

Übungen zu Oberflächenintegralen

Lösungen zu Übung 17

17.1 Sei \mathcal{F} die Oberfläche der Einheitskugel

$$\mathcal{F} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1.\}$$

Berechnen Sie für

$$f(x, y, z) := a, \quad a \in \mathbb{R}, a = \text{const.}$$

das Oberflächenintegral

$$\iint_{\mathcal{F}} f(x, y, z) dF.$$

Lösung:

Diese Aufgabe benutzen wir dazu, den Umgang mit Kugelkoordinaten bei Oberflächenintegralen zu üben. Auf Seite 144 haben wir sie eingeführt:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(r, \alpha, \beta) = r \cos \alpha \sin \beta, \\ y &= \psi(r, \alpha, \beta) = r \sin \alpha \sin \beta, \\ z &= \chi(r, \alpha, \beta) = r \cos \beta. \end{aligned}$$

Wir erhalten also hier für die Einheitskugel $r = 1$:

$$\vec{x} = (x, y, z) = (\cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \beta).$$

Daraus berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha} &= (-\sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha \sin \beta, 0) \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta} &= (\cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha \cos \beta, -\sin \beta) \end{aligned}$$

Damit folgt für das Kreuzprodukt in Formel (9.2) von Satz 9.2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta} &= \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \sin \beta & 0 \\ \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \cos \beta & -\sin \beta \end{pmatrix} \\ &= -\cos \alpha \sin^2 \beta \vec{e}_1 - \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta \vec{e}_3 - \cos^2 \alpha \sin \beta \cos \beta \vec{e}_3 - \sin \alpha \sin^2 \beta \vec{e}_2 \\ &= -\cos \alpha \sin^2 \beta \vec{e}_1 - \sin \alpha \sin^2 \beta \vec{e}_2 - \underbrace{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}_1 \sin \beta \cos \beta \vec{e}_3 \end{aligned}$$

In Formel (9.2) von Satz 9.2 brauchen wir aber in Wirklichkeit den Betrag, also

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta} \right| &= \sqrt{\cos^2 \alpha \sin^4 \beta + \sin^2 \alpha \sin^4 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \beta} \\ &= \sin \beta \end{aligned}$$

Hier müssen Sie nur immer wieder die Formel $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ausnutzen. Da wir nur $0 \leq \beta \leq \pi$ zulassen, müssen wir auch am Ende keinen Betrag verwenden.

Damit folgt jetzt insgesamt:

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a \cdot \sin \beta d\beta d\alpha \\ &= a \cdot \int_0^{2\pi} (-\cos \beta) \Big|_0^\pi d\alpha \\ &= a \cdot \int_0^{2\pi} (-(-1) - (-1)) d\alpha \\ &= 2a \cdot \int_0^{2\pi} d\alpha = 4\pi \cdot a. \end{aligned}$$

Setzen wir jetzt mal $a = 1$, so berechnen wir ja mit dem Integral schlichtweg die Oberfläche der Kugel vom Radius 1. Es ergibt sich:

$$\iint_S dS = 4\pi,$$

und das haben wir ja auch in der Schule so gelernt.

17.2 Sei \mathcal{F} ein Flächenstück, gegeben als Graph einer Funktion über der (x,y)-Ebene:

$$\mathcal{F} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R^2, z = g(x, y)\}.$$

Berechnen Sie mit der sich auf natürliche Weise ergebenden Parametrisierung

$$|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|$$

Lösung:

Wir parametrisieren \mathcal{F} durch

$$u = x, v = y, z = g(x, y) = g(u, v),$$

also

$$\vec{x} = (u, v, g(u, v)).$$

Dann ist

$$\vec{x}_u = (1, 0, g_u(u, v)), \quad \vec{x}_v = (0, 1, g_v(u, v)).$$

Damit folgt

$$|\vec{x}_u \times \vec{x}_v| = \sqrt{(-g_u)^2 + (-g_v)^2 + 1} = \sqrt{g_u^2 + g_v^2 + 1}$$

Diese Formel finden Sie in vielen Büchern.

17.3 Berechnen Sie das Oberflächenintegral von $f(x, y, z) := x$

$$\iint_{\mathcal{F}} f(x, y, z) dF = \iint_{\mathcal{F}} x dF,$$

wobei \mathcal{F} die Fläche $z = x^2 + y$ mit $0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ ist.

Lösung:

Die Fläche \mathcal{F} ist hier gegeben als Graph der Funktion $g(x, y) = x^2 + y$. Damit können wir die Formel aus Aufgabe 17.2 anwenden mit den Festlegungen

$$x = u, \quad y = v, \quad z = g(x, y) = u^2 + v,$$

und wir erhalten wegen $g_u = 2u, g_v = 1$

$$|\vec{x}_u \times \vec{x}_v| = \sqrt{g_u^2 + g_v^2 + 1} = \sqrt{4u^2 + 1 + 1}.$$

Damit folgt mit

$$B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1\}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{F}} f(x, y, z) dF &= \iint_B x \sqrt{4u^2 + 2} du dv \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^1 u \sqrt{4u^2 + 2} du dv \\ &= \int_{-1}^1 dv \cdot \int_0^1 u \sqrt{4u^2 + 2} du \\ &= 2 \cdot \int_0^1 u \sqrt{4u^2 + 2} du \\ &\quad \text{Setze } t = 4u^2 + 2 \implies dt = 8u du \\ &\quad u = 0 \implies t = 2, \quad u = 1 \implies t = 6 \\ &= \frac{2}{8} \int_2^6 t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_2^6 \\ &= \frac{1}{6} (6^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}) = 1.978085 \end{aligned}$$

17.4 Sei \mathcal{F} die Halbkugelfläche

$$\mathcal{F} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0.\}$$

Sei $f(x, y, z) := x^2 y^2 z$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\iint_{\mathcal{F}} f(x, y, z) dF.$$

Lösung:

Wieder benutzen wir Kugelkoordinaten, das bietet sich bei Kugelflächen geradezu an. Wegen $r = 1$ ist

$$x = \cos \alpha \cdot \sin \beta, \quad y = \sin \alpha \cdot \sin \beta, \quad z = \cos \beta, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi, 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Damit ist

$$\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \beta} \right| = \sin \beta.$$

Mit

$$B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$$

folgt dann

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{F}} f(x, y, z) dF &= \iint_B f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) db \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta d\beta d\alpha \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \beta \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \beta d\beta d\alpha \\ &\quad \text{wegen fester Grenzen können wir den Integranden trennen} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \beta \cdot \cos \beta d\beta \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha d\alpha \end{aligned}$$

Jetzt ist der Rest reine Schulmathematik. Für das linke Integral setzen wir

$$t = \sin \beta \implies dt = \cos \beta d\beta, \beta = 0 \implies t = 0, \beta = \frac{\pi}{2} \implies t = 1$$

und es folgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \beta \cdot \cos \beta d\beta = \int_0^1 t^5 dt = \left. \frac{t^6}{6} \right|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Zur Berechnung des rechten Integrals müssen wir noch etwas tiefer in die Trickkiste packen. Wir verwenden das sog. Additionstheorem, das Sie aus der Schule kennen:

$$\sin(\varepsilon + \delta) = \sin \varepsilon \cdot \cos \delta + \cos \varepsilon \cdot \sin \delta.$$

Wenn wir hier $\varepsilon = \delta = \gamma$ setzen, folgt die Gleichung

$$\sin 2\gamma = 2 \cdot \sin \gamma \cdot \cos \gamma.$$

Aus dem zweiten Additionstheorem

$$\cos(\varepsilon + \delta) = \cos \varepsilon \cdot \cos \delta - \sin \varepsilon \cdot \sin \delta$$

folgt zusammen mit der Formel

$$\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1$$

die Gleichung

$$\sin^2 \gamma = \frac{1 - \cos 2\gamma}{2}.$$

So erhalten wir

$$\cos^2 \gamma \cdot \sin^2 \gamma = \frac{\sin^2 2\gamma}{4} = \frac{1 - \cos 4\gamma}{8}.$$

Damit folgt für das rechte Integral

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \, d\alpha &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{8} - \frac{\cos 4\alpha}{8} \right) d\alpha \\ &= \frac{1}{8} \cdot \int_0^{2\pi} d\alpha - \frac{1}{8} \cdot \int_0^{2\pi} \cos 4\alpha \, d\alpha \\ &= \frac{2\pi}{8} - \frac{\sin \alpha}{8} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das gesamte Integral

$$\iint_{\mathcal{F}} f(x, y, z) \, dF = \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{24}.$$

Lösungen zu Übung 18

18.1 Sei \mathcal{F} die Oberfläche der Einheitskugel

$$\mathcal{F} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1.\}$$

Sei

$$f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2, \quad \vec{n} \text{ der Normaleneinheitsvektor an } \mathcal{F}.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\iint_{\mathcal{F}} \text{grad } f(x, y, z) \cdot \vec{n} \, dF.$$

Lösung:

Zuerst müssen wir uns den Normaleneinheitsvektor \vec{n} an die Kugel­fläche beschaffen. Das ist aber recht einfach. Wir erinnern uns, dass bei jeder Kugel der Radiusvektor vom Mittelpunkt der Kugel senkrecht auf die Oberfläche auftritt. Bei der Einheitskugel, deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt, ist der Radiusvektor der Vektor

$$\vec{r} = (x, y, z).$$

Dieser zeigt also bereits in Richtung senkrecht zur Fläche. Da wir die Einheitskugel betrachten, ist die Länge dieses Vektors auch bereits 1, er ist also normiert.

Jetzt brauchen wir noch den Gradienten der Funktion f :

$$\text{grad } f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (2x, 2y, 2z)$$

Damit können wir das Integral lösen.

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{F}} \text{grad } f(x, y, z) \cdot \vec{n} \, dF &= \iint_{\mathcal{F}} (2x, 2y, 2z) \cdot (x, y, z) \, dF \\ &= \iint_{\mathcal{F}} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \, dF \\ &= 2 \iint_{\mathcal{F}} dF = 2 \cdot 4\pi = 8\pi \end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Teil wieder die Einheitskugel, also $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, und den aus der Schule bekannten Flächeninhalt der Kugel $O = 4\pi \cdot r^2$ einbezogen.

18.2 Sei \mathcal{F} die Oberfläche der Kugel vom Radius $a > 0$:

$$\mathcal{F} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad a > 0.\}$$

Sei

$$\vec{v}(x, y, z) := (x, y, z).$$

Berechnen Sie den Fluss von \vec{v} durch die Fläche \mathcal{F} .

Lösung:

In dieser Aufgabe haben wir eine Kugel vom Radius $a > 0$ zu betrachten. Wir legen wieder ihren Mittelpunkt in den Koordinatenursprung. Dann ist der Normalenvektor

$$\vec{n} = (x, y, z),$$

und der Normaleneinheitsvektor

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{a} \cdot (x, y, z).$$

Damit können wir das Integral berechnen:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{F}} \vec{f}(x, y, z) \cdot \vec{n} \, dF &= \iint_{\mathcal{F}} (x, y, z) \cdot \frac{(x, y, z)}{a} \, dF \\ &= \iint_{\mathcal{F}} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a} \, dF \\ &= \frac{a^2}{a} \iint_{\mathcal{F}} dF = a \cdot 4\pi a^2 = 4\pi \cdot a^3 \end{aligned}$$