

Übungen zu partiellen Differentialgleichungen

Lösungen zu Übung 25

25.1 Betrachten Sie die Randwertaufgabe

$$\Delta u(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0 \quad \text{in } R := \{(x, y) : -2 < x < 2, -1 < y < 1\}$$

mit den Randbedingungen:

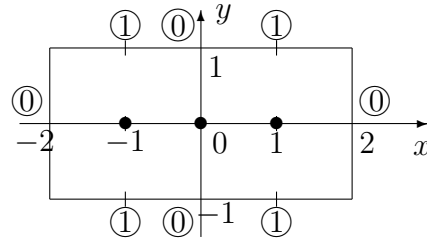
$$\begin{aligned} u(x, -1) &= u(x, 1) = x^2 \\ u(-2, y) &= u(2, y) = 4 \cdot y^2 \end{aligned}$$

Berechnen Sie mit dem Differenzenverfahren (Schrittweite in x -Richtung $h = 1$, in y -Richtung $k = 1$, zentrale Differenzenquotienten in x - und y -Richtung) Näherungswerte für die Lösung an den inneren Knotenpunkten.

Lösung:

Betrachten wir zuerst das Gebiet R , das seinen Namen zu Recht trägt, denn es ist ein Rechteck.

Wegen der Vorgaben $h = 1$ und $k = 1$ finden wir in diesem kleinen Rechteck nur drei Punkte, die zu unserem Gitter passen. Wir haben sie mit einem dicken Punkt bezeichnet. Die gesuchten Werte an diesen drei Stellen nennen wir von links nach rechts u_1, u_2 und u_3 . Außen an das Rechteck haben wir in die kleinen Kreise hinein die durch die Randbedingungen vorgegebenen Randwerte eingetragen, soweit wir sie in der folgenden Rechnung benötigen.



Jetzt kommt der Haupttrick der Differenzenverfahren: Wir ersetzen die in der Differentialgleichung und den Randbedingungen auftretenden Differentialquotienten durch Differenzenquotienten. Mit dem zentralen Differenzenquotienten erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}}{h^2}$$

Wenn wir jetzt unseren Fünf-Punkte-Stern (vgl. Seite 219) auf den Punkt $(-1, 0)$ in R legen, so erhalten wir die Gleichung:

$$0 + 1 + 1 + u_2 - 4u_1 = 0$$

Dann verschieben wir den Stern auf die Stelle $(0, 0)$ und anschließend auf die Stelle $(1, 0)$ und erhalten die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_1 + 0 + u_3 + 0 - 4u_2 &= 0 \\ u_2 + 1 + 0 + 1 - 4u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Das führt alles zusammen auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Zur Lösung setzen wir unsere L-R-Zerlegung aus dem Kapitel 'Lineare Gleichungssysteme' (vgl. Seite 43) ein:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -\frac{15}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -\frac{15}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{56}{15} & -\frac{32}{15} \end{array} \right)$$

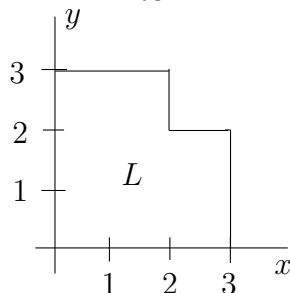
Durch Aufrollen von unten erhalten wir die Lösung:

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{32}{56} = \frac{4}{7} \\ -\frac{15}{4}u_2 + \frac{4}{7} &= -\frac{1}{2} \implies u_2 = -\frac{4}{15} \left(-\frac{1}{2} - \frac{4}{7} \right) = \frac{2}{7} \\ -4u_1 &= -2 - \frac{2}{7} \implies u_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{7} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Wir sehen, dass $u_1 = u_3$ ist. Das hätten wir schon direkt bei der Aufgabenstellung erkennen können. Offensichtlich ist die gesamte Aufgabe symmetrisch zur y -Achse. Wir hätten also von Beginn an u_1 weglassen können. Bei kleinerer Schrittweite wird das ein erheblicher Vorteil. Hier aber wollten wir zuerst einmal die originale Vorgehensweise schildern und nicht gleich mit Tipps und Tricks daherkommen.

25.2 Betrachten Sie auf dem rechts skizzierten Gebiet L die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= x + y^2 \quad \text{in } L \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial L \end{aligned}$$



Verwenden Sie die Schrittweite $h = 1$ in x - und in y -Richtung, und berechnen Sie mittels zentraler Differenzenquotienten nach dem Differenzenverfahren Näherungswerte für die Lösung $u(x, y)$ an den inneren Gitterpunkten.

Lösung:

Wir überführen die DGL in eine Differenzengleichung, indem wir zentrale Differenzen verwenden:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2}$$

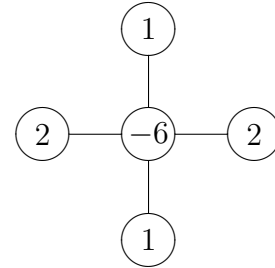
$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{k^2}$$

Damit betrachten wir die in der Aufgabe vorgelegte Differentialgleichung und bedenken die Vorgabe $h = k$. Das ergibt:

$$2 \cdot \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2}$$

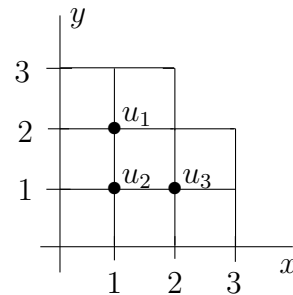
$$\approx \frac{2u_{i-1,j} - 6u_{i,j} + 2u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{h^2}$$

$$= x_i + y_j^2$$



So wie im Buch auf Seite 219 haben wir rechts einen Fünf-Punkte-Stern aufgebaut, wobei wir die Koeffizienten entsprechend angepasst haben.

Mit den Bezeichnungen wie rechts in der Skizze erhalten wir so wie im Buch auf Seite 220 - 222 angegeben ein lineares Gleichungssystem:



$$\begin{aligned} -6u_1 + u_2 &= 1 + 2^2 = 5 \\ u_1 - 6u_2 + 2u_3 &= 1 + 1^2 = 2 \\ 2u_2 - 6u_3 &= 2 + 1^2 = 3 \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise lautet es:

$$\begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Zur Lösung setzen wir unsere L-R-Zerlegung aus dem Kapitel 'Lineare Gleichungssysteme' (vgl. Seite 43) ein:

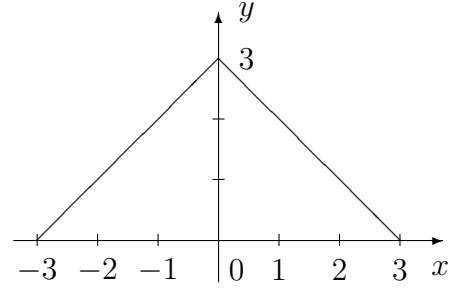
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 1 & 0 & 5 \\ \frac{1}{6} & -\frac{35}{6} & 2 & \frac{17}{6} \\ 0 & 2 & -6 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & -1 & 0 & 5 \\ \frac{1}{6} & -\frac{35}{6} & 2 & \frac{17}{6} \\ 0 & \frac{12}{35} & \frac{24}{35} - 6 & \frac{34}{35} + 3 \end{array} \right)$$

Durch Aufrollen von unten erhalten wir die Lösung:

$$\begin{aligned} u_3 &= -\frac{139}{186} = -0.7473 \\ u_2 &= -\frac{23}{31} = -0.7419 \\ u_1 &= -\frac{89}{93} = -0.9570 \end{aligned}$$

25.3 Auf dem skizzierten Dreiecksgebiet werde folgende Randwertaufgabe betrachtet:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= y \quad \text{im Innern des Dreiecks} \\ u(x, 0) &= 9 - x^2 \quad \text{auf dem unteren Rand} \\ u(x, y) &= 0 \quad \text{auf dem übrigen Rand}\end{aligned}$$

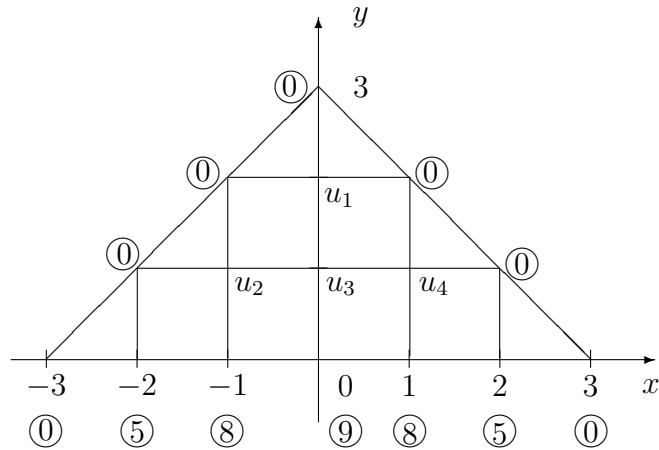


Verwenden Sie ein quadratisches Gitter ($h = 1$) und zentrale Differenzenquotienten, und berechnen Sie Näherungswerte für u an den inneren Gitterpunkten.

(Hinweis: Nutzen Sie aus, dass wegen der Symmetrie zur y -Achse von DGL und Randbedingung auch die Lösung symmetrisch ist.)

Lösung:

Rechts haben wir das Gebiet erneut skizziert, jetzt aber mit eingezeichnetem Gitter für $h = k = 1$ und den aus den Randbedingungen folgenden Randwerten.



Wir erkennen sowohl an der Skizze als auch an der ganzen Aufgabenstellung – DGL und RB –, dass volle Symmetrie bezogen auf die y -Achse herrscht. Daher ist

$$u_4 = u_2.$$

So können wir die Anzahl der Unbekannten und damit die Anzahl der Gleichungen reduzieren.

Jetzt ersetzen wir die zweiten Ableitungen in der DGL durch zentrale Differenzenquotienten und erhalten

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + 2 \cdot \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} = y_j$$

Mit $h = 1$ wird daraus

$$u_{i-1,j} - 6u_{i,j} + u_{i+1,j} + 2u_{i,j-1} + 2u_{i,j+1} = y_j$$

Betrachten wir die Stelle $(i, j) = (0, 2)$, an der u_1 berechnet werden soll, so ist

$$0 - 6u_1 + 0 + 0 + 2u_3 = 2$$

Analog betrachten wir $(i, j) = (-1, 1)$ für u_2 und $(i, j) = (0, 1)$ für u_3 und erhalten zwei weitere Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 - 6u_2 + u_3 + 0 + 2 \cdot 8 &= 1 \\ u_2 - 6u_3 + u_2 + 2u_1 + 2 \cdot 9 &= 1 \end{aligned}$$

So kommen wir zu insgesamt drei Gleichungen für die drei Unbekannten u_1, u_2, u_3 :

$$\begin{array}{rrcr} -6u_1 & & +2u_3 & = & 2 \\ & -6u_2 & +u_3 & = & -15 \\ 2u_1 & +2u_2 & -6u_3 & = & -17 \end{array}$$

Vielleicht üben Sie wieder die L-R-Zerlegung. Wir erhalten als Lösung:

$$u_1 = \frac{49}{45} = 1.0\overline{8}, \quad u_2 = \frac{289}{90} = 3.2\overline{1} = u_4, \quad u_3 = \frac{64}{15} = 4.2\overline{6}$$

Lösungen zu Übung 26

26.1 Betrachten Sie die Anfangs-Randwert-Aufgabe

$$\begin{array}{llll} 2 \cdot u_{xx}(x, t) + u_t(x, t) & = & 0 & 0 < x < 1, t > 0 & \text{DGl.} \\ u(x, 0) & = & \sin 3\pi x & 0 < x < 1 & \text{Anfangsbed.} \\ u(0, t) = u(1, t) & = & 0 & t \geq 0 & \text{Randbed.} \end{array}$$

Führen Sie sie mit dem Produktansatz auf ein System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen zurück. Berücksichtigen Sie dabei auch die Randbedingungen.

Lösung:

Wir erinnern uns an den verblüffenden Separationsansatz von Bernoulli (vgl. Seite 227):

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

Mit diesem Ansatz gehen wir in die Differentialgleichung und erhalten:

$$2u_{xx}(x, t) + u_t(x, t) = 2 \frac{d^2 X(x)}{dx^2} \cdot T(t) + X(x) \cdot \frac{dT(t)}{dt} = 0$$

Jetzt trennen wir die Variablen: alles, was mit x zu tun hat, kommt nach links; alles, was mit t zu tun hat, kommt nach rechts:

$$-2 \cdot \frac{\frac{d^2 X(x)}{dx^2}}{X(x)} = \frac{\frac{dT}{dt}}{T(t)}$$

Jetzt steht links nur etwas, was allein von x abhängt, während die rechte Seite nur von t abhängt. Das geht nur zusammen, wenn beide Seiten konstant sind. Wegen der Gleichheit ist es dann dieselbe Konstante:

$$\begin{array}{ccc} -2 \cdot \frac{\frac{d^2 X(x)}{dx^2}}{X(x)} & = & \frac{\frac{dT}{dt}}{T(t)} \\ \parallel & & \parallel \\ \lambda & = & \lambda \end{array}$$

Daraus ergeben sich zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$2X''(x) + \lambda \cdot X(x) = 0 \quad \text{und} \quad T'(t) - \lambda \cdot T(t) = 0$$

Jetzt betrachten wir die Randbedingungen. Da ist zuerst

$$u(0, t) = X(0) \cdot T(t) = 0.$$

Hier muss also mindestens einer der Faktoren 0 sein. $T(t) = 0$ würde uns direkt zur Lösung $u(x, t) = 0$ führen. Damit aber könnten wir nicht die Anfangsbedingung erfüllen. Also ist

$$X(0) = 0.$$

Analog folgt aus

$$u(1, t) = X(1) \cdot T(t) = 0,$$

dass $X(1) = 0$ sein muss. Damit erhalten wir eine vollständige Randwertaufgabe:

$$2X''(x) + \lambda \cdot X(x) = 0 \text{ mit } X(0) = X(1) = 0.$$

26.2 Lösen Sie die Anfangs-Randwert-Aufgabe

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t) + u_x(x, t) && \text{in } -1 < x < 1, t \geq 0 \\ u(x, 0) &= 1 - x^2 && (AB) \\ u(-1, t) &= u(1, t) = 0 && (RB) \end{aligned}$$

näherungsweise mit dem Differenzenverfahren:

- Verwenden Sie für u_t und für u_x jeweils den vorderen, für u_{xx} den zentralen Differenzenquotienten, und stellen Sie die zugehörige Differenzengleichung auf.
- Berechnen Sie für die Schrittweiten $h = 0.5$ in x -Richtung und $k = 0.1$ in t -Richtung Näherungswerte für die Zeit $t = 0.2$.

Lösung:

Zu (a):

Mit dem vorderen Differenzenquotienten aus Formel (13,28) ersetzen wir

$$u_t(x, t) \approx \frac{u(x, t + k) - u(x, t)}{k}$$

und

$$u_x(x, t) \approx \frac{u(x + h, t) - u(x, t)}{h}.$$

Formel (13,9) beschert uns

$$u_{xx}(x, t) \approx \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2}.$$

Alles zusammen liefert die Näherungsgleichung

$$\frac{u(x, t + k) - u(x, t)}{k} = \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2} + \frac{u(x + h, t) - u(x, t)}{h}.$$

Die vereinfachen wir etwas, indem wir setzen

$$u_{i,j} := u(x_i, y_j)$$

und analog für andere Werte. Dann erhalten wir

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}.$$

Schauen wir genau hin. Durch die Anfangsbedingung (AB) kennen wir die Werte der unbekannten Lösung zum Zeitpunkt $t = 0$, also für $j = 0$. Für diesen Zeitpunkt ist in der obigen Gleichung nur ganz links der Term $u_{i,j+1}$ unbekannt. Nach diesem Term lösen wir also die Gleichung auf:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{k}{h^2} \cdot (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + \frac{k}{h} \cdot (u_{i+1,j} - u_{i,j})$$

Das ist jetzt unsere gesamte Gleichung. Aus ihr können wir, wenn wir mit dem Zeitpunkt $t = 0$ anfangen, alle Werte zum Zeitpunkt $t = k$ ausrechnen, einfach durch Einsetzen. Schauen Sie zurück zu der Laplace- und der Poisson-Gleichung. Dort muss immer ein lineares Gleichungssystem gelöst werden. Hier also einfach ausrechnen. Aus den Werten für $t = k$ berechnen wir nämlich nach der gleichen Formel die Werte für $t = 2k$ usw.

Zu (b):

Mit den Vorgaben $h = 0.5$ und $k = 0.1$ lässt sich die letzte Formel noch wesentlich vereinfachen. Es ist nämlich damit

$$\frac{k}{h^2} = \frac{0.1}{0.25} = 0.4, \quad \frac{k}{h} = 0.2$$

und es folgt

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= u_{i,j} + 0.4 \cdot u_{i+1,j} - 0.8 \cdot u_{i,j} + 0.4 \cdot u_{i-1,j} + 0.2 \cdot u_{i+1,j} - 0.2 \cdot u_{i,j} \\ &= 0.6 \cdot u_{i+1,j} + 0.4 \cdot u_{i-1,j} \end{aligned}$$

Mit dieser Formel berechnen wir Näherungen, ausgehend von $t = 0$. Es ist

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = 1$$

und

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0.1, \quad t_2 = 0.2, \quad \dots$$

Mit $u_{i,j} \approx u(x_i, t_j)$ erhalten wir aus der AB

$$u_{0,0} = 0, \quad u_{1,0} = 0.75, \quad u_{2,0} = 1, \quad u_{3,0} = 0.75, \quad u_{4,0} = 0.$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned}u_{1,1} &= 0.6 \cdot u_{2,0} + 0.4 \cdot u_{0,0} = 0.6 \\u_{2,1} &= 0.6 \cdot u_{3,0} + 0.4 \cdot u_{1,0} = 0.75 \\u_{3,1} &= 0.6 \cdot u_{4,0} + 0.4 \cdot u_{2,0} = 0.4\end{aligned}$$

Aus der RB erhalten wir

$$u_{0,1} = 0, \quad u_{4,1} = 0.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}u_{1,2} &= 0.6 \cdot u_{2,1} + 0.4 \cdot u_{0,1} = 0.45 \\u_{2,2} &= 0.6 \cdot u_{3,1} + 0.4 \cdot u_{1,1} = 0.48 \\u_{3,2} &= 0.6 \cdot u_{4,1} + 0.4 \cdot u_{2,1} = 0.3\end{aligned}$$

Das kann jetzt beliebig lange fortgesetzt werden.

26.3 Die Anfangs-Randwertaufgabe (nichtstationäre Wärmeleitung)

$$\begin{aligned}u_t(x, t) &= \frac{1}{10} \cdot u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0 \\u(x, 0) &= 2x \\u(0, t) &= t, \quad u(1, t) = t + 2\end{aligned}$$

soll mit dem Differenzenverfahren (Vorwärts- und zentraler Differenzenquotient) näherungsweise gelöst werden.

- (a) Für welche Zeitschrittweiten k können Sie bei Wahl der Ortsschrittweite $h = 0.25$ die Stabilität des Verfahrens garantieren?
- (b) Berechnen Sie mit den Schrittweiten $h = 0.25$, $k = 0.3$ Näherungswerte $u_{i,2}$ für $u(i \cdot h, 0.6)$, $i = 1, 2, 3$.

Lösung:

Zu (a):

Im Satz 13.5 (vgl. Seite 233) haben wir eine notwendige und hinreichende Bedingung für Stabilität der expliziten Euler-Methode für die näherungsweise Lösung der Wärmeleitungsgleichung angegeben. Für die originale Gleichung lautet sie:

$$\frac{k}{h^2} < \frac{1}{2}$$

Jetzt haben wir hier eine etwas abgewandelte Gleichung vorliegen. Auf der rechten Seite steht ein zusätzlicher Faktor $K = \frac{1}{10}$. Den müssen wir jetzt einbeziehen. Da wir die rechte Seite durch den zentralen Differenzenquotienten ersetzen, der im Nenner den Faktor h^2 stehen hat, tritt hier noch der Faktor $K = \frac{1}{10}$ hinzu. Damit lautet hier die Stabilitätsbedingung:

$$K \cdot \frac{k}{h^2} < \frac{1}{2}$$

Daraus finden wir die Bedingung

$$k < \frac{h^2}{2K} = \frac{0.0625}{2 \cdot \frac{1}{10}} = 0.3125$$

Zu (b):

Eingedenk der Bedingung in (a) wählen wir $k = 0.3$. Die Differenzengleichung lautet jetzt:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{1}{10} \cdot \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

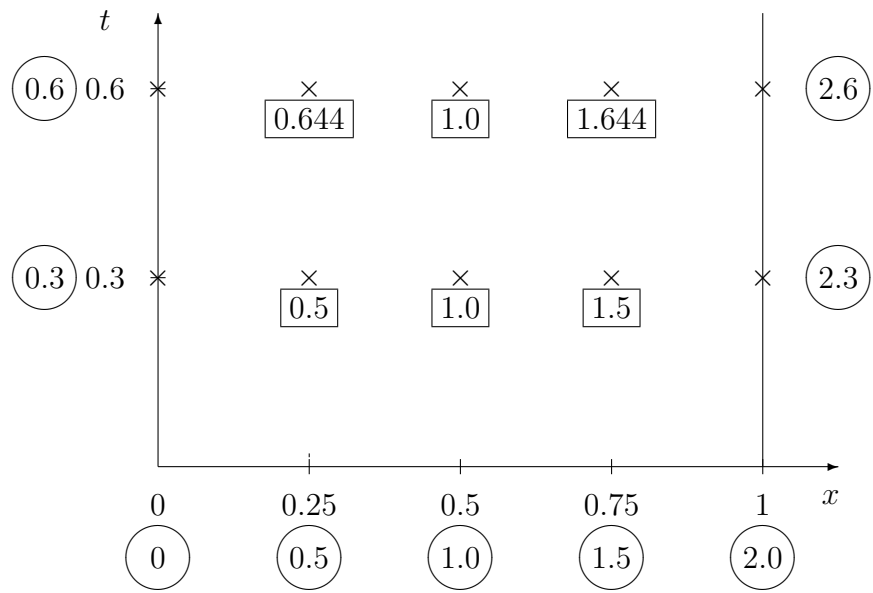
Daraus folgt

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} &= u_{i,j} + k \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{h^2} [u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}] \\ &= u_{i,j} + \frac{0.3 \cdot \frac{1}{10}}{0.0625} [u_{i+1,j} + u_{i-1,j}] - \frac{0.3 \cdot \frac{1}{10} \cdot 2}{0.0625} \cdot u_{i,j} \\ &= 0.04 \cdot u_{i,j} + 0.48 \cdot [u_{i+1,j} + u_{i-1,j}] \end{aligned}$$

Jetzt rechnen wir:

$$\begin{aligned} u_{11} &= 0.04 \cdot 0.5 + 0.48 \cdot (0 + 1) = 0.50 \\ u_{21} &= 0.04 \cdot 1 + 0.48 \cdot (0.5 + 1.5) = 1.00 \\ u_{31} &= 0.04 \cdot 1.5 + 0.48 \cdot (1 + 2) = 1.50 \\ u_{12} &= 0.04 \cdot 0.5 + 0.48 \cdot (0.3 + 1) = 0.644 \\ u_{21} &= 0.04 \cdot 1 + 0.48 \cdot (0.5 + 1.5) = 1.00 \\ u_{31} &= 0.04 \cdot 1.5 + 0.48 \cdot (1 + 2.3) = 1.644 \end{aligned}$$

Betrachten Sie die folgende Abbildung. Dargestellt ist unser Stab im Intervall $[0, 1]$ auf der x -Achse. Senkrecht nach oben geht die t -Achse, auf der die Zeit eingetragen ist. In die kleinen Kreise haben wir die aus Anfangs- und Randbedingungen folgenden Werte eingetragen. In den kleinen Kästen sind unsere Rechenergebnisse aufgenommen.



Lösungen zu Übung 27

27.1 Betrachten Sie noch einmal die Anfangs-Randwert-Aufgabe von Beispiel 13.4 (vgl. Seite 240):

$$\begin{array}{llll}
 u_{tt}(x, t) & = & u_{xx}(x, t) & 0 < x < 1, \ t > 0 & \text{Wellengleichung} \\
 u(x, 0) & = & 2x - x^2 & 0 < x < 1 & 1. \text{ Anfangsbedingung} \\
 u_t(x, 0) & = & 0 & 0 < x < 1 & 2. \text{ Anfangsbedingung} \\
 u(0, t) & = & 0 & t > 0 & 1. \text{ Randbedingung} \\
 u_x(1, t) & = & 0 & t > 0 & 2. \text{ Randbedingung}
 \end{array}$$

und berechnen Sie eine Näherungslösung mit dem Differenzenverfahren bei Schrittweiten $h = k = 0.2$, h Ortsschrittweite, k Zeitschrittweite, wobei Sie diesmal die Ableitungen in der Anfangsbedingung und in der Randbedingung durch zentrale erste Differenzenquotienten ersetzen.

Lösung:

Wieder beschaffen wir uns zunächst die Näherungsaufgabe durch Ersetzen der 2. Ableitungen durch zentrale Differenzenquotienten. Mit den Abkürzungen wie oben bei der Wärmeleitung

$$u_{i,j} := u(x_i, t_j), \quad u_{i+1,j} := u(x_{i+1}, t_j)$$

erhalten wir

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}.$$

Wie bei der Wärmeleitung versuchen wir, für einen bestimmten Zeitschritt die Näherungswerte für x_i zu bestimmen, um dann zum nächsten Zeitschritt vorwärtszugehen. Wegen $h = k$ können wir die Gleichung vereinfachen und dann nach $u_{i,j+1}$ auflösen:

$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}. \quad (1)$$

Genau wie in der Musterlösung im Buch sehen wir: auf der rechten Seite werden die Werte im Zeitschritt j und im Zeitschritt $j - 1$ verlangt. Das macht Kummer, wenn wir an den Anfang denken. Für $j = 1$ brauchen wir Werte bei $j = 0$ und bei $j = -1$. Zum Glück haben wir zwei Anfangsbedingungen.

Die erste benutzen wir zur Berechnung der Werte im 0-ten Zeitschritt, also zu Beginn:

$$u_{i,0} = 2ih - (ih)^2.$$

Damit berechnen wir direkt die Zeile für $j = 0$ in der unten folgenden Tabelle, das ist also die dritte Zeile.

In der zweiten Anfangsbedingung steckt eine Ableitung. Hier ersetzen wir sie jetzt nach Aufgabenstellung durch den zentralen Differenzenquotienten:

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k}.$$

Setzen wir hier $t_j = 0$, also $j = 0$, so erhalten wir wegen der Anfangsbedingung

$$\frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2k} = 0 \implies u_{i,1} = u_{i,-1}.$$

Mit dieser Gleichung können wir also die Werte im fiktiven Zeitschritt $j = -1$, also für $t = -k$ zurückführen auf Werte bei $j = 1$. Das hilft uns jetzt direkt in der Differenzengleichung (1); für $j = 1$ ist nämlich

$$u_{i,1} = u_{i+1,0} + u_{i-1,0} - u_{i,-1} = u_{i+1,0} + u_{i-1,0} - u_{i,1}.$$

Damit erhalten wir

$$u_{i,1} = \frac{1}{2} \cdot (u_{i+1,0} + u_{i-1,0}) \quad (2)$$

Um diese Gleichung benutzen zu können, brauchen wir noch Werte an den Rändern. Dazu helfen uns die Randbedingungen. Die erste liefert uns die Werte am linken Rand für $x = 0$:

$$u_{0,j} = 0.$$

Die zweite Randbedingung enthält wieder eine Ableitung, die wir ebenfalls durch den zentralen Differenzenquotienten ersetzen:

$$u_x(1, t) = \frac{u_{6,j} - u_{4,j}}{2h} = 0 \implies u_{6,j} = u_{4,j}.$$

Wir sehen hier Werte für $i = 6$, also für $x = 1.2$. Daher führen wir eine zusätzliche Spalte rechts außen für $x = 1.2$ ein. Die Werte dort schreiben wir einfach aus der Spalte $i = 4$, also für $x = 0.8$ ab.

Die unten angegebene Tabelle erhalten wir jetzt mit folgendem Vorgehen:

Wir berechnen zuerst die Zeile $j = 0$ und die Randwerte am linken Rand. Die Werte bei $i = 6$ wie gesagt aus der Spalte $i = 4$ abschreiben.

Dann berechnen wir die 1. Zeile, also $j = 1$ nach (2).

Alle weiteren Zeilen berechnen wir nach (1).

		i	0	1	2	3	4	5	6
j	t	x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
0	0.0		0.0	0.36	0.64	0.84	0.96	1.00	0.96
1	0.2		0.0	0.32	0.60	0.80	0.92	0.96	0.92
2	0.4		0.0	0.24	0.48	0.68	0.80	0.84	0.80