

Übungen zur Linearen Algebra, Kap. 1 bis Kap. 3

Lösungen zu Übung 1

1.1 Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

$$A \cdot B, \quad B \cdot A, \quad (A \cdot B)^\top, \quad (B \cdot A)^\top$$

Lösung:

Dies ist fast eine reine Rechenaufgabe. Wir wollen lediglich an Beispielen zeigen, dass im allgemeinen

$$A \cdot B \neq B \cdot A \quad \text{und} \quad (A \cdot B)^\top \neq A^\top \cdot B^\top$$

ist.

Mit dem Falk-Schema von Seite 7 berechnen wir zuerst das Produkt $A \cdot B$:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 12 & -9 & -18 \\ 8 & -6 & -12 \\ 4 & -3 & -6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Direkt aus der Anordnung des Schemas sehen wir, dass als Ergebnis eine (3×3) -Matrix entstehen muss. Es ist dann

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 12 & -9 & -18 \\ 8 & -6 & -12 \\ 4 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Mit demselben Schema machen wir uns an das Produkt $B \cdot A$ heran:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Genauso erkennen wir gleich zu Beginn, dass sich jetzt eine (2×2) -Matrix ergibt. Es entsteht sogar die Nullmatrix. Das Ergebnis ist also wirklich sehr verschieden von oben.

Bitte daher nie vergessen: Im allgemeinen ist

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Nun zur Transponierten. Oben haben wir das Produkt $A \cdot B$ berechnet. Zur Bestimmung von $(A \cdot B)^\top$ schreiben wir gemäß der Vorschrift in Def. 1.4 einfach alle Zeilen hintereinander als Spalten oder entsprechend alle Spalten als Zeilen, was ja dasselbe ergibt, und erhalten

$$(A \cdot B)^\top = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 4 \\ -9 & -6 & -3 \\ -18 & -12 & -6 \end{pmatrix}.$$

Das war einfach. Genauso leicht können wir die Transponierte des Produktes $B \cdot A$ angeben, denn es ist ja

$$(B \cdot A)^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt berechnen wir $A^\top \cdot B^\top$, also A transponieren, dann B transponieren und dann wieder mit Herrn Falk rechnen:

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 3 & -2 \\ & & & -2 & 1 \\ & & & -5 & 4 \\ \hline 6 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Schon am Schema sieht man, dass sich eine (2×2) -Matrix ergibt, das beisst sich mit der (3×3) -Matrix $(A \cdot B)^\top$. Wir erhalten die Nullmatrix. Das war auch unser Ergebnis von $(B \cdot A)^\top$. An diesem Beispiel sehen wir also, dass $(A \cdot B)^\top \neq A^\top \cdot B^\top$ ist, aber hier für unser Beispiel ist $(B \cdot A)^\top = A^\top \cdot B^\top$, wie wir es ja auch in der Rechenregel 7. von Satz 1.2 allgemein erklärt haben.

Beim Transponieren eines Produktes also bitte die Reihenfolge der Faktoren vertauschen:

$$(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top.$$

1.2 Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und das Polynom

$$p(x) = 2 \cdot x^4 - 3 \cdot x^2 + x + 4.$$

Berechnen Sie die Potenzen A^2 , A^3 und A^4 und die Matrix $p(A)$.

Lösung:

Wir setzen das Falk-Schema von Seite 7 etwas fort, um zuerst A^2 , dann A^3 und schließlich A^4 zu berechnen.

$$\begin{array}{c|c|c|c} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \hline \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A & \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A^2} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A^3} & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A^4=E} \end{array}$$

Damit können wir alles in das Polynom einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} p(A) &= 2 \cdot A^4 - 3 \cdot A^3 + A + 4 \cdot E \\ &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1.3 *Bestimmen Sie für die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & a & 2 \\ 2 & a-1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

den Rang in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Zur leichten Rangbestimmung nutzen wir den Satz 1.4 aus und orientieren uns an den Beispielen von Seite 14.

$$\begin{aligned} \text{rg}(A) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & a & 2 \\ 2 & a-1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 0 & & \\ -1 & & 3 & a+2 & 2 & \\ -2 & & a+3 & & 2 & 2 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 0 & & \\ -1 & & 3 & a+2 & 2 & \\ -2 & & -\frac{a+3}{3} & \frac{1}{3}a(a-5) & -\frac{2}{3}a & \end{array} \right). \end{aligned}$$

Die beiden Einträge in der dritten Zeile haben wir mit folgender, hoffentlich leicht nachzuvollziehender Umrechnung gewonnen:

$$\begin{aligned} (a+2) \left(-\frac{a+3}{3} \right) + 2 &= \frac{1}{3}(-a^2 - 5a - 6) + 2 = \frac{a^2 - 5a}{3} = \frac{1}{3}a(a-5) \\ 2 \left(-\frac{a+3}{3} \right) + 2 &= -\frac{2}{3}(a+3) + 2 = -\frac{2}{3}a \end{aligned}$$

Jetzt ist die Matrix in Dreiecksform, denn unterhalb der Striche haben wir ja Nullen erzeugt. Die dort hingeschriebenen Zahlen sind ja nur die Faktoren, die wir zur Umrechnung benutzt haben. Weil die erste und zweite Zeile schon in Stufen vorliegen, ist der Rang der Matrix mindestens 2. Kann er auch 3 sein? Dazu müssen wir die dritte Zeile untersuchen. Sie lässt sich wegen der Stufenform ganz sicher nicht aus der ersten und/oder zweiten Zeile kombinieren. Ist sie die aber selbst schon die Nullzeile, so wäre der Rang genau 2.

Wie sofort zu sehen ist, wird die Zeile für $a = 0$ und nur für diese Wahl die Nullzeile. Für den Fall $a = 0$ ist also der Rang $\text{rg}(A) = 2$.

Ist aber $a \neq 0$, so ist auch die dritte Zeile nicht die Nullzeile, woraus wir locker schließen, dass dann $\text{rg}(A) = 3$ ist.

1.4 Stellen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

als Summe aus einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix dar.

Lösung:

Nach Satz 1.7 lässt sich jede quadratische Matrix darstellen als

$$A = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (A + A^T)}_{\text{symmetrisch}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot (A - A^T)}_{\text{schiefsymmetrisch}}.$$

Für unser Beispiel müssen wir nur die beiden Terme berechnen. Zunächst ist

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right] + \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wie man sieht, ist die erste Matrix symmetrisch und die zweite schiefsymmetrisch.

Lösungen zu Übung 2

2.1 Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 11 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Überprüfen Sie mit diesen Matrizen die Aussage von Satz 1.6:

$$\operatorname{rg}(A \cdot B) \leq \min(\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(B))$$

Lösung:

Zunächst berechnen wir das Produkt $A \cdot B$, damit wir alle im Satz angesprochenen Matrizen beisammen haben.

$$\begin{array}{c|c} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 11 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}}^B \\ \hline \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}}_A & \underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 1 & 19 & 2 \\ 19 & 4 & 49 & 8 \end{pmatrix}}_{A \cdot B} \end{array}$$

Nach Def. 1.8 ist der (Zeilen-)Rang die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren. Nach Satz 1.3 ist das ja zugleich der Spaltenrang. Wir können also allgemein vom Rang einer Matrix sprechen. Nur wenn wir hier ausschließlich die Zeilen umformen wollen, so sprechen wir deutlicher vom Zeilenrang. Wir werden alle drei Matrizen nach Gauß elementaren Umformungen unterwerfen, wie wir sie in Def. 1.9. zusammengestellt haben, und schauen uns dann an, was dabei herauskommt.

Wiederholen Sie bitte noch einmal, welche Bedeutung die einzelnen Einträge in der entstehenden Matrix haben, indem Sie S. 14 durchgehen.

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{array} \right) = 2$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} B &= \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 11 & 4 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 11 & 4 \\ -2 & 7 & 22 & 10 \\ -3 & -5 & -29 & -12 \end{array} \right) \\ &= \operatorname{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 11 & 4 \\ -2 & 7 & 22 & 10 \\ -3 & 5/7 & -93/7 & -34/7 \end{array} \right) = 3 \end{aligned}$$

$$\operatorname{rg} A \cdot B = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 9 & 1 & 19 & 2 \\ 19 & 4 & 49 & 8 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 1 & 19 & 2 \\ -19/9 & 17/9 & \dots & \dots \end{array} \right) = 2$$

Die letzten beiden Zahlen unten rechts müssen wir gar nicht mehr ausrechnen, denn weil die beiden Diagonalelemente $\neq 0$ sind, ist der Rang des Produktes $A \cdot B$ ganz sicher 2.

Damit haben wir an diesem einfachen Beispiel unseren Satz 1.6 bestätigt:

$\text{rg}(A) = 2, \text{rg}(B) = 3, \text{rg}(A \cdot B) = 2$, es ist also

$$\min(\text{rg}(A), \text{rg}(B)) = \min(2, 3) = 2 = \text{rg}(A \cdot B).$$

$$B \rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} -1 & 2 & 5 & 0 \\ \hline 2 & 4 & 8 & 4 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & 7 & 14 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} -1 & 2 & 5 & 0 \\ \hline 2 & 4 & 8 & 4 \\ 1 & 1/4 & 0 & 0 \\ 3 & -7/4 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

2.2 Zeigen Sie (vgl. Satz 1.7), dass sich jede quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in die Summe

$$A = \frac{1}{2} \cdot (A + A^\top) + \frac{1}{2} \cdot (A - A^\top)$$

zerlegen lässt, wobei $\frac{1}{2} \cdot (A + A^\top)$ symmetrisch und $\frac{1}{2} \cdot (A - A^\top)$ schiefsymmetrisch ist.

Lösung:

Hier müssen wir zwei Punkte zeigen. Zum ersten, dass die in der Aufgabe angegebene Zerlegung wirklich die Matrix A ergibt, dass die Gleichung also korrekt ist. Zum zweiten müssen wir dann zeigen, dass der erste Summand symmetrisch und der zweite Summand schiefsymmetrisch ist.

Wir rechnen:

$$\frac{1}{2} \cdot (A + A^\top) + \frac{1}{2} \cdot (A - A^\top) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A^\top + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^\top = A$$

Um die Symmetrie des ersten Summanden zu zeigen, rechnen wir das Transponierte dieses Summanden aus. Wenn da wieder der erste Summand herauskommt, ist die Symmetrie gezeigt; denn

$$A \text{ symmetrisch} \iff A = A^\top.$$

Wir rechnen, indem wir ausnutzen, dass $(A^\top)^\top = A$ ist:

$$\left[\frac{1}{2} \cdot (A + A^\top) \right]^\top = \frac{1}{2} \cdot (A^\top + (A^\top)^\top) = \frac{1}{2} \cdot (A^\top + A) = \frac{1}{2} \cdot (A + A^\top)$$

Laut Definition gilt:

$$A \text{ schiefsymmetrisch} \iff A = -A^\top$$

Wir rechnen ganz analog zu oben:

$$\left[\frac{1}{2} \cdot (A - A^\top) \right]^\top = \frac{1}{2} \cdot (A^\top - (A^\top)^\top) = \frac{1}{2} \cdot (A^\top - A) = -\frac{1}{2} \cdot (A - A^\top)$$

2.3 Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

invers zueinander sind.

Lösung:

Hier müssen wir einfach nur beide Matrizen miteinander multiplizieren und schauen, ob die Einheitsmatrix herauskommt.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}}_A \quad \left| \quad \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}}_B \right. \\ \hline \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}}_A \quad \left| \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A \cdot B = E}$$

2.4 Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

keine inverse Matrix besitzt.

Lösung:

Wir zeigen, dass A nicht regulär ist, indem wir zeigen, dass A nicht den vollen Rang 3 besitzt, sondern den Rang 2, dass also nur zwei Zeilen linear unabhängig sind und die dritte Zeile von den ersten beiden linear abhängig ist:

$$\text{rg } A = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & & \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 1 & 2 \end{array} \right) = \text{rg} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & & \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & -1 & 0 \end{array} \right) = 2 \neq 3$$

Wir sehen schon an der mittleren Matrix, dass die zweite und dritte Zeile gleich sind, also linear abhängig. Die rechte Matrix müssten wir also gar nicht mehr ausrechnen. Aber solch eine Rechnerei macht doch Spaß, oder?

Lösungen zu Übung 3

3.1 Berechnen Sie von folgenden Matrizen jeweils ihre Determinante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 11 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 11 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Für eine (2×2) -Matrix hilft uns die Formel (2.2):

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) - (-1) \cdot 3 = -5.$$

Für eine (3×3) -Matrix benutzen wir die Regel von Sarrus aus dem Satz 2.1:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 11 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \det(B) = \begin{array}{l} 1 \cdot 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 1 \cdot 11 + 3 \cdot 2 \cdot 0 \\ -11 \cdot 3 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) \\ = 12 - 22 - 99 + 16 = -93 \end{array}$$

Bei C haben wir es ganz leicht. C ist ja eine Dreiecksmatrix. Nach Satz 2.2 müssen wir nur die Hauptdiagonalelemente miteinander multiplizieren:

$$\det C = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 11 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 4 = 12$$

3.1 Berechnen Sie mit elementaren Umformungen die Determinante folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ -2 & 6 & -10 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -10 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Mit den elementaren Umformungen aus Satz 2.3 erhalten wir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -2 \\ -2 & 6 & -10 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -10 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -3 & 5 & -2 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & -12 & -4 \\ -1 & 2 & -3 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & -3 & 5 & -2 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & -12 & -4 \\ -1 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Die rechte Matrix hätten wir schon gar nicht mehr ausrechnen müssen, die mittlere Matrix hat ja bereits eine Nullzeile. Also ist A auf jeden Fall nicht regulär und daher ihre Determinante $\det(A) = 0$. Aus der rechten Matrix lesen wir ab, dass $\text{rg}(A) = 2$ ist.

3.3 Verifizieren Sie an Hand der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 11 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

die Aussage $\det(A) = \det(A^\top)$.

Lösung:

Verifizieren bedeutet, dass wir unsere Beispielmatrix in beide Seiten der Gleichung einsetzen und hoffentlich beidemale zum selben Ergebnis kommen. Das ist natürlich kein Beweis, sondern wir haben nur an einem Beispiel die Aussage getestet.

Die Matrix A dieser Aufgabe ist genau die Matrix B von Aufgabe 3.1. Dort haben wir ihre Determinante berechnet. Es ergab sich

$$\det(A) = \det(B) = -93.$$

Zur Berechnung von $\det(A^\top)$ arbeiten wir wieder mit der Sarrusregel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 11 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \det(A^\top) = \begin{aligned} & 1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 \cdot 3 + 11 \cdot (-2) \cdot 1 \\ & -3 \cdot 3 \cdot 11 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) \cdot 2 \\ & = 12 + 0 + (-22) - 99 + 16 = -93 \end{aligned}$$

Beide Rechnungen führen also zum gleichen Ergebnis. Damit ist die Aussage mit diesem Beispiel verifiziert.

3.4 Verifizieren Sie an Hand der beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

den Determinantenmultiplikationssatz.

Lösung:

Den Determinantenmultiplikationssatz finden wir in Formel (2.5):

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Wieder soll hier eine Gleichung verifiziert werden. Wir werden also wie oben mit den vorgegeben Beispielmatrizen beide Seiten der Gleichung getrennt ausrechnen und zeigen, dass dasselbe Ergebnis herauskommt.

Zuerst berechnen wir das Produkt $A \cdot B$:

$$\frac{\left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{array}\right)}{\left|\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{array}\right) \\ \left(\begin{array}{cc} 3 & -1 \\ 7 & 0 \end{array}\right) \end{array}\right|}$$

Also

$$A \cdot B = \left(\begin{array}{cc} 3 & -1 \\ 7 & 0 \end{array}\right) \implies \det(A \cdot B) = 7.$$

Für die rechte Seite folgt:

$$\det(A) = \det\left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{array}\right) = -2 - (-3) = 1$$

und

$$\det(B) = \det\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{array}\right) = 3 + 4 = 7.$$

Also ist

$$7 = \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = 1 \cdot 7 = 7,$$

was wir zeigen wollten.

3.5 Zeigen Sie, dass für eine reguläre $n \times n$ -Matrix A gilt:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Lösung:

Wir betrachten also eine reguläre Matrix A . Dann wissen wir nach Satz 1.8, dass ihre inverse Matrix A^{-1} existiert. Das ist also eine Matrix mit der Eigenschaft

$$A \cdot A^{-1} = E.$$

Auf diese Gleichung lassen wir jetzt den Determinantenmultiplikationssatz nach Formel (2.5) los und erhalten

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det E = 1.$$

Da A regulär ist, ist $\det(A) \neq 0$. Wir können also durch $\det(A)$ dividieren und erhalten

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)},$$

was wir zeigen sollten.

Eine Bemerkung wollen wir anschließen. Wir haben zum Schluss durch die Determinante von A dividiert, wir haben nicht durch die Matrix A dividiert. Die Determinante einer quadratischen Matrix ist eine gewöhnliche reelle Zahl, die Determinante einer regulären Matrix ist dann noch ungleich 0. Solche Zahlen darf man beliebig in den Nenner schreiben.

Eine Division durch eine Matrix ist aber gar nicht erklärt, ja, gar nicht erklärbar. Also bitte niemals durch Matrizen teilen wollen.

Lösungen zu Übung 4

4.1 Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$2x_1 + x_3 = 0$$

$$2x_2 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_3 = 0$$

$$x_2 + 2x_4 = 1$$

(a) Berechnen Sie die L-R-Zerlegung der Systemmatrix A .

(b) Zeigen Sie an Hand dieser L-R-Zerlegung, dass das LGS genau eine Lösung besitzt.

(c) Berechnen Sie diese Lösung mit der L-R-Zerlegung.

Lösung:

Zu (a):

Zunächst bringen wir das Gleichungssystem in die Form $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$. Dazu schreiben wir die Systemmatrix A auf. Dazu schreiben wir die erste Zeile $2x_1 + x_3 = 0$ etwas ausführlicher, indem wir alle Variablen x_1, \dots, x_4 benutzen:

$$2x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 0.$$

Wir haben also alle Unbekannten eingefügt in der richtigen Reihenfolge x_1, \dots, x_4 , und dabei die nicht in der Gleichung vorkommenden mit dem Faktor 0 versehen. Wenn wir das mit allen Zeilen machen, fällt uns die Systemmatrix in den Schoß:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix bearbeiten wir jetzt mit unserer L-R-Zerlegung Kap. 3.4. Zunächst könnten wir feststellen, dass A die Eigenschaft aus Satz 3.3 (für Exüpernten: sie ist diagonaldominant) besitzt, aber wir rechnen einfach los und sehen so, ob es geht.

$$A \rightarrow \tilde{A} = \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{array} \right)$$

Daraus lesen wir jetzt die Matrizen L und R ab. L ist die linke untere Matrix, allerdings zusätzlich mit Einsen in der Hauptdiagonalen, also

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Achtung, wir mussten die Vorzeichen aller Zahlen unterhalb der Diagonalen umkehren. Das verlangt die Vorschrift (vgl. S. 39).

R ist einfach die obere Dreiecksmatrix:

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Prüfen Sie bitte selbst nach, dass tatsächlich $L \cdot R = A$ herauskommt.

Zu (b):

Nach dem Alternativsatz 3.1 wissen wir, dass ein LGS mit n Unbekannten genau dann eine einzige Lösung besitzt, wenn $\text{rg}(A) = n$ ist. In unserem Beispiel ist ja $\text{rg}(A) = \text{rg}(R)$, weil wir ja nur originale Gaußumformungen vorgenommen haben, bei denen der Rang ungeändert bleibt. Offensichtlich ist aber $\text{rg}(R) = 4$, und wir haben ja genau 4 Unbekannte.

Zu (c)

Nehmen Sie sich jetzt bitte den Algorithmus von S. 43 zur Hand und folgen Sie so der Rechnung.

Setze

$$\vec{y} := R \cdot \vec{x}$$

und löse

$$L \cdot \vec{y} = \vec{b}$$

nach \vec{y} . Dies geschieht durch zeilenweises Vorgehen. Aus der ersten Zeile gewinnen wir y_1 , aus der zweiten Zeile y_2 usw. Schauen Sie nur genau hin:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}}_L \left| \begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}^{\vec{y}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \end{array} \right.$$

Als zweiten Schritt lösen wir die Gleichung

$$R \cdot \vec{x} = \vec{y}$$

mit dem gerade ermittelten \vec{y} nach \vec{x} auf:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} & & & & \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}}^{\vec{x}} \\ \hline \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}_R & & & & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\vec{y}} \end{array} \right)$$

Die Lösung ist also

$$\vec{x} = \left(0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)^\top.$$

4.2 Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & -5 \\ -2 & -1 & 5 & 4 \\ -4 & -5 & 4 & 23 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie mit Spaltenpivotisierung die L - R -Zerlegung von A .
 (b) Begründen Sie mit der L - R -Zerlegung aus (a), daß A regulär ist.

Lösung:

Zu (a):

Der Unterschied von der einfachen L - R -Zerlegung zu der mit Spaltenpivotisierung liegt in der zusätzlichen Abfrage, ob das gerade zu bearbeitende Diagonalelement das betraglich größte seiner Spalte ist. Wenn ja, machen wir wie gewohnt weiter, wenn nein, tauschen wir die entsprechenden Zeilen, so dass jetzt das betraglich größte Element Diagonalelement ist.

Weil die 4 in der ersten Spalte, ersten Zeile betraglich größer oder zumindest gleich groß mit den Elementen der ersten Spalte unterhalb der 4 ist, können wir ohne Zaudern die erste Spalte mit Gaußumformungen bearbeiten:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & -5 \\ -2 & -1 & 5 & 4 \\ -4 & -5 & 4 & 23 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & -2 & -4 & \\ \hline -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -3 & \\ \frac{1}{2} & 0 & 4 & 2 & \\ 1 & -3 & 3 & 19 & \end{array} \right).$$

Jetzt schauen wir auf die zweite Spalte. Dort steht das Diagonalelement 1, aber in der 4. Spalte steht die -3 , was beztraglich größer ist. Also tauschen wir die 2. gegen die 4. Zeile.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 4 & 2 & -2 & -4 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 19 \end{array} \right) \xrightarrow{2. \rightarrow 4.} \left(\begin{array}{c|ccc} 4 & 2 & -2 & -4 \\ -\frac{1}{2} & -3 & 2 & 19 \\ \frac{1}{2} & 0 & 4 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -3 \end{array} \right).$$

Bitte beachten Sie, dass wir die gesamte Langzeile getauscht haben. Die Gaußfaktoren vor dem senkrechten Strich gehören ja auch zu ihrer Zeile.

Wie Sie im weiteren Verlauf sehen können, wird ein nochmaliger Zeilentausch nicht nötig, wir können einfach mit Gauß bis zu Ende rechnen:

$$\rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 4 & 2 & -2 & -4 \\ -\frac{1}{2} & -3 & 2 & 19 \\ \frac{1}{2} & 0 & 4 & 2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{10}{3} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} 4 & 2 & -2 & -4 \\ -\frac{1}{2} & -3 & 2 & 19 \\ \frac{1}{2} & 0 & 4 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & 3 \end{array} \right)$$

Damit haben wir unsere gesuchte L - R -Zerlegung:

$$P \cdot A = L \cdot R$$

mit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & -4 \\ & -3 & 2 & 19 \\ & & 4 & 2 \\ & & & 3 \end{pmatrix}$$

Zur Verdeutlichung der Dreiecksgestalt von L und von R haben wir jeweils die Nullen weggelassen.

Zu (b):

Hier reicht es nicht, nur einen Blick auf die Matrix R zu werfen, denn wir haben ja einen Zeilentausch vorgenommen. Wir haben also nicht die Matrix A zerlegt, sondern die Matrix $P \cdot A$. Mit den oben gefundenen P , L und R haben wir also

$$P \cdot A = L \cdot R.$$

Mit dem Determinantenmultiplikationssatz erhalten wir daraus:

$$\det(P \cdot A) = \det P \cdot \det A = \det(L \cdot R) = \det L \cdot \det R.$$

Die Matrix P entstand aus der Einheitsmatrix durch Tausch der 2. mit der 4. Zeile. Zwei Zeilen tauschen bedeutet bei Determinanten:

$$\det P = -1.$$

Das ergibt

$$\det A = -\det L \cdot \det R = -1 \cdot 4 \cdot (-3) \cdot 4 \cdot 3 = -144.$$

Die Determinante von A ist also $-144 \neq 0$, daher ist A regulär.

4.3 Von einer Matrix A sei folgende L - R -Zerlegung bekannt:

$$A = L \cdot R \quad \text{mit } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Begründen Sie ohne explizite Berechnung von A , dass A regulär ist.

(b) Berechnen Sie ohne explizite Berechnung von A die Inverse A^{-1} .

Lösung:

Zu (a):

Da wir eine Zerlegung erreicht haben, ohne Spalten zu tauschen, entnehmen wir Satz 1.4, dass der Rang von A gleich dem Rang von R ist. Der ist aber offensichtlich gleich 4. Also ist $\text{rg}(A) = 4$, und damit ist A regulär. Sie hat ja den vollen Rang.

Zu (b):

Da A nach (a) regulär ist, besitzt sie eine inverse Matrix. Weil sie uns unbekannt ist, nennen wir sie X , also

$$X := A^{-1}.$$

Wegen $A = L \cdot R$ müssen wir also die Aufgabe lösen:

$$A \cdot X = L \cdot R \cdot X = E.$$

Jetzt kommt der Trick: Wir setzen (vgl. den Algorithmus S. 52)

$$Y := R \cdot X$$

und berechnen sodann Y aus der Gleichung

$$L \cdot Y = E.$$

Dazu berechnen wir im folgenden Schema die Spalten von Y vorne beginnend jeweils von oben nach unten.

$$\begin{array}{c|c}
& \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}}^Y \\
\hline
\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}}^L & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\vec{E}}
\end{array}$$

Mit dieser Matrix Y berechnen wir jetzt das gesuchte X , diesmal durch Aufrollen von unten nach oben, wir beginnen also mit der letzten Zeile:

$$\begin{array}{c|c}
& \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 7 & -2 & \frac{1}{2} \\ -3 & -9 & 3 & -1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{13}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}}^X \\
\hline
\overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^R & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}}^{\vec{Y}}
\end{array}$$

Unser Ergebnis lautet also:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 7 & -2 & \frac{1}{2} \\ -3 & -9 & 3 & -1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{13}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$