

Lösungshinweise

Die Lösungshinweise sind unterschiedlich ausführlich gehalten: Detailliert ausgearbeitete Beispiellösungen zeigen auf, wie Argumentationen geführt werden können; sie verstehen sich als Beispiellösungen, nicht als Musterlösungen. Erschließungsfragen zu offenen Aufgaben sollen insbesondere das Weiter-Denken und Weiter-Arbeiten, auch in Lerngruppen, anregen. Bei Aufgaben, die eine Selbstkontrolle ermöglichen (etwa durch das Zeichnen von Funktionsgraphen mit einem CAS), erübrigen sich Lösungen.

Verweise auf Abbildungen und Tabellen beziehen sich grundsätzlich auf die zweite Auflage des Buches. Verweise auf Abbildungen und Tabellen in diesem Dokument sind gesondert gekennzeichnet, etwa mit „Abbildung L.3“. Literaturhinweise beziehen sich wiederum auf das Literaturverzeichnis des Buches.

Online verfügbar unter <https://www.springer.com/de/book/9783662580592>.

Stand: Januar 2020



Lösungshinweise zu Kapitel 1	2
Lösungshinweise zu Kapitel 2	9
Lösungshinweise zu Kapitel 3	15
Lösungshinweise zu Kapitel 4	23
Lösungshinweise zu Kapitel 5	29
Lösungshinweise zu Kapitel 6	33
Lösungshinweise zu Kapitel 7	36
Lösungshinweise zu Kapitel 8	40
Lösungshinweise zu Kapitel 9	46

Lösungshinweise zu Kapitel 1

Aufgabe 1.1

- Die Gleichung $\alpha + \beta = 180^\circ$ lässt sich als funktionaler Zusammenhang deuten: Jedem Wert für α mit $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ wird durch $\alpha + \beta = 180^\circ$ oder $\beta = 180^\circ - \alpha$ genau ein Wert für β zugeordnet (Zuordnungsaspekt). Jede Änderung von α zieht eine Änderung von β nach sich, und zwar nimmt α um den Wert ab, um den β zunimmt, und umgekehrt (Kovariationsaspekt). Der funktionale Zusammenhang kann in unterschiedlicher Weise, mit jeweils unterschiedlichen inhaltlichen Akzentsetzungen beschrieben werden:
 - durch die Gleichungen $\alpha + \beta = 180^\circ$ oder $\beta = 180^\circ - \alpha$,
 - durch eine Wertetabelle, die allerdings immer nur eine beschränkte Anzahl von Werten erfassen kann,
 - durch einen Graphen,
 - verbal: „Je größer α , desto kleiner β .“ oder „Wenn α größer wird, dann wird β um genau diesen Wert kleiner.“ (Beide Beschreibungen erfassen den Kovariationsaspekt, die zweite deutlich präziser als die erste.)
- Der Flächeninhalt A eines Parallelogramms mit Grundlinie g und Höhe h ist durch $A = gh$ gegeben. Diese Gleichung lässt sich in zweifacher Weise als funktionaler Zusammenhang deuten. Hält man g konstant, kann man h verändern und untersuchen, wie sich dies auf A auswirkt: $A(h) = gh$. Hält man h konstant, kann man g verändern und untersuchen, wie sich dies auf A auswirkt: $A(g) = gh$. Beide Zusammenhänge lassen sich gut mit einem DGS darstellen. Zuordnungsaspekt und Kovariationsaspekt ergeben sich jeweils wie oben.
- Der Umfang U eines Kreises kann in Abhängigkeit vom Radius oder Durchmesser betrachtet werden: $U(r) = 2\pi r$ oder $U(d) = d\pi$. Jedem Wert für r oder d wird dadurch genau ein Wert für U zugewiesen (Zuordnungsaspekt). Jede Veränderung von r oder d zieht auch eine Veränderung von U nach sich (Kovariationsaspekt). Der Zusammenhang beider Änderungen wird in Aufgabe 3.7 näher beschrieben.
- Der Flächeninhalt A eines Kreises kann in Abhängigkeit vom Radius betrachtet werden: $A(r) = r^2\pi$. Jedem Wert für r wird dadurch genau ein Wert für A zugewiesen (Zuordnungsaspekt). Jede Veränderung von r zieht auch eine Veränderung von A nach sich (Kovariationsaspekt). Der Zusammenhang beider Änderungen kann verbal in unterschiedlicher Weise beschrieben werden: „Je größer r , desto größer auch A .“ oder „Wenn man den Radius eines Kreises ver- n -facht, dann wird

der Flächeninhalt n^2 -mal so groß.“ (wobei die zweite Beschreibung den Kovariationsaspekt präziser erfasst als die erste). Mit Hilfe eines DGS kann der Kovariationsaspekt visualisiert oder numerisch dargestellt werden.

Aufgabe 1.2

- Bei der Deutung des Graphen in Abbildung 1.20 können folgende Erschließungsfragen helfen:
 - Welche Handlungen können den Wasserstand in der Badewanne beeinflussen? In welcher Weise?
 - Was bedeutet ein steiler bzw. flacher Anstieg oder Abfall des Graphen?
 - Was bedeutet ein horizontaler Verlauf des Graphen?
 - Was bedeutet es, wenn der Graph die Zeit-Achse schneidet?Weitere Aufgaben dieser Art finden sich bei Herget, Jahnke & Kroll (2001).
- Zur Darstellung des Bewegungsprofils wird im Koordinatensystem die Zeit als unabhängige Variable nach rechts und die Entfernung zur Wohnung als abhängige Variable nach oben aufgetragen.
 - Wo sollte der Graph beginnen?
 - Wie äußert sich ein schnelles bzw. langsames Laufen im Graphen?
 - Wie äußert es sich im Graphen, wenn man im Kreis um den Wohnort läuft?
 - Wie äußert sich ein Warten an der Bahnschranke im Graphen?
 - Wie äußert es sich im Graphen, wenn die momentane Entfernung von der Wohnung größer ist als die Entfernung des Zielortes von der Wohnung?

Aufgabe 1.3

- Jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ werden ihre Vielfachen zugeordnet. Diese Zuordnung ist nicht eindeutig, da jedem n die Vielfachen $n, 2n, 3n, 4n, \dots$ zugeordnet werden, also unendlich viele Zahlen.
- Jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ wird ihre Vielfachenmenge zugeordnet. Diese Zuordnung ist eindeutig, da jedem n die Menge $\{n, 2n, 3n, 4n, \dots\}$, also genau ein Objekt, zugeordnet wird. Im Vergleich zum vorausgehenden Beispiel wird hier deutlich, dass durch eine geeignete Zusammenfassung (Kategorisierung) von Objekten zu einer Menge (hier: der Vielfachen von n zur Menge aller Vielfachen von n) eine neue Zuordnung konstruiert werden kann, die eindeutig ist.

- Jeder Strecke der Ebene wird ihre Mittelsenkrechte zugeordnet. Diese Zuordnung ist eindeutig, da sich zu den beiden Endpunkten der Strecke eindeutig die Mittelsenkrechte konstruieren lässt.
- Jeder Geraden der Ebene wird eine Senkrechte zugeordnet. Diese Zuordnung ist nicht eindeutig, da zu jeder Geraden unendlich viele Senkrechte existieren. Im Vergleich zum vorausgehenden Beispiel bewirkt die Abschwächung der Bedingung (statt der Mittelsenkrechten wird nur eine Senkrechte gefordert), dass die Zuordnung nicht mehr eindeutig ist.

Aufgabe 1.4

- Für eine dreizeilige Zahlenmauer mit den Startzahlen a, b, c gilt für die Zielzahl z die Gleichung $z = a + 2b + c$. Hält man b und c konstant, lässt sich z in Abhängigkeit von a betrachten, und man erhält die Gleichung einer linearen Funktion:

$$z(a) = a + \underbrace{2b+c}_{\text{konstant}} = a + k \quad \text{mit } k = 2b + c$$

Jedem Wert für a wird genau ein Wert für z zugeordnet (Zuordnungsaspekt), und jede Änderung von a zieht eine Änderung von z nach sich (Kovariationsaspekt). In ähnlicher Weise kann z auch in Abhängigkeit von b und c betrachtet werden:

$$z(b) = a + 2b + c = 2b + \underbrace{a+c}_{\text{konstant}} \quad \text{und} \quad z(c) = a + 2b + c = c + \underbrace{2b+a}_{\text{konstant}}$$

- Zur Untersuchung der Frage, wie sich eine Änderung von a oder b auf eine Änderung von z auswirkt: Eine Erhöhung von a um 1 bewirkt eine Erhöhung von z um 1; eine Erhöhung von b um 1 bewirkt hingegen eine Erhöhung von z um 2:

$$z(a+1) = a+1+2b+c = (a+2b+c)+1 = z(a)+1$$

$$z(b+1) = a+2(b+1)+c = (a+2b+c)+2 = z(b)+2$$

Eine Verdoppelung von a bewirkt eine additive Erhöhung von z um a , eine Verdoppelung von b hingegen eine additive Erhöhung von z um $2b$:

$$z(2a) = 2a+2b+c = (a+2b+c)+a = z(a)+a$$

$$z(2b) = a+2(2b)+c = (a+2b+c)+2b = z(b)+2b$$

Insbesondere zeigt dies, dass sich beim Vertauschen der Startzahlen die Zielzahl ändern kann.

Eine Erhöhung von z um 1 kann durch eine Erhöhung von a um 1 oder von b um $\frac{1}{2}$ erreicht werden. Beschränkt man sich – wie in der Grundschule üblich – auf Einsetzungen aus $\mathbb{N}$, so kann durch eine Veränderung von b nur eine Veränderung von z um Vielfache von 2 erzielt werden.

- Wenn in einer Zahlenmauer mit drei Zeilen die Basiszahlen drei aufeinander folgende Zahlen sind, also die Struktur a , $a+1$ und $a+2$ aufweisen, dann gilt $z(a) = 4a + 4 = 4(a+1)$. Die Zielzahl ist also das Vierfache der mittleren Basiszahl und insbesondere stets durch 4 teilbar. Eine Erhöhung aller drei Basiszahlen um 1 bewirkt eine Erhöhung der Zielzahl um 4:

$$z(a+1) = 4(a+1) + 4 = 4a + 8 = z(a) + 4$$

Wenn eine Zahlenmauer symmetrisch ist, die drei Basiszahlen also die Struktur a , b , a besitzen, so gilt $z = 2(a+b)$.

Für eine didaktische Einordnung derartiger Aufgabenformate siehe Wittmann (2016) oder ausführlicher Steinweg (2013).

Aufgabe 1.5

Der Beweis umfasst zwei Schritte:

- Wenn jede Parallele zur y -Achse eine Kurve in höchstens einem Punkt schneidet, dann ist diese Kurve der Graph einer Funktion. Diese Aussage kann wie folgt gezeigt werden: Laut Voraussetzung schneidet zu jedem $x_0 \in D$ die Parallele zur y -Achse, die die x -Achse in x_0 schneidet, den Funktionsgraphen in höchstens einem Punkt. Schneidet sie den Funktionsgraphen nicht, so gilt $x_0 \notin D$. Schneidet sie den Funktionsgraphen in $(x_0 | y_0)$, so gilt $f(x_0) = y_0$ und $x_0 \in D$ wird eindeutig der Wert $y_0 \in \mathbb{R}$ zugeordnet. Folglich ist diese Zuordnung nach Definition 1.2 eine Funktion.
- Wenn es eine Parallele zur y -Achse gibt, die die Kurve in zwei oder mehr Punkten schneidet, dann ist diese Kurve kein Funktionsgraph. Diese Aussage kann wie folgt gezeigt werden: Die beiden Schnittpunkte werden mit $(x_0 | y_1)$ und $(x_0 | y_2)$ bezeichnet. Es gilt $f(x_0) = y_1$ und $f(x_0) = y_2$, was bedeutet, dass $x_0 \in D$ die beiden Funktionswerte y_1 und y_2 zugeordnet werden, womit die Voraussetzung von Definition 1.2 nicht erfüllt ist. Die betrachtete Kurve ist also keine Funktion.

Beispiele für Kurven, die dem Kriterium nicht genügen und damit keine Funktionsgraphen darstellen, sind

- der Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ oder

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{für } -r \leq x \leq r,$$

- die um 90° im Uhrzeigersinn gedrehte Parabel mit der Gleichung $y^2 = x$ oder

$$y = \pm \sqrt{x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Dass diese Gleichungen keine Funktionen angeben, sieht man schon auf der algebraischen Ebene daran, dass sich beide Gleichungen nicht eindeutig nach y auflösen lassen,

sondern Fallunterscheidungen auftreten: Es gibt demnach $x \in D$, denen zwei y -Werte zugeordnet werden.

Aufgabe 1.6

- Die Ganzzahlfunktion ordnet jedem $x \in \mathbb{R}$ die durch $z \leq x < z+1$ eindeutig bestimmte ganze Zahl z zu. Statt $z(x)$ schreibt man auch $\lfloor x \rfloor$.

$$\lfloor x \rfloor = \max_{k \in \mathbb{Z}, k \leq x} (k) = \max \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$$

So gilt:

$$\lfloor 2,78 \rfloor = 2, \lfloor 4 \rfloor = 4 \text{ und } \lfloor -2,78 \rfloor = -3$$

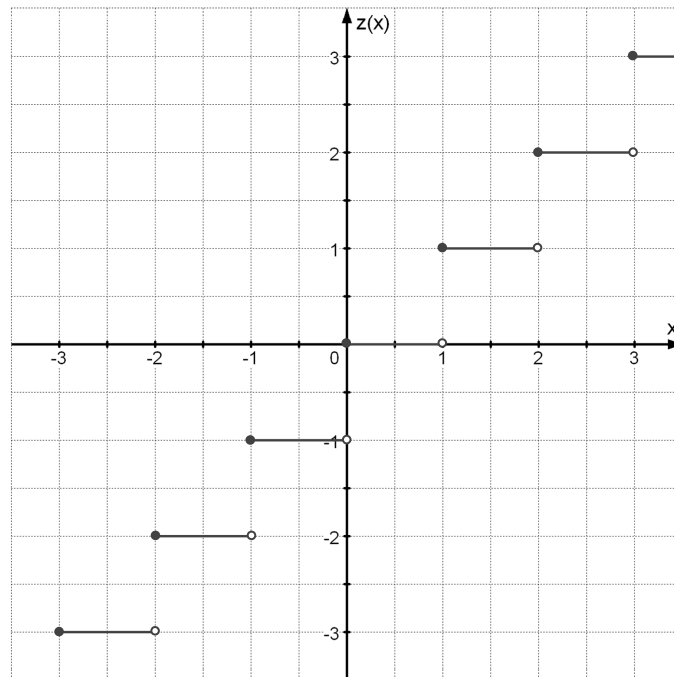
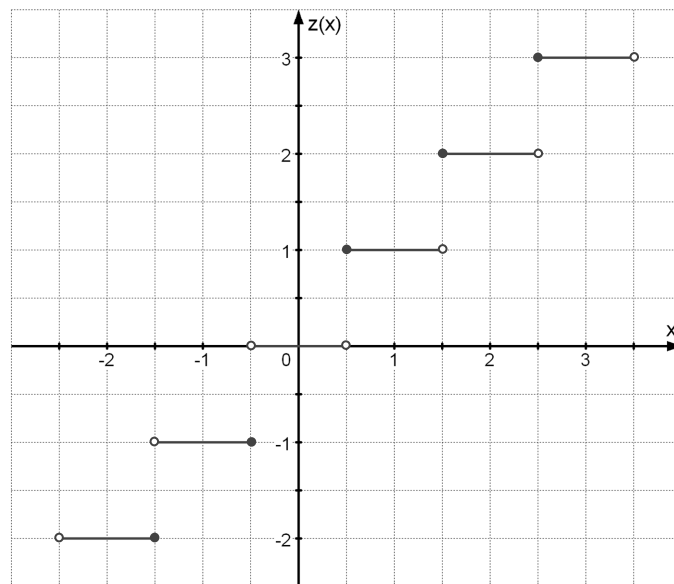
Das „Abschneiden der Nachkommastellen“ ist nur für $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine treffende Bezeichnung. Eine Wertetabelle kann einzelne Beispiele erfassen, während die Darstellung als Graph das Prinzip der Ganzzahlfunktion veranschaulicht (Abb. L.1).

- Die (kaufmännische) Rundungsfunktion ordnet jedem $x \in \mathbb{R}$ eine eindeutig bestimmte ganze Zahl z zu. Beispiel: $2,5 \dots \approx 3$. Bei $x \in \mathbb{R}_{<0}$ wird in gleicher Weise dem Betrag nach gerundet. Beispiele: $-2,499 \dots \approx -2$ und $-2,5 \dots \approx -3$. Der Graph der Rundungsfunktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung (Abb. L.2). Für $x \in \mathbb{R}_{<0}$ gilt $z(x) = \lfloor x + 0,5 \rfloor$ unter Verwendung der Ganzzahlfunktion (s. oben).
- Die Eulersche φ -Funktion ordnet jedem $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen aus $\{1, \dots, n\}$ zu. Eine Funktionsgleichung lässt sich wie folgt angeben:

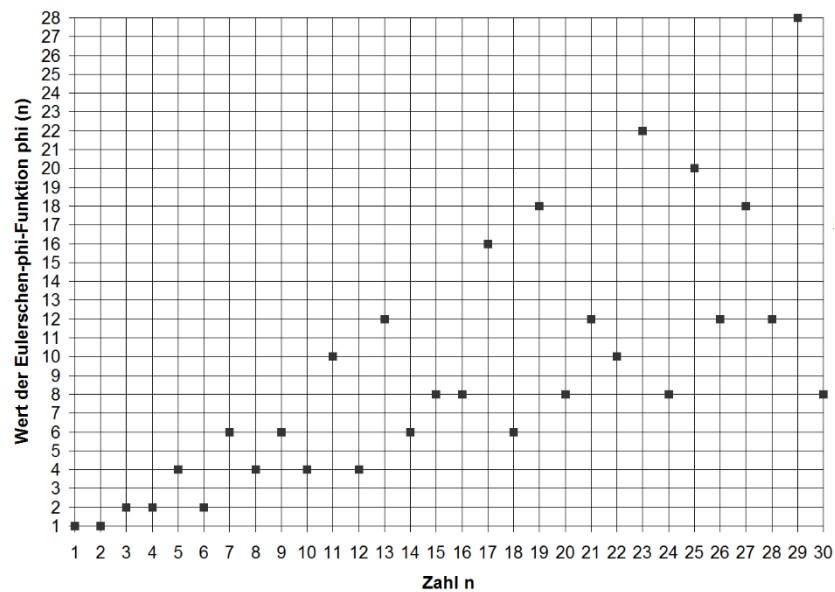
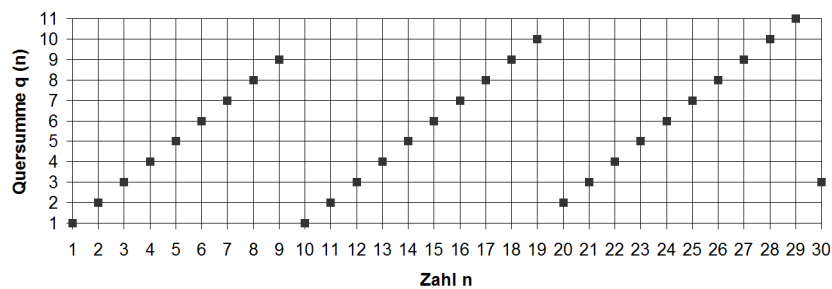
$$\varphi(n) = \left| \{a \in \mathbb{N}, 1 \leq a \leq n \mid \text{ggT}(a, n) = 1\} \right|$$

Für zwei teilerfremde Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$ und für eine Primzahl p gilt $\varphi(p) = p - 1$. Auf diese Weise kann man $\varphi(n)$ auch für größere n ermitteln. Bei der Eulerschen φ -Funktion sind die Darstellungen als Wertetabelle (Tab. L.1) und als Graph (Abb. L.3) sinnvoll und aussagekräftig.

- Die Funktion Quersumme ordnet jedem $n \in \mathbb{N}$ die Quersumme $q(n)$ zu. Aufschlussreich ist die Darstellung als Graph (Abb. L.4). Das auftretende Muster lässt sich in Bezug auf das dezimale Stellenwertsystem erklären.

**Abb. L.1** Graph der Ganzzahlfunktion**Abb. L.2** Graph der Rundungsfunktion

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6

Tab. L.1 Wertetabelle der Eulerschen φ -Funktion**Abb. L.3** Graph der Eulerschen φ -Funktion**Abb. L.4** Graph zur Funktion Quersumme

Aufgabe 1.7

Der Einkommensteuertarif ist als eine abschnittsweise definierte Funktion gegeben.

- Der erste Abschnitt des Einkommensteuertarifs wird durch eine konstante Funktion beschrieben, der zweite und dritte Abschnitt jeweils durch eine quadratische Funktion sowie der vierte und fünfte Abschnitt jeweils durch eine lineare Funktion.
- Wenn man eine passende Darstellung wählt, erkennt man die Knicke an den Übergangsstellen und dass der zweite und dritte Abschnitt Graphen quadratischer Funktionen sind. Der Funktionsgraph wird mit wachsendem Einkommen zunehmend steiler, was ausdrückt, dass der Steuersatz mit wachsendem Einkommen steigt („Progression“).

Lösungshinweise zu Kapitel 2**Aufgabe 2.1**

Im Folgenden wird mit $w(n)$ die Anzahl der für das n -te Bauwerk benötigten Würfel und mit $s(n)$ die Anzahl der sichtbaren Seitenflächen des n -ten Bauwerks bezeichnet. Dabei werden auch die Bodenflächen mitgezählt; das Bauwerk kann man sich frei schwebend im Raum vorstellen oder auf einer Glasplatte stehend.

Für Abbildung 2.11 links gilt $w(n) = n$, die Gleichung einer proportionalen Funktion. Betrachtung unter dem Kovariationsaspekt: additiv $w(n+1) = n+1 = w(n)+1$ und multiplikativ $w(2n) = 2n = 2 \cdot w(n)$.

An der Boden- und Deckfläche ist jeweils eine Würfelseite sichtbar und an jeder der vier Seitenflächen sind jeweils n Würfelseiten sichtbar: $s(n) = 2 + 4n$. Betrachtung unter dem Kovariationsaspekt: $s(n+1) = 2 + 4(n+1) = (2 + 4n) + 4 = s(n) + 4$. Die Differenz $s(n+1) - s(n)$ ist unabhängig von n . Die Erhöhung von n um 1 bewirkt eine Erhöhung von $s(n)$ um 4 (beim Aufsetzen eines weiteren Würfels sind 4 zusätzliche Seitenflächen sichtbar).

Für Abbildung 2.11 Mitte gilt $w(n) = n^2$, die Gleichung einer quadratischen Funktion. Betrachtung unter dem Kovariationsaspekt:

$$w(n+1) = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = w(n) + 2n + 1$$

$$w(2n) = (2n)^2 = 4n^2 = 4 \cdot w(n)$$

$$w(kn) = (kn)^2 = k^2 n^2 = k^2 \cdot w(n)$$

Die Erhöhung von n um 1 bewirkt eine Erhöhung von $w(n)$ um $2n+1$; eine Verdoppelung von n bewirkt eine Vervierfachung von $w(n)$, oder allgemein formuliert, eine Ver- k -fachung von n bewirkt eine Ver- k^2 -fachung von $w(n)$.

An der Boden- und Deckfläche sind jeweils n^2 Würfelseiten und an jeder der 4 Seitenflächen jeweils n Würfelseiten sichtbar, so dass $s(n) = 2n^2 + 4n$ gilt.

Für die Würfelbauten in Abbildung 2.11 rechts gilt $w(n) = n^3$, die Gleichung einer Potenzfunktion vom Grad 3. Betrachtung unter dem Kovariationsaspekt:

$$w(2n) = (2n)^3 = 8n^3 = 8 \cdot w(n)$$

$$w(kn) = (kn)^3 = k^3 n^3 = k^3 \cdot w(n)$$

Eine Verdoppelung von n bewirkt eine Verachtfachung von $w(n)$, oder allgemein formuliert, eine Ver- k -fachung von n bewirkt eine Ver- k^3 -fachung von $w(n)$.

An jeder der sechs Seitenflächen sind n^2 Würfelseiten sichtbar, so dass $s(n) = 6n^2$.

Aufgabe 2.2

Im Folgenden wird stets der erste Summand mit x bezeichnet, so dass der Term $48 - x$ für den zweiten Summanden steht. Die Zielfunktionen sind jeweils quadratisch und es wird mit deren Symmetrieeigenschaften argumentiert (s. Abschn. 4.2).

- Die Zahl 48 soll so in zwei positive Summanden zerlegt werden, dass deren Produkt möglichst groß wird: $P(x) = x(48 - x)$, wobei $0 \leq x \leq 48$. Dies ist die Gleichung einer quadratischen Funktion. Die beiden Nullstellen $x = 0$ und $x = 48$ von P kann man direkt ablesen (ein Produkt ist genau dann gleich 0, wenn mindestens einer der beiden Faktoren gleich 0 ist). Der Graph von P ist eine nach unten geöffnete Parabel, und die x -Koordinate des Scheitels ist $x = 24$. Folglich nimmt P für $x = 24$ das lokale Extremum 576 an. Die beiden gesuchten Summanden lauten jeweils 24.
- Die Zahl 48 soll so in zwei positive Summanden zerlegt werden, dass die Summe der Quadrate der beiden Zahlen möglichst groß wird: $S(x) = x^2 + (48 - x)^2$. Der Graph der quadratischen Funktion S ist eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel bei $x = 24$; S besitzt keine lokalen Maxima. Deshalb liegen die Maxima am Rand der sinnvollen Einsetzungen: Die gesuchten Summanden lauten 0 und 48 mit dem Extremwert $S(0) = S(48) = 2304$, oder, wenn man sich auf positive Zahlen beschränkt, 1 und 47 mit dem Extremwert $S(1) = S(47) = 2210$. Die beiden Randextrema liefern jeweils dieselben Zerlegungen der Zahl 48.

Die Zahl 48 soll so in zwei positive Summanden zerlegt werden, dass die Summe der Quadrate der beiden Zahlen möglichst klein wird. Wie beim vorausgehenden

Beispiel ausgeführt, liegt das lokale Minimum bei $x = 24$ mit $S(24) = 1152$. Folglich lauten die beiden gesuchten Summanden jeweils 24.

- Die Zahl 48 soll so in zwei positive Summanden zerlegt werden, dass die Summe der Quadrate der beiden Zahlen vermehrt um das Produkt der beiden Zahlen möglichst groß wird: $S(x) = x^2 + (48 - x)^2 + x(48 - x) = x^2 - 48x + 2304$. Der Graph der quadratischen Funktion S ist eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel bei $x = 24$; S besitzt keine lokalen Maxima. Deshalb liegen die Maxima am Rand der sinnvollen Einsetzungen: Die gesuchten Summanden lauten 0 und 48 mit dem Extremwert $S(0) = S(48) = 2304$, oder, wenn man sich auf positive Zahlen beschränkt, 1 und 47 mit dem Extremwert $S(1) = S(47) = 2257$.

Die Zahl 48 soll so in zwei positive Summanden zerlegt werden, dass die Summe der Quadrate der beiden Zahlen vermehrt um das Produkt der beiden Zahlen möglichst klein wird. Das lokale Minimum liegt bei $x = 24$ mit $S(24) = 1728$. Folglich lauten die beiden gesuchten Summanden jeweils 24.

Aufgabe 2.3

Wird bei einem Rechteck mit dem Flächeninhalt A eine Seite mit x bezeichnet, so beträgt die Länge der zweiten Seite

$$\frac{A}{x}.$$

Für den Umfang $u(x)$ des Rechtecks ergibt sich die Gleichung einer rationalen Funktion (s. Abschn. 7):

$$u(x) = 2\left(x + \frac{A}{x}\right) = 2\frac{x^2 + A}{x}$$

Ist das Rechteck ein Quadrat, so gilt $x = \sqrt{A}$ und $u(x) = 4\sqrt{A}$. Es bleibt nachzuweisen, dass die Funktion u in $x = \sqrt{A}$ ein absolutes Minimum annimmt (für $x \in \mathbb{R}_{>0}$).

Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $x_2 > x_1$ gilt:

$$\begin{aligned} u(x_2) - u(x_1) &= 2\frac{x_2^2 + A}{x_2} - 2\frac{x_1^2 + A}{x_1} = 2\frac{x_1x_2^2 + Ax_1 - x_1^2x_2 - Ax_2}{x_1x_2} = \\ &= 2\frac{(x_2 - x_1)x_1x_2 - (x_2 - x_1)A}{x_1x_2} = 2\frac{(x_2 - x_1)(x_1x_2 - A)}{x_1x_2} \end{aligned}$$

Wegen $x_1x_2 > 0$ und $x_2 - x_1 > 0$ bestimmt der Term $x_1x_2 - A$ das Vorzeichen des letzten Quotienten und damit von $u(x_2) - u(x_1)$:

$$x_1x_2 - A \begin{cases} < 0 & \text{für } x_1, x_2 < \sqrt{A} \\ > 0 & \text{für } x_1, x_2 > \sqrt{A} \end{cases} \quad \text{und} \quad u(x_2) - u(x_1) \begin{cases} < 0 & \text{für } x_1, x_2 < \sqrt{A} \\ > 0 & \text{für } x_1, x_2 > \sqrt{A} \end{cases}$$

Folglich ist u in $]-\infty; \sqrt{A}]$ streng monoton fallend und in $[\sqrt{A}; \infty[$ streng monoton wachsend und besitzt damit an der Stelle $x = \sqrt{A}$ ein lokales Minimum, das im betrachteten Bereich $\mathbb{R}_{>0}$ aufgrund der Monotonieeigenschaften zugleich auch ein absolutes Minimum ist.

Die Aufgabe zeigt die Grenzen einer Behandlung von Funktionen ohne den Kalkül der Analysis. Der Nachweis, dass ein lokales Minimum vorliegt, erfordert nicht nur aufwändige algebraische Umformungen und Abschätzungen, sondern es geht auch bereits vorab ein, dass ein lokales Minimum an der Stelle $x = \sqrt{A}$ vorliegt (aufgrund des Wissens um den geometrischen Sachkontext). Im Kalkül der Analysis kann auch die Stelle, an der ein lokales Extremum liegt, mühelos ermittelt werden.

Der Nachweis, dass das Quadrat unter allen inhaltsgleichen Rechtecken den kleinsten Umfang hat, lässt sich natürlich auch direkt durch eine Abschätzung zeigen. Werden die Rechteckseiten mit a und b sowie die Quadratseiten mit c bezeichnet, dann gilt $ab = c^2$ wegen der Inhaltsgleichheit. Für den Umfang von Rechteck und Quadrat erhält man $U_R = 2(a+b)$ und $U_Q = 4c$. Es ist zu zeigen, dass stets $U_R \geq U_Q$ gilt.

$$2(a+b) \geq 4c$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

$$a^2 - 2a + b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

Da a und b positiv sind, ist das Quadrieren beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile eine Äquivalenzumformung und man erhält eine Kette äquivalenter Ungleichungen. Da die unterste Ungleichung $(a-b)^2 \geq 0$ immer gilt (s. Abschn. 4), ist auch die zu zeigende Ungleichung $2(a+b) \geq 4c$ stets erfüllt.

Aufgabe 2.4

Es gilt $l = 2a + 3b$ und weiter $b = \frac{1}{3}l - \frac{2}{3}a$. Der Flächeninhalt A der gesamten Weide wird nun in Abhängigkeit von a betrachtet: $A(a) = ab = a\left(\frac{1}{3}l - \frac{2}{3}a\right)$. Dies ist die Gleichung einer quadratischen Funktion mit den Nullstellen $a = 0$ und $a = \frac{1}{2}l$, die für $a = \frac{1}{4}l$ ein lokales Maximum mit dem Wert $A\left(\frac{1}{4}l\right) = \frac{1}{24}l^2$ annimmt (da der Graph von A eine nach unten geöffnete Parabel ist, ist die x -Koordinate des Scheitels das arithmetische Mittel der beiden Nullstellen). Aus $a = \frac{1}{4}l$ folgt $b = \frac{1}{6}l$. Es gilt $a:b = 3:2$. Dies ist das umgekehrte Verhältnis der Koeffizienten von a und b in der Gleichung $l = 2a + 3b$, die wiederum angeben, wie oft die Strecken a und b in der gesamten Umzäunung auftreten.

Aufgabe 2.5

Die beiden Seiten des Rechtecks in Abbildung 2.12 rechts werden mit a und b bezeichnet, wobei $b \leq a$ gelten soll, um Fallunterscheidungen zu vermeiden.

- Die beiden Dreiecke oben und unten sind rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten x und $a - x$, also kongruent; folglich sind auch ihre Hypotenusen gleich lang. Die beiden Dreiecke links und rechts sind rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten x und $b - x$, also kongruent; folglich sind auch ihre Hypotenusen gleich lang. Die entstehende Figur ist ein Viereck, in dem je zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, also ein Parallelogramm.
- Um die Situation besser zu verstehen, sind vorab zwei Aktivitäten hilfreich:
 - die Darstellung mit einem DGS, die ein Variieren von a und b und eine Berechnung der Flächeninhalte erlaubt,
 - das Betrachten von Grenzfällen, insbesondere $x = b$ und $a = b$ (das gegebene Rechteck ist ein Quadrat).

Die Parallelogrammfläche kann durch Subtraktion der vier Dreiecksflächen von der Rechtecksfläche ermittelt werden:

$$A(x) = ab - x(a - x) - x(b - x) \text{ mit } 0 \leq x \leq b$$

Durch Umformung und quadratische Ergänzung erhält man:

$$\begin{aligned} A(x) &= 2x^2 - (a+b)x + ab = \\ &= 2\left(x^2 - \frac{1}{2}(a+b)x + \left(\frac{1}{4}(a+b)\right)^2\right) - 2\left(\frac{1}{4}(a+b)\right)^2 + ab = \\ &= 2\left(x - \frac{1}{4}(a+b)\right)^2 + \frac{3}{4}ab - \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{8}b^2 \end{aligned}$$

Die Funktion A nimmt für $x = \frac{1}{4}(a+b)$ ein lokales Minimum an. Zu prüfen ist, ob es aufgrund der Rahmenbedingung $0 \leq x \leq b$ eine Lösung des Problems darstellt oder ein Randextremum vorliegt. Da $\frac{1}{4}(a+b) > 0$, bleibt $\frac{1}{4}(a+b) \leq b$ zu prüfen. Dies gilt für $a \leq 3b$. In diesem Fall löst das lokale Minimum das Problem. Im Fall $a > 3b$ müssen die beiden Ränder $x = 0$ und $x = b$ betrachtet werden. $A(0) = ab$ gibt den Flächeninhalt des Rechtecks an (absolutes Maximum) und ist damit sicher größer als $A(b) = 2b^2 - ab$. Folglich wird für $a > 3b$ der Flächeninhalt für $x = b$ minimal (Randextremum). Zusammenfassend bedeutet dies:

$$x_{\min} = \begin{cases} \frac{1}{4}(a+b) & \text{für } a \leq 3b \\ b & \text{für } a > 3b \end{cases}$$

Im Grenzfall $a = 3b$ liefern beide Terme für $x_{\min}$ denselben Wert b .

- Für das Minimum des Flächeninhalts bedeutet dies:

$$A_{\min} = \begin{cases} A\left(\frac{1}{4}(a+b)\right) = \frac{3}{4}ab - \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{8}b^2 & \text{für } a \leq 3b \\ A(b) = b^2 & \text{für } a > 3b \end{cases}$$

Im Grenzfall $a = 3b$ nehmen beide Terme für $A_{\min}$ denselben Wert b^2 an.

Aufgabe 2.6

- Betrachtet man die Entfernung des Wohnorts vom Arbeitsort als unabhängige Variable und die Höhe der Entfernungspauschale als abhängige Variable, dann erhält man für alle Modelle nach Tabelle 2.3 abschnittsweise definierte lineare Funktionen. Eine Besonderheit besteht im 2007 eingeführten Modell, dass dort vom 20. zum 21. Entfernungskilometer ein Sprung des Graphen auftritt.
- Um die Auswirkungen der Entfernungspauschale zu verstehen und insbesondere zu überprüfen, in welchem Umfang sie die tatsächlichen Kosten berücksichtigt, müssen Sie die Kosten für verschiedene Verkehrsmittel (zu Fuß, mit dem Fahrrad, mit dem PKW, mit öffentlichen Verkehrsmitteln, ...) im Sinne einer deskriptiven Modellierung ermitteln. Weiter spielt natürlich der individuelle Steuersatz eine zentrale Rolle (vgl. Bsp. 1.13 mit Abb. 1.14 und Aufg. 1.7).
- Informationen zur Diskussion um die Wirkung einer Entfernungspauschale finden Sie unter <https://de.wikipedia.org/wiki/Entfernungspauschale> [02.03.2019].

Aufgabe 2.7

- Mögliche Leitfragen sind:
 - Wie sieht die Preisgestaltung für eine Familie aus? Wo liegt der Preis für ein Familienticket? Ist er so teuer wie zwei Erwachsenentickets, wie zwei Erwachsene mit einem Kind, ...?
 - Wie ist die Preisgestaltung für Mehrfachtickets (Zehnerkarten, Tageskarten, Monatskarten, Saison- oder Jahreskarten)? Ab wie vielen Einzeltickets lohnen sich diese jeweils?
- Mögliche Leitfragen sind: Was spricht für eine (monatliche oder jährliche) Pauschale? In welchem Maß soll berücksichtigt werden, wie viele Bücher jemand ausleiht? Was spricht für eine Aufnahmegebühr (eine einmalige Pauschale)?

Lösungshinweise zu Kapitel 3

Aufgabe 3.1

- Da der Schnittpunkt $(x_S | y_S)$ sowohl zum Graphen von f als auch zum Graphen von g gehört, gilt $y_S = f(x_S)$ und $y_S = g(x_S)$. Dies führt auf ein Gleichungssystem für die beiden Unbekannten x_S und y_S , das nach dem Gleichsetzungsverfahren gelöst werden kann: $f(x_S) = g(x_S)$. Dieser Ansatz steht hinter dem bekannten „Gleichsetzen“ der Funktionsterme. In der Praxis lässt man meistens die Indizierung der Variablen als x_S und y_S weg und schreibt kurz x und y .
- Sind f und g lineare Funktionen, gilt also für ihre Gleichungen $f(x) = a_1x + b_1$ und $g(x) = a_2x + b_2$ mit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, dann führt der beschriebene Ansatz auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_S &= a_1x_S + b_1 \\ y_S &= a_2x_S + b_2 \end{aligned}$$

für die beiden Unbekannten x_S und y_S . Das Gleichsetzungsverfahren mündet in die Lösung der Gleichung $a_1x_S + b_1 = a_2x_S + b_2$. Hieraus folgt unter der Bedingung, dass $a_1 \neq a_2$ beziehungsweise $a_1 - a_2 \neq 0$ gilt,

$$x_S = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$$

und weiter

$$y_S = a_1x_S + b_1 = a_1 \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} + b_1 \quad \text{oder} \quad y_S = a_2x_S + b_2 = a_2 \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} + b_2.$$

Für $a_1 = a_2$ ist obige Umformung nicht zulässig. In diesem Fall besitzt das lineare Gleichungssystem folgende Struktur:

$$\begin{aligned} y_S &= a_1x_S + b_1 \\ y_S &= a_1x_S + b_2 \end{aligned}$$

Wenn $b_1 = b_2$, liegt zweimal dieselbe Gleichung vor und das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen (die beiden Geraden sind identisch). Wenn $b_1 \neq b_2$, hat es keine Lösung (die beiden Geraden sind parallel, aber nicht identisch).

Aufgabe 3.2

- Wenn sich die beiden Graphen in einem rechten Winkel schneiden, dann sind die eingezeichneten Steigungsdreiecke ähnlich (Abb. L.5), und es gilt:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{g(x_1) - g(x_2)} = -\frac{x_2 - x_1}{g(x_2) - g(x_1)} \quad \text{oder} \quad a_1 = -\frac{1}{a_2}$$

Letzteres ist äquivalent zu $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Wenn umgekehrt $a_1 \cdot a_2 = -1$ gilt, dann folgt für das Verhältnis der Katheten der eingezeichneten Steigungsdreiecke die Beziehung

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_1}{g(x_1) - g(x_2)},$$

und die Steigungsdreiecke sind ähnlich. Da entsprechende Winkel in ähnlichen Dreiecken jeweils gleich groß sind, ergänzen sich die beiden Winkel am Schnittpunkt zu 90° , und die beiden Geraden schneiden sich in einem rechten Winkel.

- Die Gleichung der Senkrechten zur Geraden mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$ im Punkt $(-12 | -5)$ lautet $g(x) = -3x - 41$.

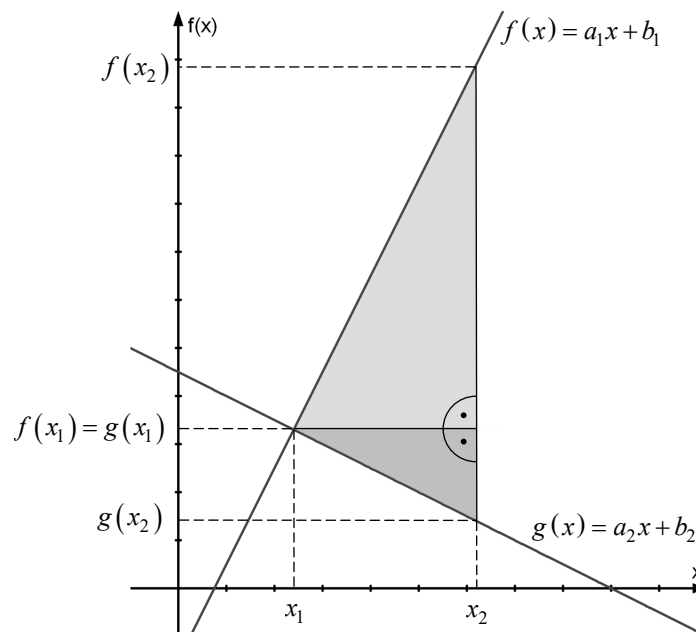


Abb. L.5 Steigungsdreiecke der Graphen zweier linearer Funktionen, die einen rechten Winkel einschließen

- Gleichung der Senkrechten zur Geraden mit der Gleichung $f(x) = a_1x + b_1$ im Punkt $(x_0 | y_0)$: Sofern $a_1 \neq 0$, muss gelten (s. oben)

$$a_2 = -\frac{1}{a_1}$$

und wegen $y_0 = g(x_0)$ weiter

$$y_0 = a_2x_0 + b_2 = -\frac{1}{a_1}x_0 + b_2 \text{ beziehungsweise } b_2 = y_0 + \frac{1}{a_1}x_0.$$

Hieraus folgt für die Gleichung der Senkrechten:

$$g(x) = a_2x + b_2 = -\frac{1}{a_1}x + y_0 + \frac{1}{a_1}x_0.$$

Für $a_1 = 0$ ist die dazu senkrechte Gerade mit der Gleichung $x = x_0$ nicht der Graph einer Funktion.

Aufgabe 3.3

Für eine lineare Funktion mit der Gleichung $f(x) = ax + b$ mit $a \in \mathbb{R}$ gilt $a = \tan \varphi$, wobei φ den Winkel zwischen dem Funktionsgraphen und der x -Achse angibt (Abb. 3.8). Da der Graph den Punkt $(3 | 2)$ enthält, folgt

$$2 = a \cdot 3 + b \text{ oder } b = 2 - 3a = 2 - 3 \cdot \tan \varphi.$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = ax + b = \underbrace{\tan \varphi}_{a} \cdot x + \underbrace{2 - 3 \cdot \tan \varphi}_{b}$$

Die zur y -Achse parallele Gerade ist kein Funktionsgraph. Sie kann durch die Gleichung $x = 3$ beschrieben und so auch mit einem CAS dargestellt werden.

Aufgabe 3.4

Fasst man den Preis (in €) als Funktion des Gewichts (in kg) auf, so stehen in der Darstellung links die Argumente und rechts die Funktionswerte. Mit dem „entspricht“-Zeichen werden den Argumenten jeweils die Funktionswerte zugeordnet.

$$\begin{array}{ccc} & 25 \text{ kg} \triangleq 8,00 \text{ €} & \\ :5 \swarrow & & \searrow :5 \\ & 5 \text{ kg} \triangleq 1,60 \text{ €} & \\ \cdot 3 \swarrow & & \searrow \cdot 3 \\ & 15 \text{ kg} \triangleq 4,80 \text{ €} & \end{array}$$

Die Aussage von Satz 3.7, dass $f(rx) = r \cdot f(x)$ für alle $r, x \in \mathbb{R}$, kommt in der Darstellung zum Ausdruck: Links werden die Argumente mit r multipliziert (zunächst mit $r = \frac{1}{5}$, weil die Division durch 5 gleichbedeutend ist mit einer Multiplikation mit $\frac{1}{5}$, dann mit $r = 3$), und rechts die zugehörigen Funktionswerte ebenfalls mit r .

Aufgabe 3.5

- Parkgebühr K (in €) in Abhängigkeit von der Parkdauer t (in Stunden) bei einer Höchstparkdauer von 24 Stunden; $t = 0$ wird als Nichtbefahren des Parkhauses gedeutet (Abb. L.6).

$$K(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0 \\ 1,50 & \text{für } 0 < t \leq 1 \\ 3,00 & \text{für } 1 < t \leq 2 \\ 4,50 & \text{für } 2 < t \leq 3 \\ 6,00 & \text{für } 3 < t \leq 4 \\ 7,50 & \text{für } 4 < t \leq 5 \\ 9,00 & \text{für } 5 < t \leq 24 \end{cases}$$

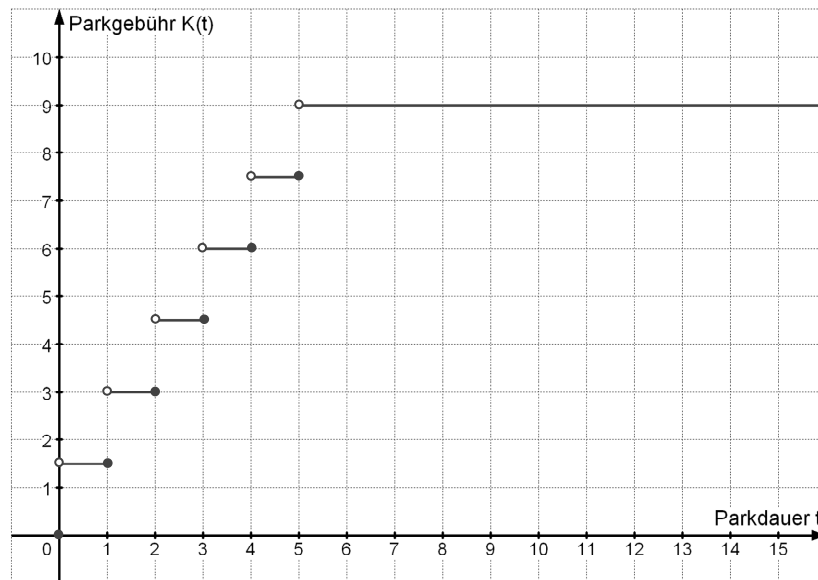


Abb. L.6 Parkgebühr in Abhängigkeit von der Parkdauer

- Kosten K (in €), die beim Kauf von n Schrauben, $n \in \mathbb{N}$, entstehen (Abb. L.7):

$$K(n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 0 \\ 1,29 & \text{für } 1 \leq n \leq 25 \\ 2,58 & \text{für } 26 \leq n \leq 50 \\ 2,89 & \text{für } 51 \leq n \leq 100 \\ 4,18 & \text{für } 101 \leq n \leq 125 \\ 5,47 & \text{für } 126 \leq n \leq 150 \\ 5,78 & \text{für } 151 \leq n \leq 200 \\ 7,07 & \text{für } 201 \leq n \leq 225 \\ 7,49 & \text{für } 226 \leq n \leq 500 \\ 8,78 & \text{für } 501 \leq n \leq 525 \\ 10,07 & \text{für } 526 \leq n \leq 550 \\ 10,38 & \text{für } 551 \leq n \leq 600 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Diese Wertetabelle erhält man durch passende Kombinationen der drei Packungsgrößen. Allerdings kauft man so oftmals deutlich mehr Schrauben als benötigt. Braucht man beispielsweise 151 Schrauben, sind zwei 100er-Packungen günstiger als eine 100er-Packung und drei 25er-Packungen.

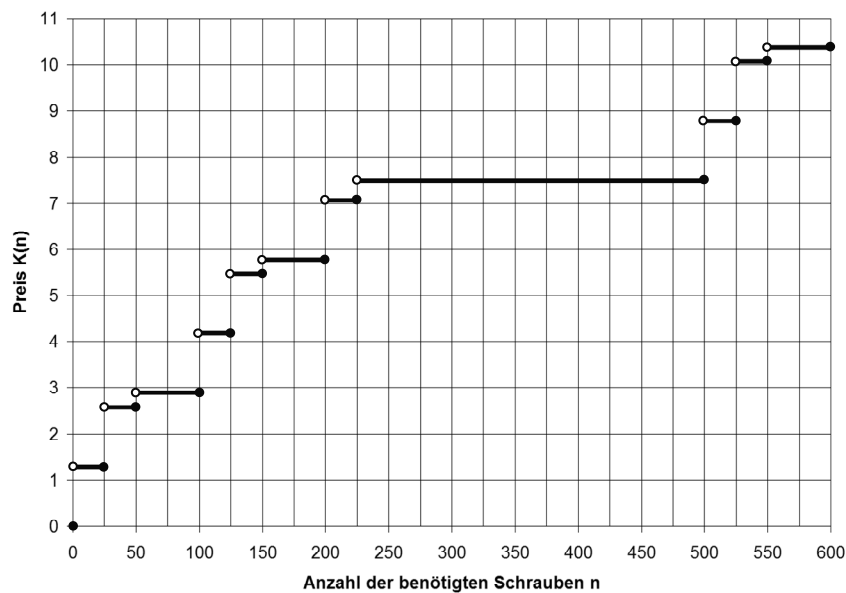


Abb. L.7 Preis in Abhängigkeit von der Anzahl beim Kauf von Schrauben

Aufgabe 3.6

Der Graph in Abbildung 3.17 links ist der Graph einer linearen Funktion:

$$K(x) = K_f + k_v x,$$

wobei K_f für die Fixkosten steht (die Kosten, die unabhängig von der Anzahl der produzierten Güter anfallen) und k_v für die variablen Stückkosten (die Kosten, die für jedes produzierte Gut zusätzlich anfallen, so Kosten für Material und Arbeitszeit). Sind wie hier die variablen Stückkosten konstant, gilt für die Stückkosten k :

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{K_f + k_v x}{x} = \frac{K_f}{x} + k_v$$

Die Stückkosten k fallen mit zunehmender Stückzahl x , weil sich die Fixkosten K_f auf immer mehr Stück verteilen, allerdings bildet k_v eine untere Schranke für die Fixkosten, der sich die Stückkosten immer weiter annähern, ohne sie jemals zu erreichen.

In Abbildung 3.17 Mitte fallen die Stückkosten k mit zunehmender Stückzahl x anfangs, um dann wieder zu wachsen. Dies bedeutet: Die variablen Stückkosten k_v sind hier nicht konstant, sondern fallen zunächst (etwa durch kostengünstigeren Einkauf von Material in größeren Mengen), um dann später wieder zu wachsen (etwa weil zusätzlich benötigtes Material sehr teuer eingekauft werden muss oder weil Überstunden anfallen, die höher vergütet werden als die reguläre Arbeitszeit).

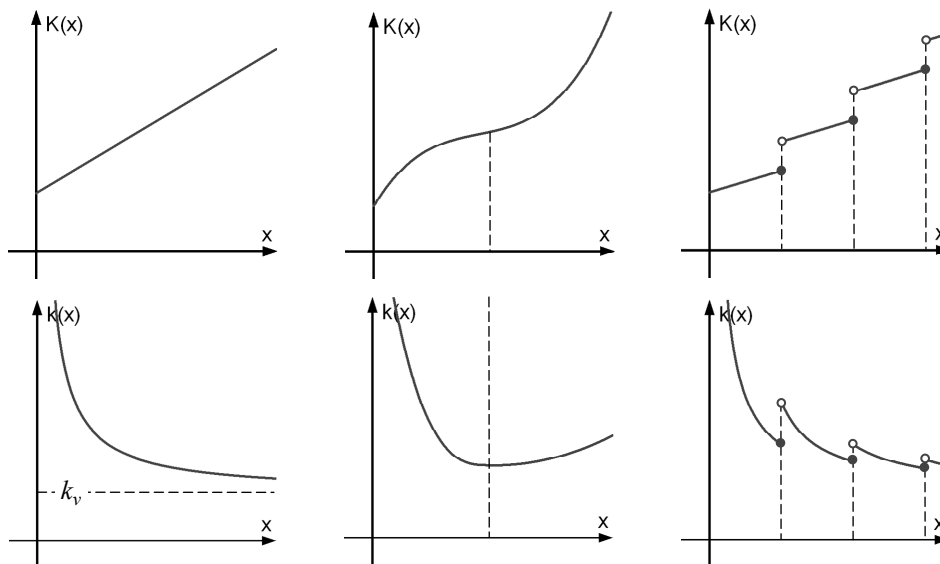


Abb. L.8 Zusammenhang von Gesamtkosten und Stückkosten (qualitative Darstellung; obere Zeile identisch mit Abb. 3.17)

In Abbildung 3.17 rechts treten so genannte „sprungfixe“ Kosten auf: Die Fixkosten K_f sind nicht unabhängig von der Anzahl der produzierten Güter, sondern steigen ab einer gewissen Anzahl produzierter Güter immer wieder sprunghaft (etwa weil jeweils eine zusätzliche Produktionsanlage errichtet werden muss). Dieser Sprung zeigt sich auch in den Stückkosten k . Die Gleichung

$$k(x) = \frac{K_f}{x} + k_v$$

gilt dort jeweils nur abschnittsweise, anders als im ersten Beispiel, da K_f nur in einem bestimmten Bereich konstant ist.

Unter [https://de.wikipedia.org/wiki/Kostenfunktion_\(Wirtschaft\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Kostenfunktion_(Wirtschaft)) [02.03.2019] und den dort verlinkten Artikeln finden Sie weitere Informationen zu Kostenfunktionen.

Aufgabe 3.7

Das Seil besitzt in beiden Fällen den Abstand 16 cm, so dass die Maus jeweils darunter Platz findet.

Das Problem kann unabhängig von den gegebenen Zahlen in allgemeiner Weise betrachtet werden: Bei einem Kreis mit Radius r und Umfang u wird der Umfang um Δu vergrößert. Wie groß ist Δr ? Es gilt:

$$\Delta r = (r + \Delta r) - r = \frac{u + \Delta u}{2\pi} - \frac{u}{2\pi} = \frac{(u + \Delta u) - u}{2\pi} = \frac{\Delta u}{2\pi}$$

Eine Verlängerung des Seils um Δu bewirkt also stets denselben Abstand Δr , unabhängig davon, wie groß r ist. Wenn zwei Größen (hier: u und r) proportional sind, dann gilt dies auch für die entsprechenden Differenzen (hier: Δu und Δr).

Aufgabe 3.8

Der Stundenzeiger bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 30° pro Stunde, der Minutenzeiger bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 360° pro Stunde. Bezeichnet man den zurückgelegten Drehwinkel des Stundenzeigers mit φ_S und den zurückgelegten Drehwinkel des Minutenzeigers mit φ_M (jeweils gemessen in Grad, ausgehend von der Stellung um 0:00 Uhr, wenn die beiden Zeiger das erste Mal übereinanderstehen) sowie die Zeit mit t (in Stunden), so ergeben sich die Gleichungen $\varphi_S(t) = 30 \cdot t$ für den Stundenzeiger und $\varphi_M(t) = 360 \cdot t$ für den Minutenzeiger.

Die beiden Zeiger stehen übereinander, wenn eine der folgenden Gleichungen eine Lösung besitzt:

$$\begin{aligned}\varphi_S(t) &= \varphi_M(t) \\ \varphi_S(t) &= \varphi_M(t) - 360 \\ \varphi_S(t) &= \varphi_M(t) - 720 \\ \varphi_S(t) &= \dots\end{aligned}$$

Allgemein muss gelten:

$$\varphi_S(t) = \varphi_M(t) - k \cdot 360 \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}_0$$

Diese Gleichung lässt sich wie folgt lösen:

$$\begin{aligned}30 \cdot t &= 360 \cdot t - k \cdot 360 \\ t &= k \cdot \frac{360}{330} = k \cdot 1\frac{1}{11}\end{aligned}$$

Dies bedeutet: Nach jeweils $1\frac{1}{11}$ Stunden (oder: nach etwas mehr als 1 Stunde 5 Minuten und 27 Sekunden) stehen die beiden Zeiger wieder genau übereinander, innerhalb von 12 Stunden genau 11 mal (den ersten Zeitpunkt um 0:00 Uhr eingeschlossen).

Das Problem lässt sich allgemeiner fassen: Zwei Läufer A und B bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit, wobei B jedoch n -mal so schnell läuft wie A. In der Zeit, die A für eine Runde benötigt, schafft B also genau n Runden. Wie oft befinden sich die beiden Läufer auf der Bahn nebeneinander, wenn sie gleichzeitig an derselben Stelle starten? Zählt man den Start mit hinzu, dann sind sie in der Zeit, die A für eine Runde benötigt, genau $(n-1)$ -mal nebeneinander. Bei der n -ten Begegnung befinden sich A und B wieder am Ausgangspunkt, also am Beginn einer neuen Runde für A.

Aufgabe 3.9

Das Problem lässt sich unabhängig von konkreten Zahlen lösen: Wenn sich die Schildkröte mit der Geschwindigkeit v bewegt, dann läuft Achilles k -mal so schnell ($k > 1$), also mit der Geschwindigkeit kv . Mit $x_S(t)$ wird der Ort der Schildkröte und mit $x_A(t)$ der Ort von Achilles, jeweils zum Zeitpunkt t , bezeichnet; die Schildkröte startet, weil sie einen Vorsprung erhält, im Ort x_0 . Hieraus ergeben sich die Gleichungen $x_S(t) = x_0 + vt$ und $x_A(t) = kv t$. Für den Zeitpunkt t , an dem Achilles die Schildkröte eingeholt hat, gilt:

$$\begin{aligned}x_S(t) &= x_A(t) \\ x_0 + vt &= kv t \\ t &= \frac{x_0}{(k-1)v}\end{aligned}$$

Sofern Achilles schneller läuft als die Schildkröte ($k > 1$), holt er sie immer ein, unabhängig davon, wie groß ihr Vorsprung ist. Dies sagt nicht nur die Lebenserfahrung, sondern es zeigt sich auch an den Graphen: Der Graph für $x_S(t)$ ist eine Gerade durch

den Punkt $(0 | x_0)$ mit der Steigung v und der Graph für $x_A(t)$ ist eine Ursprungsgerade mit der Steigung kv . Sofern $k > 1$ ist, existiert ein Schnittpunkt für $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, Achilles und die Schildkröte befinden sich also zur selben Zeit am selben Ort.

Das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte ist darüber hinaus für den Grenzwertbegriff von Bedeutung (vgl. die historische Einordnung bei Volkert 1988, S. 51 ff.): Die von der Schildkröte angegebenen Wegstrecken bilden eine unendliche Reihe, die einen Grenzwert besitzt.

Lösungshinweise zu Kapitel 4

Aufgabe 4.1

- Ermittlung der Lösung der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ über das beidseitige Wurzelziehen nach quadratischer Ergänzung.

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= 0 \\
 x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\
 x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= 0 \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} &= 0 \\
 \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
 \pm \left(x + \frac{b}{2a}\right) &= \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}
 \end{aligned}$$

Das Wurzelziehen ist auf der rechten Seite nur möglich, wenn die Bedingung $b^2 - 4ac \geq 0$ erfüllt ist. Da das Wurzelziehen keine Äquivalenzumformung darstellt, sind ferner an dieser Stelle eigentlich vier Fälle zu unterscheiden, die sich aber auf zwei reduzieren lassen:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die Vereinfachung des Wurzelterms erfordert eigentlich zusätzliche Fallunterscheidungen ($a > 0$ und $a < 0$), die aber in den schon bekannten zwei Fällen aufgehen. Durch weitere Umformungen folgt daraus die bekannte Lösungsformel.

- Ermittlung der Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ über das Nullwerden eines Produkts.

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q &= 0 \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - q}{4} &= 0 \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2 - q}{4}}\right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Die letzte Umformung ist nur unter der Bedingung $p^2 - q \geq 0$ möglich; für $p^2 - q < 0$ besitzt die Gleichung keine Lösung in $\mathbb{R}$. Die bislang vorliegende Gleichung zeigt nun die Struktur der dritten binomischen Formel und kann damit faktorisiert sowie weiter umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2 - q}{4}}\right) \cdot \left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2 - q}{4}}\right) &= 0 \\ x + \frac{p}{2} + \frac{\sqrt{p^2 - q}}{2} = 0 \quad \text{oder} \quad x + \frac{p}{2} - \frac{\sqrt{p^2 - q}}{2} &= 0 \\ x = \frac{p - \sqrt{p^2 - q}}{2} \quad \text{oder} \quad x = \frac{p + \sqrt{p^2 - q}}{2} \end{aligned}$$

Ermittlung der Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ über das beidseitige Wurzelziehen.

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q &= 0 \\ \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - q}{4} &= 0 \\ \pm \left(x + \frac{p}{2}\right) &= \pm \sqrt{\frac{p^2 - q}{4}} \end{aligned}$$

Die letzte Umformung ist nur unter der Bedingung $p^2 - q \geq 0$ möglich. Ferner sind an dieser Stelle eigentlich vier Fälle zu unterscheiden, die sich aber auf zwei reduzieren lassen:

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2 - q}{4}}$$

Durch weitere Umformungen folgt daraus die bekannte Lösungsformel.

Aufgabe 4.2

- Durch einfaches Nachrechnen lassen sich die Aussagen bestätigen:

$$x_1 + x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}^2 =$$

$$= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q$$

- Aus $x_1 = 2$ und $x_2 = -5$ folgt $p = 3$ und $q = -10$, also lautet eine mögliche quadratische Gleichung $x^2 + 3x - 10 = 0$. Alternativ erhält man die quadratische Gleichung $(x - 2)(x + 5) = 0$ über den Ansatz $(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Weitere Gleichungen gewinnt man durch die Multiplikation der ersten Gleichung mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aus $x_1 = \frac{2}{3}$ und $x_2 = 0$ folgt $p = -\frac{2}{3}$ und $q = 0$, also lautet eine mögliche quadratische Gleichung $x^2 - \frac{2}{3}x = 0$.

Aus $x_1 = x_2 = -3$ folgt $p = 6$ und $q = 9$, also lautet eine mögliche quadratische Gleichung $x^2 + 6x + 9 = 0$.

- Finden der Lösungen durch Probieren in einfachen Fällen:

$x^2 + 5x - 6 = 0$ besitzt die Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -6$.

$x^2 + x - 6 = 0$ besitzt die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -3$.

$x^2 + 2,5x - 1,5 = 0$ besitzt die Lösungen $x_1 = 0,5$ und $x_2 = -3$.

$x^2 + 0,1x - 0,56 = 0$ besitzt die Lösungen $x_1 = 0,7$ und $x_2 = -0,8$.

$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ besitzt die Lösungen $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$.

$x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{8} = 0$ besitzt die Lösungen $x_1 = \frac{1}{4}$ und $x_2 = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 4.3

- Erste Möglichkeit: Man geht von Satz 4.2 aus und leitet daraus Satz 4.3 ab. Dazu verwendet man die in Abschnitt 4.2 durch einen Koeffizientenvergleich hergeleiteten Beziehungen $b = -2ad$ und $c = ad^2 + e$ und erhält aus den in Satz 4.2 gegebenen Lösungen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

durch Einsetzen und Termumformungen die in Satz 4.3 beschriebenen Lösungen

$$x = d \pm \sqrt{-\frac{e}{a}}.$$

- Zweite Möglichkeit: Die Lösungen in Satz 4.3 werden unmittelbar hergeleitet durch das Lösen der quadratischen Gleichung $a(x-d)^2 + e = 0$ mit $a, d, e \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Diese Gleichung wird zunächst umgeformt zu

$$(x-d)^2 = -\frac{e}{a}$$

und kann dann nach einem der beiden bekannten Verfahren (Nullwerden eines Produkts oder beidseitiges Wurzelziehen) gelöst werden. Hieraus erhält man die in Satz 4.3 beschriebenen Lösungen.

Aufgabe 4.4

Betrachtet werden im Folgenden die Nullstellen der quadratischen Funktion f mit der Gleichung $f(x) = a(x-d)^2 + e$ mit $a, d, e \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

- Ein Quotient ist genau dann negativ, wenn Zähler und Nenner unterschiedliche Vorzeichen besitzen. Deshalb ist die Ungleichung

$$\frac{e}{a} < 0$$

genau dann erfüllt, wenn e und a unterschiedliche Vorzeichen besitzen.

- Die Anzahl der Nullstellen hängt nur vom Vorzeichen von e und a ab; d hat keinen Einfluss auf die Anzahl der Nullstellen weil d die Verschiebung des Graphen gegenüber der Normalparabel in x -Richtung bestimmt, was für die Anzahl der Nullstellen ohne Bedeutung ist.
 - Wenn $e < 0$ und $a > 0$, dann liegt der Scheitel der Parabel unterhalb der x -Achse und die Parabel ist nach oben geöffnet. Wenn $e > 0$ und $a < 0$, dann liegt der Scheitel der Parabel oberhalb der x -Achse und die Parabel ist nach unten geöffnet. Die Parabel schneidet also jeweils die x -Achse in zwei Punkten.
 - Wenn e und a dasselbe Vorzeichen besitzen, dann hat die quadratische Funktion f keine Nullstellen (die Begründung erfolgt analog).
 - Wenn $e = 0$ ist, hat die quadratische Funktion f genau eine Nullstelle der Vielfachheit 2, unabhängig vom Vorzeichen von a .

Aufgabe 4.5

- Die Monotonieigenschaften und die Existenz eines lokalen Maximums oder Minimums der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, folgen unter Verwendung der Beziehungen

$$d = -\frac{b}{2a} \text{ und } e = c - ad^2$$

unmittelbar aus Satz 4.6 und Satz 4.11.

- Alternativ ist in Analogie zum Beweis von Satz 4.6 das Vorzeichen der Differenz $f(x_2) - f(x_1)$ für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_2 > x_1$ zu prüfen. Hierzu wird diese Differenz passend faktorisiert:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (ax_2^2 + bx_2 + c) - (ax_1^2 + bx_1 + c) = a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) = \\ &= a(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) + b(x_2 - x_1) = (a(x_2 + x_1) + b) \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \end{aligned}$$

Wenn $a > 0$ ist, dann gilt für das Vorzeichen des Terms in der ersten Klammer:

$$a(x_2 + x_1) + b \begin{cases} < 0 & \text{für } x_1, x_2 \in \left] -\infty; -\frac{b}{2a} \right] \\ > 0 & \text{für } x_1, x_2 \in \left[-\frac{b}{2a}; +\infty \right[\end{cases}$$

Wenn $a < 0$ ist, dann besitzt der Term in der ersten Klammer jeweils das umgekehrte Vorzeichen.

Aufgabe 4.6

Die Bestimmung der Schnittpunkte der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}_{>0}$ und der Funktion g mit der Gleichung $g(x) = mx$ mit $m \in \mathbb{R}_{>0}$ führt auf die Gleichung $ax^2 = mx$. Diese besitzt die beiden Lösungen

$$x_1 = 0 \text{ und } x_2 = \frac{m}{a}.$$

Die beiden Funktionsgraphen haben die zwei Schnittpunkte

$$(0 | 0) \text{ und } \left(\frac{m}{a} \mid \frac{m^2}{a} \right).$$

Die beiden Schnittpunkte liegen umso weiter auseinander, je kleiner a und je größer m ist, also je flacher die Parabel ist und je steiler die Gerade verläuft. Es gibt aber stets zwei Schnittpunkte: Das Wachstum einer quadratischen Funktion nimmt unaufhörlich zu, es wird immer stärker. Ihr Graph ist deshalb „irgendwann“ steiler als jede Gerade mit der Gleichung $g(x) = mx$ mit $m \in \mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe 4.8

Die neuen Funktionsgleichungen lauten wie folgt:

- | | |
|----------------------------|--|
| ■ $f_1(x) = (x-7)^2 + 4$ | ■ $f_2(x) = -(x-4)^2 + 1$ |
| ■ $f_3(x) = -(x-4)^2 + 11$ | ■ $f_4(x) = (x+4)^2 - 1$ |
| ■ $f_5(x) = (x-6)^2 - 1$ | ■ $f_6(x) = -(x+4)^2 + 1$ |
| ■ $f_7(x) = -(x+12)^2 + 5$ | ■ $f_8(x) = \pm\sqrt{x+1} + 4$ mit $x \geq -1$ |

Aufgabe 4.9

Im Folgenden wird verwendet, dass für eine quadratische Funktion f gilt: Wenn $f(x_1) = f(x_2)$, dann liegen x_1 und x_2 symmetrisch zum Scheitel der Parabel. Ist f in der Form $f(x) = a(x-d)^2 + e$ gegeben, dann liegt d in der Mitte zwischen x_1 und x_2 und d ist deren arithmetisches Mittel: $d = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Speziell für die beiden Nullstellen wird dies in Satz 4.3 angesprochen.

- Die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = (x-1)(x-5)$ besitzt die Nullstellen $x=1$ und $x=5$. Die x -Koordinate des Scheitels ist das arithmetische Mittel der beiden Nullstellen, also $d=3$. Die y -Koordinate des Scheitels erhält man aus $e = f(3) = -4$.
- Die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -\frac{2}{3}(x+2)(x-4)$ besitzt die Nullstellen $x=-2$ und $x=4$. Die x -Koordinate des Scheitels ist das arithmetische Mittel der beiden Nullstellen, also $d=1$. Die y -Koordinate des Scheitels erhält man aus $e = f(1) = 6$.
- Für die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = (x+1)(x-3) + 5$ geben die beiden Werte $x=-1$ und $x=3$ zwar nicht die Nullstellen an, sie besitzen jedoch denselben Funktionswert: $f(-1) = f(3) = 5$. Die x -Koordinate des Scheitels ist also wiederum das arithmetische Mittel der beiden Werte, also $d=1$. Die y -Koordinate des Scheitels erhält man aus $e = f(1) = 1$.
- Die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = (4+2x)(3+\frac{1}{2}x)$ besitzt die Nullstellen $x=-2$ und $x=-6$. Die x -Koordinate des Scheitels ist das arithmetische Mittel der beiden Nullstellen, also $d=-4$. Die y -Koordinate des Scheitels erhält man aus $e = f(-4) = -4$.

Lösungshinweise zu Kapitel 5

Aufgabe 5.1

- Für eine lineare Funktion f mit der Gleichung $f(x) = ax + b$ ist wegen $D = \mathbb{R}$ für alle $x \in D$ stets auch $2x_0 - x \in D$. Die Punkte des Graphen sind von der Form $(x_0 \mid ax_0 + b)$. Für alle $x \in D$ gilt dann:

$$\begin{aligned} f(2x_0 - x) &= a(2x_0 - x) + b = 2ax_0 - ax + b = 2ax_0 + 2b - ax - b = \\ &= 2(ax_0 + b) - (ax + b) = 2y_0 - f(x) \end{aligned}$$

Der Graph von f ist nach Satz 5.7 punktsymmetrisch bezüglich $(x_0 \mid ax_0 + b)$.

Im Spezialfall $a = 0$ handelt es sich um eine konstante Funktion mit der Gleichung $f(x) = b$. Für alle $x \in D$ ist auch $2x_0 - x \in D$, da $D = \mathbb{R}$, und es gilt weiter $f(2x_0 - x) = b = f(x)$ für alle $x \in D$ und für alle $x_0 \in \mathbb{R}$, folglich ist der Graph von f nach Satz 5.7 symmetrisch zu jeder Geraden mit der Gleichung $x = x_0$.

- Eine quadratische Funktion f mit der Gleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ besitzt die Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$. Deswegen ist für alle $x \in D$ stets auch $-x \in D$. Es gilt:

$$f(-x) = a(-x)^2 - bx + c = ax^2 - bx + c = ax^2 + bx - 2bx + c = f(x) - 2bx$$

Offenbar ist $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$ genau dann, wenn $b = 0$. Nach Satz 5.6 folgt daraus die Symmetrieeigenschaft des Graphen von f . Dies deckt sich mit den Überlegungen in Abschnitt 4.3: Der Koeffizient b bewirkt eine Verschiebung des Graphen von f in x -Richtung, wirkt sich also auf die Symmetrie bezüglich der y -Achse aus. Die Koeffizienten a und c hingegen besitzen keinen Einfluss auf die Symmetrie des Graphen bezüglich der y -Achse.

Aufgabe 5.2

- Für die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = (x - a)^n + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Für gerade n ist der Graph symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = a$. Wegen $D = \mathbb{R}$ ist für alle $x \in D$ auch $2a - x \in D$, und es gilt:

$$\begin{aligned} f(2a - x) &= ((2a - x) - a)^n + b = (a - x)^n + b = (-1)^n (x - a)^n + b = \\ &= (x - a)^n + b = f(x) \end{aligned}$$

Für ungerade n ist der Graph punktsymmetrisch bezüglich $(a \mid b)$. Wegen $D = \mathbb{R}$ ist für alle $x \in D$ auch $2a - x \in D$, und es gilt:

$$\begin{aligned} f(2a-x) &= ((2a-x)-a)^n + b = (a-x)^n + b = (-1)^n (x-a)^n + b = \\ &= -(x-a)^n + b = 2b - ((x-a)^n + b) = 2b - f(x) \end{aligned}$$

- Der Graph von f geht aus dem Graphen von g mit der Gleichung $g(x) = x^n$ durch eine Verschiebung um a in x -Richtung und um b in y -Richtung hervor. Also geht auch die Symmetrieachse bzw. das Symmetriezentrum von f durch eine Verschiebung um a in x -Richtung und um b in y -Richtung aus der Symmetrieachse bzw. dem Symmetriezentrum von g hervor.
- Auch für die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = (x-a)^{-n} + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Für gerade n ist der Graph symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = a$, einer Parallelen zur y -Achse. Wegen $D = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ ist für alle $x \in D$ stets $2a-x \neq a$ und folglich auch $2a-x \in D$, und es gilt:

$$\begin{aligned} f(2a-x) &= \frac{1}{((2a-x)-a)^n} + b = \frac{1}{(a-x)^n} + b = \frac{1}{(-1)^n (x-a)^n} + b = \\ &= \frac{1}{(x-a)^n} + b = f(x) \end{aligned}$$

Für ungerade n ist der Graph punktsymmetrisch bezüglich $(a | b)$. Aufgrund von $D = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ ist für alle $x \in D$ stets $2a-x \neq a$ und folglich auch $2a-x \in D$, und es gilt:

$$\begin{aligned} f(2a-x) &= \frac{1}{((2a-x)-a)^n} + b = \frac{1}{(a-x)^n} + b = \frac{1}{(-1)^n (x-a)^n} + b = \\ &= \frac{1}{-(x-a)^n} + b = -\frac{1}{(x-a)^n} + b = 2b - \left(\frac{1}{(x-a)^n} + b \right) = 2b - f(x) \end{aligned}$$

Die Argumentation, wie der Graph von f aus dem Graphen von g mit der Gleichung $g(x) = x^{-n}$ hervorgeht, verläuft analog zu oben.

Aufgabe 5.6

- Die „Blume“ kann durch die Graphen folgender quadratischer Funktionen und Wurzelfunktionen dargestellt werden:

$$f_1(x) = x^2, \quad D_{f_1} = \mathbb{R}$$

$$f_2(x) = -x^2, \quad D_{f_2} = \mathbb{R}$$

$$f_3(x) = \sqrt{x}, \quad D_{f_3} = \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$f_4(x) = -\sqrt{x}, \quad D_{f_4} = \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$f_5(x) = \sqrt{-x}, \quad D_{f_5} = \mathbb{R}_{\leq 0}$$

$$f_6(x) = -\sqrt{-x}, \quad D_{f_6} = \mathbb{R}_{\leq 0}$$

- Eine ähnliche „Blume“ kann durch die Graphen folgender Potenzfunktionen vom Grad 3 und ihrer Umkehrfunktionen dargestellt werden:

$$f_1(x) = x^3, D_{f_1} = \mathbb{R}$$

$$f_2(x) = -x^3, D_{f_2} = \mathbb{R}$$

$$f_3(x) = \sqrt[3]{x}, D_{f_3} = \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$f_4(x) = -\sqrt[3]{x}, D_{f_4} = \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$f_5(x) = \sqrt[3]{-x}, D_{f_5} = \mathbb{R}_{< 0}$$

$$f_6(x) = -\sqrt[3]{-x}, D_{f_6} = \mathbb{R}_{< 0}$$

In ähnlicher Weise ist dies für alle Graphen von Potenzfunktionen mit geraden oder ungeraden Exponenten und ihre jeweiligen Umkehrfunktionen möglich.

Aufgabe 5.7

Das Sektklas wird als Kegel mit Höhe h und Radius r modelliert und die Flüssigkeit im Glas als Kegel mit Höhe x , $x \leq h$, und Radius $\frac{x}{h}r$; letzteres folgt aus dem 2. Strahlensatz. Es gilt

$$V(x) = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{r^2 \pi}{h^2}}_{\text{Konstante}} \cdot x^3$$

und weiter

$$V(h) = \frac{1}{3}r^2\pi h \text{ sowie } V\left(\frac{1}{2}h\right) = \frac{1}{24}r^2\pi h = \frac{1}{8}V(h).$$

Wenn jedes Glas nur zur Hälfte gefüllt wird, reicht der Sekt für 8-mal so viele Gläser. Dieses Beispiel ist eine Konkretisierung von Satz 5.5: Wird x halbiert, ändert sich der Funktionswert um den Faktor $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

Aufgabe 5.8

Bei einem Fadenpendel gilt für die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

wobei g die Fallbeschleunigung am jeweiligen Ort bezeichnet. Betrachtet man l als unabhängige und T als abhängige Größe, so erhält man mit

$$T(l) = \frac{2\pi}{\underbrace{\sqrt{g}}_{=K}} \sqrt{l}$$

die Gleichung einer Potenzfunktion. Gibt man l in m an sowie T in s und rechnet man mit

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

dann erhält man für K ungefähr den Zahlenwert 2 und die Einheit $\frac{s}{\sqrt{m}}$. Diese Konstante lässt sich jedoch nicht inhaltlich interpretieren.

Oben genannte Gleichung für die Schwingungsdauer T gilt nur für kleine Auslenkungen, weil bei der Herleitung auf die Näherung $\sin \varphi \approx \varphi$ zurückgegriffen wird (φ im Bogenmaß; vgl. Aufg. 9.3).

Aufgabe 5.9

- Für eine antiproportionale Funktion f mit der Gleichung $f(x) = ax^{-1}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist die Funktion g mit der Gleichung

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

eine proportionale Funktion mit der Proportionalitätskonstante $\frac{1}{a}$, weil gilt:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{a}{x}} = \frac{x}{a} = \frac{1}{a}x.$$

- In Verbindung mit den Überlegungen aus Abschnitt 3.3 lässt sich daraus folgendes Kriterium ableiten: Eine Funktion f ist eine antiproportionale Funktion, wenn der Graph der Funktion g mit der Gleichung

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

Teil einer Ursprungsgerade ist. In der Praxis stellt man dazu die beiden Größen x und $g(x)$, also x und den Kehrwert von $f(x)$, im Koordinatensystem dar und prüft, ob der sich ergebende Graph durch eine Gerade genähert werden kann.

- Dieses Kriterium besitzt den Vorteil, dass sich Abweichungen von einer Geraden mit bloßem Auge deutlich besser erkennen lassen als Abweichungen von einer Hyperbel. Ferner lässt sich die Konstante a sehr einfach graphisch als Kehrwert der Steigung der Geraden ermitteln.

Aufgabe 5.10

Das Kriterium wird in zwei Teilschritten begründet. Die Argumentation verläuft dabei im Wesentlichen analog zu jener in Aufgabe 1.5.

- Wenn jede Parallele zur x -Achse den Graphen von f in höchstens einem Punkt schneidet, dann ist die Funktion f in I umkehrbar eindeutig. Diese Aussage kann wie folgt gezeigt werden: Laut Voraussetzung schneidet zu jedem $y_0 \in \mathbb{R}$ die Parallele zur x -Achse mit der Gleichung $y = y_0$ den Funktionsgraphen in höchstens einem Punkt. Schneidet sie den Funktionsgraphen nicht, gilt $y_0 \notin f(I)$. Demnach

wird y_0 nicht als Funktionswert angenommen. Schneidet sie den Funktionsgraphen in $(x_0 \mid y_0)$, so gibt es nur ein $x_0 \in I$ mit $y_0 = f(x_0)$. Folglich gibt es zu jedem $y \in f(I)$ genau ein $x \in I$ mit $y = f(x)$, und f ist in I nach Definition 5.3 umkehrbar eindeutig.

- Wenn es eine Parallele zur x -Achse gibt, die den Funktionsgraphen von f in I in zwei oder mehr Punkten schneidet, dann ist diese Funktion nicht umkehrbar eindeutig. Diese Aussage kann wie folgt gezeigt werden: Bezeichnet man die beiden Schnittpunkte mit $(x_1 \mid y_0)$ und $(x_2 \mid y_0)$, so gilt $f(x_1) = y_0$ und $f(x_2) = y_0$. Es gibt also zu $y_0 \in f(I)$ zwei $x \in I$, denen dieser Funktionswert zugeordnet wird, womit f nach Definition 5.3 in I nicht umkehrbar eindeutig ist.

Lösungshinweise zu Kapitel 6

Aufgabe 6.1

- Stellen Sie die Funktionsgraphen mit einem CAS zunächst für $-10 \leq x \leq 10$ und anschließend für $500 \leq x \leq 500$ dar. Im Bereich $-10 \leq x \leq 10$ zeigen sich die Unterschiede sehr deutlich, so bezüglich Anzahl und Lage der Nullstellen und der lokalen Maxima bzw. Minima. Im Bereich $500 \leq x \leq 500$ (mit angepasster unterschiedlicher Skalierung beider Achsen) hingegen überwiegen die Gemeinsamkeiten. Der Term $-\frac{1}{5}x^3$ dominiert das Verhalten der Funktion für sehr große x in $\mathbb{R}_{>0}$ und für sehr kleine x in $\mathbb{R}_{<0}$, die anderen Terme haben dort kaum mehr Einfluss.
- Den Grad n einer Funktion f und ihren Leitkoeffizienten a_n kann man vielfach erkennen, wenn man sich überlegt, welche Terme beim Ausmultiplizieren den Term $a_n x^n$ ergeben; in ähnlicher Weise erhält man auch a_0 . Für die anderen Koeffizienten ist dies meist nicht so einfach möglich.
 - f mit der Gleichung $f(x) = 4 - 3x^3 + x^2 - x$ ist vom Grad 3 und besitzt den Leitkoeffizienten $a_3 = -3$.
 - f mit der Gleichung $f(x) = 2(1-x)(x^2-1)$ ist vom Grad 3 und besitzt den Leitkoeffizienten $a_3 = -2$.
 - f mit der Gleichung $f(x) = (2x^2+1)(4-x) - 3x^2$ ist vom Grad 3 und besitzt den Leitkoeffizienten $a_3 = -2$.
 - f mit der Gleichung $f(x) = -\frac{1}{3}x(x-2)^3$ ist vom Grad 4 und besitzt den Leitkoeffizienten $a_4 = -\frac{1}{3}$.

Aufgabe 6.2

Die Graphen in Abbildung 6.8 werden von links nach rechts betrachtet:

- n ist gerade und $a_n > 0$; die Funktion kann Nullstellen besitzen, dies muss aber nicht der Fall sein; der Wertebereich ist nach unten beschränkt, die Funktion besitzt mindestens ein lokales Minimum.
- n ist gerade und $a_n < 0$; die Funktion kann Nullstellen besitzen, dies muss aber nicht der Fall sein; der Wertebereich ist nach oben beschränkt, die Funktion besitzt mindestens ein lokales Maximum.
- n ist ungerade und $a_n < 0$; die Funktion hat mindestens eine Nullstelle; der Wertebereich ist $\mathbb{R}$; die Funktion muss keine lokalen Extrema besitzen, falls ja, besitzt sie gleich viele lokale Maxima und Minima.
- n ist ungerade und $a_n > 0$; die Funktion hat mindestens eine Nullstelle; der Wertebereich ist $\mathbb{R}$; die Funktion muss keine lokalen Extrema besitzen, falls ja, besitzt sie gleich viele lokale Maxima und Minima.

Derartige Überlegungen werden benötigt, wenn eine Funktionsgleichung als Näherung für gegebene Wertepaare gesucht ist (Abschn. 6.4).

Aufgabe 6.3

- Ermittlung von Funktionsgleichungen zu vorgegebenen Nullstellen (es werden ausschließlich Nullstellen in $\mathbb{R}$ betrachtet).
 - f mit der Gleichung $f(x) = (x-3)^n \cdot g(x)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und einem Polynom g , das keine Nullstellen besitzt, hat genau eine Nullstelle, nämlich die Nullstelle 3 der Vielfachheit n . Beispiel: $f(x) = (x-3)^2(x^4+5)$.
 - f mit der Gleichung $f(x) = (x-3)^m(x-\sqrt{5})^n \cdot g(x)$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ sowie einem Polynom g , das keine Nullstellen besitzt, hat genau die beiden Nullstellen 3 und $\sqrt{5}$, wobei n und m die Vielfachheiten der Nullstellen angeben. Beispiel: $f(x) = (x-3)^2(x-\sqrt{5})(x^2-4x+9)$
 - f mit der Gleichung $f(x) = x^l(x-2)^m(x+2)^n \cdot g(x)$ mit $l, m, n \in \mathbb{N}$ sowie einem Polynom g , das keine Nullstellen besitzt, hat genau die drei Nullstellen 0, 2 und -2 , wobei l, m und n die Vielfachheiten der Nullstellen angeben. Beispiel: $f(x) = x^7(x-2)(x+2)^2 \cdot 5$
- Betrachtung der Vielfachheit von Nullstellen bei Polynomfunktionen: Die Nullstellen a, b, c und d sollen im Folgenden stets paarweise verschieden sein. Ferner werden ausschließlich Nullstellen in $\mathbb{R}$ betrachtet.

Nullstellen von Polynomfunktionen 3. Grades: Es können vier verschiedene Fälle auftreten:

- f mit der Gleichung $f(x) = (x-a) \cdot g(x)$ mit einem Polynom g vom Grad 2, das keine Nullstelle besitzt, hat genau die Nullstelle a der Vielfachheit 1.
- f mit der Gleichung $f(x) = k(x-a)^3$ hat genau die Nullstelle a der Vielfachheit 3.
- f mit der Gleichung $f(x) = k(x-a)(x-b)^2$ hat die Nullstelle a der Vielfachheit 1 und die Nullstelle b der Vielfachheit 2.
- f mit der Gleichung $f(x) = k(x-a)(x-b)(x-c)$ hat die drei Nullstellen a , b und c , jeweils der Vielfachheit 1.

Nullstellen von Polynomfunktionen 4. Grades: Es können sechs verschiedene Fälle auftreten.

- f mit der Gleichung $f(x) = k(x-a)^4$ hat genau die Nullstelle a der Vielfachheit 4.
- f mit der Gleichung $f(x) = k(x-a)^2 \cdot g(x)$ mit einem Polynom g vom Grad 2, das keine Nullstelle besitzt, hat genau die Nullstelle a der Vielfachheit 2.
- f mit der Gleichung $f(x) = k(x-a)^2(x-b)^2$ hat die beiden Nullstellen a und b der Vielfachheit 2.
- f mit der Gleichung $f(x) = k(x-a)^2(x-b)(x-c)$ hat drei Nullstellen, wobei a die Vielfachheit 2 sowie b und c die Vielfachheit 1 besitzen.
- f mit der Gleichung $f(x) = k(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ hat vier Nullstellen a , b , c und d , jeweils der Vielfachheit 1.
- Weiter gibt es Polynomfunktionen vom Grad 4, die keine Nullstelle besitzen, zum Beispiel $f(x) = x^4 + 3$ oder $f(x) = (x^2 + 3)(x^2 - 4x + 9)$.

Aufgabe 6.4

Für eine Polynomfunktion f vom Grad n , $n \geq 1$, mit der vollständigen Faktorisierung

$$f(x) = (x-x_1)^{m_1} \cdot (x-x_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (x-x_k)^{m_k} \cdot p(x)$$

mit den k verschiedenen Nullstellen $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ der Vielfachheit $m_1, \dots, m_k$ und einem Polynom p vom Grad l , lässt sich über den Grad von l Folgendes aussagen:

- Wenn man die Faktorisierung ausmultipliziert, erhält man $n = (m_1 + \dots + m_k) + l$. Die Grade der Teilpolynome, in die f zerlegt wird, addieren sich zum Grad von f .
- Der Grad von p ist gerade, also $l = 0, 2, 4, 6, \dots$, da ein Polynom ungeraden Grades stets eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt, p jedoch laut Voraussetzung nicht.

Lösungshinweise zu Kapitel 7

Aufgabe 7.2

Im Folgenden wird exemplarisch eine der Teilaussagen von Satz 7.3 genauer betrachtet: Der Graph einer rationalen Funktion f ist punktsymmetrisch in Bezug auf den Koordinatenursprung, wenn das Zählerpolynom p nur gerade und das Nennerpolynom q nur ungerade Exponenten besitzt.

Besitzt das Zählerpolynom p nur gerade und das Nennerpolynom q nur ungerade Exponenten, dann gilt $p(-x) = p(x)$ und $q(-x) = -q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, jeweils nach Satz 6.2. Insbesondere ist dann für alle $x \in D$ jeweils auch $-x \in D$, und

$$f(-x) = \frac{p(-x)}{q(-x)} = \frac{p(x)}{-q(x)} = -\frac{p(x)}{q(x)} = -f(x).$$

Der Graph von f ist also punktsymmetrisch in Bezug auf den Koordinatenursprung.

Aufgabe 7.3

Der Graph von f ist auf den ersten Blick eine Gerade. Aber: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-6\}$, d. h. f ist an der Stelle $x_0 = 6$ nicht definiert. Wie die Faktorisierung zeigt, liegt in $x_0 = 6$ eine gemeinsame Nullstelle des Zähler- und des Nennerpolynoms vor, und der Funktionsterm kann entsprechend gekürzt werden:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 18}{x - 6} = \frac{(x - 6)(x + 3)}{x - 6} = x + 3$$

Dieses Kürzen wirkt sich allerdings auf die Definitionsmenge aus, die dadurch größer wird. Der Graph von f ist also eine Gerade, bei der der Punkt $(6 | 9)$ fehlt. Die Gerade besitzt an dieser Stelle ein „Loch“, was in üblichen CAS-Darstellungen jedoch nicht zu erkennen ist.

Die Funktion $\bar{f}$ mit der Gleichung $\bar{f}(x) = x + 3$ besitzt mit $D_{\bar{f}} = \mathbb{R}$ einen größeren Definitionsbereich als f . Sie nimmt mit Ausnahme der Stelle $x_0 = 6$, an der f nicht definiert ist, überall dieselben Funktionswerte wie f an. Ihr Graph umfasst also die gesamte Gerade.

Analog gilt $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ für den maximalen Definitionsbereich von g . Der Graph von g ist eine Gerade ohne die beiden Punkte $(-1 | 3)$ und $(1 | 5)$, wie die Faktorisierung der Gleichung zeigt:

$$g(x) = \frac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)(x + 4)}{(x - 1)(x + 1)} = x + 4$$

Der Graph der Funktion $\bar{g}$ mit der Gleichung $\bar{g}(x) = x + 4$ und $D_{\bar{g}} = \mathbb{R}$ ist die gesamte Gerade.

In Verbindung mit Satz 7.2 und Definition 7.2 lässt sich damit zusammenfassend festhalten: Liegt für eine rationale Funktion f an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$

- eine Nullstelle des Zählerpolynoms, aber keine Nullstelle des Nennerpolynoms vor, dann ist $x_0 \in D_f$ und es liegt eine Nullstelle von f vor;
- eine Nullstelle des Nennerpolynoms, aber keine Nullstelle des Zählerpolynoms vor, dann ist $x_0 \notin D_f$ und es liegt eine Polstelle von f vor;
- eine gemeinsame Nullstelle von Zähler- und Nennerpolynom vor, dann ist $x_0 \notin D_f$ und der Graph von f besitzt an dieser Stelle ein „Loch“;
- weder eine Nullstelle des Zählerpolynoms noch eine Nullstelle des Nennerpolynoms vor, dann ist $x_0 \in D_f$ und der Punkt $(x_0 \mid f(x_0))$ gehört zum Graphen.

Aufgabe 7.4

- Ein Beispiel: Die Funktion f , deren Gleichung

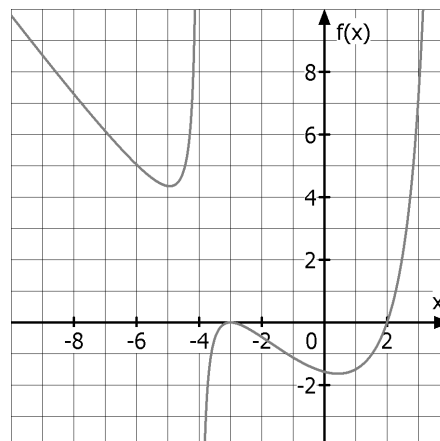
$$f(x) = \frac{7(x+3)^2(x-2)}{(-5)(x-4)(x+4)} = (x+3)^2 \frac{7(x-2)}{(-5)(x-4)(x+4)} = (x-x_0)^m \cdot \frac{g(x)}{q(x)}$$

hier bereits faktorisiert ist, besitzt in $x_0 = -3$ eine Nullstelle des Zählerpolynoms der Vielfachheit 2 (Abb. L.9). Nach obigem Kriterium nimmt f in $x_0 = -3$ ein lokales Extremum an. Wie unten gezeigt wird, handelt es sich wegen

$$\frac{g(-3)}{q(-3)} = \frac{7(-3-2)}{(-5)(-3-4)(-3+4)} = -1 < 0$$

um ein lokales Maximum.

Abb. L.9 Beispiel einer ganzrationalen Funktion, deren Zählerpolynom in $x_0 = -3$ eine doppelte Nullstelle hat



- Beweis: Nach Satz 6.5 gibt es eine Faktorisierung des Zählerpolynoms $p(x)$ in der Form $p(x) = (x - x_0)^m \cdot g(x)$ mit $g(x_0) \neq 0$. Daraus folgt:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x - x_0)^m \cdot g(x)}{q(x)} = (x - x_0)^m \cdot \frac{g(x)}{q(x)}$$

Offensichtlich gilt $f(x_0) = 0$ und $(x - x_0)^m > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Da weiter sowohl $g(x_0) \neq 0$ als auch $q(x_0) \neq 0$, gibt es eine Umgebung $U(x_0)$, in welcher der Quotient

$$\frac{g(x)}{q(x)}$$

sein Vorzeichen nicht ändert. Daraus folgt: Es gibt eine Umgebung $U(x_0)$ mit folgender Eigenschaft:

$$f(x_0) \begin{cases} > f(x) \text{ für alle } x \in U(x_0) \setminus \{x_0\} \text{ für } \frac{g(x_0)}{q(x_0)} < 0 \\ < f(x) \text{ für alle } x \in U(x_0) \setminus \{x_0\} \text{ für } \frac{g(x_0)}{q(x_0)} > 0 \end{cases}$$

Nach Definition 4.6 bedeutet dies:

$$f \text{ besitzt in } x_0 \text{ ein } \begin{cases} \text{lokales Maximum für } \frac{g(x_0)}{q(x_0)} < 0 \\ \text{lokales Minimum für } \frac{g(x_0)}{q(x_0)} > 0 \end{cases}$$

Dieses Kriterium geht in der Analysis in der Quotientenregel auf.

Aufgabe 7.5

Bei der Polynomdivision gibt es ein Restpolynom $r(x)$, dessen Grad kleiner als der Grad von $g(x)$ ist, so dass folgende Gleichung gilt (Abschn. 6.3):

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = g(x) + \frac{r(x)}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

Diese Gleichung kann auch als Produkt dargestellt werden:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0) \cdot g(x) + r(x)$$

Im Spezialfall $n = m$ lautet die Behauptung:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0) \cdot \frac{a_n}{b_n} + r(x)$$

Das Restpolynom ist ein konstantes Polynom vom Grad 0 und besitzt damit keinen Term mit x , ist also ohne Einfluss auf den Term $a_n x^n$. Durch Ausmultiplizieren auf der rechten Seite folgt die Behauptung.

Aufgabe 7.6

Die Abbildungen 7.1 bis 7.5 liefern zahlreiche Beispiele. Im Folgenden werden zusammenfassend zwei Formen der Symmetrie unterschieden.

- Der Graph einer Funktion f ist symmetrisch zur y -Achse.
 - Wenn f in $x_0 \notin D$ eine senkrechte Asymptote besitzt, dann folgt $-x_0 \notin D$, und f besitzt an der Stelle $-x_0$ ebenfalls eine senkrechte Asymptote. Eine Spiegelung an der y -Achse bildet die beiden Asymptoten aufeinander ab.
 - Wenn f eine waagerechte Asymptote besitzt, ist diese symmetrisch zur y -Achse. Wenn x in $\mathbb{R}_{>0}$ über alle Grenzen wächst oder wenn x in $\mathbb{R}_{<0}$ unter alle Grenzen fällt, nähert sich der Graph von f dieser Geraden an, und zwar beide Male entweder von oben oder von unten.
 - Wenn f eine schiefe Asymptote mit der Gleichung $g(x) = ax + b$ besitzt, dann ist auch die Gerade mit der Gleichung $h(x) = -ax + b$ eine Asymptote an f ; denn es gilt $g(x) = h(-x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Eine Spiegelung an der y -Achse bildet die beiden Asymptoten aufeinander ab.
- Der Graph einer Funktion f ist punktsymmetrisch in Bezug auf den Koordinatenursprung.
 - Wenn f in $x_0 \notin D$ eine senkrechte Asymptote besitzt, dann folgt $-x_0 \notin D$, und f besitzt in $-x_0$ ebenfalls eine senkrechte Asymptote. Eine Punktspiegelung am Koordinatenursprung bildet die beiden Asymptoten aufeinander ab.
 - Wenn f eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung $g(x) = y_0$ besitzt, dann ist auch die Gerade mit der Gleichung $h(x) = -y_0$ eine Asymptote. Wenn x in $\mathbb{R}_{>0}$ über alle Grenzen wächst, ist eine der beiden Geraden eine Asymptote an den Graphen von f , wenn x in $\mathbb{R}_{<0}$ unter alle Grenzen fällt, ist die andere der beiden Geraden eine Asymptote. Der Graph von f nähert sich einmal von oben und einmal von unten an diese Geraden an. Eine Punktspiegelung am Koordinatenursprung bildet die beiden Asymptoten aufeinander ab.
 - Wenn f eine schiefe Asymptote besitzt, ist deren Gleichung von der Form $g(x) = ax$, also $b = 0$. Es handelt sich um eine Ursprungsgerade, die punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. Wenn x in $\mathbb{R}_{>0}$ über alle Grenzen wächst oder in $\mathbb{R}_{<0}$ unter alle Grenzen fällt, nähert sich der Graph von f dieser Geraden, und zwar einmal von oben und einmal von unten.

Lösungshinweise zu Kapitel 8

Aufgabe 8.1

- Den Graphen von g erhält man aus dem Graphen von f wegen

- $g(x) = 2^{x+1} = f(x+1)$ durch eine Verschiebung um -1 in x -Richtung,
- $g(x) = 2^{x+1} = 2 \cdot 2^x = 2 \cdot f(x)$ durch eine Dehnung um den Faktor 2 in y -Richtung.

Den Graphen von h erhält man aus dem Graphen von f wegen

- $h(x) = 2^{x-1} = f(x-1)$ durch eine Verschiebung um 1 in x -Richtung,
- $h(x) = 2^{x-1} = \frac{1}{2} \cdot 2^x = \frac{1}{2} \cdot f(x)$ durch eine Stauchung um den Faktor $\frac{1}{2}$ in y -Richtung.

- Den Graphen von g erhält man aus dem Graphen von f wegen

- $g(x) = 4 \cdot 2^x = 4 \cdot f(x)$ durch eine Streckung um den Faktor 4 in y -Richtung,
- $g(x) = 4 \cdot 2^x = 2^2 \cdot 2^x = 2^{x+2} = f(x+2)$ durch eine Verschiebung um -2 in x -Richtung.

Den Graphen von h erhält man aus dem Graphen von f wegen

- $h(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x = \frac{1}{4} \cdot f(x)$ durch eine Stauchung um den Faktor $\frac{1}{4}$ in y -Richtung, hervor,
- $h(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x = 2^{-2} \cdot 2^x = 2^{x-2} = f(x-2)$ durch eine Verschiebung um 2 in x -Richtung.

- Der neue Graph kann wegen der Verschiebung um d Einheiten nach rechts durch die Gleichung

$$g(x) = f(x-d) = 2^{x-d}$$

beschrieben werden, wegen $2^{x-d} = 2^{-d} \cdot 2^x$ aber auch durch die Gleichung

$$g(x) = 2^{-d} \cdot 2^x = \frac{1}{2^d} \cdot 2^x = \frac{1}{2^d} \cdot f(x) = c \cdot f(x) \text{ mit } c = \frac{1}{2^d}.$$

Aufgabe 8.2

Betrachten Sie die Exponentialfunktion f mit der Gleichung $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ und die proportionale Funktion g mit der Gleichung $g(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$.

- Eine Vergrößerung von x um 1 bewirkt bei f eine Ver- a -fachung des Funktionswerts: $f(x+1) = a^{x+1} = a \cdot a^x = a \cdot f(x)$.

Eine Vergrößerung von x um 1 bewirkt bei g eine Änderung des Funktionswerts um a , die additiv ist: $g(x+1) = a(x+1) = ax + a = g(x) + a$.

- Eine Verkleinerung von x um 2 bewirkt eine Ver- $\frac{1}{a^2}$ -fachung des Funktionswerts:

$$f(x-2) = a^{x-2} = a^{-2} \cdot a^x = \frac{1}{a^2} \cdot a^x = \frac{1}{a^2} \cdot f(x)$$

Eine Verkleinerung von x um 2 bewirkt eine Änderung des Funktionswerts um $-2a$, die additiv ist: $g(x-2) = a(x-2) = ax - 2a = g(x) - 2a$.

- Eine Verdoppelung von x bewirkt, dass der Funktionswert jeweils quadriert wird:

$$f(2x) = a^{2x} = (a^x)^2 = (f(x))^2$$

Eine Verdoppelung von x bewirkt auch eine Verdoppelung des Funktionswerts: $g(2x) = a(2x) = 2ax = 2 \cdot g(x)$.

- Eine Halbierung von x bewirkt das Wurzelziehen aus dem Funktionswert:

$$f\left(\frac{1}{2}x\right) = a^{\frac{1}{2}x} = (a^x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^x} = \sqrt{f(x)}$$

Eine Halbierung von x bewirkt jeweils auch eine Halbierung des Funktionswerts:

$$g\left(\frac{1}{2}x\right) = a\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}ax = \frac{1}{2} \cdot g(x)$$

- Eine Verdreifachung von x bewirkt, dass der Funktionswert mit 3 potenziert wird:

$$f(3x) = a^{3x} = (a^x)^3 = (f(x))^3$$

Eine Verdreifachung von x bewirkt jeweils auch eine Verdreifachung des Funktionswerts: $g(3x) = a(3x) = 3ax = 3 \cdot g(x)$.

- Eine Drittelung von x bewirkt das Ziehen der dritten Wurzel aus dem Funktionswert:

$$f\left(\frac{1}{3}x\right) = a^{\frac{1}{3}x} = (a^x)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^x} = \sqrt[3]{f(x)}$$

Eine Drittelung von x bewirkt auch eine Drittelung des Funktionswerts:

$$g\left(\frac{1}{3}x\right) = a\left(\frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{3}ax = \frac{1}{3} \cdot g(x)$$

- Ein Quadrieren von x führt zur x -ten Potenz des Funktionswerts – dies lässt sich nicht mehr anschaulich deuten:

$$f(x^2) = a^{x^2} = a^{x \cdot x} = (a^x)^x = (f(x))^x$$

Ein Quadrieren von x bewirkt, dass der Funktionswert jeweils mit x multipliziert wird – dies lässt sich nicht mehr anschaulich deuten.

$$g(x^2) = a(x^2) = ax^2 = x \cdot g(x)$$

Aufgabe 8.3

Das Kapital K_0 wird zu einem Zinssatz von $p\%$ angelegt. Es soll sich nach n Zinsperioden ver- m -fachen mit $m, n \in \mathbb{N}$. In Beispiel 8.9 wird hierfür die Beziehung

$$n = \frac{\log_{10} m}{\log_{10} (1+i)}$$

hergeleitet, wobei $i = p\%$. Der Zusammenhang zwischen dem Zinssatz und der für die Kapitalverdoppelung nötigen Zinsperioden ist in Tabelle L.2 numerisch und in Abbildung L.10 graphisch dargestellt..

Anlage mit Zinseszinsseffekt			Anlage ohne Zinseszinsseffekt		
Zinssatz (in %)	Zinsperioden (Anzahl)	Produkt	Zinssatz (in %)	Zinsperioden (Anzahl)	Produkt
1	69,7	69,7	1	100,0	100,0
2	35,0	70,0	2	50,0	100,0
3	23,4	70,3	3	33,3	100,0
4	17,7	70,7	4	25,0	100,0
5	14,2	71,0	5	20,0	100,0
6	11,9	71,4	6	16,7	100,0
7	10,2	71,7	7	14,3	100,0
8	9,0	72,1	8	12,5	100,0
9	8,0	72,4	9	11,1	100,0
10	7,3	72,7	10	10,0	100,0
11	6,6	73,1	11	9,1	100,0
12	6,1	73,4	12	8,3	100,0
13	5,7	73,7	13	7,7	100,0
14	5,3	74,1	14	7,1	100,0
15	5,0	74,4	15	6,7	100,0
16	4,7	74,7	16	6,3	100,0
17	4,4	75,1	17	5,9	100,0
18	4,2	75,4	18	5,6	100,0
19	4,0	75,7	19	5,3	100,0
20	3,8	76,0	20	5,0	100,0

Tab. L2 Kapitalverdoppelung: Vergleich der Geldanlage mit Zinseszinsseffekt (links) und ohne Zinseszinsseffekt (rechts). Die dritte und sechste Spalte zeigt jeweils das Produkt aus dem Zinssatz p in % und der Anzahl der Zinsperioden.

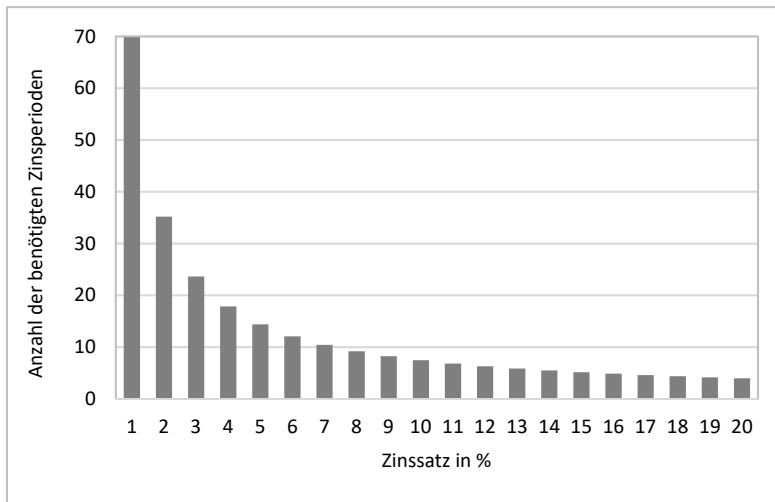


Abb. L10 Kapitalverdoppelung: Anzahl der Zinsperioden in Abhängigkeit vom Zinssatz

Dass die Anzahl der für die Kapitalverdoppelung notwendigen Zinsperioden mit wachsendem Zinssatz abnimmt, ist erwartungsgemäß. Auf den ersten Blick deutet der Verlauf auf eine antiproportionale Funktion hin (Abschn. 5.6). Allerdings ist das Produkt aus Zinssatz und Anzahl der Zinsperioden nicht konstant, sondern es wächst mit abnehmendem Zinssatz: Je niedriger der Zinssatz ist, desto mehr Zinsperioden treten auf bis zur Kapitalverdoppelung und desto stärker wirkt sich der Zinseszinsseffekt aus. Bei einem linearen Wachstum (ohne Zinseszins) ist das Produkt aus Zinssatz und Anzahl der Zinsperioden hingegen konstant gleich 100 (bei einer Kapitalverdoppelung beträgt der benötigte Kapitalzuwachs 100%), wie in Tabelle L.2 dargestellt.

Die Höhe des angelegten Kapitals K_0 hat keinen Einfluss darauf, wann es sich ver-m-facht. Dies sieht man daran, dass K_0 in obiger Gleichung für n nicht auftaucht. Betrachtet man die Zinseszinsformel $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$, so ist K_n proportional zu K_0 , und K_0 hat keinen Einfluss auf den Term $(1+i)^n$, der maßgeblich für die Kapitalentwicklung in Abhängigkeit von n ist.

Wie schon in Beispiel 8.9 angemerkt, gilt die Beziehung

$$n = \frac{\log_{10} m}{\log_{10} (1+i)}$$

eigentlich nur für ganze Zinsperioden; eine taggenaue Verzinsung müsste man anders rechnen. Dieser Aspekt wird hier ausgeblendet.

Aufgabe 8.4

- Für die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ gilt nach Satz 5.1 für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$f(x_1 + x_2) = a^{x_1 + x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = f(x_1) \cdot f(x_2)$$

- Für die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \log_a x$ mit $a \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ gilt nach Satz 8.2 für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$f(x_1 x_2) = \log_a(x_1 x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

Aufgabe 8.5

- Gesucht sind die Funktionswerte der Logarithmusfunktionen für $x = 1000$:

$$f(1000) = \log_2 1000 = 9,96\dots; \text{ zum Vergleich: } \log_2 1024 = 10, \text{ da } 2^{10} = 1024$$

$$g(1000) = \log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3, \text{ da } 10^3 = 1000$$

Zum Graphen von f gehört der Punkt $(1000 | 3)$, zum Graphen von g gehört der Punkt $(1000 | 9,97)$, letzterer gerundet auf zwei Nachkommastellen. Sollte $\log_2 x$ auf dem Taschenrechner oder im CAS nicht verfügbar sein, gelangt Satz 8.3 zur Anwendung:

$$\log_2 x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 2}$$

- Gesucht sind die Funktionswerte der Logarithmusfunktionen für $x = 10$:

$$f(10) = \log_2 10 = 3,32\dots; \text{ zum Vergleich: } \log_2 8 = 3 \text{ und } \log_2 16 = 4$$

$$g(10) = \log_{10} 10 = 1, \text{ da } 10^1 = 10$$

Der Graph von f erreicht am Ende des Klassenzimmers die Höhe von 3,2 m, also noch nicht ganz die Decke, und der Graph von g die Höhe von 1 m.

$$f(x) = \log_2 x = 3,5 \text{ für } x = 2^{3,5} = 11,31\dots$$

$$g(x) = \log_{10} x = 3,5 \text{ für } x = 10^{3,5} = 3162,27\dots$$

Der Graph von f erreicht die Decke nach gut 11,31 m, der Graph von g erst nach mehr als 3 km.

- Für die Wurzelfunktion mit der Gleichung $h(x) = \sqrt{x}$ gilt:

$$h(1000) = \sqrt{1000} = 31,62\dots$$

$$h(10) = \sqrt{10} = 3,16\dots$$

$$h(x) = \sqrt{x} = 3,5 \text{ gilt für } x = 3,5^2 = 12,25$$

Die Graphen der Logarithmusfunktion zur Basis 2 und der Wurzelfunktion schneiden sich in $(4|2)$ und $(16|4)$, da $\log_2 4 = 2$ und $\sqrt{4} = 2$ sowie $\log_2 16 = 4$ und $\sqrt{16} = 4$. Während beide Graphen im Bereich $2 \leq x \leq 16$ sehr nahe beieinander liegen, ergeben sich für x -Werte < 2 und für sehr große x -Werte deutliche Unterschiede (s. oben).

Aufgabe 8.6

- Durch Logarithmieren erhält man:

$$\log_{10}(f(x)) = \log_{10}(ax^r) = \log_{10} a + \log_{10}(x^r) = \log_{10} a + r \cdot \log_{10} x$$

Üblicherweise verwendet man den Logarithmus zur Basis 10, weil sich dadurch die Größenordnungen in der Dimension von Zehnerpotenzen gut erkennen lassen.

Nun setzt man $y' = \log_{10}(f(x))$, $k = \log_{10} a = \text{konstant}$ und $x' = \log_{10} x$:

$$\underbrace{\log_{10}(f(x))}_{y'} = \underbrace{\log_{10} a}_k + r \cdot \underbrace{\log_{10} x}_{x'} = r \cdot \underbrace{\log_{10} x}_{x'} + \underbrace{\log_{10} a}_k$$

Die Gleichung $y' = k + r \cdot x'$ oder in üblicher Schreibweise $y' = r \cdot x' + k$ ist die Gleichung einer linearen Funktion. Trägt man y' in Abhängigkeit von x' im üblichen Koordinatensystem auf, erhält man als Graph eine Gerade mit der Steigung r durch den Punkt $(0|k)$, woraus man a über die Beziehung $a = 10^k$ ermitteln kann.

Das doppeltlogarithmische Auftragen wurde früher mit einem doppeltlogarithmischen Papier durchgeführt. Heute kann man y' und x' mittels einer Tabellenkalkulation berechnen und den zugehörigen Graphen zeichnen lassen.

- Anwendung der doppeltlogarithmischen Darstellung beim Fadenpendel (Aufg. 5.8): Für die Schwingungsdauer wird der Zusammenhang

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{oder} \quad T = \underbrace{\frac{2\pi}{\sqrt{g}}}_{=K} \sqrt{l} = K \cdot l^{\frac{1}{2}}$$

erwartet (Abb. L.11). Durch Logarithmieren erhält man folgende Beziehung:

$$\log_{10} T = \log_{10} \left(K \cdot l^{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \log_{10} l + \log_{10} K$$

Man trägt $T' = \log_{10} T$ in Abhängigkeit von $l' = \log_{10} l$ im Koordinatensystem auf (Abb. L.12). Die Erwartung wird bestätigt, wenn der Graph eine Gerade der Steigung $\frac{1}{2}$ durch den Punkt $(0|K')$ ist. Aufgrund von $K' = \log_{10} K$ gewinnt man hieraus $K = 10^{K'}$.

Abb. L.11 Schwingungsdauer in Abhängigkeit von der Länge beim Fadenpendel in üblicher Darstellung

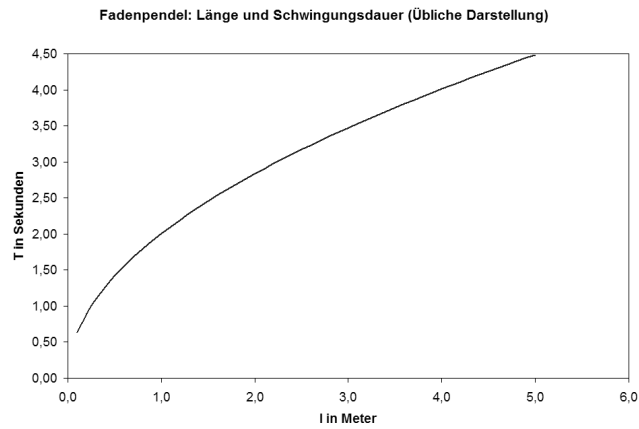
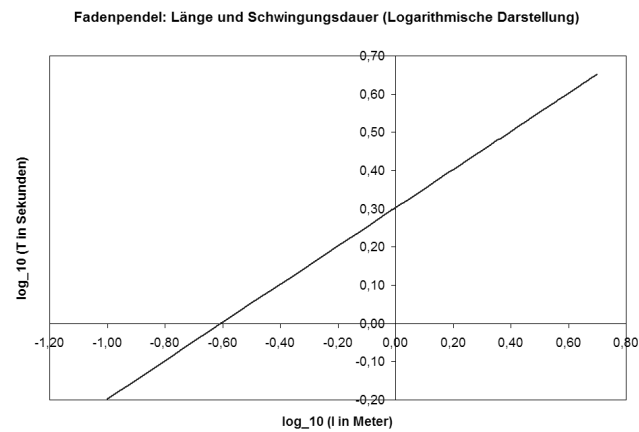


Abb. L.12 Schwingungsdauer in Abhängigkeit von der Länge beim Fadenpendel in logarithmischer Darstellung



Lösungshinweise zu Kapitel 9

Aufgabe 9.1

Bestimmung von $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ für besondere Werte des Winkels φ durch elementargeometrische Überlegungen:

- Aus Abbildung 9.24 links entnimmt man $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ und gewinnt dann über den Satz von Pythagoras $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
- Aus Abbildung 9.24 rechts kann man $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ direkt ablesen und erhält dann mittels Satz von Pythagoras die Beziehung

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\sin 60^\circ)^2 = 1 \quad \text{oder} \quad \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

- Die Herleitung weiterer Werte erfolgt unter Verwendung der Beziehungen aus Aufgabe 9.2, wobei das positive Vorzeichen der Wurzelterme jeweils aufgrund geometrischer Überlegungen zustande kommt:

$$\sin(22,5^\circ) = \sin\left(\frac{1}{2} \cdot 45^\circ\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 45^\circ)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}} \approx 0,38$$

$$\sin(15^\circ) = \sin\left(\frac{1}{2} \cdot 30^\circ\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 30^\circ)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}} \approx 0,26$$

$$\cos(15^\circ) = \cos\left(\frac{1}{2} \cdot 30^\circ\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 30^\circ)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}} \approx 0,97$$

$$\sin(7,5^\circ) = \sin\left(\frac{1}{2} \cdot 15^\circ\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos 15^\circ)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3}}\right)} \approx 0,13$$

Aufgabe 9.2

- Der Beweis für das erste Additionstheorem $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ beruht auf folgender Idee: Das ursprüngliche rechtwinklige Dreieck wird um den Winkel β gedreht, Drehzentrum ist der Koordinatenursprung. Der Punkt $P_{\alpha+\beta}$ mit den Koordinaten $(\cos(\alpha + \beta) | \sin(\alpha + \beta))$ ist das Bild des Punktes P_α mit den Koordinaten $(\cos \alpha | \sin \alpha)$.

Es werden die rechtwinkligen Dreiecke durch T, S und $P_{\alpha+\beta}$ sowie durch R, S und den Koordinatenursprung betrachtet (in Abb. L.13 schraffiert). Sie sind ähnlich und der Innenwinkel bei S ist jeweils so groß wie α . Deshalb gilt:

$$\frac{\overline{P_{\alpha+\beta}T}}{\overline{P_{\alpha+\beta}S}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OS}} = \cos \beta \quad \text{und} \quad \overline{P_{\alpha+\beta}S} = \sin \alpha$$

Daraus folgt $\overline{P_{\alpha+\beta}T} = \overline{P_{\alpha+\beta}S} \cdot \cos \beta = \sin \alpha \cos \beta$, und aus

$$\frac{\overline{RS}}{\overline{OS}} = \sin \beta \quad \text{und} \quad \overline{OS} = \cos \alpha$$

folgt $\overline{UT} = \overline{RS} = \cos \alpha \sin \beta$. Nun erhält man das erste Additionstheorem:

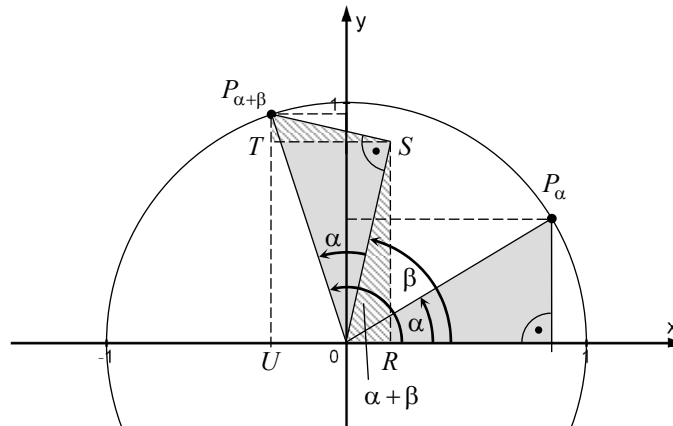
$$\sin(\alpha + \beta) = \overline{P_{\alpha+\beta}T} + \overline{TU} = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

- Die zweite Herleitung erfolgt analog. Aus

$$\frac{\overline{OR}}{\overline{OS}} = \cos \beta \quad \text{und} \quad \overline{OS} = \cos \alpha$$

folgt $\overline{OR} = \overline{OS} \cdot \cos \beta = \cos \alpha \cos \beta$, und aus

$$\frac{\overline{TS}}{\overline{P_{\alpha+\beta}S}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{OS}} = \sin \beta \quad \text{und} \quad \overline{P_{\alpha+\beta}S} = \sin \alpha$$

Abb. L.13 Herleitung des ersten Additionstheorems

folgt $\overline{UR} = \overline{TS} = \sin \alpha \sin \beta$. Beides zusammen ergibt

$$\overline{UO} = \overline{UR} - \overline{OR} = \overline{TS} - \overline{OR} = \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta.$$

Nun geht man von Streckenlängen zu Koordinaten über und erhält so das Additionstheorem für die Kosinusfunktion:

$$\cos(\alpha + \beta) = -\overline{UO} = -(\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

In Abbildung L.13 ist der Fall $\alpha, \beta < 90^\circ$ und $90^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ$ dargestellt. Eigentlich müsste man nun für alle weiteren Fälle prüfen, ob die Streckenlängen jeweils addiert oder subtrahiert werden und wie sich die Vorzeichen beim Übergang von Koordinaten zu Streckenlängen und umgekehrt verhalten, um sicherzustellen, dass der Kosinussatz für beliebige Werte von α und β gilt.

- Die Additionstheoreme für $\sin(\alpha - \beta)$ und $\cos(\alpha - \beta)$ können durch algebraische Umformungen gewonnen werden:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

- Herleitung der Beziehungen für das doppelte Argument:

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

- Aus den Beziehungen für das doppelte Argument folgt jeweils:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))}$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = -1 + 2\cos^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))}$$

Ersetzt man nun α durch $\frac{1}{2}\alpha$ sowie 2α durch α , erhält man die Beziehungen für das halbe Argument. Das Vorzeichen wird jeweils aufgrund geometrischer Überlegungen bestimmt.

Aufgabe 9.3

Für kleine Winkel kann man die Länge x des entsprechenden Kreisbogens als Näherung für $\sin x$ heranziehen (Abb. 9.4 und 9.6).

- Für die Näherung $\sin x \approx x$ ist der Bogen der Länge x stets länger als die vertikale Strecke der Länge $\sin x$, also $|x| > |\sin x|$. Daraus folgt:

$$x > \sin x \text{ für } 0 < x < \frac{1}{2}\pi \text{ und } x < \sin x \text{ für } -\frac{1}{2}\pi < x < 0$$

Die Näherung liefert im ersten Fall zu große und im zweiten Fall zu kleine Werte.

- Für die Näherung $\cos x \approx 1 - x$ ist der Bogen der Länge x stets länger als die horizontale Strecke der Länge $1 - \cos x$, also $|x| > |1 - \cos x|$. Daraus folgt:

$$1 - x < \cos x \text{ für } 0 < x < \frac{1}{2}\pi \text{ und } 1 - x > \cos x \text{ für } -\frac{1}{2}\pi < x < 0$$

Die Näherung liefert im ersten Fall zu kleine und im zweiten Fall zu große Werte.

- Für die Näherung $\tan x \approx x$ lässt sich elementargeometrisch nicht begründen, ob sie zu große oder zu kleine Werte liefert. Einer Darstellung mit einem CAS kann man entnehmen:

$$x < \tan x \text{ für } 0 < x < \frac{1}{2}\pi \text{ und } x > \tan x \text{ für } -\frac{1}{2}\pi < x < 0$$

Die Näherung liefert im ersten Fall zu kleine und im zweiten Fall zu große Werte.

Aufgabe 9.4

- Für die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = (\sin x)^2$ gilt

$$f(x + \pi) = (\sin(x + \pi))^2 = (-\sin x)^2 = (\sin x)^2 = f(x),$$

also ist f periodisch mit der Periode π . Dies ist auch die kleinste Periode, denn für jede Periode p muss gelten:

$$(\sin(x+p))^2 = (\sin x)^2 \text{ oder } \sin(x+p) = \pm \sin(x)$$

Dies ist nur für $p = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ erfüllt.

- Die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = |\cos x|$ ist periodisch mit der kleinsten Periode π , denn

$$|\cos(x+p)| = |\cos x| \text{ oder } \cos(x+p) = \pm \cos x$$

ist nur für $p = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ erfüllt.

- Die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 2 - \sin x$ ist periodisch mit der kleinsten Periode 2π .
- Die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \cos(3x)$ ist periodisch mit der kleinsten Periode $\frac{2}{3}\pi$, denn die Gleichung

$$\cos(3(x+p)) = \cos(3x) \text{ oder } \cos(3x+3p) = \cos(3x)$$

besitzt die kleinste positive Lösung $3p = 2\pi$ oder $p = \frac{2}{3}\pi$.

- Die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \sin(2\pi x)$ ist periodisch mit der kleinsten Periode 1, denn die Gleichung

$$\sin(2\pi(x+p)) = \sin(2\pi x) \text{ oder } \sin(2\pi x + 2\pi p) = \sin(2\pi x)$$

ist erfüllt für alle $p \in \mathbb{Z}$.

- Die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{K}x\right)$$

mit einer Konstanten $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist periodisch mit der kleinsten Periode K , denn die Gleichung

$$\sin\left(\frac{2\pi}{K}(x+p)\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{K}x\right) \text{ oder } \sin\left(\frac{2\pi}{K}x + \frac{2\pi}{K}p\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{K}x\right)$$

ist stets dann erfüllt, wenn p ein Vielfaches von K ist.

Elementare Funktionen und ihre Anwendungen

Wittmann, G.

2019, X, 234 S. 120 Abb., Softcover

ISBN: 978-3-662-58059-2