

Übungen zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Lösungen zu Übung 23

23.1 Gegeben sei die Anfangswertaufgabe (AWA)

$$y'(x) = x - y(x) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1$$

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$y(x) = x - 1 + 2 \cdot e^x$$

die einzige Lösung dieser AWA ist.

Lösung:

Zuerst prüfen wir, ob die angegebene Funktion $y(x) = x - 1 + 2 \cdot e^x$ wirklich eine Lösung ist. Dazu überprüfen wir beide Seiten der Differentialgleichung.

Es ist

$$y'(x) = 1 - 2e^{-x}.$$

$$x - y(x) = x - (x - 1 + 2e^{-x}) = 1 - 2e^{-x}.$$

Also löst die Funktion die DGL. Wir prüfen genau so leicht die Anfangsbedingung:

$$y(0) = 0 - 1 + 2e^{-0} = -1 + 2 = 1$$

Jetzt zeigen wir noch, dass die ganze Aufgabe nur eine einzige Lösung besitzt. Das können wir mit der Lipschitzbedingung überprüfen, vgl. Formel (12.6) im Satz 12.2.

Wegen $f(x, y) = x - y$, wie uns die Aufgabenstellung lehrt, ist

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |x - y_1 - x + y_2| = |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|.$$

Damit ist die Lipschitzbedingung (sogar global) erfüllt, wir können ja $L = 1$ wählen. Also hat die Aufgabe durch jeden Anfangspunkt, also auch durch $(x_0, y_0) = (0, 1)$ genau eine Lösung.

23.2 Gegeben sei die AWA

$$y'(x) = 3 \cdot x + y^2(x) \quad \text{mit} \quad y(1) = 1.2$$

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe des lokalen Existenz- und Eindeigkeitssatzes, dass diese Aufgabe genau eine Lösung besitzt.
- (b) Berechnen Sie mit dem Euler-Verfahren, Schrittweite $h = 0.025$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1.2$, Näherungen y_1, y_2, y_3, y_4 an den Stellen $x_1 = x_0 + h, \dots, x_4 = x_0 + 4 \cdot h$.

Lösung:**Zu (a):**

Wir prüfen die Lipschitzbedingung für $f(x, y) = 3 \cdot x + y^2$:

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= |3x + y_1^2 - (3x + y_2^2)| = |y_1^2 - y_2^2| \\ &= |(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)| \\ &= \underbrace{|y_1 + y_2|}_{0 < L < \infty?} \cdot |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

Lokal, also in einem kleinen Kreis um einen beliebigen Punkt (x_1, y_1) ist für jeden Punkt (x_2, y_2) aus diesem Kreis $|y_1 + y_2|$ sicherlich beschränkt; denn nehmen wir z.B. den Punkt $(x_1, y_1) = (10, 100)$, und wählen einen Kreis mit Radius 1 um diesen Punkt. Offensichtlich spielt $x = 10$ keine Rolle. In diesem Kreis ist sicher jedes $y \leq 101$, also

$$|y_1 + y_2| \leq 202 < \infty.$$

Also ist lokal die Lipschitzbedingung erfüllt, und wir wissen schon mal, dass die Aufgabe durch jeden Anfangspunkt genau eine Lösung besitzt.

Zu (b):

Jetzt wird gerechnet. Am besten, Sie vergleichen dazu den Algorithmus (12,15) auf Seite 203.

Ausgangswerte: $(x_0, y_0) = (1, 1.2)$, $h = 0.025$.

$$\begin{aligned} x_0 = 1 &\implies y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1.2 + 0.025 \cdot (3 \cdot 1 + 1.2^2) = 1.311 \\ x_1 = 1.025 &\implies y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1.311 + 0.025 \cdot (3 \cdot 1.025 + 1.311^2) = 1.4388 \\ x_2 = 1.05 &\implies y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 1.4308 + 0.025 \cdot (3 \cdot 1.05 + 1.4308^2) = 1.5607 \\ x_3 = 1.075 &\implies y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 1.5607 + 0.025 \cdot (3 \cdot 1.075 + 1.5607^2) = 1.7022 \end{aligned}$$

23.3 Gegeben sei die Anfangswertaufgabe (AWA)

$$y'(x) = y^2(x) \quad \text{mit} \quad y(0) = 1$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

die einzige Lösung dieser AWA ist.

(b) Bestimmen Sie zeichnerisch für das Euler-Verfahren bei Schrittweite $h = 1/2$ einen Näherungswert für $y(1/2)$.

- (c) Berechnen Sie mit dem Euler-Verfahren bei Schrittweite $h = 1/5$ Näherungen an den Stellen x_1, \dots, x_5 , und vergleichen Sie diese Werte mit den Werten der exakten Lösung.

Lösung:

Zu (a):

Dass die angegebene Funktion die Differentialgleichung erfüllt, sieht man ja sofort, wenn man nur die innere Ableitung nicht vergisst. Die Anfangsbedingung ist ebenso klar erfüllt.

Dass es die einzige Lösung ist, sehen wir wieder an den Lipschitzbedingung. Mit $f(x, y) = y^2$ folgt

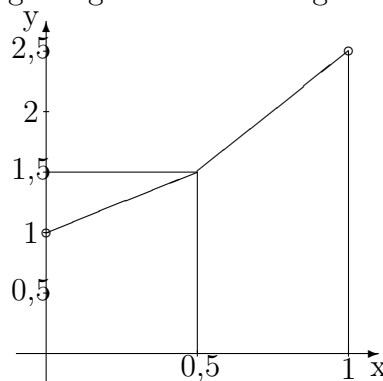
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |y_1 + y_2| \cdot |y_1 - y_2|.$$

Dann argumentieren wir wie in der Aufgabe 23.1.

Zu (b):

Für die zeichnerische Darstellung müssen wir lediglich bedenken, dass unsere Differentialgleichung in der expliziten Form $y' = f(x, y)$ vorliegt. Die Werte der Funktion f sind also die Ableitungen der gesuchten Funktion y . Wir beginnen am Anfangspunkt, der durch die Anfangsbedingung vorgegeben ist. Dort tragen wir eine Gerade mit der Steigung $m = f(x_0, y_0)$ ein über das ganze Intervall $[0, h]$. Am Endpunkt lesen wir zum x -Wert $x_1 = x_0 + h$ den entsprechenden y -Wert ab, den die Gerade dort annimmt. Mit diesen beiden Werten berechnen wir $f(x_1, y_1)$, was nach obiger Gleichung wiederum die Steigung der gesuchten Funktion in diesem Punkt bedeutet. Wir tragen also bei diesem Punkt beginnend erneut eine Gerade mit der eben berechneten Steigung ein, und das Spielchen wiederholt sich, bis wir zum Ende des zu betrachtenden Intervalls gelangt sind. Der entstehende Polygonzug bildet dann eine Näherung der gesuchten Lösung.

Hier in der Aufgabe wird nun eine sehr grobe Näherung gesucht: Schrittweite $h = 1/2$. Das bedeutet, wir sollen zwei solche Geradenstücke aneinanderfügen, um ein Näherungspolygon zu erhalten. In der Skizze rechts deuten wir das Ergebnis an. Die zweite Gerade hat dabei die Steigung $m = 1.5^2 = 2.25$.



Zu (c):

Man startet, indem man für y_0 die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ einsetzt und berechnet mit der obigen Formel sukzessive y_1 als Näherung für y bei $x_1 = x_0 + h$, y_2 als Näherung für y bei $x_2 = x_0 + 2h$, usw. Für unsere hier vorgegebene Differentialgleichung lautet die Formel:

$$\text{Sei } y_0 = y(0) = 1 \Rightarrow y_{i+1} = y_i + h \cdot y_i^2, i = 0, 1, \dots$$

In der Aufgabe war $h = 1/5$ vorgegeben. Dann folgt:

$$\begin{array}{llll} y_1 & = & 1 + \frac{1}{5} \cdot 1^2 & = 1.2, \\ y_2 & = & 1.2 + 0.2 \cdot 1.2^2 & = 1.488, \\ y_3 & = & 1.488 + 0.2 \cdot 1.488^2 & = 1.9308288, \\ y_4 & = & \dots & = 2.676448771, \\ y_5 & = & \dots & = 4.1091242. \end{array}$$

Lösungen zu Übung 24

24.1 Gegeben sei die AWA

$$y'(x) = \sqrt{x + y(x)} \quad \text{mit} \quad y(0.4) = 0.41$$

Berechnen Sie mit dem Verfahren von Runge-Kutta eine Näherung y_1 an die exakte Lösung $y(x_1)$ für $h = 0.4$, also $x_1 = 0.8$.

Lösung:

Dies ist wieder eine reine Recenaufgabe. Nun, das Verfahren von Runge-Kutta eignet sich hervorragend zum Einsatz eines Computers. Um das aber richtig zu machen und alle Feinheiten zu verstehen, ist es sehr sinnvoll, diese Rechnung erst mal mit Hand durczuziehen. Also denn! Am besten wieder gleich das Formelpaket von Seite 208 dazu aufschlagen.

Vorgabe: $x_0 = 0.4$, $y_0 = 0.41$, $h = 0.4$.

Dann ist

$$f(x_0, y_0) = \sqrt{0.4 + 0.41} = \sqrt{0.81} = 0.9$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_0, y_0) = 0.9 \\ k_2 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} \cdot k_1\right) = \sqrt{0.4 + \frac{0.4}{2} + 0.41 + \frac{0.4}{2} \cdot 0.9} \\ &= \sqrt{1.19} = 1.09087 \\ k_3 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} \cdot k_2\right) = \sqrt{0.4 + \frac{0.4}{2} + 0.41 + \frac{0.4}{2} \cdot 1.09087} \\ &= \sqrt{1.22817} = 1.10822 \\ k_4 &= f(x_0 + h, y_0 + h \cdot k_3) = \sqrt{0.4 + 0.4 + 0.41 + 0.4 \cdot 1.10822} \\ &= \sqrt{1.65329} = 1.2858 \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= 0.41 + \frac{0.4}{6}(0.9 + 2 \cdot 1.09087 + 2 \cdot 1.10822 + 1.2858) \\ &= 0.84893 \end{aligned}$$

Jetzt geht es auf die gleiche Weise fort zur Berechnung von y_2 , y_3 usw.

24.2 Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y'(x) = y(x) - \frac{2x}{y(x)} \quad \text{mit} \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Aufgabe in einer Umgebung des Anfangspunktes $(1/2, \sqrt{2})$ genau eine Lösung besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass

$$y(x) = \sqrt{2x+1}$$

diese einzige Lösung ist.

(c) Berechnen Sie mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren, Schrittweite $h = 0.5$, eine Näherung $y_1 \approx y(1)$, und vergleichen Sie diese mit dem Wert $y(1)$ der exakten Lösung.

Lösung:

Zu (a):

Wie auch schon in Übung 23 prüfen wir einfach die Lipschitzbedingung nach. Mit $f(x, y) = y - \frac{2x}{y}$ folgt

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= \left| y_1 - \frac{2x}{y_1} - \left(y_2 - \frac{2x}{y_2} \right) \right| = \left| y_1 - y_2 + \frac{2x(y_1 - y_2)}{y_1 \cdot y_2} \right| \\ &= \left| (y_1 - y_2) \cdot \left(1 + \frac{2x}{y_1 \cdot y_2} \right) \right| \end{aligned}$$

In einer kleinen Umgebung des Anfangspunktes $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \sqrt{2})$ bleibt der Term $\left(1 + \frac{2x}{y_1 \cdot y_2} \right)$ sicherlich beschränkt. Also gibt es durch jeden Anfangspunkt genau eine Lösung.

Zu (b):

Wir prüfen beide Seiten der Differentialgleichung nach. Es ist

$$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \quad \text{und} \quad y(x) - \frac{2x}{y(x)} = \sqrt{2x+1} - \frac{2x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{2x+1-2x}{\sqrt{2x+1}}$$

Also erfüllt $y(x)$ die DGL. Wegen

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2} + 1} = \sqrt{2}$$

erfüllt $y(x)$ auch die Anfangsbedingung.

Zu (c):

Jetzt wieder rechnen. Vorgabe: $h = 0.5, x_0 = 0.5, y_0 = \sqrt{2}, f(x, y) = y - \frac{2x}{y}$.

$$\begin{aligned}k_1 = f(x_0, y_0) &= \sqrt{2} - \frac{2 \cdot 0.5}{\sqrt{2}} = \frac{2-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\&= 0.7071068\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} \cdot k_1\right) &= f\left(\frac{3}{4}, \sqrt{2} + \frac{1}{4 \cdot \sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{4 \cdot \sqrt{2}}\right) \\&= \frac{9}{4 \cdot \sqrt{2}} - \frac{1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \sqrt{2}}{9} = \frac{9}{4 \cdot \sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{11}{12\sqrt{2}} \\&= 0.648181\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} \cdot k_2\right) &= f\left(\frac{3}{4}, \sqrt{2} + \frac{11}{4 \cdot 12 \cdot \sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{3}{4}, \frac{107}{48 \cdot \sqrt{2}}\right) \\&= \frac{107}{48 \cdot \sqrt{2}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{48\sqrt{2}}{107} = \frac{107^2 - 3 \cdot 48^2}{48 \cdot 107 \cdot \sqrt{2}} \\&= 0.6246385\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_4 = f(x_0 + h, y_0 + h \cdot k_3) &= f\left(1, \sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot k_3\right) \\&= 0.56814187\end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\&= \sqrt{2} + 0.5 \cdot \frac{0.6368147}{6} \\&= 1.73262\end{aligned}$$

Mit Hilfe der exakten Lösung können wir einen Vergleichswert ausrechnen. Es ist

$$y(1) = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} = 1.732050808.$$

Und wir haben die Abschätzung

$$|y(1) - y_1| = 0.000569.$$

Beachten Sie bitte unsere Bezeichnungsweise: Mit $y(1)$ bezeichnen wir den Wert der Funktion $y(x)$ für $x = 1$. Das ist also hier der exakte Wert der Lösungsfunktion. Mit y_1 bezeichnen wir den Näherungswert, der durch ein Verfahren, hier durch Runge-Kutta, ausgerechnet wurde.

24.3 Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y'(x) = x \cdot (x + y(x)), \quad y(0) = 1.$$

- (a) Zeigen Sie, dass diese Aufgabe für $0 \leq x \leq 1$ genau eine Lösung besitzt.
- (b) Berechnen Sie mit Hilfe des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens eine Näherung für $y(0.2)$ bei einer Schrittweite von $h = 0.1$.
(Rechengenauigkeit: 4 Stellen hinter dem Dezimalpunkt)

Lösung:

Zu (a):

Hier wollen wir zwei Wege vorstellen. Wir beginnen mit dem Nachweis der Lipschitzbedingung und werden anschließend die hinreichende Bedingung der Beschränktheit der partiellen Ableitung bearbeiten.

Mit $f(x, y) = x(x + y)$ ist

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |x(x + y_1) - x(x + y_2)| = |x| \cdot |y_1 - y_2|.$$

Wegen $0 \leq x \leq 1$ ist $|x| \leq 1$, also können wir $L = 1$ wählen und haben alles gezeigt.

Alternativ betrachten wir die hinreichende Bedingung, dass die partielle Ableitung von $f(x, y)$ nach y beschränkt bleiben muss:

$$|f_y(x, y)| = |x|$$

Wiederum ist nur das Intervall $0 \leq x \leq 1$ gefragt, und dort bleibt $|x|$ natürlich beschränkt.

Beide Varianten zeigen uns also, dass die Aufgabe genau eine Lösung durch jeden Anfangspunkt besitzt.

Zu (b):

Eine kleine Besonderheit steckt in dieser Aufgabe. Wir haben die Schrittweite $h = 0.1$ vorgegeben, starten beim Anfangspunkt $(x_0, y_0) = (0, 1)$ und möchten gern einen Näherungswert bei $x = 0.2$ erhalten. Das bedeutet, dass wir zwei Schritte mit Runge-Kutta ausführen müssen. Tatsächlich ist es nicht verkehrt, wenn Sie diese Schritte genau verfolgen. Denn zum Programmieren muss man genau das kennen.

$$k_1 = f(x_0, y_0) = x_0(x_0 + y_0) = 0$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} \cdot k_1\right) \\ &= (x_0 + 0.05) \cdot ((x_0 + 0.05) + (y_0 + \frac{h}{2}k_1)) \\ &= 0.05 \cdot (0.05 + 1 + 0.05 \cdot 0) \\ &= 0.0525 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} \cdot k_2) \\ &= (x_0 + 0.05) \cdot ((x_0 + 0.05) + (y_0 + 0.05 \cdot k_2)) \\ &= 0.05 \cdot (0.05 + 1 + 0.05 \cdot 0.0525) \\ &= 0.05263 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= f(x_0 + h, y_0 + h \cdot k_3) \\ &= (x_0 + 0.1) \cdot ((x_0 + 0.1) + (y_0 + 0.1 \cdot 0.05263)) \\ &= 0.1 \cdot (0.1 + 1 + 0.1 \cdot 0.05263) \\ &= 0.11053 \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= 1.0053465 \end{aligned}$$

Dieser Wert ist jetzt eine Näherung an $y(0.1)$. Wir wollen aber eine Näherung an $y(0.2)$ berechnen, also noch einen Schritt weiter.

Jetzt haben wir $x_1 = 0.1$ und $y_1 = 1.0053$ und erhalten:

$$k_1 = f(x_1, y_1) = x_1(x_1 + y_1) = 0.1105$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2} \cdot k_1\right) \\ &= (0.1 + 0.05) \cdot ((0.1 + 0.05) + (1.0053 + 0.05 \cdot 0.1105)) \\ &= 0.1741 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2} \cdot k_2\right) \\ &= (0.1 + 0.05) \cdot ((0.1 + 0.05) + (1.0053 + 0.05 \cdot 0.1741)) \\ &= 0.1759 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= f(x_1 + h, y_1 + h \cdot k_3) \\ &= (0.1 + 0.1) \cdot ((0.1 + 0.1) \cdot (0.1 + 0.1) + (1.0053 + 0.1 \cdot 0.1759)) \\ &= 0.2446 \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= 1.0229 \end{aligned}$$

24.4 Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y'(x) = -2 \cdot x \cdot y^2(x), \quad y(-1) = \frac{1}{2}.$$

- (a) Zeigen Sie mittels Lipschitzbedingung, dass diese Aufgabe genau eine Lösung besitzt.
 (b) Zeigen Sie, dass

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

diese einzige Lösung ist.

- (c) Berechnen Sie eine Näherung für $y(-0.6)$ mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren (Schrittweite $h = 0.2$), und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem exakten Wert.

Lösung:

Fast macht es keinen Spaß mehr, immer dasselbe zu rechnen. Aber diese Aufgabe hat eine besondere Bedeutung. Es war nämlich mal eine Klausuraufgabe. Vielleicht versuchen Sie sich zum Test an Hand der vorigen Aufgaben zunächst allein an der Lösung.

Zu (a):

Wegen $f(x, y) = -2xy^2$ ist

$$\begin{aligned}
|f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= |-2xy_1^2 - (-2xy_2^2)| = |-2xy_1^2 + 2xy_2^2| \\
&= |2x(y_2^2 - y_1^2)| = |2x(y_2 + y_1) \cdot (y_2 - y_1)| \\
&= |2x(y_2 + y_1)| \cdot |y_1 - y_2|
\end{aligned}$$

In einer Umgebung des Anfangspunktes $(x_0, y_0) = (-1, \frac{1}{2})$ (und auch in der Umgebung jedes anderen Punktes) bleibt der Term $|2x(y_2 + y_1)|$ beschränkt. Daher ist die Lipschitzbedingung erfüllt, und unsere Aufgabe hat durch den Anfangspunkt genau eine Lösung.

Zu (b):

Von der gegebenen Funktion $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$ rechnen wir einfach die erste Ableitung aus

$$y'(x) = -(1-x^2)^{-2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = -2 \cdot x \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2$$

und haben schon gezeigt, dass es sich um eine Lösung der DGL handelt. Der Anfangswert ist ebenso leicht nachzurechnen:

$$y(-1) = \frac{1}{1+(-1)^2} = \frac{1}{2}$$

Also löst $y(x)$ die Anfangswertaufgabe.

Zu (c):

Jetzt heißt es wieder rechnen. Wir starten bei $x_0 = -1$, geben eine Schrittweite von $h = 0.2$) vor und interessieren uns für einen Näherungswert der Lösung bei $x = -0.6$. Dazu müssen wir also zwei Schritte ausführen:

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_0, y_0) = -2x_0y_0^2 = -2 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2} \\
k_2 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} \cdot k_1\right) \\
&= f(-0.9, 0.5 + 0.1 \cdot 0.5) = f(-0.9, 0.55) = -2(-0.9) \cdot 0.55^2 \\
&= 0.5445 \\
k_3 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} \cdot k_2\right) \\
&= f(-0.9, 0.5 + 0.1 \cdot 0.5445) = -2 \cdot (-0.9) \cdot 0.5445^2 \\
&= 0.055335 \\
k_4 &= f(x_0 + h, y_0 + h \cdot k_3) \\
&= f(-0.8, 0.5 + 0.2 \cdot 0.55335) = -2 \cdot (-0.8) \cdot 0.61067^2 \\
&= 0.59667
\end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\&= 0.609746\end{aligned}$$

eine Näherung für den exakten Wert der Lösung bei $x = -0.8$.

Jetzt zum zweiten Schritt. Wir starten mit $x_1 = -0.8$, $h = 0.2$ und $y_1 = 0.609746$:

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_1, y_1) = -2x_1y_1^2 = -2 \cdot (-0.8) \cdot 0.609746^2 \\&= 0.59486 \\k_2 &= f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2} \cdot k_1\right) \\&= f(-0.7, 0.6692) = -2(-0.7) \cdot 0.6692^2 \\&= 0.62702 \\k_3 &= f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2} \cdot k_2\right) \\&= f(-0.7, 0.67245) = -2 \cdot (-0.7) \cdot 0.67245^2 \\&= 0.63306 \\k_4 &= f(x_1 + h, y_1 + h \cdot k_3) \\&= f(-0.6, 0.73636) = -2 \cdot (-0.6) \cdot 0.73636^2 \\&= 0.65066\end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned}y_2 &= y_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\&= 0.735269\end{aligned}$$

eine Näherung für den exakten Wert der Lösung bei $x = -0.6$.

Da wir die exakte Lösung kennen, können wir diesen Wert mit dem exakten Wert vergleichen:

$$y(-0.6) = \frac{1}{1 + (-0.6)^2} = 0.735294$$

Das ist doch eine recht erstaunliche Näherung.