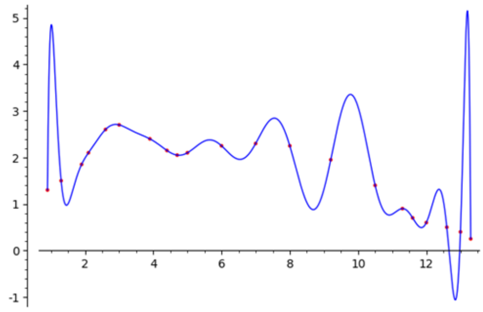
wird das folgende Bild erzeugt:



Jetzt das Programm zur Berechnung des Lagrange-Polynoms: Mit der gleichen Inputmatrix wie zur Splineberechnung wird damit das Lagrangepolynom erzeugt:

```
L = []
for i in range(0,n):
    Z = 1
    N = 1
    for j in range(0,n):
        if (j != i):
            Z *= (x-xx[j])
            N *= (xx[i]-xx[j])
    L.append(Z/N)
LP = 0
for i in range (0,n):
    LP += L[i]*y[i].
```

Und die Eingabedaten des Beispiels von oben liefern dann dieses Bild:



7. Implementieren Sie die Trapezregel und die Simpson'sche Regel zur numerischen Integration. Berechnen Sie damit zu der Tabelle der Normalverteilung im Anhang die jeweils nächste Dezimalstelle. Schätzen Sie vorher ab, wie fein Sie die Unterteilung wählen müssen um möglichst effizient zu sein. Verwenden Sie dabei, dass $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt = 0.5$ ist.

   Berechnen Sie die zweite und vierte Ableitung von $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}$. Wenn Sie die Graphen zwischen 0 und 4 zeichnen, stellen Sie fest, dass der Betrag der Ableitungen jedenfalls kleiner als 0.6 ist. Damit ist der Fehler bei Integration von 0 bis 4 in der Trapezregel $F < 4/12 \cdot h_t^2 \cdot 0.6$, in der Simpsonregel $F < 4/180 \cdot h_s^4 \cdot 0.6$. Wenn $F < 10^{-7}$ sein soll (6 Stellen Genauigkeit) so erhalten wir $h_t < 7 \cdot 10^{-4}$ und $h_s < 0.05$. Damit ergibt sich eine Schrittzahl von ca. 5715 für die Trapezregel und von ca. 80 für die Simpsonregel. Für kürzere Integrationsintervalle entsprechend noch weniger. Probieren Sie aus, dass tatsächlich noch viel weniger Schritte benötigt werden!

Hier die sage Funktionen zur numerischen Berechnung der Integrale:

```
def trapez(f,a,b,n):
    x = [a]
    h = (b-a)/n
    for i in range(0,n+1):
        x.append(a+h*(i+1))
    F = 0
    for i in range(0,n):
        F +=  RR(f(x[i])+f(x[i+1]))
    return RR(F*h/2)


def simpson(f,a,b,n):
    x = [a]
    h = (b-a)/n
    for i in range(0,n):
        x.append(a+h*(i+1))
    F = RR(f(a)+f(b))
    for i in range(1,n):
        if is_even(i):
            F += RR(2*f(x[i]))
        else:
            F += RR(4*f(x[i]))
    return RR(F*h/3)
```

8. Zeigen Sie, dass bei Differenzialgleichungen der Form $y' = f(x)$ das Euler'sche Verfahren der Integration mit Riemann'schen Summen und das Heun'sche Verfahren der Trapezregel entspricht.

$I = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = y(x_{k+1}) - y(x_k)$. Bei Integration mit Hilfe der Riemann'schen Summen erhalten wir $I = y(x_{k+1}) - y(x_k) = h \cdot f(x_k)$, die Lösung der Differenzialgleichung mit dem Euler Verfahren ergibt $y(x_{k+1}) = y(x_k) + f(x_k) \cdot h$. Integrieren wir mit der Trapezregel so ist $I = y(x_{k+1}) - y(x_k) = h \cdot \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$ und die Lösung der Differenzialgleichung mit dem Heun'schen Verfahren ergibt schließlich $y(x_{k+1}) = y(x_k) + \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot h$. Die Ergebnisse stimmen also überein.

9. Implementieren Sie das Euler'sche Polygonzugverfahren, das Heun'sche Verfahren und das Runge-Kutta-Verfahren zur numerischen Lösung von Differenzialgleichungen 1. Ordnung. Bestimmen Sie damit die Kaninchenkurve

$$y'(t) = y(t)\left(1 - 1/1000 \cdot y(t)\right), \quad y(0) = 10,$$

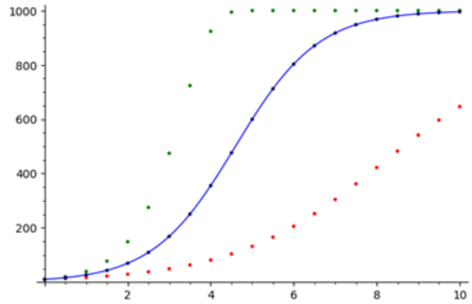
im Intervall [0,10] numerisch. Vergleichen Sie die Werte mit der exakten Lösung.

```
def euler(f,x0,y0,b,n):
    x = [x0]
    h = (b-x0)/n
    for i in range(0,n+1):
        x.append(x0+h*(i+1))
    y =[y0]
    xy = [[x0,y0]]
    for i in range(0,n):
        y.append(RR(y[i]+f(x[i],y[i])))
        xy.append([x[i+1],y[i+1]])
    return xy

def heun(f,x0,y0,b,n):
    x = [x0]
    h = (b-x0)/n
    for i in range(0,n+1):
        x.append(x0+h*(i+1))
    y =[y0]
    xy = [[x0,y0]]
    for i in range(0,n):
        m = RR((f(x[i],y[i])+f(x[i+1],y[i]+f(x[i],y[i]*h)))*h/2)
        y.append(RR(y[i]+m*h))
        xy.append([x[i+1],y[i+1]])
    return xy

def runge(f,x0,y0,b,n):
    x = [x0]
    h = (b-x0)/n
    for i in range(0,n+1):
        x.append(x0+h*(i+1))
    y =[y0]
    xy = [[x0,y0]]
    for i in range(0,n):
        m1 = RR(f(x[i],y[i]))
        m2 = RR(f(x[i]+h/2,y[i]+m1*h/2))
        m3 = RR(f(x[i]+h/2,y[i]+m2*h/2))
        m4 = RR(f(x[i]+h,y[i]+m3*h))
        m = RR(1/6*(m1+2*m2+2*m3+m4))
        y.append(RR(y[i]+m*h))
        xy.append([x[i+1],y[i+1]])
    return xy
```

Die Anwendung auf die Kaninchenkurve

```
be = 0.001
c = log(be*y0/(1-be*y0))

f(x,y) = y*(1-be*y)
x0 = 0
y0 = 10
b = 10

#exakte Lösung
g(x)=exp(x+c)/(be*(exp(x+c)+1))

n = 20
points1 = euler(f,x0,y0,b,n)
points2 = heun(f,x0,y0,b,n)
points3 = runge(f,x0,y0,b,n)

P  = plot(g(x),xmin = 0,xmax = b)
P += list_plot(points1,color = 'green')
P += list_plot(points2,color = 'red')
P += list_plot(points3,color = 'black')

show(P)
```

ergibt das Bild:


1000
800
600
400
200
2
4
6
8
10

http://www.springer.com/978-3-658-26523-6

Mathematik für Informatiker
Ein praxisbezogenes Lehrbuch
Hartmann, P.
2019, XII, 643 S. 186 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-658-26523-6