

# Übungen zu Splines

## Lösungen zu Übung 20

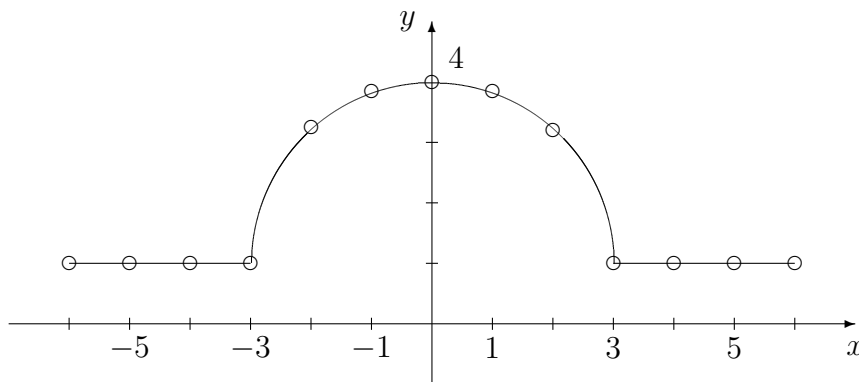
20.1 Gegeben seien in der  $(x, y)$ -Ebene die 13 Punkte:

$x_i$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$y_i$	1	1	1	1	$1 + \sqrt{5}$	$1 + \sqrt{8}$	4	$1 + \sqrt{8}$	$1 + \sqrt{5}$	1	1	1	1

- (a) Skizzieren Sie diese Punkte.
- (b) Stellen Sie zur Berechnung des Polynoms  $p(x)$ , welches diese Punkte interpoliert, das zugehörige lineare Gleichungssystem auf.
- (c) Bestimmen Sie (exemplarisch für drei Punkte) den zugehörigen linearen Spline, der diese Punkte interpoliert, und skizzieren Sie das Ergebnis.

**Lösung:**

**Zu (a):**



Die Daten beschreiben den Querschnitt durch einen Tunnel. Besonders hinterhältig ist der senkrechte Anstieg bei  $x = -3$  und  $x = 3$ . Da hat natürlich jede Interpolation ihre Probleme.

**Zu (b):**

Wir benutzen die Definition 11.1. Mit dem allgemeinen Ansatz

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_Nx^N$$

erhalten wir die folgenden  $N + 1$  Gleichungen:

$$\begin{aligned} p(x_0) &= a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_Nx_0^N = y_0 \\ p(x_1) &= a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_Nx_1^N = y_1 \\ p(x_2) &= a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_Nx_2^N = y_2 \\ &\vdots \\ p(x_N) &= a_0 + a_1x_N + a_2x_N^2 + \cdots + a_Nx_N^N = y_N \end{aligned}$$

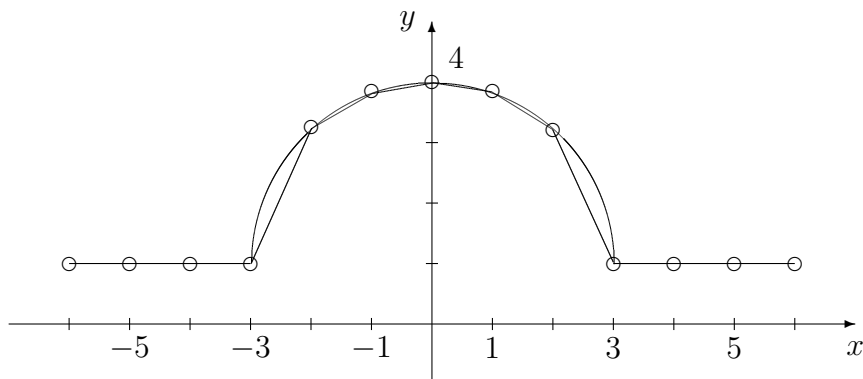
In diesen Ansatz setzen wir obige Punkte ein und erhalten mit  $N = 12$  das System

$$\begin{aligned}
 p(-6) &= a_0 + a_1(-6) + a_2(-6)^2 + a_3(-6)^3 + \cdots + a_{12}(-6)^{12} = 1 \\
 p(-5) &= a_0 + a_1(-5) + a_2(-5)^2 + a_3(-5)^3 + \cdots + a_{12}(-5)^{12} = 1 \\
 p(-4) &= a_0 + a_1(-4) + a_2(-4)^2 + a_3(-4)^3 + \cdots + a_{12}(-4)^{12} = 1 \\
 &\vdots \\
 p(1) &= a_0 + a_1 1 + a_2 1^2 + a_3 1^3 + \cdots + a_{12} 1^{12} = \sqrt{8} + 1 \\
 &\vdots \\
 p(6) &= a_0 + a_1 6 + a_2 6^2 + a_3 6^3 + \cdots + a_{12} 6^{12} = 1
 \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit 13 Gleichungen für die 13 Unbekannten  $a_0, \dots, a_{12}$ .

**Zu (c):**

Wir haben den zugehörigen linearen Spline eingetragen. Eine explizite Berechnung der Geradenstücke führen wir in der nächsten Aufgabe vor.



20.2 Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) := x^4, \quad x \in [-1, 1].$$

- Bestimmen Sie den linearen Spline  $L_1(x)$ , der  $f$  in den drei Knoten  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 1$  interpoliert.
- Bestimmen Sie den linearen Spline  $L_2(x)$ , der  $f$  in den fünf Knoten  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = -1/2$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 1/2$  und  $x_4 = 1$  interpoliert.
- Skizzieren Sie das Ergebnis.
- Was können Sie über den Fehler

$$\sup_{[-1,1]} |f(x) - L(x)|$$

aussagen, wenn  $L(x)$  der lineare Spline ist, der bei äquidistanten Stützstellen die Funktion  $f$  für  $h = 1$ ,  $h = 1/2$  und  $h = 1/4$  im Intervall  $[-1, 1]$  interpoliert?

**Lösung:****Zu (a):**

Hier sind uns die Interpolationsstellen nur indirekt gegeben. Wir suchen einen linearen Spline  $L(x)$ , der folgender Wertetabelle genügt:

$x_i$	-1	0	1
$f(x_i)$	1	0	1

Wir betrachten zuerst das Intervall  $[-1, 0)$ , in dem wir unsere gesuchte Funktion  $L_1(x)$  nennen. Sie möchte bitte erfüllen:

$$L_1(-1) = 1 \text{ und } L_1(0) = 0$$

Man kann diese Funktion zwar riechen, aber wir wollen algorithmisch vorgehen, damit das ganze später vielleicht programmiert werden kann. Daher machen wir den Ansatz:

$$L_1(x) = a_0 + b_0(x - x_0) = a_0 + b_0(x - (-1))$$

Sofort erhalten wir

$$L_1(-1) = a_0 = 1, \quad L_1(0) = 1 + b_0 = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$a_0 = 1 \text{ und } b_0 = -1.$$

Unsere gesuchte Teilfunktion im Intervall  $[-1, 0)$  lautet also

$$L_1(x) = 1 + (-1)(x - (-1)) = 1 - x + 1 = -x.$$

Wie gerochen, ist das die Winkelhalbierende im zweiten Quadranten. Wir werden in (b) noch einmal die Rechnung vorführen, hier sei das Ergebnis angegeben:

$$L(x) = \begin{cases} -x & \text{in } [-1, 0) \\ x & \text{in } [0, 1) \end{cases}$$

**Zu (b):**

Für diese Aufgabe brauchen wir folgende Wertetabelle, die wir leicht aus der gegebenen Funktion  $f(x) = x^4$  berechnen:

$x_i$	-1	-1/2	0	1/2	1
$f(x_i)$	1	1/16	0	1/16	1

Wir werden jetzt noch einmal ein Stück des linearen Splines berechnen, aber dann mag es auch genug sein.

Im Intervall  $[-1, -1/2)$  wollen wir die Gerade berechnen, die bei  $-1$  den Wert 1 und bei  $-1/2$  den Wert 1/16 hat. Dazu der Ansatz:

$$L_1(x) = a_0 + b_0(x - (-1))$$

Aus  $L_1(-1) = 1$  folgt sofort  $a_0 = 1$ . Aus  $L_1(-1/2) = 1/16$  folgt dann

$$L_1(-1/2) = 1/16 = 1 + b_0/2 \implies b_0 = -15/8$$

Also ist

$$L_1(x) = 1 - \frac{15}{8}(x+1) \text{ in } \left[-1, -\frac{1}{2}\right).$$

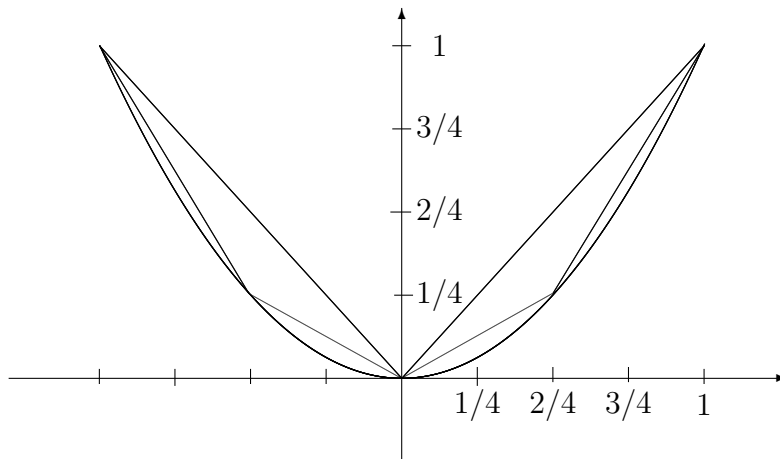
Genau so machen wir das für die anderen Teilintervalle und erhalten

$$L(x) = \begin{cases} 1 - \frac{15}{8}(x+1) & \text{in } [-1, -\frac{1}{2}) \\ \frac{1}{16} - \frac{1}{8}(x + \frac{1}{2}) & \text{in } [-\frac{1}{2}, 0) \\ \frac{x}{8} & \text{in } [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{16} + \frac{15}{8}(x - \frac{1}{2}) & \text{in } [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Ein Wort noch zu der etwas merkwürdig anzusehenden Bezeichnung der Intervalle. Eckige Klammer bedeutet, dass der Randpunkt zum Intervall gehört, runde Klammer meint, Randpunkt gehört nicht zum Intervall. Wir wollen in der Erklärung der Splines keine Punkte doppelt auftreten lassen. Obwohl wir stets darauf achten, dass die Splines stetig sind, also im Innern an den zusammentreffenden Intervallgrenzen gleiche Werte haben, wollen wir doch jeden Punkt für die Funktion nur einmal vorgeben. Ganz rechts kann dann das letzte Intervall abgeschlossen sein.

**Zu (c):**

In der folgenden Skizze haben wir die gegebene Funktion  $f(x) = x^4$  und den linearen Spline zu (a) und (b) eingetragen.



**Zu (d):**

Hier beziehen wir uns auf den Satz 11.4 und die Formel (11,11) dieses Satzes. Von der Funktion  $f(x) = x^4$  berechnen wir die zweite Ableitung und dann deren Supremum im Intervall  $[-1, 1]$ :

$$f''(x) = 12x^2 \rightarrow \sup_{[-1, 1]} |f''(x)| = 12$$

Damit erhalten wir nach Formel (11,11):

$$\begin{aligned}
h = 1 &\Rightarrow \sup [-1, 1] |f(x) - L(x)| \leq \frac{12}{8} = 1.5 \\
h = \frac{1}{2} &\Rightarrow \sup [-1, 1] |f(x) - L(x)| \leq \frac{12}{32} = 0.375 \\
h = \frac{1}{4} &\Rightarrow \sup [-1, 1] |f(x) - L(x)| \leq \frac{12}{128} = 0.09375 \\
h = \frac{1}{100} &\Rightarrow \sup [-1, 1] |f(x) - L(x)| \leq \frac{12}{80000} = 0.00015
\end{aligned}$$

Man sieht deutlich, wie sich die Annäherung verbessert bei kleinerem Stützstellenabstand.

# Lösungen zu Übung 21

## 21.1 Ist die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x & x \in [-4, 1) \\ -\frac{1}{2} \cdot (2-x)^2 + \frac{3}{2} & x \in [1, 2) \\ \frac{3}{2} & x \in [2, 4] \end{cases}$$

ein Hermite-Spline in  $\mathcal{S}_3^1$ ? Begründen Sie Ihre Aussagen.

### Lösung:

Wir prüfen die Bedingungen, die in Def. 11.4 genannt sind, nach, müssen also prüfen, ob  $f \in \mathcal{S}_3^1(-4, 4)$  ist.

- (a)  $f$  muss stückweise ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich 3 sein. Das sieht man durch Hingucken.
- (b)  $f$  muss im gesamten Intervall  $[-4, 4]$  stetig sein. Innerhalb der Teilintervalle  $(-4, 1)$ ,  $(1, 2)$  und  $(2, 4)$  ist das unproblematisch. Wir müssen uns nur überzeugen, dass an den Intervallübergängen, also bei 1 und bei 2 die Stetigkeit von  $f$  gewährleistet ist. Dazu berechnen wir den Funktionswert  $f(1)$ , indem wir uns der 1 von links und von rechts her nähern, und nennen die beiden Werte  $f(1_-)$  und  $f(1_+)$ .

Im Intervall  $[-4, 1]$  haben wir  $f(x) = x$ , also ist dort  $f(1_-) = 1$ .

Im Intervall  $[1, 2]$  haben wir  $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (2-x)^2 + \frac{3}{2}$ . Wir setzen ein:

$$f(1_+) = -\frac{1}{2}(2-1)^2 + \frac{3}{2} = 1,$$

also derselbe Wert wie im linken Teilintervall. Daher ist hier schon mal ein stetiger Übergang.

Jetzt zur Stelle  $x = 2$ . Im Intervall  $[1, 2]$  haben wir  $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (2-x)^2 + \frac{3}{2}$ , also ist dort  $f(2_-) = -\frac{1}{2}(2-2) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ .

Im Intervall  $[2, 4]$  haben wir  $f(x) = \frac{3}{2}$ , also ist  $f(2_+) = \frac{3}{2}$ , so wie es auch im linken Teilintervall herauskam.

Also ist  $f$  sowohl bei  $x = 1$  als auch bei  $x = 2$  stetig.

- (c) Dasselbe untersuchen wir jetzt für die erste Ableitung.

$$f'(x) := \begin{cases} 1 & x \in [-4, 1) \\ 2-x & x \in [1, 2) \\ 0 & x \in [2, 4] \end{cases}$$

Aber Achtung: Das ist nur *stückweise* die erste Ableitung. An den Intervallübergängen wissen wir noch nichts. Das prüfen wir so wie oben. Hier folgt ziemlich leicht

$$f'(1_-) = 1, \quad f'(1_+) = 2-1 = 1,$$

also Übereinstimmung und damit Differenzierbarkeit bei  $x = 1$ .

$$f'(2_-) = 2 - 2 = 0, \quad f'(2_+) = 0,$$

und auch hier Übereinstimmung, also ist  $f$  auch bei  $x = 2$  differenzierbar.

Aus (a), (b) und (c) folgern wir, dass  $f \in \mathcal{C}^1$  und damit in  $\mathcal{S}_3^1$  ist.

Kleine Bemerkung: Wir können sehr leicht stückweise die zweite Ableitung hinschreiben:

$$f''(x) := \begin{cases} 0, & x \in [-4, 1) \\ -1, & x \in [1, 2) \\ 0, & x \in [2, 4] \end{cases}$$

Das ist offensichtlich keine stetige Funktion mehr.  $f$  ist also kein kubischer Spline aus  $\mathcal{S}_3^2$ , wie wir sie im Abschnitt 11.5 betrachten.

21.2 Welche der folgenden Funktionen ist ein Hermite-Spline in  $\mathcal{S}_3^1$ ?

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \in [-1, \frac{1}{2}] \\ 3x^3 - 1 & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & x \in [-1, 0] \\ 3x^3 - 1 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

**Lösung:**

Beide Funktionen unterscheiden sich in der Zuordnung der Intervalle.

**Zu (a):**

( $\alpha$ ) Offensichtlich ist  $f$  stückweise ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich 3. Sie sollten übrigens nie das Wort 'Polynom' vergessen, wenn Sie vom Grad sprechen. Nur bei Polynomen gibt es den.

( $\beta$ ) Wir untersuchen die Funktion auf Stetigkeit. Hier ist nur die Stelle  $x = \frac{1}{2}$  zu betrachten. Es ist aber

$$f(1/2_-) = \frac{1}{8} - 1, \quad f(1/2_+) = 3 \cdot \frac{1}{8} - 1.$$

Das sind verschiedene Werte, also ist  $f$  bei  $x = \frac{1}{2}$  nicht stetig.

Damit ist  $f$  auch kein Hermite-Spline.

**Zu (b):**

( $\alpha$ ) Leicht zu sehen, dass  $f$  stückweise ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich 3 ist.

( $\beta$ ) Stetigkeit bei  $x = 0$ :

$$f(0_-) = -1 = f(0_+)$$

( $\gamma$ ) Differenzierbarkeit bei  $x = 0$ :

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \in [-1, 0] \\ 9x^2 & x \in [0, 1] \end{cases} \implies f'(0_-) = 0 = f'(0_+)$$

Damit ist  $f$  ein Hermite-Spline  $f \in \mathcal{S}_3^1$ .

Schon im Vorgriff auf den nächsten Abschnitt 11.5 zeigen wir noch schnell, dass  $f$  auch zweimal differenzierbar ist:

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & x \in [-1, 0] \\ 18x & x \in [0, 1] \end{cases} \implies f''(0_-) = 0 = f''(0_+)$$

Damit ist  $f$  sogar ein kubischer Spline. Aber wegen

$$f''(-1) = -6 \neq 0 \text{ und } f''(1) = 18 \neq 0$$

ist  $f$  kein natürlicher kubischer Spline.

21.3 Können  $a$  und  $b$  so bestimmt werden, dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} (x-2)^3 + a \cdot (x-1)^2 & x \in [0, 2] \\ (x-2)^3 - (x-3)^2 & x \in [2, 3] \\ (x-3)^3 + b \cdot (x-2)^2 & x \in [3, 5] \end{cases}$$

ein Hermite-Spline in  $\mathcal{S}_3^1$  ist? Begründung!

**Lösung:**

( $\alpha$ )  $f$  ist stückweise ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich 3, o.k.

( $\beta$ ) Wir prüfen die Stetigkeit:

$$f(2_-) = a, \quad f(2_+) = -(-1)^2 = -1$$

Daraus ergibt sich zwingend, dass

$$a = -1$$

sein muss. Nur für diesen Wert haben wir Stetigkeit. Analog

$$f(3_-) = 1, \quad f(3_+) = b \implies b = 1.$$

Damit sind unsere Parameter festgelegt.

( $\gamma$ ) Jetzt prüfen wir, ob  $f$  mit diesen Parametern differenzierbar ist. Stückweise ist

$$f'(x) := \begin{cases} 3(x-2)^2 - 2 \cdot (x-1) & x \in [0, 2] \\ 3(x-2)^2 - 2(x-3) & x \in [2, 3] \\ 3(x-3)^2 + 2 \cdot (x-2) & x \in [3, 5] \end{cases}$$



Dann folgt

$$\begin{aligned} f'(2_-) &= -2, & f'(2_+) &= +2 \\ f'(3_-) &= 3, & f'(3_+) &= 2 \end{aligned}$$

Das sind verschiedene Werte, also ist  $f$  mit diesen Parametern nicht differenzierbar. Daher können wir die Parameter nicht so bestimmen, dass  $f$  ein Hermite-Spline in  $\mathcal{S}_3^1$  wird.

21.4 Zeigen Sie, dass die Interpolationsaufgabe mit Hermite-Splines genau eine Lösung besitzt.

**Lösung:**

Schauen Sie sich dazu bitte die Skizze auf Seite 184 an. In jedem Teilintervall suchen wir ein Polynom höchstens 3. Grades, geben dazu vier Werte vor, nämlich die Funktionswerte und die Ableitungswerte am linken und rechten Rand des Teilintervalls. Durch vier Vorgaben ist ein Polynom vom Grad höchstens 3 aber eindeutig festgelegt.

Weil wir an den inneren Stützstellen sowohl die Funktionswerte als auch die Ableitungswerte vorgeben, werden diese Werte auch von den beiden Polynomen, die dort zusammentreffen, eingehalten. Also ist der entstehende Spline aus  $\mathcal{S}_3^1$ .

Durch diese Vorgaben gibt es also genau einen Hermite-Spline.

21.5 Der Hermite-Spline  $H_i^0$ ,  $0 < i < N$ , sei gegeben durch die Vorgaben

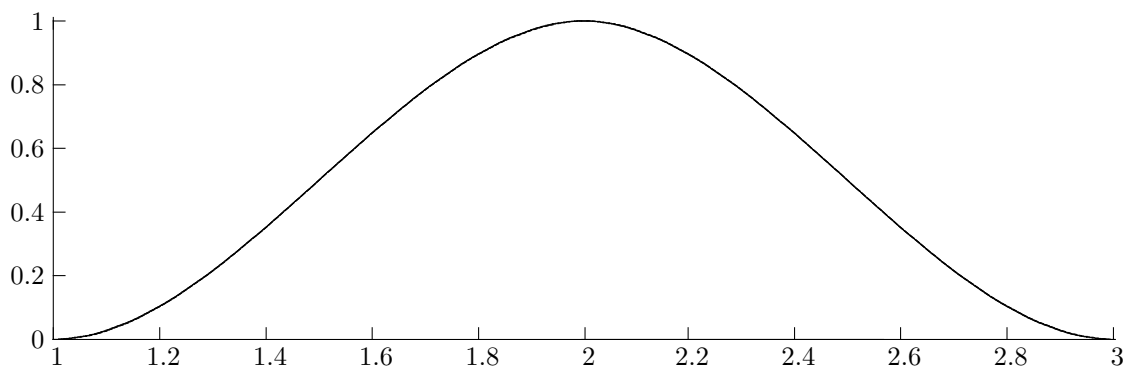
$$\begin{aligned} H_i^0(x_i) &:= 1, & H_i^0(x_j) &:= 0, & j &\neq i, \quad j = 0, 1, \dots, N \\ H_i^{0'}(x_i) &:= 0, & H_i^{0'}(x_j) &:= 0, & j &\neq i, \quad j = 0, 1, \dots, N \end{aligned},$$

der Hermite-Spline  $H_i^1$ ,  $0 < i < N$ , sei gegeben durch die Vorgaben

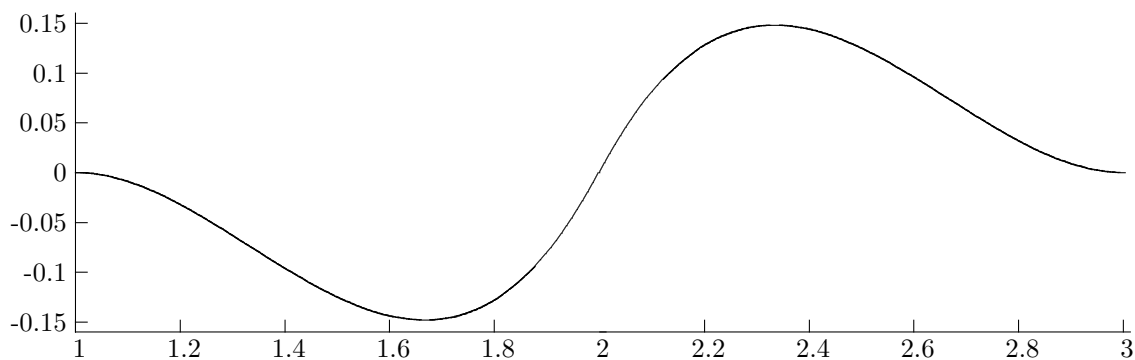
$$\begin{aligned} H_i^1(x_i) &:= 0, & H_i^1(x_j) &:= 0, & j &\neq i, \quad j = 0, 1, \dots, N \\ H_i^{1'}(x_i) &:= 1, & H_i^{1'}(x_j) &:= 0, & j &\neq i, \quad j = 0, 1, \dots, N \end{aligned}.$$

Skizzieren Sie qualitativ beide Funktionen.

**Lösung:**



Der Graph der Basisfunktion  $H_i^0(x)$ , wobei wir die Stützstellen  $x_{i-1} = 1$ ,  $x_i = 2$  und  $x_{i+1} = 3$  gewählt haben.



Der Graph der Basisfunktion  $H_i^1(x)$ , wobei wir wieder die Stützstellen  $x_{i-1} = 1$ ,  $x_i = 2$  und  $x_{i+1} = 3$  gewählt haben.

21.6 Gegeben seien folgende Werte einer ansonsten unbekannten Funktion  $f$ :

$x_i$	0	1	2	3
$f(x_i)$	0	1	-1	0
$f'(x_i)$	0	1	-1	1

Bestimmen Sie den Hermite-Spline  $H(x)$ , der diese Werte interpoliert.

**Lösung:**

Das haben wir in Beispiel 11.3 auf Seite 185 ausführlich vorgerechnet, können uns also kurz fassen. Diese Aufgabe dient reinem Übungszweck.

Wir arbeiten in den einzelnen Teilintervallen, beginnen im Intervall  $[0, 1)$ :

$$\text{Ansatz: } H(x) = a_0 + b_0 \cdot x + c_0 \cdot x^2 + d_0 \cdot x^3$$

Damit ist

$$H'(x) = b_0 + 2c_0 \cdot x + 3d_0 \cdot x^2$$

$$H(0) = 0 \implies a_0 = 0, H'(0) = 0 \implies b_0 = 0$$

$$\begin{aligned} H(1) &= 1 \implies 1 = c_0 + d_0 \\ H'(1) &= 1 \implies 1 = 2c_0 + 3d_0 \end{aligned}$$

Daraus folgt durch sehr leichtes Ausrechnen

$$d_0 = -1, c_0 = 2.$$

Also ist

$$\text{im Intervall } [-1, 0) : \quad H(x) = 2x^2 - 3x^3$$

Im Intervall  $[1, 2)$ :

$$\text{Ansatz: } H(x) = a_1 + b_1 \cdot (x - 1) + c_1 \cdot (x - 1)^2 + d_1 \cdot (x - 1)^3$$

Damit ist

$$H'(x) = b_1 + 2c_1 \cdot (x - 1) + 3d_1 \cdot (x - 1)^2$$

$$H(1) = 1 \implies a_1 = 1, H'(1) = 1 \implies b_1 = 1$$

$$H(2) = -1 \implies -1 = 1 + 1 + c_1 + d_1$$

$$H'(2) = -1 \implies -1 = 1 + 2c_1 + 3d_1$$

Daraus folgt durch sehr leichtes Ausrechnen

$$d_1 = 4, c_1 = -7.$$

Also ist

$$\text{im Intervall } [0, 1) : \quad H(x) = 1 + (x - 1) - 7(x - 1)^2 + 4(x - 1)^3$$

Im Intervall  $[2, 3)$ :

$$\text{Ansatz: } H(x) = a_2 + b_2 \cdot (x - 2) + c_2 \cdot (x - 2)^2 + d_2 \cdot (x - 2)^3$$

Damit ist

$$H'(x) = b_2 + 2c_2 \cdot (x - 2) + d_2 \cdot (x - 2)^2$$

$$H(2) = -1 \implies a_2 = -1, H'(2) = -1 \implies b_2 = -1$$

$$H(3) = 0 \implies 0 = -1 - 1 + c_2 + d_2$$

$$H'(3) = 1 \implies 1 = -1 + 2c_2 + 3d_2$$

Daraus folgt durch sehr leichtes Ausrechnen

$$d_2 = -2, c_2 = 4.$$

Also ist

im Intervall  $[-1, 0)$  :  $H(x) = -1 - (x - 2) + 4(x - 2)^2 - 2(x - 2)^3$

Wir fassen das Ergebnis zusammen:

$$H(x) := \begin{cases} 2x^2 - x^3 & x \in [0, 1) \\ 1 + (x - 1) - 7(x - 1)^2 + 4(x - 1)^3 & x \in [1, 2) \\ -1 - (x - 2) + 4 \cdot (x - 2)^2 - 2(x - 2)^3 & x \in [2, 3] \end{cases}$$

### 21.7 Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = x^4, \quad x \in [-1, 1].$$

Angenommen, wir interpolieren diese Funktion mit einem Hermite-Spline  $H(x)$ ,

(a) indem wir die Stützstellen  $-1, 0, 1$ ,

(b) indem wir die Stützstellen  $-1, -1/2, 0, 1/2, 1$ ,

(c) indem wir die Stützstellen  $-1, -3/4, -1/2, -1/4, 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$

benutzen. Was können Sie jedes Mal über den Fehler

$$\sup_{x \in [x_0, x_N]} |f(x) - H(x)|$$

aussagen?

#### Lösung:

Hier können wir auf die Vorarbeit in Aufgabe 20.2. aufbauen. Wir müssen nur die Formel (11.19) aus Satz 11.6 anwenden. Sie lautete:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - H(x)| \leq \frac{h^4}{384} \cdot \max_{x \in [a, b]} |f^{(iv)}(x)|$$

Wegen  $f^{(iv)}(x) = 24$  ist auch  $\max_{[-1, 1]} |f^{(iv)}(x)| = 24$ .

**Zu (a):**

Mit den Knoten  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 1$  ist  $h = 1$ . So folgt:

$$\max_{[-1, 1]} |f(x) - H(x)| \leq \frac{24}{384} = 0.0625$$

**Zu (b):**

Hier ist  $h = \frac{1}{2}$  und damit

$$\max_{[-1, 1]} |f(x) - H(x)| \leq \frac{24}{16 \cdot 384} = 0.00390625$$

**Zu (c):**

Hier ist  $h = \frac{1}{4}$  und damit

$$\max_{[-1, 1]} |f(x) - H(x)| \leq \frac{24}{256 \cdot 384} = 0.00024414$$

Wir sehen, wie sich die Annäherung bei kleiner werdendem Stützstellenabstand verbessert.

## Lösungen zu Übung 22

22.1 Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Seite 191 jeweils den natürlichen kubischen Spline  $K$ , der

- (a)  $f(x) = x^4$  in den Punkten  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  interpoliert,
- (b) der folgenden Wertetabelle genügt:

$x$	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0.2	0.5	1	0.5	0.2

**Lösung:**

**Zu (a)**

Gemäß Aufgabenstellung können wir die folgende Wertetabelle aufstellen:

$x_i$	-1	0	1
$f(x_i)$	1	0	1

Gesucht ist demnach ein Spline

$$K(x) : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit } K(-1) = 1, K(0) = 0, K(1) = 1,$$

der sich in den beiden Teilintervallen als Polynom dritten Grades darstellt, aber insgesamt aus  $\mathcal{C}^2$  ist. Wir machen den Ansatz:

$$K(x) = \begin{cases} a_0 + b_0(x+1) + c_0(x+1)^2 + d_0(x+1)^3, & x \in [-1, 0] \\ a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Damit steigen wir in den Algorithmus ein:

[1] Man erhält sofort  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ .

[2] Zur Aufstellung des Gleichungssystems beachten wir zunächst:

$$h_0 = h_1 = 1.$$

Dann wollen wir einen natürlichen Spline berechnen. Das führt uns zu den beiden weiteren Vorgaben:

$$c_0 = c_2 = 0.$$

Damit bleibt nur noch eine Gleichung für das Gleichungssystem übrig. Sie lautet:

$$\begin{aligned} c_0 + 2c_1(1+1) + c_2 &= \frac{3}{1}(1-0) - \frac{3}{1}(0-1) = 6, \\ c_1 &= 1.5 \end{aligned}$$

Die restlichen Koeffizienten sind nun direkt aus den Formeln unseres Algorithmus zu berechnen:

$$[3] \quad b_0 = (0-1) - \frac{1}{3}(1.5 + 2 \cdot 0) = -1 - 0.5 = -1.5,$$

$$b_1 = (1-0) - \frac{1}{3}(0 + 2 \cdot 1.5) = 0,$$

$$[4] \quad d_0 = \frac{1}{3}(1.5 - 0) = 0.5,$$

$$d_1 = \frac{1}{3}(0 - 1.5) = -0.5.$$

Damit ergibt sich das Resultat:

$$K(x) = \begin{cases} 1 & -1.5(x+1) & +0(x+1)^2 & +0.5(x+1)^3, & x \in [-1, 0] \\ 0 & +0x & +1.5x^2 & -0.5x^3, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

oder ausgerechnet:

$$K(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3, & x \in [-1, 0] \\ \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Wir wollen hier eine Kontrollrechnung durchführen. Es gilt:

$$\begin{aligned} K(-1) &= \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^3 = 1, \\ K(0) &= \begin{cases} \frac{3}{2} \cdot 0^2 + \frac{1}{2} \cdot 0^3 = 0 \\ \frac{3}{2} \cdot 0^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^3 = 0 \end{cases}, \\ K(1) &= \frac{3}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^3 = 1. \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, daß die Interpolationsbedingungen erfüllt sind und der stetige Übergang bei 0 gewährleistet ist, was wir mit der geschweiften Klammer angedeutet haben – obere Zeile bedeutet linkes Intervall, untere Zeile rechtes Intervall. Prüfen wir noch, ob auch die Ableitungen bis zur zweiten Ordnung bei 0 stetig bleiben. Die geschweiften Klammern deuten wieder an, daß wir uns bei der oberen Zeile im linken Teilintervall, bei der unteren Zeile im rechten Teilintervall befinden. Die Einsetzung  $x = 0$  muß in beiden Zeilen zum selben Ergebnis führen:

$$\begin{aligned} K'(x) &= \begin{cases} -1.5 + 3 \cdot 0.5(x+1)^2 \\ 2 \cdot 1.5x - 3 \cdot 0.5x^2 \end{cases}, \\ K''(x) &= \begin{cases} 6 \cdot 0.5(x+1) \\ 2 \cdot 1.5 - 6 \cdot 0.5x \end{cases}. \end{aligned}$$

Setzen wir 0 ein, so ergibt sich jeweils in den Zeilen derselbe Wert 0. Schließlich sieht man direkt, daß die zweite Ableitung von  $K$  bei  $-1$  und bei  $1$  verschwindet.

### **Zu (b)**

Diesmal haben wir es mit vier Teilintervallen zu tun. Die Stützstellen liegen äquidistant, also ist

$$h = 1.$$

Für den gesuchten Spline machen wir den Ansatz:

$$\begin{aligned} K(x) &= a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \\ \text{für } x &\in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Führen wir damit den Algorithmus durch, so folgt:

$$\boxed{1} \quad a_0 = 0.2, \quad a_1 = 0.5, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 0.5, \quad a_4 = 0.2.$$

$\boxed{2}$  Wiederum wird ein natürlicher Spline gesucht. Wir setzen also  $c_0 = c_4 = 0$ . Dann ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} c_0 + 2c_1 \cdot 2 + c_2 &= 3(1 - 0.5) - 3(0.5 - 0.2) = 0.6 \\ c_1 + 4c_2 + c_3 &= 3(0.5 - 1) - 3(1 - 0.5) = -3 \\ c_2 + 4c_3 + c_4 &= 3(0.2 - 0.5) - 3(0.5 - 1) = 0.6 \end{aligned}$$

Es handelt sich also in der Tat um drei lineare Gleichungen mit fünf Unbekannten, wovon wir zwei wegen „natürlich“ vorgegeben haben. Das Gleichungssystem schreibt sich dann als Tridiagonalsystem:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 0.6 \\ 1 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 0.6 \end{array} \right)$$

Die Lösung ergibt sich zu:

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 0.3857, \quad c_2 = -0.9429, \quad c_3 = 0.3857.$$

Die weiteren Koeffizienten erhalten wir aus dem Algorithmus durch direkte Berechnung:

$$\begin{aligned} \boxed{3} \quad b_0 &= (0.5 - 0.2) - \frac{1}{3}(0.3857) = 0.1714, \\ b_1 &= 1 - 0.5 - \frac{1}{3}(-0.9429 + 2 \cdot 0.3857) = 0.55714, \\ b_2 &= 0.5 - 1 - \frac{1}{3}(0.3857 + 2 \cdot (-0.9429)) = 0, \\ b_3 &= 0.2 - 0.5 - \frac{1}{3}(2 \cdot 0.3857) = -0.5571, \\ \boxed{4} \quad d_0 &= \frac{1}{3}(0.3857) = 0.12857, \\ d_1 &= \frac{1}{3}(0.9429 - 0.3857) = -0.4428, \\ d_2 &= \frac{1}{3}(0.3857 - (-0.9429)) = 0.4428, \\ d_3 &= \frac{1}{3}(-0.3857) = -0.12857. \end{aligned}$$

So folgt das Ergebnis für den gesuchten Spline:

$$K(x) = \begin{cases} 0.2 + 0.1714(x+2) + 0 + 0.1285(x+2)^3 & \text{in } [-2, -1] \\ 0.5 + 0.55714(x+1) + 0.3857(x+1)^2 - 0.4428(x+1)^3 & \text{in } [-1, 0] \\ 1 + 0 - 0.9429x^2 + 0.4428x^3 & \text{in } [0, 1] \\ 0.5 - 0.5571(x-1) + 0.3857(x-1)^2 - 0.12857(x-1)^3 & \text{in } [1, 2] \end{cases}$$

22.2 Bestimmen Sie den natürlichen kubischen Spline  $K$ , der die Sinusfunktion gemäß unten stehender (Näherungs-)Wertetabelle interpoliert, und berechnen Sie den Wert von  $K$  bei  $x = 1$ :

0	$\pi/6$	$2\pi/6$	$\pi/2$
0	0.5	0.9	1

### Lösung:

Die Aufgabe wird genauso gelöst wie die Aufgabe 22.1. Wir beschränken uns daher auf eine knappe Wiedergabe der Rechnung:

$$\boxed{1} \quad a_i = y_i, \quad i = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow a_0 = 0, a_1 = 0.5, a_2 = 0.9, a_3 = 1.$$

$$\boxed{2} \quad h_1 = h_2 = h_3 = \frac{\pi}{6},$$

$$i = 1 : \frac{\pi}{6}c_0 + 2 \cdot \frac{2\pi}{6}c_1 + \frac{\pi}{6}c_2 = \frac{3}{\pi/6}(0.9 - 0.5) - \frac{3}{\pi/6}(0.5 - 0),$$

$$i = 2 : \frac{\pi}{6}c_1 + 2 \cdot \frac{2\pi}{6}c_2 + \frac{\pi}{6}c_3 = \frac{3}{\pi/6}(1 - 0.9) - \frac{3}{\pi/6}(0.9 - 0.5).$$

Zwei Gleichungen mit 4 Unbekannten  $c_0, c_1, c_2, c_3$ . Für einen natürlichen Spline wähle  $c_0 = c_3 = 0$ .

$$\Rightarrow \begin{aligned} \frac{2\pi}{3}c_1 + \frac{\pi}{6}c_2 &= \frac{18}{\pi}(-0.1) = -\frac{1.8}{\pi} \\ \frac{\pi}{6}c_1 + \frac{2\pi}{3}c_2 &= \frac{18}{\pi}(-0.3) = -\frac{5.4}{\pi} \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit  $\frac{6}{\pi}$  ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} 4c_1 + c_2 &= -\frac{10.8}{\pi^2} \\ -4c_1 - 16c_2 &= \frac{129.6}{\pi^2} \end{aligned}$$

Addition dieser Gleichungen führt auf

$$-15c_2 = \frac{118.8}{\pi^2}.$$

Als Lösungen erhält man dann

$$c_2 = -\frac{118.8}{15\pi^2} = -\frac{7.92}{\pi^2} \text{ und } c_1 = -\frac{c_2}{4} - \frac{10.8}{4\pi^2} = -\frac{0.72}{\pi^2}.$$

$$\boxed{3} \quad b_0 = \frac{6}{\pi} \cdot 0.5 - \frac{\pi}{18} \left( -\frac{0.72}{\pi^2} \right) = \frac{3}{\pi} + \frac{0.72}{18\pi} = \frac{1}{\pi} \left( 3 + \frac{0.72}{18} \right) = \frac{3.04}{\pi} \quad b_1 = \frac{6}{\pi} \cdot 0.4 -$$

$$\frac{\pi}{18} \left( -\frac{7.92}{\pi^2} - \frac{2 \cdot 0.72}{\pi^2} \right) = \frac{1}{\pi} \left( 2.4 + \frac{7.92}{18} + \frac{1.44}{18} \right) = \frac{2.92}{\pi}$$

$$b_2 = \frac{6}{\pi} \cdot 0.1 - \frac{\pi}{18} \left( -2 \cdot \frac{7.92}{\pi^2} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot 1.48$$

$$\boxed{4} \quad d_0 = \frac{1 \cdot 6}{3\pi}c_1 = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \cdot \left( -\frac{2.88}{\pi^2} \right) = -\frac{1}{\pi^3} \cdot 5.76$$

$$d_1 = \frac{2}{\pi}(c_2 - c_1) = \frac{2}{\pi} \left( -\frac{7.92}{\pi^2} + \frac{2.88}{\pi^2} \right) = -\frac{1}{\pi^3} \cdot 10.08$$

$$d_2 = \frac{2}{\pi}(-c_2) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{7.92}{\pi^2} = \frac{1}{\pi^3} \cdot 15.84$$

Mit dem Ansatz (11,23) können wir jetzt wieder den Spline  $K(x)$  aufstellen.

$$K(x) := \begin{cases} \frac{3.04}{\pi}x - \frac{5.76}{\pi^3}x^3 & \text{für } x \in [0, \frac{\pi}{6}) \\ 0.5 + \frac{2.92}{\pi}(x - \frac{\pi}{6}) - \frac{0.72}{\pi^2}(x - \frac{\pi}{6})^2 - \frac{10.08}{\pi^3}(x - \frac{\pi}{6})^3 & \text{für } x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}) \\ 0.9 + \frac{1.48}{\pi}(x - \frac{2\pi}{6}) - \frac{7.92}{\pi^2}(x - \frac{2\pi}{6})^2 + \frac{15.84}{\pi^3}(x - \frac{2\pi}{6})^3 & \text{für } x \in [\frac{2\pi}{6}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$



Zur reinen Übung suchen wir jetzt noch den Wert  $K(1)$ . Wegen  $\frac{\pi}{6} = 0.524$  und  $\frac{2\pi}{6} = 1.047$  liegt 1 im Intervall  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}\right)$ . Also ist die mittlere Zeile zuständig. Wir rechnen

$$K(1) = 0.5 + \frac{3.16}{\pi} \left(1 - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{0.72}{\pi^2} \left(1 - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{10.08}{\pi^3} \left(1 - \frac{\pi}{6}\right)^3 = 0.92748.$$

Der exakte Wert der interpolierten Funktion ist

$$\sin 1 = 0.84147.$$