

# Übungen zu Kurvenintegralen

## Lösungen zu Übung 12

12.1 Sei  $k$  der obere Halbkreis mit dem Radius  $r$  um  $(0,0)$ , und sei  $f(x,y) := y$ . Berechnen Sie

$$\int_k f(x,y) ds.$$

### Lösung:

Das ist jetzt eine kleine Aufgabe zum Aufwärmen. Guter Trick: Immer, wenn es um Kreise oder so geht, denken wir an Polarkoordinaten. So auch hier:

$$x = r \cdot \cos t, \quad y = r \cdot \sin t$$

Nach Definition 6.2 ist dann

$$\begin{aligned} ds &:= |(\varphi'(t), \psi'(t))| dt \\ &= \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \\ &= \sqrt{(-r \cdot \sin t)^2 + (r \cdot \cos t)^2} dt \\ &= r \end{aligned}$$

wegen der bekannten Formel

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_k f(x,y) ds &= \int_0^\pi r \cdot \sin t \cdot r dt \\ &= r^2 \cdot \int_0^\pi \sin t dt = r^2 (-\cos) \Big|_0^\pi \\ &= r^2 \cdot [-\cos \pi - (-\cos 0)] = r^2 \cdot (1 + 1) \\ &= 2r^2 \end{aligned}$$

12.2 Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_k y e^{-x} ds,$$

wenn  $k$  der Bogen der Kurve

$$x = \varphi(t) := \ln(1 + t^2), \quad y = \psi(t) := 2 \arctan t - t + 3$$

zwischen  $t = 0$  und  $t = 1$  ist.

### Lösung:

Hier ist wegen  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$$\varphi'(t) = \frac{1}{1+t^2} \cdot 2t, \quad \psi'(t) = \frac{2}{1+t^2} - 1.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} &= \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{(2-1-t^2)^2}{1+t^2}} \\ &= \frac{1}{1+t^2} \cdot \sqrt{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4} = \frac{1}{1+t^2} \cdot \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} \\ &= \frac{1}{1+t^2} \cdot \sqrt{(t^2+1)^2} = 1 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_k y \cdot e^{-x} ds &= \\ &= \int_0^1 \frac{2 \arctan t - t + 3}{e^{\ln(1+t^2)}} \cdot 1 dt \\ &= \int_0^1 \frac{2 \arctan t - t + 3}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{2 \arctan t}{1+t^2} dt - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt + \int_0^1 \frac{3}{1+t^2} dt \\ &= 2 \cdot \int_0^1 \arctan t \cdot (\arctan t)' dt - \frac{1}{2} \cdot \ln(1+t^2) \Big|_0^1 + \underbrace{3 \arctan t \Big|_0^1}_{\pi/4} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \arctan^2 t \right)_0^1 - \frac{\ln 2}{2} + 3 \cdot \frac{\pi}{4} \\ &= \left( \frac{\pi}{4} \right)^2 - \frac{\ln 2}{2} + \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der vierten Umformung folgenden Trick benutzt, den man sich vielleicht merken kann:

$$f(t) \cdot f'(t) = \frac{1}{2}(f^2(t))', \quad \text{also} \quad \int_0^1 f(t) \cdot f'(t) dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (f^2(t))' dt = \frac{1}{2}(f^2(t)) \Big|_0^1.$$

### 12.3 Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_k \sqrt{\frac{a^2 y^2}{b^2} + \frac{b^2 x^2}{a^2}} ds,$$

wenn  $k$  die Ellipse ist mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

#### Lösung:

Wie wir oben schon gesagt haben, denken wir bei Kreisen und Ellipsen sofort an die Parameterdarstellung

$$x = \varphi(t) = a \cdot \cos t, \quad y = \psi(t) = b \cdot \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Dann erhalten wir mit

$$\varphi'(t) = -a \cdot \sin t, \quad \psi'(t) = b \cdot \cos t$$

als skalares Bogenelement

$$\begin{aligned} ds &= |\varphi'(t), \psi'(t)| \\ &= \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \\ &= \sqrt{(-a)^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \end{aligned}$$

Wegen

$$\sqrt{\frac{a^2 y^2}{b^2} + \frac{b^2 x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 t}{b^2} + \frac{b^2 \cdot a^2 \cdot \cos^2 t}{a^2}} = \sqrt{a^2 \cdot \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$$

erhalten wir insgesamt:

$$\begin{aligned} \int_k \sqrt{\frac{a^2 y^2}{b^2} + \frac{b^2 x^2}{a^2}} ds &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cdot \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \cdot \sqrt{a^2 \cdot \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (a^2 \cdot \sin^2 t + b^2 \cos^2 t) dt \\ &= a^2 \cdot \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt + b^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \\ &= a^2 \left[ \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{2\pi} + b^2 \left[ \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{2\pi} \\ &= a^2 \left[ \frac{2\pi}{2} - 0 \right] + b^2 \left[ \frac{2\pi}{2} + 0 \right] \\ &= \pi \cdot (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

12.4 Berechnen Sie den Umfang  $U$  des Kreises um  $(0,0)$  mit dem Radius  $r > 0$ , indem Sie das Kurvenintegral

$$4 \int_k 1 \, ds$$

betrachten, wenn  $k$  der Viertelkreisbogen mit Radius  $r > 0$  ist.

**Lösung:**

Wegen  $x^2 + y^2 = r^2$  ist

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq r.$$

Dann ist

$$y'(x) = \frac{-2x}{2 \cdot \sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \implies y''(x) = \frac{x^2}{r^2 - x^2}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} U &= 4 \cdot \int_k 1 \, ds \\ &= 4 \cdot \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \, dx \\ &= 4 \cdot \int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} \, dx \\ &= 4 \cdot \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} \, dx \\ &= 4 \cdot r \cdot \int_0^r \sqrt{\frac{1}{r^2 - x^2}} \, dx \\ &= 4 \cdot r \cdot \arcsin \frac{x}{r} \Big|_0^r \\ &= 4 \cdot r \cdot (\arcsin 1 - \arcsin 0) \\ &= 4 \cdot r \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \\ &= 2 \cdot \pi \cdot r, \end{aligned}$$

wie wir es in der Schule gelernt haben.

*Übrigens war in meiner Studienzeit eine beliebte Fangfrage:*

*Wie groß sind der Flächeninhalt und der Umfang eines Kreises mit Radius  $r$ : Richtig:*

$$F = \pi \cdot r^2, \quad U = 2\pi \cdot r.$$

*Jetzt aber: Wie groß sind der Flächeninhalt und der Umfang einer Ellipse mit den beiden Halbachsen  $a$  und  $b$ ?*

*Folgende Antwort liegt nahe:*

$$F = \pi(a^2 + b^2), \quad U = 2\pi \left( \frac{a+b}{2} \right)$$

*mit dem Gedanken im Hinterkopf: Der Umfang wird doch sicher analog zum Umfang eines Kreises auszurechnen sein, also z.B. mit dem Mittelwert aus den beiden Halbachsen; denn der Flächeninhalt ist ja auch ganz analog zum Kreis.*

*Aber Achtung:*

*Der angegebene Flächeninhalt der Ellipse ist korrekt, der Umfang aber falsch. Den Umfang einer Ellipse kann man nicht mit einer gewöhnlichen Formel angeben. Es entsteht ein Integral, das nicht elementar auswertbar ist. Wir kennen nur Näherungsformeln für den Ellipsenumfang.*

# Lösungen zu Übung 13

13.1 Gegeben sei das folgende Vektorfeld

$$\vec{v}(\vec{x}) := (x y, x^2, x - z).$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_k \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$$

vom Nullpunkt zum Punkt  $(1, 2, 4)$ , wobei

- (a)  $k$  die gerade Verbindung beider Punkte ist,
- (b)  $k$  die Kurve gegeben durch die folgende Parametrisierung ist:

$$x = t^2, y = 2t^3, z = 4t.$$

- (c) Vergleichen Sie das Ergebnis von (a) und (b), und begründen Sie es.

**Lösung:**

**Zu (a):**

Wir halten uns an die Festlegung in Def. 6.4, die wir allerdings noch um eine dritte Komponente erweitern. Wir wählen die einfache Parametrisierung:

$$x = \varphi(t) = t, \quad y = \psi(t) = 2t, \quad z = \chi(t) = 4t$$

Dann folgt

$$\varphi'(t) = 1, \quad \psi'(t) = 2, \quad \chi'(t) = 4$$

und wir können das Integral leicht ausrechnen:

$$\begin{aligned} \int_k \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} &= \int_0^1 (t \cdot 2t, t^2, t - 4t) \cdot (1, 2, 4) dt \\ &= \int_0^1 (2t^2 + 2t^2 - 12t) dt = \int_0^1 (4t^2 - 12t) dt \\ &= \left( \frac{4}{3}t^3 - \frac{12}{2}t^2 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{4}{3} - 6 = -\frac{14}{3} \end{aligned}$$

**Zu (b):**

Hier ist uns die Parametrisierung vorgegeben. Wir erhalten wegen

$$x = \varphi(t) = t^2, \quad y = \psi(t) = 2t^3, \quad z = \chi(t) = 4t$$

natürlich wieder  $(\varphi(0), \psi(0), \chi(0)) = (0, 0, 0)$  und  $(\varphi(1), \psi(1), \chi(1)) = (1, 2, 4)$ , womit die Parametrisierung sinnvoll ist.

Dann folgt

$$\varphi'(t) = 2t, \quad \psi'(t) = 6t^2, \quad \chi'(t) = 4.$$

Damit können wir wieder das Integral leicht berechnen:

$$\begin{aligned} \int_k \vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} &= \int_0^1 (t^2 \cdot 2t^3, t^4, t^2 - 4t) \cdot d\vec{x} \\ &= \int_0^1 (2t^5, t^4, t^2 - 4t) \cdot (2t \cdot 6t^2, 4) dt \\ &= \int_0^1 (4t^6 + 6t^6 + 4t^2 - 16t) dt \\ &= \int_0^1 (10t^6 + 4t^2 - 16t) dt \\ &= \left[ \frac{10}{7}t^7 + \frac{4}{3}t^3 - \frac{16}{2}t^2 \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{10}{7} + \frac{4}{3} - 8 = -\frac{110}{21} \end{aligned}$$

**Zu (c):**

Hoppla, das ist vom Ergebnis in (a) aber recht verschieden. Offensichtlich hängt der Wert dieses Integral vom Weg ab. Wir stellen also fest: Dieses Integral ist nicht wegunabhängig.

Die genaue Begründung für dieses 'Fehlverhalten' lernen wir dann mit dem Kurven Hauptsatz im nächsten Abschnitt kennen.

### 13.2 Berechnen Sie das Integral

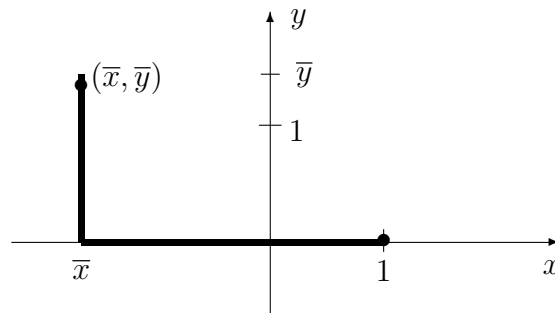
$$\int_k \left[ \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right],$$

wobei  $k$  eine Kurve im Kreis  $K : (x - 2)^2 + y^2 \leq 1$  ist, die den Punkt  $(1, 0)$  mit einem beliebigen Punkt  $(\bar{x}, \bar{y})$  in  $K$  verbindet.

**Lösung:**

Wir haben es hier mit einem zweidimensionalen Vektorfeld zu tun. Also können wir eine einfache Skizze malen.

Wir gehen vom Punkt  $(1, 0)$  zu einem beliebigen Punkt  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Dazu wählen wir den eingezeichneten Weg, gehen also zuerst entlang der  $x$ -Achse von  $(1, 0)$  nach  $(\bar{x}, 0)$ . Dann biegen wir senkrecht ab und gehen vom Punkt  $(\bar{x}, 0)$  zum Punkt  $(\bar{x}, \bar{y})$ .



Wir betonen, dass der gewählte Weg reine Willkür ist. Er wird aber unser Integral recht einfach berechnen lassen.

Also machen wir uns auf den Weg.

$$\begin{aligned}
 \int_k \vec{f}(x, y) \cdot d\vec{x} &= \int_1^{\bar{x}} f_1(x, 0) dx + \int_0^{\bar{y}} f_2(\bar{x}, y) dy \\
 &= \int_1^{\bar{x}} \frac{-0}{x^2 + 0} dx + \int_0^{\bar{y}} \frac{\bar{x}}{\bar{x}^2 + y^2} dy \\
 &= 0 + \int_0^{\bar{y}} \frac{\bar{x}}{\bar{x}^2 + \left(1 + \left(\frac{y}{\bar{x}}\right)^2\right)} dy \\
 &= 0 + \frac{1}{\bar{x}} \cdot \int_0^{\bar{y}} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{\bar{x}}\right)^2} dy \quad \text{setze: } \frac{y}{\bar{x}} =: z \Rightarrow y = \bar{x} \cdot z \\
 &= \int_0^{\frac{\bar{y}}{\bar{x}}} \frac{1}{1 + z^2} dz \\
 &= \arctan z \Big|_0^{\frac{\bar{y}}{\bar{x}}} = \arctan \frac{\bar{y}}{\bar{x}}
 \end{aligned}$$

Machen Sie sich doch selbst das Vergnügen und wählen Sie bei dieser einfachen Aufgabe beliebige andere Wege. Das übt einmal ganz schön und außerdem werden Sie erkennen, dass im Gegensatz zur vorigen Aufgabe immer dasselbe Ergebnis herauskommt. Im nächsten Abschnitt werden wir beim Kurven Hauptsatz den Grund dafür kennenlernen.

### 13.3 Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{f}(x, y, z) := (x + yz, y + xz, z + xy).$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_k \vec{f}(x, y, z) \cdot d\vec{x},$$

wenn

- (a)  $k$  die Strecke von  $(0, 0, 0)$  nach  $(1, 1, 1)$  ist,
- (b)  $k$  die Kurve mit der Parametrisierung  $x = t, y = t^2, z = t^3$  mit  $0 \leq t \leq 1$  ist,
- (c)  $k$  die drei Strecken von  $(0, 0, 0)$  nach  $(1, 0, 0)$ , dann von  $(1, 0, 0)$  nach  $(1, 1, 0)$  und abschließend von  $(1, 1, 0)$  nach  $(1, 1, 1)$  durchläuft.

**Lösung:**

**Zu (a):**

Wir wählen die Parameterdarstellung

$$x = \varphi(t) = t, \quad y = \psi(t) = t, \quad z = \chi(t) = t, \quad 0 \leq t \leq 1$$



und erhalten:

$$\begin{aligned}\int_k \vec{f}(x, y, z) d\vec{x} &= \int_0^1 \vec{f}(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot (\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t)) dt \\&= \int_0^1 (t + t^2, t + t^2, t + t^2) \cdot (1, 1, 1) dt \\&= \int_0^1 [(t + t^2) + (t + t^2) + (t + t^2)] dt \\&= \int_0^1 (3t + 3t^2) dt \\&= \left[ \frac{3t^2}{2} + \frac{3t^3}{3} \right]_0^1 \\&= \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

**Lösung:**

**Zu (b):**

Wir wählen die Parameterdarstellung lt. Aufgabenstellung

$$x = \varphi(t) = t, \quad y = \psi(t) = t^2, \quad z = \chi(t) = t^3, \quad 0 \leq t \leq 1$$

und erhalten diesmal:

$$\begin{aligned}\int_k \vec{f}(x, y, z) d\vec{x} &= \int_0^1 \vec{f}(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot (\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t)) dt \\&= \int_0^1 (t + t^2 \cdot t^3, t + t^2 \cdot t^3, t + t^2 \cdot t^3) \cdot (1, 2t, 3t^2) dt \\&= \int_0^1 [t + t^5 + 2t^3 + 2t^5 + 3t^5 + 3t^5] dt \\&= \int_0^1 (t + 2t^3 + 9t^5) dt \\&= \left[ \frac{t^2}{2} + \frac{2t^4}{4} + \frac{9t^6}{6} \right]_0^1 \\&= \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{9}{6} = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

Das ist derselbe Wert wie oben.

**Lösung:**

**Zu (c):**

Hier zerlegen wir den Weg  $k$  in drei Teilwege  $k_1$ ,  $k_2$  und  $k_3$ .

( $\alpha$ ) Sei  $k_1$  die Strecke von  $(0, 0, 0)$  nach  $(1, 0, 0)$ . Mit der Parametrisierung

$$x = \varphi(t) = t, \quad y = \psi(t) = 0, \quad z = \chi(t) = 0$$

folgt

$$\begin{aligned} \int_{k_1} \vec{f}(x, y, z) \cdot d\vec{x} &= \int_0^1 (t, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) dt \\ &= \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

( $\beta$ ) Das geht so munter weiter:

Sei  $k_2$  die Strecke von  $(1, 0, 0)$  nach  $(1, 1, 0)$ . Mit der Parametrisierung

$$x = \varphi(t) = 1, \quad y = \psi(t) = t, \quad z = \chi(t) = 0$$

folgt

$$\begin{aligned} \int_{k_1} \vec{f}(x, y, z) \cdot d\vec{x} &= \int_0^1 (1, t, 0) \cdot (0, 1, 0) dt \\ &= \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

( $\gamma$ ) Jetzt der letzte Schritt:

Sei  $k_3$  die Strecke von  $(1, 1, 0)$  nach  $(1, 1, 1)$ . Mit der Parametrisierung

$$x = \varphi(t) = 1, \quad y = \psi(t) = 1, \quad z = \chi(t) = t$$

folgt hier

$$\begin{aligned} \int_{k_1} \vec{f}(x, y, z) \cdot d\vec{x} &= \int_0^1 (1+t, 1+t, t+1) \cdot (0, 0, 1) dt \\ &= \int_0^1 (1+t)t dt = \left( \frac{t^2}{2} + t \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Aus ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) und ( $\gamma$ ) folgt daher

$$\int_k \vec{f}(x, y, z) \cdot d\vec{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Bei allen drei Wegen ergibt sich also das gleiche. Wir vermuten sehr stark, dass hier das Integral nicht vom Wege abhängt. Um dabei aber sicher zu sein, reichen keineswegs drei Beispiele. Aber im nächsten Abschnitt finden wir ein Kriterium.

# Lösungen zu Übung 14

14.1 Bestimmen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{f}(x, y, z) := (x y^2, 2 x^2 y z, -3 y z^2)$$

die Rotation  $\text{rot } \vec{f}(x, y, z)$ .

**Lösung:**

Es ist

$$f_1(x, y, z) := x y^2, \quad f_2(x, y, z) := 2 x^2 y z, \quad f_3(x, y, z) := -3 y z^2.$$

Schauen wir jetzt einfach auf die Definition der Rotation in Formel (6.10) und rechnen los:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{f}(x, y, z) &= \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \\ &= (-3z^2 - 2x^2y, 0 - 0, 4xyz - 2xy) \end{aligned}$$

14.2 Gegeben sei ein Skalarfeld  $f(x, y, z)$ , das partielle Ableitungen mindestens bis zur 2. Ordnung besitzt. Zeigen Sie, dass dann stets gilt

$$\text{rot}(\text{grad } f(x, y, z)) = \vec{0}.$$

**Lösung:**

Dies ist eine von vielen Formeln, die man in der Literatur für die Kombination der Differentialoperatoren  $\text{grad}$ ,  $\text{div}$  und  $\text{rot}$  findet.

Im dreidimensionalen Raum lautet der Gradient:

$$\text{grad } f(x, y, z) = \left( \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right).$$

Dann ist mit obiger Formel für die Rotation

$$\text{rot}(\text{grad } f(x, y, z)) = \left( \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

Nach Satz 5.1 von Hermann Amandus Schwarz sind diese zweiten partiellen Ableitungen miteinander vertauschbar, so dass, wie wir sofort sehen, alle Komponenten verschwinden.

14.3 Betrachten Sie einen Torus  $D$ , also einen Autoreifen, dessen Mittelebene in der  $(x, y)$ -Ebene liegt und der sich um die  $z$ -Achse herumwindet. Der Kreis  $x^2 + y^2 = 4, z = 0$  liege ganz im Innern des Torus. (Man erhält den Torus z.B. dadurch, dass der Kreis  $(x - 2)^2 + z^2 \leq 1, y = 0$  um die  $z$ -Achse rotiert.)

Gegeben sei in  $D$  das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) := \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, z \right).$$

(a) Zeigen Sie, dass in  $D$  gilt:

$$\text{rot}(\vec{v}(x, y, z)) = 0.$$

(b) Berechnen Sie

$$\int_k \vec{v}(x, y, z) \cdot d\vec{x},$$

wobei  $k$  der geschlossenen Kreis  $x^2 + y^2 = 4, z = 0$  ist.

**Lösung:**

**Zu (a):**

Berechnen wir zunächst  $\text{rot } \vec{v}$ :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{v}(x, y, z) &= \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \\ &= \left( 0 - 0, 0 - 0, \frac{x^2 + y^2 - 2x^2 + x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

**Zu (b):**

Zur Berechnung des Kurvenintegrals führen wir Polarkoordinaten ein und beachten dabei, dass der zugrunde liegende Kreis den Radius 2 hat:

$$x = \varphi(t) = 2 \cos t, y = \psi(t) = 2 \sin t, z = \chi(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Damit folgt:

$$(\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t)) = (-2 \sin t, 2 \cos t, 0).$$

Weil der Kreis  $k$  in der  $(x, y)$ -Ebene liegt, reduziert sich  $\vec{v}$  zu:

$$\vec{v} = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) = \left( -\frac{\sin t}{2}, \frac{\cos t}{2}, 0 \right).$$

Dann folgt für das Integral:

$$\begin{aligned}\int_k \vec{v}(x, y, z) \cdot d\vec{x} &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{-\sin t}{2}, \frac{\cos t}{2}, 0 \right) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) dt \\&= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\&= \int_0^{2\pi} 1 dt \\&= 2\pi.\end{aligned}$$