

Übungen zu Integralsätzen

Lösungen zu Übung 19

19.1 Sei $V \in \mathbb{R}^3$ der Einheitswürfel

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq 1.\}$$

Verifizieren Sie für

$$\vec{v}(x, y, z) := (4xz, -y^2, yz)$$

den Gaußschen Divergenzsatz.

Lösung:

Verifizieren bedeutet, dass wir an diesem Beispiel überprüfen wollen, ob der Divergenzsatz von Gauß auch wirklich stimmt. In diesem Satz steckt die Formel, die wir hier mit \vec{v} statt \vec{f} aufschreiben:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) dV = \iint_{\mathcal{F}} \vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{n} dF.$$

Wir rechnen also jetzt die linke Seite und die rechte Seite dieser Formel getrennt aus und hoffen (natürlich sind wir sicher), dass beide Male dasselbe herauskommt. Dann haben wir die Formel nicht falsi-, sondern verifiziert.

Berechnung der linken Seite:

Als erstes berechnen wir die Divergenz der gegebenen Funktion

$$\vec{v}(x, y, z) = (v_1(x, y, z), v_2(x, y, z), v_3(x, y, z)) = (4xz, -y^2, yz)$$

nach Formel (10.1) von Seite 161:

$$\operatorname{div} \vec{v}(x, y, z) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 4z - 2y + y$$

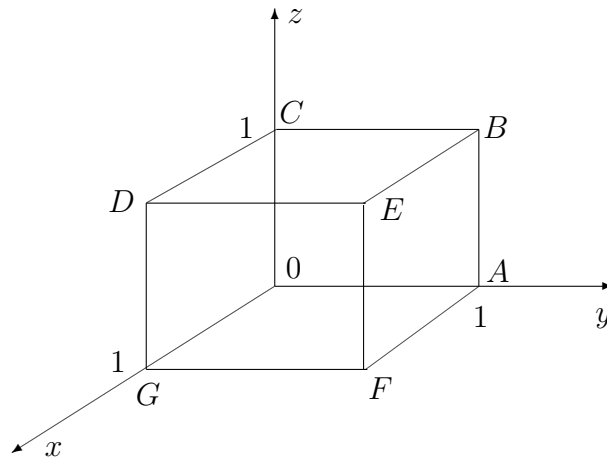
Dann rechnen wir zunächst gemäß Formel (8.1) von Seite 142 und dann weiter nach Formel (7.2) von Seite 130:

$$\begin{aligned}
\iiint_V \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) dV &= \iiint_V [4z - 2y + y] dV \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (4z - y) dz dy dx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (2z^2 - yz) \Big|_0^1 dy dx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (2 - y) dy dx \\
&= \int_0^1 \left(2y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 dx \\
&= \int_0^1 \left(2 - \frac{1}{2} \right) dx = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Dieses war der linke Streich, doch der rechte kommt sogleich:

Berechnung der rechten Seite:

Als Fläche haben wir hier die gesamte Oberfläche des Einheitswürfels, wie wir ihn rechts gezeichnet haben. Bitte verfolgen Sie mit Finger oder Bleistift die einzelnen Flächen in der folgenden Aufteilung:



$$\iint_{\mathcal{F}} = \iint_{DEFG} + \iint_{ABCD} + \iint_{ABEF} + \iint_{GDCD} + \iint_{BCDE} + \iint_{AFG0}$$

Wir müssen jedes Integral einzeln ausrechnen, denn wir müssen jedes Mal den Normalenvektor richtig dazunehmen. Es muss immer der nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor sein, wenn wir bitte den Satz von Gauß genau lesen.

Betrachten wir die Fläche $DEFG$. Es ist die vordere Fläche in der Ebene $x = 1$. Die x -Richtung zeigt ebenfalls nach vorne, also ist

$$\vec{n} = (1, 0, 0).$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\iint_{DEFG} (4xz, -y^2, yz) \cdot (1, 0, 0) dF &= \int_0^1 \int_0^1 4z dy dz = \int_0^1 4z dz \\
&= \left. \frac{4z^2}{2} \right|_0^1 = 2.
\end{aligned}$$

Das geht jetzt munter so weiter.

Für die Fläche $ABC0$ ist $x = 0$ und $\vec{n} = (-1, 0, 0)$ und damit

$$\iint_{ABC0} (4xz, -y^2, yz) \cdot (-1, 0, 0) dF = \int_0^1 \int_0^1 -4 \cdot 0 \cdot z dy dz = 0.$$

Für die Fläche $ABEF$ ist $y = 1$ und $\vec{n} = (0, 1, 0)$ und damit

$$\begin{aligned}
\iint_{ABEF} (4xz, -1, z) \cdot (0, 1, 0) dF &= \int_0^1 \int_0^1 -1 dx dy \\
&= \int_0^1 (-x) \Big|_0^1 dy = \int_0^1 -1 dy = -1.
\end{aligned}$$

Für die Fläche $OGDC$ ist $y = 0$ und $\vec{n} = (0, -1, 0)$ und damit

$$\iint_{OGDC} (4xz, 0, 0) \cdot (0, -1, 0) dF = \int_0^1 \int_0^1 0 dx dy = 0.$$

Für die Fläche $BCDE$ ist $z = 1$ und $\vec{n} = (0, 0, 1)$ und damit

$$\begin{aligned}
\iint_{BCDE} (4x, -y^2, y) \cdot (0, 0, 1) dF &= \int_0^1 \int_0^1 y dx dy \\
&= \int_0^1 y dy = \int_0^1 \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 dy = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Für die Fläche $AFG0$ ist $z = 0$ und $\vec{n} = (0, 0, -1)$ und damit

$$\iint_{AFG0} (0, -y^2, 0) \cdot (0, 0, -1) dF = \int_0^1 \int_0^1 0 dx dy = 0.$$

Jetzt müssen wir zum Schluss alle Werte der sechs Flächen aufsummieren:

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{n} dF = 2 + 0 + (-1) + 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{3}{2}$$

19.2 Verifizieren Sie den Divergenzatz von Gauß für folgende Funktion:

$$\vec{v}(x, y, z) := (4x, -2y^2, z^2)$$

$$\text{auf } V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3.\}$$

Lösung:

Das ist nur eine ein klein wenig geänderte Aufgabe, wir können also einfach losrechnen.

Berechnung der linken Seite:

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \, dx \, dy \, dz &= \iiint_V (4 - 4y + 2z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^3 (4 - 4y + 2z) \, dz \, dy \, dx \\ &= 84\pi. \end{aligned}$$

Berechnung der rechten Seite:

Wir zerlegen das Oberflächenintegral in drei Anteile:

$$\iint_{\partial V} \cdots = \iint_{F_1} \cdots + \iint_{F_2} \cdots + \iint_{F_3} \cdots$$

Dabei sei F_1 die Grundfläche, F_2 die Oberfläche und F_3 der Mantel des Zylinders.

$$\text{Zu } F_1 : \vec{n} = -\vec{e}_3, \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \iint_{F_1} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dF_1 = 0.$$

$$\text{Zu } F_2 : \vec{n} = \vec{e}_3, \vec{v} \cdot \vec{n} = 9 \Rightarrow \iint_{F_2} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dF_2 = 9 \iint_{F_2} dF_2 = 36\pi.$$

Zu F_3 : Zur Bestimmung des Normalenvektors an die Mantelfläche berechnen wir zunächst den zweidimensionalen Normalenvektor \vec{n}_2 an den Grundkreis des Zylinders:

$$\operatorname{grad}(x^2 + y^2) = (2x, 2y) \Rightarrow \vec{n}_2 = \frac{1}{2}(x, y).$$

Damit lautet der Normalenvektor \vec{n} im Punkt (x, y, z) des Zylindermantels

$$\vec{n}(x, y, z) = \frac{1}{2}(x, y, 0) \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{n} = 2x^2 - y^3.$$

$$\text{Setze } x = 2 \cos \vartheta, y = 2 \sin \vartheta \Rightarrow dF_3 = 2d\vartheta \, dz$$

$$\begin{aligned} \iint_{F_3} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dF_3 &= \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^3 [2(2 \cos \vartheta)^2 - (2 \sin \vartheta)^3] 2 \, dz \, d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} (48 \cos^2 \vartheta - 48 \sin^3 \vartheta) \, d\vartheta = 48\pi. \end{aligned}$$

Aufsummieren führt zum selben Ergebnis wie oben.

19.3 Verifizieren Sie den Satz von Stokes für die Funktion

$$\vec{f}(x, y, z) := (2x - y, -y z^2, -y^2 z).$$

Dabei sei \mathcal{F} die obere Halbkugelfläche mit Radius $R > 0$ um den Nullpunkt und \vec{n} der nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor. Außen seien dabei alle Punkte des \mathbb{R}^3 mit $z > 0$, deren Abstand von $(0, 0, 0)$ größer als R ist.

[Hinweis: Die Berechnung des Oberflächenintegrals muss nicht zu Ende geführt werden.]

Lösung:

Die Formel im Satz von Stokes entnehmen wir dem Buch, Formel (10.4) auf Seite 164:

$$\iint_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} \vec{f}(x, y, z) \cdot \vec{n} dF = \int_{\kappa} \vec{f}(x, y, z) \cdot \vec{t} ds.$$

Wir sollen wieder verifizieren, also versuchen wir, beide Seiten dieser Formel zu berechnen und hoffentlich das gleiche Ergebnis zu erhalten.

Berechnung der linken Seite:

Wir wählen die Parameterdarstellung der Kugel wieder mal mit Polarkoordinaten. Sei also

$$\vec{x} = (x, y, z)$$

mit

$$x = R \cdot \sin u \cdot \cos v, y = R \cdot \sin u \cdot \sin v, z = R \cdot \cos u \quad 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v \leq 2\pi$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{f}(x, y, z) &= (2x - y, -y z^2, -y^2 z) \\ &= (2R \sin u \cos v - R \sin u \sin v, -R \sin u \sin v R^2 \cos u, -R^2 \sin^2 u \sin^2 v R \cos u) \end{aligned}$$

Gemäß Formel (9.4) berechnen wir zur Bestimmung des Normalenvektors \vec{x}_u und \vec{x}_v :

$$\begin{aligned} \vec{x}_u &= (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, -R \sin u) \\ \vec{x}_v &= (-R \sin u \sin v, R \sin u \cos v, 0) \end{aligned}$$

Hieraus müssten wir jetzt den Normalenvektor gemäß

$$\vec{n} = \vec{x}_u \times \vec{x}_v$$

berechnen. Wenn wir aber diese Formeln alle zusammen betrachten, so erkennen wir, dass jetzt eine große Rechnerei einsetzen wird. Dabei werden wir sicher viele Vereinfachungen

durch trigonometrische Formeln ausnutzen können, aber es ist doch recht langwierig und dadurch langweilig, vor allem deshalb, weil wir ja eine andere Möglichkeit kennen. Wir berechnen einfach die rechte Seite, was leichter geht.

Berechnung der rechten Seite:

Die Randkurve k ist ein Kreis in der (x, y) -Ebene mit Radius R . Wir wählen als Parameter

$$x = R \cos t, y = R \sin t, z = 0$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \vec{f}(x, y, z) &= (2R \cos t - R \sin t, -R \sin t \cdot 0, -R^2 \sin^2 t \cdot 0) \\ &= (2R \cos t - R \sin t, 0, 0) \end{aligned}$$

Als Tangentenvektor erhalten wir

$$\vec{t} = \left(\frac{d}{dt}(R \cos t), \frac{d}{dt}(R \sin t) \right) = (-R \sin t, R \cos t, 0).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_{\kappa} \vec{f}(x, y, z) \cdot \vec{t} ds &= \int_0^{2\pi} (2R \cos t - R \sin t, 0, 0) \cdot (-R \sin t, R \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-2R^2 \cos t \sin t + R^2 \sin^2 t) dt \\ &= -2R^2 \int_0^{2\pi} \sin t \cdot \cos t dt + R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt \\ &= -2R^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2t}{2} dt + R^2 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt \\ &= \underbrace{-2R^2 \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 2t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi}}_{=0} + \underbrace{\frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} 1 dt}_{=\pi R^2} - \underbrace{\frac{R^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2t \Big|_0^{2\pi}}_{=0} \\ &= \pi R^2 \end{aligned}$$

Hier haben wir trefflich das Additionstheorem für sin und cos eingesetzt:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

Daraus ergeben sie die Formeln, die man auch leicht in Formelsammlungen nachlesen kan

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

19.4 Berechnen Sie unter geschickter Ausnutzung des Satzes von Stokes das Oberflächenintegral

$$\iint_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} \vec{f}(x, y, z) \cdot \vec{n} \, dF.$$

Dabei sei

$$\vec{f}(x, y, z) := (3y, -xz, yz^2)$$

und \mathcal{F} das nach oben geöffnete Paraboloid

$$\mathcal{F} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z = x^2 + y^2, \text{ beschränkt durch } Z = 2\}$$

und \vec{n} sei der nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor.

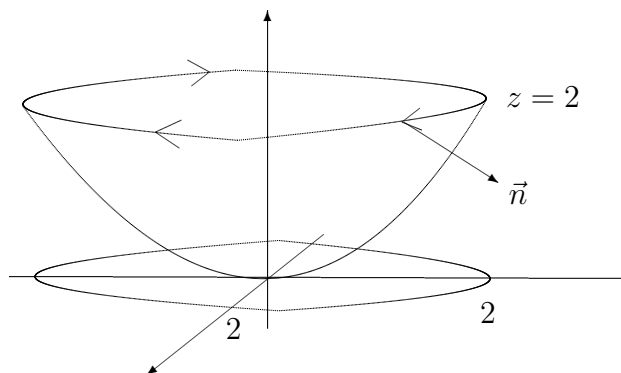
Lösung:

Aus dem Satz von Stokes entnehmen wir die Formel

$$\iint_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} \vec{f}(x, y, z) \cdot \vec{n} \, dF = \int_{\kappa} \vec{f}(x, y, z) \cdot \vec{t} \, ds.$$

Links steht ein Oberflächenintegral, rechts ein Kurvenintegral. Interessiert sind wir an dem Oberflächenintegral, was aber in der Regel recht kompliziert auszurechnen ist. Zum Glück können wir uns das leichtere Kurvenintegral vornehmen. Dazu müssen wir uns jetzt Gedanken über die Orientierung und den Tangentenvektor machen.

Laut Aufgabe ist die Fläche \mathcal{F} ein nach oben offenes Paraboloid, wie wir es rechts angedeutet haben. Stellen Sie sich eine Schüssel vor. \mathcal{F} ist die Schüsselaußenhaut. Nach oben wird die Schüssel begrenzt durch die Ebene $z = 2$. Der obere Rand ist also ein Kreis.



Festlegung der Umlaufrichtung: Jemand, der in Richtung \vec{n} , also Füße auf dem Randkreis, Kopf bei der Pfeilspitze, steht, muss in Richtung der Pfeile auf dem Kreisrand entlang laufen, damit die äußere Schüsselfläche zur linken liegt. Außen wird dabei durch die Richtung des Normalenvektors definiert.

Dann ist k der Kreis mit Radius 2, also $x^2 + y^2 = 4$. Wir wählen die Parametrisierung

$$x = 2 \cos \varphi, \quad y = 2 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Aber Achtung. Wegen der Umlaufrichtung müssen wir beim Integral als untere Grenze 2π und als obere Grenze 0 wählen, denn wir laufen ja von oben gesehen im Uhrzeigersinn um den Kreis herum. Jetzt können wir losrechnen:

$$\begin{aligned}
\int_{\kappa} \vec{f}(x, y, z) \cdot \vec{t} \, ds &= \int_{2\pi}^0 3(2 \sin \varphi, -2 \cos \varphi \cdot 2, 2 \sin \varphi \cdot 2^2) \cdot \left(\frac{dx}{d\varphi}, \frac{dy}{d\varphi}, \frac{dz}{d\varphi} \right) d\varphi \\
&= \int_{2\pi}^0 3(2 \sin \varphi, -4 \cos \varphi, 8 \sin \varphi) \cdot (-2 \sin \varphi, 2 \cos \varphi, 0) d\varphi \\
&= \int_{2\pi}^0 (-12 \sin^2 \varphi - 8 \cos^2 \varphi) d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} 12 \sin^2 \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} 8 \cos^2 \varphi d\varphi \\
&= 12 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi + \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi + 8 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi + 8 \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\varphi}{2} d\varphi \\
&= 12\pi - 0 + 8\pi + 0 \\
&= 20\pi
\end{aligned}$$

Wie in der vorigen Aufgabe haben wir auch hier aus den Additionstheoremen und aus $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ folgende Formeln abgeleitet und benutzt:

$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi = 1 - \cos 2\varphi - \sin^2 \varphi,$$

also

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}, \quad \cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}.$$