

Übungen zu Doppel- und Dreifachintegralen

Lösungen zu Übung 15

15.1 *Es sei*

$$f(x, y) := xy, \quad B : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2, y \leq x^2.$$

Berechnen Sie

$$\iint_B f(x, y) \, dB.$$

Lösung:

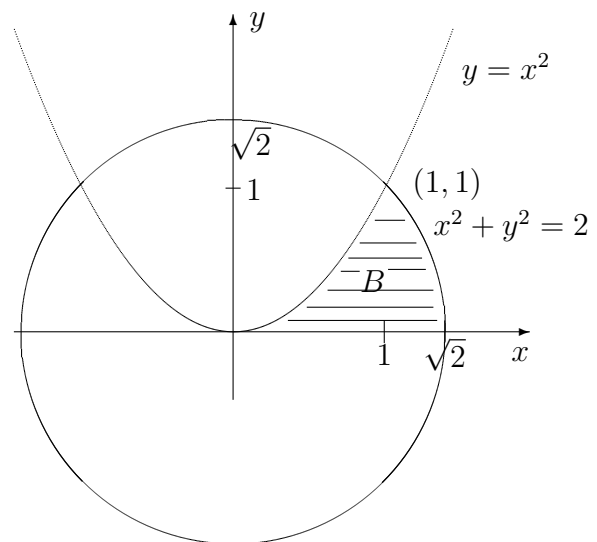
Wir lösen diese Aufgabe auf zweierlei Art.

Zuerst betrachten wir das Gebiet B so, wie es rechts liegt. Um es zu beschreiben, zerlegen wir es in zwei Teilgebiete.

$$B_1 : \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x^2$$

$$B_2 : \quad 1 \leq x \leq \sqrt{2}, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}$$

Denken Sie sich im Punkt $(1, 0)$ eine senkrechte Linie nach oben eingezeichnet, die zerteilt B genau in der Form. Sie sehen es hoffentlich, wir wollen die Figur nicht überfrachten.



Jetzt greift unsere erste Berechnungsmethode von Seite 130. Vergleichen wir die Bezeichnungen. Für das Integral über B_1 ist

$$a = 0, b = 1, \quad y_1(x) = 0, y_2(x) = x^2,$$

für das Integral über B_1 ist

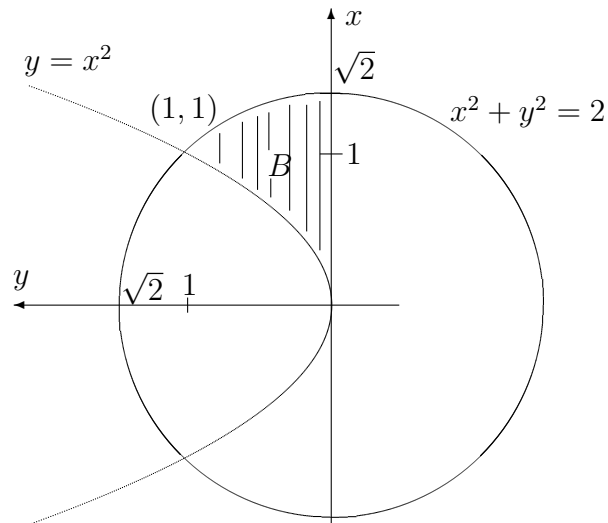
$$a = 1, b = \sqrt{2}, \quad y_1(x) = 0, y_2(x) = \sqrt{2 - x^2}.$$

Dann berechnen wir unser Integral so:

$$\begin{aligned}
\iint_B f(x, y) \, dB &= \iint_{B_1} f(x, y) \, dB + \iint_{B_2} f(x, y) \, dB \\
&= \int_0^1 \int_0^{x^2} xy \, dy \, dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} xy \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=x^2} dx + \int_1^{\sqrt{2}} x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{2-x^2}} dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^5}{2} dx + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x}{2} (2 - x^2) dx \\
&= \frac{1}{12} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{12} + \frac{2}{2} - \frac{4}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{5}{24}
\end{aligned}$$

Betrachten Sie jetzt folgende Skizze.

Diese Skizze ist gegenüber der obigen um 90° im Gegenuhrzeigersinn, also im mathematisch positiven Sinn gedreht. Jetzt liegt das Gebiet B über der y -Achse und kann so entsprechend der zweiten Berechnungsmethode einheitlich beschrieben werden:



$$0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{2-y^2}.$$

Dann können wir wieder rechnen:

$$\begin{aligned}
\iint_B f(x, y) \, dB &= \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} xy \, dx \, dy \\
&= \int_0^1 y \frac{x^2}{2} \Big|_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} dy \\
&= \int_0^1 \frac{y}{2} (2 - y^2 - y) dy \\
&= \int_0^1 \left(y - \frac{y^3}{2} - \frac{y^2}{2} \right) dy \\
&= \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{8} - \frac{y^3}{6} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{6} \\
&= \frac{5}{24}
\end{aligned}$$

Selbstverständlich ergibt sich dasselbe wie oben.

15.2 Sei

$$B : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2$$

und sei

$$f(x, y) := x^2 + y^2.$$

Berechnen Sie

$$\iint_B (x^2 + y^2) \, dB.$$

[Hinweis: Polarkoordinaten]

Lösung:

Das Gebiet B ist, wie man hoffentlich sofort sieht, der Viertelkreis vom Radius $R > 0$ im ersten Quadranten. Mit Polarkoordinaten

$$x = r \cdot \cos \alpha, \quad y = r \cdot \sin \alpha$$

transformiert sich das Gebiet B zum Rechteck

$$\tilde{B} : 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\iint_B (x^2 + y^2) dB &= \iint_{\tilde{B}} ((r \cdot \cos \alpha)^2 + (r \cdot \sin \alpha)^2) \cdot r d\tilde{B} \\
&= \iint_{\tilde{B}} r^2 \cdot r d\tilde{B} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^3 dr d\alpha \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^4}{4} d\alpha \\
&= \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi R^4}{8}
\end{aligned}$$

15.3 Bestimmen Sie die Fläche, die begrenzt ist durch die Parabeln

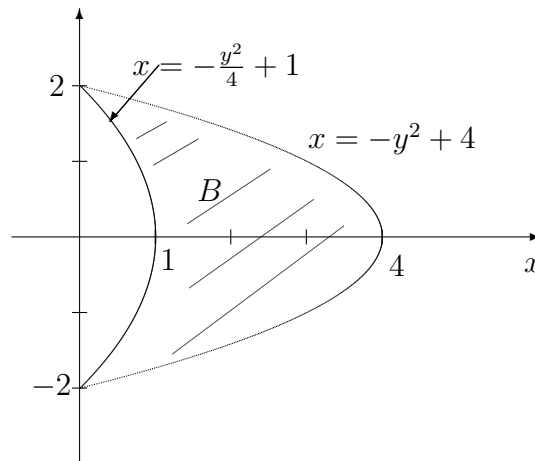
$$y^2 = 4 - x \quad \text{und} \quad y^2 = 4 - 4x.$$

Lösung:

Zunächst erinnern wir an Formel (7.14) von Seite 138 zur Berechnung von Flächeninhalten:

$$F = \iint_B dB$$

Das Gebiet B haben wir rechts skizziert. Zur Berechnung der Fläche ist es wieder einfacher, wenn wir das Gebiet im mathematisch positiven Sinn drehen. Vielleicht machen Sie das mit diesem Blatt. Dann sehen wir, dass es eine Fläche über der y -Achse ist mit den beiden Parabeln als obere und untere Begrenzung. Die beiden Schnittpunkte sind $(0, 2)$ und $(0, -2)$.



Schon ist die Rechnung ganz einfach:

$$\begin{aligned}
F &= \iint_B dB \\
&= \int_{-2}^2 \int_{x=1-\frac{y^2}{4}}^{x=4-y^2} dx dy \\
&= \int_{-2}^2 x \Big|_{x=1-\frac{y^2}{4}}^{x=4-y^2} dy \\
&= \int_{-2}^2 \left(4 - y^2 - \left(1 - \frac{y^2}{4} \right) \right) dy \\
&= \left(4y - \frac{y^3}{3} - y + \frac{y^3}{12} \right) \Big|_{-2}^2 \\
&= 8 - \frac{8}{3} - 2 + \frac{8}{12} - (-8) + \left(-\frac{8}{3} \right) + (-2) - \left(-\frac{8}{12} \right) \\
&= 8
\end{aligned}$$

15.4 Berechnen Sie das Integral

$$\iint_B e^{-(x^2+y^2)} dB,$$

wobei B der Kreis in der (x, y) -Ebene sei:

$$x^2 + y^2 \leq a^2, a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Lösung:

Wieder bietet sich wegen des Kreises die Verwendung von Polarkoordinaten

$$x = r \cdot \cos \alpha, \quad y = r \cdot \sin \alpha$$

an. Um die ganze Fläche abzudecken, betrachten wir

$$0 \leq r \leq a, \quad -\pi \leq \alpha \leq \pi.$$

Mit der Transformationsformel (7.6) von Seite 135 ergibt sich dann mit der Funktionaldeterminante r

$$\begin{aligned}
\iint_B e^{-(x^2+y^2)} dB &= \int_0^a r \cdot e^{-r^2} d\alpha dr \\
&= \int_0^a r \cdot e^{-r^2} \cdot \alpha \Big|_{-\pi}^{\pi} dr \\
&= \int_0^a r \cdot e^{-r^2} \cdot (\pi - (-\pi)) dr \\
&= \int_0^a r \cdot e^{-r^2} \cdot 2\pi \quad \text{setze } u := r^2 \\
&= \int_0^{a^2} \pi \cdot e^{-u} du \\
&= \pi \cdot (-e^{-u}) \Big|_0^{a^2} = \pi \cdot (1 - e^{-a^2})
\end{aligned}$$

15.5 Berechnen Sie das Volumen V der Kugel vom Radius R .

Lösung:

Natürlich kennen wir das

$$\text{Kugelvolumen} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3.$$

So etwas kann man auswendig hersagen, aber wie kommt man auf diese Formel? In der Schule macht man das geometrisch, wir lösen das jetzt analytisch. Wir berechnen wegen der Symmetrie nur die obere Halbkugel, das Ergebnis verdoppeln wir dann einfach.

Die obere Halbkugel vom Radius R wird dargestellt durch die Funktion

$$z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Als zugrunde liegendes Gebiet B betrachten wir die vollen Kreis mit Radius R in der (x, y) -Ebene. Beachten Sie bitte folgende Ungleichung, die für alle reellen Zahlen gilt:

$$a^2 \leq b^2 \iff -b \leq a \leq b.$$

Dann können wir den Kreis B beschreiben durch

$$B : -R \leq x \leq R, -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Jetzt natürlich Polarkoordinaten verwenden:

$$x = r \cdot \cos \alpha, \quad y = r \cdot \sin \alpha, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi,$$

und schon können wir losrechnen. Es ist

$$f(x, y) = f(x(r, \alpha), y(r, \alpha)) = \sqrt{R^2 - ((r \cdot \cos \alpha)^2 + (r \cdot \sin \alpha)^2)} = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{V}{2} &= \iint_B f(x, y) dB = \iint_{\tilde{B}} \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r d\tilde{B} \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r dr d\alpha \\
 &= \int_0^{2\pi} \left. -\frac{1}{3} \cdot (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right|_{r=0}^{r=R} d\alpha \\
 &\quad \text{Nebenrechnung: } \frac{d}{dr} \left(-\frac{1}{3} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot (R^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2r) \\
 &\quad \quad \quad = \sqrt{R^2 - r^2} \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(-0 + \frac{1}{3} \cdot R^{2 \cdot \frac{3}{2}} \right) d\alpha \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{R^3}{3} d\alpha \\
 &= \frac{2 \cdot \pi \cdot R^3}{3}
 \end{aligned}$$

Damit ist das Volumen der Kugel

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3.$$

15.6 Berechnen Sie auf zwei verschiedenen Wegen den Flächeninhalt der Fläche B , die im 1. Quadranten liegt und durch die

(halb-kubische) Parabel $y^2 = x^3$ und die Gerade $y = x$

begrenzt wird.

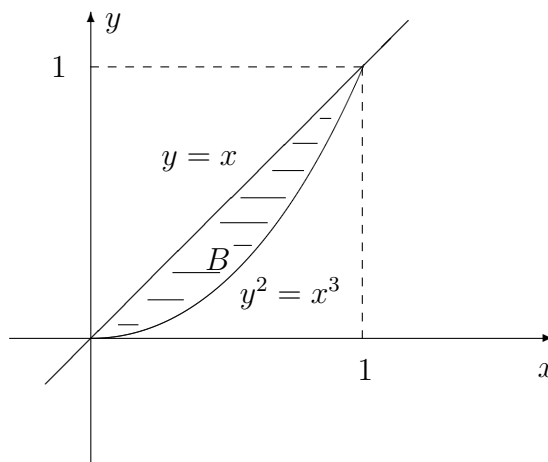
Lösung:

Um B genau zu bestimmen, berechnen wir zuerst die beiden Schnittpunkte der zwei Kurven:

$$y^2 = x^3, y = x \implies y^2 = y^3 \implies y^2(1-y) = 0.$$

also folgt

$$(x_1, y_1) = (0, 0), \quad (x_2, y_2) = (1, 1)$$

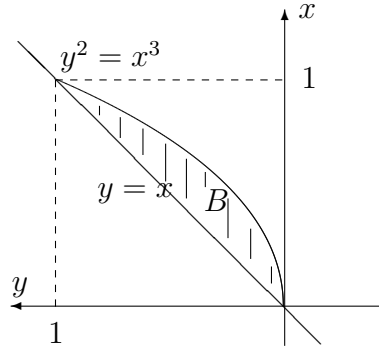


Erster Weg: Gemäß dieser Skizze denken wir uns jetzt ein beliebiges $x \in [0, 1]$ fest gewählt und integrieren entlang der senkrecht über x liegenden Linie innerhalb von B , also von $y = x^{\frac{3}{2}}$ bis $y = x$, anschließend dann lassen wir x von 0 bis 1 laufen:

$$\iint_B dB = \int_0^1 \int_{y=x^{\frac{3}{2}}}^{y=x} dy dx = \int_0^1 (x - x^{\frac{3}{2}}) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{10}$$

Zweiter Weg:

Jetzt drehen wir die Figur, so dass die y -Achse unten liegt. Dann denken wir uns jetzt ein beliebiges $y \in [0, 1]$ fest gewählt und integrieren entlang der senkrecht über y liegenden Linie innerhalb von B , also von $x = y$ bis $x = y^{\frac{2}{3}}$, anschließend lassen wir y von 0 bis 1 laufen:



$$\iint_B dB = \int_0^1 \int_{x=y}^{x=y^{\frac{2}{3}}} dx dy = \int_0^1 (y^{\frac{2}{3}} - y) dy = \left[\frac{3y^{\frac{5}{3}}}{5} - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{10}$$

15.7 Wie lautet die Funktionaldeterminante bei Doppelintegralen für eine Transformation mittels verallgemeinerter Polarkoordinaten?

$$x = a r \cos \alpha, \quad y = b r \sin \alpha, \quad a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$$

Lösung:

Wir setzen so wie in der Vorlesung

$$x = \varphi(r, \alpha) = a \cdot r \cdot \cos \alpha, \quad y = \psi(r, \alpha) = b \cdot r \cdot \sin \alpha$$

und rechnen die Funktionaldeterminante aus:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \varphi_r(r, \alpha) & \varphi_\alpha(r, \alpha) \\ \psi_r(r, \alpha) & \psi_\alpha(r, \alpha) \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} a \cdot \cos \alpha & -a \cdot r \sin \alpha \\ b \cdot \sin \alpha & b \cdot r \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= a \cdot \cos \alpha \cdot b \cdot r \cos \alpha - (-a \cdot r \sin \alpha) \cdot b \cdot \sin \alpha \\ &= a \cdot b \cdot r (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ &= a \cdot b \cdot r \end{aligned}$$

15.8 Für die Funktion $y = e^{x^2}$ ist keine elementare Stammfunktion bekannt. Daher kann das Integral

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$$

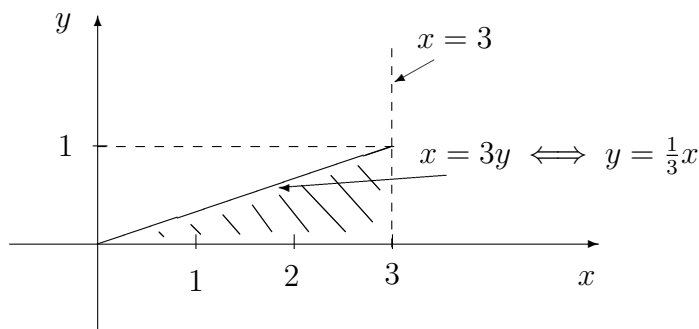
in der Form nicht berechnet werden. Berechnen Sie es durch Umkehrung der Integrationsreihenfolge.

Lösung:

Als erstes müssen wir uns über das Gebiet klar werden, über das wir integrieren sollen. Wir arbeiten von innen nach außen. Außen sollen wir über y integrieren. Also halten wir ein beliebiges $y \in [0, 1]$ fest. Erst im zweiten Schritt lassen wir das laufen.

Dann soll x von $3y$ bis 3 laufen.

Nun, $x = 3y$ ist ja die Gerade $y = \frac{1}{3}x$.



Sie müssen also von links auf die Skizze schauen. Sie können das Blatt auch gegen den Uhrzeiger um 90° drehen, so dass die y -Achse unten liegt. Dann sehen Sie, dass das schraffierte Gebiet zu Grunde liegt.

Weil wir keine Stammfunktion für $y = e^{x^2}$ kennen, versuchen wir jetzt, die Integrationsreihenfolge umzudrehen. Wir integrieren also außen über x und innen über y . Dazu halten wir jetzt ein beliebiges $x \in [0, 3]$ fest und betrachten y von $y = 0$ bis $y = \frac{x}{3}$. Wenn wir dann x von 0 bis 3 laufen lassen, überstreichen wir wieder das schraffierte Gebiet.

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy = \int_0^3 \int_0^{\frac{x}{3}} e^{x^2} dy dx$$

Und sehen Sie, hier wird die Funktion e^{x^2} zuerst über y integriert. Da ist dieser Term also eine Konstante und wir erhalten

$$\begin{aligned} &= \int_0^3 e^{x^2} \cdot y \Big|_0^{\frac{x}{3}} dx \\ &= \frac{1}{3} \cdot \int_0^3 e^{x^2} \cdot x dx \end{aligned}$$

Für diese Funktion $y = x \cdot e^{x^2}$ kennen wir aber eine Stammfunktion $y = \frac{1}{2}e^{x^2}$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{6} e^{x^2} \Big|_0^3 \\ &= \frac{1}{6} (e^9 - 1) \end{aligned}$$

Lösungen zu Übung 16

16.1 Berechnen Sie folgende Dreifachintegrale:

(a)

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-x} x y z \, dz \, dy \, dx,$$

(b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^2 z r^2 \sin \alpha \, dz \, dr \, d\alpha.$$

Lösung:

Dies sind reine Rechenaufgaben, die Sie aber auch bearbeiten sollten. Schließlich sollte ein Mathematiker seine Theorie auch mal anwenden können.

Zu (a):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-x} x y z \, dz \, dy \, dx &= \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\int_0^{2-x} x y z \, dz \right] dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{x y z^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=2-x} dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{x y (2-x)^2}{2} dy \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{x y^2 (2-x)^2}{4} \Big|_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (4x - 12x^2 + 13x^3 - 6x^4 + x^5) dx \\ &= \frac{13}{240} \end{aligned}$$

Zu (b):

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^2 z r^2 \sin \alpha \, dz \, dr \, d\alpha &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \left. \frac{z^2}{2} \right|_0^2 r^2 \sin \alpha \, dr \, d\alpha \\&= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \sin \alpha \, dr \, d\alpha \\&= \frac{2}{3} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cdot \sin \alpha \Big|_{r=0}^{r=1} d\alpha \\&= -\frac{2}{3} \cdot \cos \alpha \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\&= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

16.2 (a) V sei der von den Koordinatenebenen und der Ebene

$$E: \quad x + y + z = 1$$

begrenzte Körper. Skizzieren Sie diesen Körper.

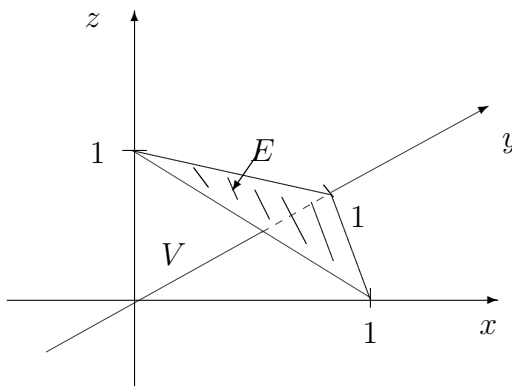
(b) Berechnen Sie das Dreifachintegral

$$\iiint_V (2x + y + z) \, dV.$$

Lösung:

Zu (a):

Die Ebene E kennen wir von der Schule her. Sie geht durch die Punkte $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$. Rechts haben wir sie schraffiert. Der Körper V liegt dann unterhalb dieser Ebene und wird von den beiden Koordinatenebenen, der (x, z) -Ebene und der (y, z) -Ebene begrenzt.



Zur Beschreibung wählen wir

$$0 \leq x \leq 1.$$

Die Verbindungsgerade zwischen den Punkten $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ hat die Gleichung $x + y = 1$, wie wir schon aus der 8. Klasse wissen. Also gilt für den Körper V

$$0 \leq y \leq 1 - x \text{ für } 0 \leq x \leq 1.$$

Die Koordinate z wird dann begrenzt von der Ebene E , also

$$0 \leq z \leq 1 - x - y \text{ für } 0 \leq x, y \leq 1.$$

Zu (b)

Damit können wir das Dreifachintegral jetzt ausrechnen:

$$\begin{aligned} \iiint_V (2x + y + z) dV &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (2x + y + z) dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(2xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=0}^{z=1-x-y} dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\left(2x(1-x-y) + y(1-x-y) + \frac{(1-x-y)^2}{2} \right) - 0 \right] dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[2x - 2x^2 - 2xy + y - xy - y^2 + \frac{1-x-y-x+x^2+xy-y+xy+y^2}{2} \right] dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[-\frac{3}{2}x^2 - 2xy + x + \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2} \right] dy dx \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{3}{2}x^2y - xy^2 + xy + \frac{y}{2} - \frac{y^3}{6} \right]_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left[-x^2 + \frac{2x^3}{3} + \frac{1}{3} \right] dx \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Im letzten Teil haben wir einige Rechenschritte ausgelassen. Die beziehen sich auf reine Rechentechnik aus der Schule.

- 16.4 Berechnen Sie den Schwerpunkt $\mathcal{S} = (S_1, S_2, S_3)$ der Halbkugel H vom Radius $R > 0$ bei konstanter Massendichte $\varrho = 1$.

Lösung:

Wir legen die Halbkugel so auf die (x, y) -Ebene, dass der Mittelpunkt des Grundkreises mit dem Koordinatenursprung übereinstimmt. Die z -Achse ist dann der senkrechte Durchmesser nach oben. Aus Symmetriegründen liegt dann der Schwerpunkt der Halbkugel auf der z -Achse. Also sind seine Koordinaten $\mathcal{S} = (S_1, S_2, S_3) = (0, 0, S_3)$. Nach unserer Formel (8.6) von Seite 145 ist dann zu berechnen:

$$S_3 = \frac{\iiint_H z \cdot \varrho(x, y, z) dH}{\iiint_H \varrho(x, y, z) dH}.$$

Wegen $\varrho = 1$ ist der Nenner gleich dem Volumen der Halbkugel H , also

$$\iiint_H \varrho(x, y, z) dH = \frac{2}{3}\pi \cdot R^3.$$

Dann ist

$$S_3 = \frac{3}{2\pi R^2} \cdot \iiint_H z dH.$$

Wir berechnen zuerst das Dreifachintegral mittels Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \iiint_H z dH &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cdot \cos \beta \cdot r^2 \cdot \sin \beta d\beta d\alpha dr \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[r^3 \cdot \frac{\sin^2 \beta}{2} \right]_0^{2\pi} d\alpha dr \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \cdot \frac{1}{2} d\alpha dr \\ &= \int_0^R \frac{r^3}{2} \cdot \alpha \Big|_0^{2\pi} dr \\ &= \int_0^R \frac{r^3}{2} \cdot 2\pi dr \\ &= \frac{R^4}{8} \cdot 2\pi \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die dritte Koordinate des Schwerpunktes

$$S_3 = \frac{3}{2\pi \cdot R^3} \cdot \frac{R^4}{8} \cdot 2\pi = \frac{3R}{8}.$$

Beachten Sie bitte, dass in dieser Formel kein transzendentes π mehr drinsteckt. Ist der Radius der Halbkugel $R = 8$, so liegt der Schwerpunkt bei $z = 3$.

16.5 Berechnen Sie das Dreifachintegral

$$\iiint_V x y z dV,$$

wo V die Einheitskugel ist.

Lösung:

Wegen

$$f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z = \underbrace{f_1(x)}_{=x} \cdot \underbrace{f_2(y)}_{=y} \cdot \underbrace{f_3(z)}_{=z}$$

können wir uns auf Satz 8.3 beziehen, der uns die Arbeit wesentlich erleichtert.

Mit Kugelkoordinaten für die Einheitskugel

$$\begin{aligned} x &= \varphi(r, \alpha, \beta) = r \cos \alpha \sin \beta, & 0 \leq r \leq 1 \\ y &= \psi(r, \alpha, \beta) = r \sin \alpha \sin \beta, & 0 \leq \alpha \leq 2\pi \\ z &= \chi(r, \alpha, \beta) = r \cos \beta, & 0 \leq \beta \leq \pi. \end{aligned}$$

ergibt sich nach Satz 8.3

$$\begin{aligned} \iiint_V x \cdot y \cdot z \, dV &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (r \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta) \cdot (r \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta) \cdot (r \cdot \cos \beta) \cdot \\ &\quad \cdot \underbrace{(r^2 \cdot \sin \beta)}_{\text{Funkt.-det.}} \, d\beta \, d\alpha \, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^5 \cdot \sin^3 \beta \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha \, d\beta \, d\alpha \, dr \\ &= \int_0^1 r^5 \, dr \cdot \int_0^\pi \sin^3 \beta \cdot \cos \beta \, d\beta \cdot \int_0^{2\pi} \cos \alpha \cdot \sin \alpha \, d\alpha \end{aligned}$$

Jetzt beschäftigen wir uns nur mal mit dem rechten Integral. Es ist

$$(\sin^2 \alpha)' = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

also ist $\frac{\sin^2 \alpha}{2}$ eine Stammfunktion von $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$. Daraus folgt

$$\int_0^{2\pi} \cos \alpha \cdot \sin \alpha \, d\alpha = \left. \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right|_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0.$$

Damit verschwindet das rechte Integral, und da es eine Faktor der ganzen rechten Seite ist, verschwindet auch das ganze Integral:

$$\iiint_V x y z \, dV = 0$$