

Übungen zu Funktionen mehrerer Veränderlicher

Lösungen zu Übung 5

5.1 Betrachten Sie die durch

$$z = \frac{y}{1 + x^2}$$

gegebene Fläche.

- (a) Zeichnen Sie die Höhenlinien in ein Koordinatensystem.
- (b) Veranschaulichen Sie sich das Schnittbild mit der Ebene $x = \text{const.}$
- (c) Veranschaulichen Sie sich das Schnittbild mit der Ebene $y = \text{const.}$
- (d) Skizzieren Sie ein Blockbild.

Lösung:

Zu (a):

Bei einer Funktion über der x, y -Ebene sind Höhenlinien die Linien mit

$$z = \text{const.} = c.$$

Das führt uns sofort zu

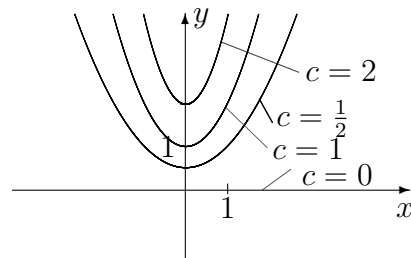
$$c = \frac{y}{1 + x^2} \implies c \cdot (1 + x^2) = y.$$

Für $c = 0$ ist das die x -Achse.

Für $c > 0$ sind das, wie wir aus der Schule wissen, nach oben geöffnete Parabeln.

Für $c < 0$ sind das nach unten geöffnete Parabeln.

Wir haben rechts einige Fälle skizziert.



Zu (b):

Schnittbild mit $x = \text{const.}$ meint, wir möchten den Schnitt des Funktionsgraphen mit der $y - z$ -Ebene betrachten. Wir setzen also $x = c$ und erhalten:

$$z = \frac{y}{1 + c^2} \implies (1 + c^2) \cdot z = y$$

Das sind schlichte Geraden mit der Steigung $1 + c^2$.

Für $c = 0$ ist das $y = z$, also die erste Winkelhalbierende in der (y, z) -Ebene..

Für $c = 1$ erhalten wir $y = 2z$, und für $c = -1$ folgt ebenso $y = 2z$

Wir ersparen uns hier eine Skizze.

Zu (c):

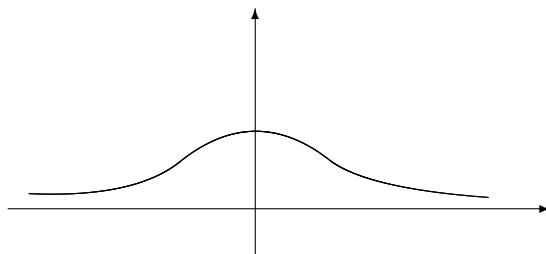
Für ein Schnittbild mit der Ebene $y = \text{const.}$ setzen wir $y = c$ und erhalten

$$z = \frac{c}{1 + x^2}$$

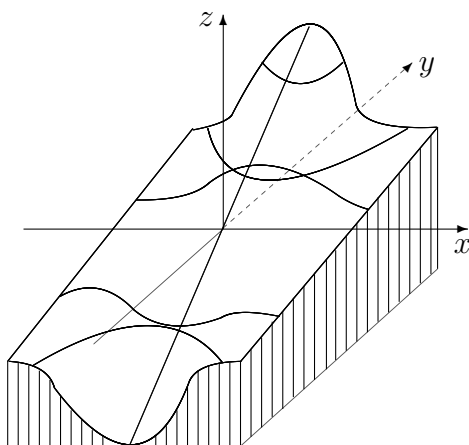
Für $c = 0$ ist das die x -Achse.

Für $c > 0$ ergibt sich so eine Art Glockenkurve.

Für $c < 0$ ergibt sich die an der x -Achse gespiegelte Glockenkurve.



Zu (d)



5.2 Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

im Punkt $(0, 0)$ auf die folgenden drei Grenzwerte:

$$(a) \quad A = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

$$(b) \quad B = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right)$$

$$(c) \quad C = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right)$$

Lösung:

Wenn wir hier versuchten, ganz naiv den Punkt $(0, 0)$ in die Funktionsgleichung einzusetzen, so erhielten wir den unbestimmten Ausdruck

$$\frac{0}{0}.$$

Das geht natürlich nicht. Der Grenzwert in (a) bedeutet, dass wir uns dem Punkt auf beliebigem Wege nähern sollen. Wir vermuten hier aber, dass kein Grenzwert existiert und werden uns daher dem Punkt $(0, 0)$ auf verschiedenen Wegen nähern. Dazu werden uns in (b) und (c) zwei Wege vorgeschlagen.

Zu (b)

Schauen Sie sich rechts den Weg an. Wir betrachten zunächst für ein beliebiges $x \neq 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Da rechts der Limes offenkundig auch für $x \rightarrow 0$ existiert – er ist ja 1, also unabhängig von x –, existieren auch die Grenzwerte der links davon stehenden Ausdrücke für $x \rightarrow 0$. Also erhalten wir

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Zu (b)

Schauen Sie sich wieder rechts den Weg an. Wir betrachten zunächst für ein beliebiges $y \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Da rechts der Limes offenkundig auch für $y \rightarrow 0$ existiert – er ist ja -1 , also unabhängig von y –, existieren auch die Grenzwerte der links davon stehenden Ausdrücke für $y \rightarrow 0$. Also erhalten wir hier

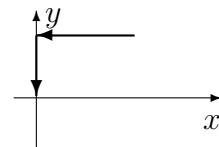
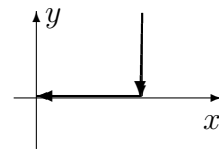
$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} -1 = -1.$$

Auf den zwei verschiedenen Wegen erhalten wir unterschiedliche Grenzwerte. Nach unserer Definitionm 4.4 existiert daher der Grenzwert A nicht.

5.3 Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2} + 1}.$$

im Punkt $(0, 0)$ auf die drei Grenzwerte von Aufgabe 5.2.



Lösung:

Auch hier ergibt sich bei harmlosen Einsetzen von $(0,0)$ in die Funktionsgleichung der unbestimmte Ausdruck

$$\frac{0}{0},$$

den wir natürlich nicht verwerten können.

Wir vermuten jetzt mal ganz frech, dass hier der Grenzwert A existiert. Daher werden wir uns gleich nur mit A befassen. Vielleicht haben wir ja Glück.

Ein probates Hilfsmittel (vgl. S. 58) sind die Polarkoordinaten

$$x = r \cdot \cos \varphi, y = r \cdot \sin \varphi.$$

Mit ihnen rechnen wir den Funktionsausdruck um:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} \\ &= \frac{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + 1} - 1} \\ &= \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + 1} - 1} \end{aligned}$$

Leider haben wir noch nicht viel erreicht; denn für $r \rightarrow 0$ geht der letzte Term immer noch gegen $\frac{0}{0}$. Aber jetzt wenden wir die Regel von Herrn l'Hospital (vgl. S. 63) an und erhalten:

$$\frac{\frac{2r}{1 \cdot 2r}}{\frac{2 \cdot \sqrt{r^2 + 1}}{2 \cdot \sqrt{r^2 + 1}}} = \frac{2\sqrt{r^2 + 1}}{1} \rightarrow 2$$

Der letzte Pfeil bedeutet dabei den Grenzübergang $r \rightarrow 0$. Damit sehen wir, dass auch A existiert mit

$$A = 2.$$

Gleichzeitig existieren dann die Grenzwerte $B = 2$ und $C = 2$, denn sie beschreiben ja nur den Grenzübergang auf speziellen Wegen. Wir haben aber mit dem Grenzübergang $r \rightarrow 0$ jede mögliche Annäherung an den Punkt $(0,0)$ betrachtet.

5.4 Zeigen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten, dass die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

überall stetig ist.

Lösung:

Für $(x, y) \neq (0, 0)$, also $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ ist der Nenner positiv und der Zähler zumindest $\neq 0$, beides macht also keinen Ärger.

Bleibt der Punkt $(0, 0)$ selbst zu betrachten. Wieder mit Polarkoordinaten erhalten wir:

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = \frac{r^3(\cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi)}{\underbrace{r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{=1}} = r(\cos^3 \varphi - \sin^3 \varphi)$$

Für $r \rightarrow 0$ geht der letzte Ausdruck gegen 0. Also existiert der Grenzwert und ist gleich dem Funktionswert.

Hätten wir $f(0, 0) = 2$ vorgegeben, so wäre die Funktion im Nullpunkt nicht stetig.

5.5 Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$$

im Nullpunkt $(0, 0)$ stetig ergänzbar ist. Durch welchen Wert?

Lösung:

Hier verwenden wir einen richtigen Trick. Wir schätzen den Zähler dem Betrage nach ab. Wir wissen, dass

$$|\sin x| \leq |x|$$

ist. Daher folgt

$$|f(x, y)| = \left| \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| = \frac{r^3}{r^2} |\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi| = r |\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi|$$

Der letzte Term geht für $r \rightarrow 0$ gegen 0, weil ja der Term $|\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi|$ beschränkt bleibt. Also wählen wir

$$f(0, 0) := 0$$

und haben f stetig im Nullpunkt ergänzt.

5.6 Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

im Nullpunkt nicht stetig ist.

Lösung:

Hier also mal ein Gegenbeispiel zur Stetigkeit. Unsere erste Idee: Wir prüfen die Grenzwerte wie in Aufgabe 5.2. Mit denselben Überlegungen erhalten wir:

$$B = \lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

$$C = \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Das bringt leider gar nichts, denn beide Grenzwerte sind gleich, was aber nicht auf Stetigkeit schließen lässt. Denn es könnte ja sein, dass ein anderer Grenzübergang zum anderen Wert führt. Wir probieren es mit der 1. Winkelhalbierenden, setzen also

$$x = y$$

und schauen uns dann den Grenzwert an:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Aha, jetzt haben wir es. Hier entsteht ein anderer Wert, also gibt es keinen einheitlichen Grenzwert, und damit existiert er nicht. Also ist die Funktion im Nullpunkt nicht stetig.

Bitte merken: Ein Beispiel reicht zur Widerlegung einer Aussage, hier, f wäre stetig in $(0, 0)$. Zum Nachweis einer Eigenschaft reichen selbst hundert Beispiele nicht.

Lösungen zu Übung 6

6.1 Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x, y) = |y| \quad \text{in} \quad R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, -1 < y < 1\}$$

Supremum und Infimum auf R .

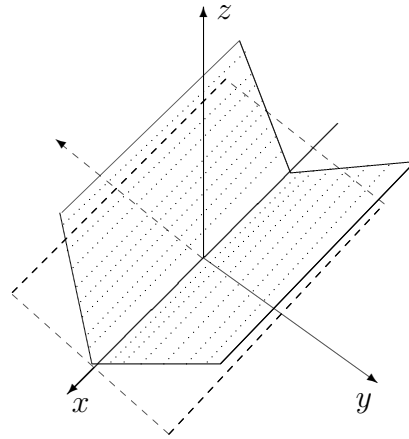
Sind das auch Maximum und Minimum?

Lösung:

Die Funktion

$$f(x, y) = |y|$$

können wir uns leicht veranschaulichen. Denken Sie sich dazu auf dem Tisch vor Ihnen die x -Achse auf Ihren Bauchnabel zulaufend, die y -Achse nach rechts. Halten Sie dann zwei Blätter jeweils 45° nach rechts bzw. links geneigt über die x -Achse. Wir haben das rechts angedeutet.



Wenn wir annehmen, dass die angedeuteten Parallelen zur x -Achse gerade im Abstand 1 laufen, so ist über ihnen auf der Kante der Blätter der Wert der Funktion 1. In der Definition der Funktion haben wir aber diese Parallelen ausgenommen ($-1 < y < 1$). Das echte Kleinerzeichen beschert uns das. Daher gehören diese Parallelen nicht zum Definitionsgebiet. Daher ist

$$\sup_R f(x, y) = 1,$$

aber dieser Wert ist nicht das Maximum der Funktion, da er nicht zum Wertebereich gehört.

Anders ist es mit dem Minimum. Offensichtlich ist

$$\inf_R f(x, y) = 0,$$

und dieser Wert wird über der x -Achse angenommen, also ist

$$\min_R f(x, y) = \inf_R f(x, y) = 0.$$

6.2 Betrachten Sie die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{in} \quad Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < x < 2, -2 < y < 2\}.$$

Veranschaulichen Sie sich an einer Skizze die partiellen Ableitungen f_x und f_y in verschiedenen Punkten von Q .

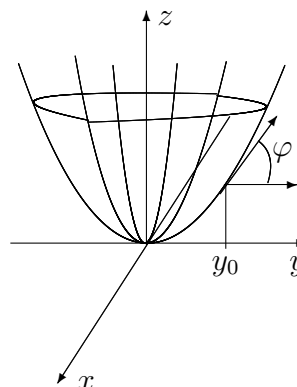
Lösung:

Die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

haben wir auf S. 61 skizziert. Hier rechts noch einmal eine Handskizze, um die partielle Ableitung $f_y(0, y_0)$ zu zeigen. Wenn wir auf allen Achsen die gleichen Längenmaßstäbe einführen, so ist

$$f_y(0, y_0) = \tan \varphi.$$



Um die Übersicht in der Skizze nicht zu verlieren, belassen wir es bei dieser einen partiellen Ableitung. Bitte denken Sie selbst über weitere Werte nach.

6.3 Berechnen Sie für folgende Funktionen die partiellen Ableitungen f_x und f_y jeweils im Definitionsbereich:

(a) $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$

(b) $f(x, y) = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}$

(c) $f(x, y) = \sin 3x \cdot \cos 4y$

(d) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$

Lösung:

Zu (a):

$$f_x(x, y) = 2x + 3y, f_y(x, y) = 3x + 2y$$

Zu (b):

$$f_x(x, y) = \frac{1}{y^2} + \frac{2y}{x^3}, f_y(x, y) = -\frac{2x}{y^3} - \frac{1}{x^2}$$

Zu (c):

$$f_x(x, y) = 3 \cos 3x \cdot \cos 4y, f_y(x, y) = -4 \sin 3x \cdot \sin 4y$$

Zu (d):

$$f_x(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, f_y(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

6.4 Zeigen Sie, dass für

- (a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ gilt: $x \cdot f_x + y \cdot f_y = f$,
 (b) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ gilt: $x \cdot f_x + y \cdot f_y = 1$,

Lösung:

Zu (a):

Es ist

$$f_x(x, y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, f_y(x, y) = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

also

$$x \cdot f_x(x, y) + y \cdot f_y(x, y) = \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{2y^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} = f(x, y).$$

Zu (b):

Es ist

$$f_x(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}, f_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Damit folgt

$$x \cdot f_x(x, y) + y \cdot f_y(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 1.$$

6.5 Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

im Punkt $(0, 0)$ partiell differenzierbar, aber dort nicht stetig ist [Hinweis: Betrachten Sie die Koordinatenachsen und die Parabel $y = x^2$].

Lösung:

Das ist hier ein Beispiel dafür, dass aus partieller Differenzierbarkeit nicht automatisch die Stetigkeit folgt. Darum führen wir später den Begriff 'total differenzierbar' ein.

Zuerst bewegen wir uns mit der partiellen Ableitung nach x entlang der x -Achse auf den Punkt $(0, 0)$ zu:

$$x \neq 0, y = 0 \implies \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0.$$

Also ist auch der Limes

$$f_x(0,0) = 0.$$

Analog ist

$$y \neq 0, x = 0 \implies \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = 0$$

und daher

$$f_y(0,0) = 0.$$

Beide partiellen Ableitungen existieren also mit Wert 0 im Punkt $(0,0)$. Wir zeigen jetzt aber, dass f im Punkt $(0,0)$ nicht stetig ist; denn auf der x -Achse ist f überall gleich 0. Dort ist daher auch

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = 0.$$

Ebenso ist der Grenzwert, wenn wir uns auf der y -Achse dem Punkt $(0,0)$ nähern, 0.

Nähern wir uns aber auf der Parabel $y = x^2$, so folgt:

$$f(x, x^2) = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + x^4} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$

Auf dieser Parabel ergibt sich wegen des konst. Wertes $1/2$ natürlich auch der Grenzwert zu $1/2$. Das ist dort aber nicht der vorgegebene Funktionswert.

Lösungen zu Übung 7

7.1 Berechnen Sie für die Funktionen

$$(a) \quad f(x, y) := x^3 y + e^{xy^2},$$

$$(b) \quad f(x, y) := x \cos x - y \sin x$$

alle zweiten partiellen Ableitungen.

Lösung:

Zu (a):

$$f_x(x, y) = 3x^2 y + y^2 \cdot e^{xy^2}$$

$$f_{xx}(x, y) = 6xy + y^4 \cdot e^{xy^2}, \quad f_{xy}(x, y) = 3x^2 + 2y \cdot e^{xy^2} \cdot (1 + xy^2)$$

$$f_y(x, y) = x^3 + 2xy \cdot e^{xy^2}$$

$$f_{yy}(x, y) = 2x \cdot e^{xy^2} \cdot (1 + 2xy^2), \quad f_{yx} = 3x^2 + 2y \cdot e^{xy^2} \cdot (1 + xy^2)$$

Wir sehen

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

Zu (b):

$$f_x(x, y) = \cos x - x \sin x - y \cos x, \quad f_y(x, y) = -x \sin x$$

$$f_{xx}(x, y) = -\sin x - \sin x - x \cos x + y \sin x, \quad f_{yy}(x, y) = 0$$

$$f_{xy}(x, y) = -\cos x, \quad f_{yx}(x, y) = -\cos x$$

Wieder sehen wir die Gleichheit $f_{xy} = f_{yx}$. Dass das nicht immer richtig ist, zeigen wir in der folgenden Aufgabe.

7.2 Betrachten Sie die Funktion

$$f(x, y) := \begin{cases} x y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie die ersten partiellen Ableitungen.

- (b) Zeigen Sie mittels Polarkoordinaten, dass die ersten partiellen Ableitungen in $(0,0)$ stetig sind.
- (c) Zeigen Sie, dass die gemischten zweiten partiellen Ableitungen im Punkt $(0,0)$ nicht gleich sind:

$$f_{yx}(0,0) \neq f_{xy}(0,0)$$

Lösung:

f ist als rationale Funktion außerhalb der Nullstellen des Nenners, also in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, eine beliebig gutartige Funktion, also beliebig oft differenzierbar. Nur der Nullpunkt könnte Ärger bereiten.

Auf den Koordinatenachsen ist $f(0,y) = f(x,0) = 0$. Also ist f in $(0,0)$ partiell differenzierbar mit

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

Wir berechnen die partiellen Ableitungen an beliebigen Punkten:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)2x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{3x^4y + 3x^2y^3 - x^2y^3 - y^5 - 2x^4y + 2x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Analog:

$$f_y(x,y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

Um den Grenzübergang $(x,y) \rightarrow (0,0)$ zu untersuchen, gehen wir zu Polarkoordinaten über. Beachten Sie, dass wir damit tatsächlich alle möglichen Wege, sich dem Nullpunkt zu nähern, zugleich untersuchen.

Der Nenner wird zu

$$(x^2 + y^2)^2 = (r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)^2 = r^4.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} f_x(r,\varphi) &= \frac{r^5 \cos^4 \varphi \sin \varphi + 4r^5 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi - r^5 \sin^5 \varphi}{r^4} \\ &= r(\cos^4 \varphi \sin \varphi + 4 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi - \sin^5 \varphi) \end{aligned}$$

Wenn wir hier $r \rightarrow 0$ gehen lassen, so sieht das harmlos aus, weil wir ja r ausgeklammert haben. Wenn aber die Klammer gleichzeitig immer größer würde, könnte sich der Effekt

aufheben. Aber in der Klammer stehen sin- und cos-Terme. Von diesen Funktionen wissen wir

$$|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1,$$

also bleibt die ganze Klammer dem Betrage nach beschränkt, nämlich ≤ 6 . Also können wir ruhig $r \rightarrow 0$ gehen lassen und erhalten

$$\lim_{r \rightarrow 0} f_x(r, \varphi) = 0.$$

Völlig analog geht das für f_y . Es ist wirklich nur reine Schreibaarbeit, die wir uns ersparen können.

Also sind die beiden ersten partiellen Ableitungen auch in $(0, 0)$ stetig, da dort der Grenzwert gleich dem Funktionswert ist. Damit haben wir gezeigt, dass f in \mathbb{R}^2 stetig differenzierbar ist.

Jetzt betrachten wir die zweiten gemischten partiellen Ableitungen. Auf der x -Achse ($y = 0$) ist

$$f_y(x, 0) = \frac{x^5}{x^4} = x.$$

Damit ist auf der x -Achse

$$f_{yx}(x, 0) = \frac{\partial^2 f(x, 0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, 0) \right) = \frac{\partial}{\partial x}(x) = 1.$$

Wenn wir uns also auf der x -Achse $(x, 0)$ dem Punkt $(0, 0)$ nähern, ist

$$(x, 0) \rightarrow (0, 0) \implies f_{y,x}(0, 0) = 1.$$

Ganz ähnlich ist das auf der y -Achse ($x = 0$).

$$f_x(0, y) = -\frac{y^5}{y^4} = -y.$$

Damit ist auf der y -Achse

$$f_{xy}(0, y) = \frac{\partial^2 f(0, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(0, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y}(-y) = -1.$$

Wenn wir uns also auf der y -Achse $(0, y)$ dem Punkt $(0, 0)$ nähern, ist

$$(0, y) \rightarrow (0, 0) \implies f_{x,y}(0, 0) = -1.$$

Wir sehen also

$$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0).$$

Sicherlich werden Sie fragen, woran das liegt. Nun, nach dem Satz 5.1 von H.A.Schwarz müssen, damit Gleichheit der zweiten gemischten Ableitungen folgt, die ersten partiellen Ableitungen stetig sein. Das haben wir oben geprüft. Dann muss aber auch mindestens eine zweite gemischte Ableitung stetig sein.

Wir betrachten hier als Beispiel die Ableitung f_{xy} im Punkt $(0,0)$. Wir hatten ihren Wert oben bei Annäherung auf der y -Achse berechnet. Jetzt schauen wir, was bei Annäherung auf der x -Achse ($y = 0$) herauskommt.

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,0) \right) = \frac{\partial}{\partial y} (0) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} f_{xy}(x,0) = 0.$$

Damit sehen wir, dass tatsächlich f_{xy} nicht stetig im Punkt $(0,0)$ ist. Genauso könnten wir zeigen, dass auch f_{yx} im Punkt $(0,0)$ nicht stetig ist.

7.3 Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist für die Funktion

$$f(x,y) := x^3 + a x y^2$$

die Gleichung

$$f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 0$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt?

Lösung:

Für die gegebene Funktion rechnen wir einfach ihre zweiten partiellen Ableitungen aus und vergleichen dann.

$$f_x(x,y) = 3x^2 + ay^2, \quad f_{xx}(x,y) = 6x.$$

$$f_y(x,y) = 2axy, \quad f_{yy}(x,y) = 2ax.$$

Aus

$$f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 6x + 2ax \stackrel{!}{=} 0$$

folgt, dass diese Gleichheit für alle (x,y) nur für

$$a = -3$$

gegeben ist.

Lösungen zu Übung 8

8.1 Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

überall im \mathbb{R}^2 total differenzierbar ist.

Lösung:

Offensichtlich ist $f(x, y)$ für jeden Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ als Quotient total differenzierbarer Funktionen selbst total differenzierbar. Nur der Punkt $(0, 0)$ muss extra betrachtet werden.

Man sieht, dass $f(x, y)$ auf den beiden Achsen identisch verschwindet:

$$f(x, 0) = f(0, y) \equiv 0$$

Als sind auch die beiden partiellen Ableitungen im Nullpunkt

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0.$$

Das hilft aber nicht bei der Frage nach totaler Ableitung.

Wir prüfen jetzt die Definition 5.6 nach. Dazu verwenden wir wieder Polarkoordinaten. Sei dazu $(x, y) \neq (0, 0)$.

$$f(x, y) = f(r, \varphi) = \frac{r^3 \cos^3 \varphi r \sin \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = \frac{r^4 \cos^3 \varphi \sin \varphi}{r^2} = r^2 \cos^3 \varphi \sin \varphi.$$

Damit erhalten wir, wenn wir noch $|(x, y)| = r$ einbeziehen,

$$\begin{aligned} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)(x - 0) - f_y(0, 0)(y - 0)}{|(x, y) - (0, 0)|} &= \frac{f(x, y) - 0 - 0 - 0}{|(x, y)|} \\ &= \frac{r^2 \cos^3 \varphi \sin \varphi}{r} \\ &= r \cos^3 \varphi \sin \varphi. \end{aligned}$$

Für $r \rightarrow 0$ geht der letzte Ausdruck ebenfalls $\rightarrow 0$. Also ist f total differenzierbar.

8.2 Untersuchen Sie, ob die Funktion

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

im \mathbb{R}^2 total differenzierbar ist.

Lösung:

Das ist fast dieselbe Aufgabe wie 8.1 oben. Wenn Sie sich also etwas Gutes antun wollen, so schauen Sie sich noch mal Aufgabe 8.1 genau an und versuchen sich dann an dieser Aufgabe ohne meine Lösung.

Wiederum ist nur der Punkt $(0, 0)$ interessant. Und wieder helfen uns Polarkoordinaten:

$$f(r, \varphi) = \frac{r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{r^2} = r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$$

Ist $f(x, y)$ in $(0, 0)$ stetig? Ja, denn

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = 0 = f(0, 0).$$

Ist $f(x, y)$ in $(0, 0)$ partiell differenzierbar? Ja, denn wie früher ist

$$f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0).$$

Ist $f(x, y)$ in $(0, 0)$ total differenzierbar? Es ist

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)(x - 0) - f_y(0, 0)(y - 0)}{|(x, y) - (0, 0)|} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{r^3} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ &= 0. \end{aligned}$$

8.3 Berechnen Sie für die Funktion

$$f(x, y) := \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

das totale Differential.

Lösung:

Eine Bemerkung vorweg. Diese Funktion ist wegen des Logarithmus nur für $(x, y) \neq (0, 0)$ erklärt. Und nur für solche Werte wollen wir das totale Differential ausrechnen.

Nach Formel (5.8) in Def. 5.6 müssen wir berechnen:

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Es ist

$$f_x(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad f_y(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Damit folgt

$$df(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy.$$

8.4 Berechnen Sie für die Funktion

$$f(x, y) := x^2 y - 3 y$$

- (a) die Tangentialebene im Punkt $(x_0, y_0) = (4, 3)$,
- (b) das totale Differential im Punkt $(x_1, y_1) = (3.99, 3.02)$,
- (c) eine Näherung mit Hilfe des totalen Differentials für $f(5.12, 6.85)$.

Lösung:

Zu (a):

Die Tangentialebene einer Funktion f im Punkt (x_0, y_0) wird beschrieben durch (vgl. Formel (5.9) in Def. 5.6)

$$\tilde{f}(x, y) := f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Also rechnen wir

$$\begin{aligned} f(4, 3) &= 4^2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 = 39, \\ f_x(x_0, y_0) &= 2x_0 y_0 \implies f_x(4, 3) = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24, \\ f_y(x_0, y_0) &= x_0^2 - 3 \implies f_y(4, 3) = 4^2 - 3 = 13. \end{aligned}$$

Dann lautet die Tangentialebene

$$z = 39 + 24(x - 4) + 12(y - 3)$$

oder in Koordinatenform

$$24x + 13y - z = 96.$$

Zu (b):

Das totale Differential müssen wir nur noch kurz ausrechnen:

$$\begin{aligned} df(3.99, 3.02) &= f_x(3.99, 3.02) dx + f_y(3.99, 3.02) dy \\ &= 2 \cdot 3.99 \cdot 3.02 dx + (3.99^2 - 3) dy \\ &= 24.0996 dx + 12.9201 dy. \end{aligned}$$

Zu (c):

Wir wollen hier den Punkt $(5, 7)$ als Näherung an den Punkt $(5.12, 6.85)$ ansehen und dort mit Hilfe des totalen Differentials einen Näherungswert $f(5, 7)$ für den Wert $f(5.12, 6.85)$ ausrechnen. Dazu benutzen wir die Näherungsgleichung

$$f(5.12, 6.85) \sim f(5, 7) + df(5, 7)$$

und wählen

$$dx \sim x - x_0 = 5.12 - 5 = 0.12, \quad dy \sim y - y_0 = 6.85 - 7 = -0.15.$$

Den Wert $df(5, 7)$ berechnen wir genauso wie im Teil (c), also

$$\begin{aligned} df(5, 7) &= f_x(5, 7) \, dx + f_y(5, 7) \, dy \\ &= 70 \cdot 0.12 - 22 \cdot 0.15 \\ &= 5.1 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$f(5.12, 6.85) \sim f(5, 7) + df(5, 7) = 159.1.$$

Übrigens ist der exakte Wert

$$f(5.12, 6.85) = 159.01864.$$

Damit ist der obige Wert doch schon eine beachtliche Näherung.

Lösungen zu Übung 9

9.1 Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x, y) := \frac{y}{1 + x^2}$$

- (a) die Richtungsableitung im Punkt $(1, 2)$ in die Richtungen $(3, 4)$ und $(-1, 1)$,
- (b) die Richtungen im Punkt $(1, 2)$, für die die Steigung maximal, minimal, gleich Null ist
- (c) die Tangentialebene im Punkt $(1, 2)$ sowie die Tangente im Punkt $(1, 2)$ in Richtung $(3, 4)$.

Lösung:

Zu (a):

Statt der Definition 5.7 benutzen wir hier den Satz 5.4, der uns eine leichtere Methode angibt, die Richtungsableitung zu berechnen.

Bitte beachten Sie, dass uns in diesem Satz ein Schreibfehler unterlaufen ist. Die Funktion f muss natürlich im Punkt (x_0, y_0) stetig differenzierbar sein, Stetigkeit allein reicht nicht aus. Bitte verbessern Sie das in Ihrem Buch.

Unsere Funktion hat als Nenner den Term $1 + x^2$. Das ist immer größer oder gleich 1, garantiert niemals 0. Also ist die Funktion gutartig. Dass sie stetig differenzierbar ist, prüfen wir nicht nach. Wir sagen einfach elegant, das sei trivial. Für Mathematiker bedeutet das, es ist leicht einzusehen, müsste aber mit etwas Aufwand nachgerechnet werden.

In Formel (5.11) haben wir gelernt

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \vec{m}} = \text{grad } f(x_0, y_0) \cdot \vec{m}.$$

Wir betrachten zunächst den Vektor $\vec{m}_1 = (3, 4)$, müssen aber beachten, dass für unsere Formel der Richtungsvektor die Länge 1 haben muss. Also rechnen wir die Länge von \vec{m}_1 mal aus:

$$|\vec{m}_1| = |(3, 4)| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Wir brauchen den Gradienten von f im Punkt $(1, 2)$.

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= \frac{-2x_0y_0}{(1-x_0^2)^2} \implies f_x(1, 2) = -1 \\ f_y(x_0, y_0) &= \frac{1}{1-x_0^2} \implies f_y(1, 2) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\text{grad } f(1, 2) = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

und

$$\frac{\partial f(1, 2)}{\partial m_1} = \text{grad } f(1, 2) \cdot \frac{\vec{m}_1}{|\vec{m}_1|} = \left(-1, \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{(3, 4)}{5} = -\frac{1}{5}$$

Mit dem Vektor \vec{m}_2 verfahren wir genauso und geben nur die Endrechnung an:

$$\frac{\partial f(1, 2)}{\partial m_2} = \text{grad } f(1, 2) \cdot \frac{\vec{m}_2}{|\vec{m}_2|} = \left(-1, \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{(-1, 1)}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2}$$

Zu (b):

Nach Satz 5.6 zeigt der Gradient in Richtung des größten Anstiegs. Das ist also die Richtung

$$\text{grad } f(1, 2) = \left(-1, \frac{1}{2}\right).$$

Wir gehen noch einen Schritt weiter und rechnen die Steigung in dieser Richtung aus:

$$\frac{\partial f(1, 2)}{\partial \text{grad } f(1, 2)} = \text{grad } f(1, 2) \cdot \frac{\text{grad } f(1, 2)}{|\text{grad } f(1, 2)|} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Die Steigung wird minimal in entgegengesetzter Richtung, was wir leicht aus der Begründung für Satz 5.6 schließen können; denn der Cosinus wird am kleinsten bei 180° .

Das ist also die Richtung

$$-\text{grad } f(1, 2) = \left(1, -\frac{1}{2}\right).$$

Die Steigung in dieser Richtung ist

$$\frac{\partial f(1, 2)}{\partial (-\text{grad } f(1, 2))} = -\text{grad } f(1, 2) \cdot \frac{\text{grad } f(1, 2)}{|\text{grad } f(1, 2)|} = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Um die Richtung zu bestimmen, in der die Ableitung Null wird, müssen wir den Vektor $\vec{m} = (m_1, m_2)$ finden mit

$$\frac{\partial f(1, 2)}{\partial m} = \text{grad } f(1, 2) \cdot \vec{m} = \left(-1, \frac{1}{2}\right) \cdot (m_1, m_2) = 0.$$

Wir erhalten die Gleichung

$$-m_1 + \frac{1}{2} \cdot m_2 = 0, \text{ also } m_2 = 2m_1.$$

Wir wählen $m_1 = 1$ und erhalten $m_2 = 2$, also ist

$$\vec{m} = (1, 2)$$

ein Vektor, in dessen Richtung die Steigung Null ist.

Zu (c):

Formel (5.9) sagt uns, was wir zu rechnen haben:

$$\begin{aligned} z &= f(1, 2) + \text{grad } f(1, 2) \cdot (x - 1, y - 2) \\ &= 1 + \left(-1, \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 1, y - 2) = 1 - x + 1 + \frac{1}{2}y - 1 \end{aligned}$$

Zusammengefasst lautet also die Tangentialebene im Punkt $(1, 2)$

$$2x - y + 2z = 2.$$

Den Tangentenvektor entnehmen wir der Formel (5.12). Mit $\vec{m} = (m_1, m_2) = (3, 4)$ folgt:

$$\vec{t} = (3, 4, \left(-1, \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{5}(3, 4)) = \frac{1}{5}(3, 4, -1)$$

Die Tangente selbst hat die Darstellung

$$T = (1, 2, 1) + r \cdot (3, 4, -1).$$

9.2 Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) := x^2 + 3x + y^2 + 2y - 15.$$

- (a) Ist $f(x, y)$ an der Stelle $(x_0, y_0) = (1, 3)$ total differenzierbar?
- (b) Berechnen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Funktion $f(x, y)$ im Punkt $(1, 3, f(1, 3))$.
- (c) Bestimmen Sie das totale Differential bei $(x_0, y_0) = (1, 3)$.
- (d) Bestimmen Sie die Richtung des stärksten Anstiegs von $f(x, y)$ im Punkt $(1, 3)$ und die Richtungsableitung in diese Richtung.

Lösung:

Zu (a):

Wir benutzen diese Aufgabe, um die Definition 5.6 von 'total differenzierbar' zu üben. Es ist

$$f_x(x_0, y_0) = 2x_0 + 3, \quad f_y(x_0, y_0) = 2y_0 + 2.$$

Für $(x_0, y_0) = (1, 3)$ rechnen wir nach Formel (5.7) zunächst ohne den Grenzübergang $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} :$

$$\begin{aligned} & \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) - f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)}{|(x, y) - (x_0, y_0)|} \\ = & \frac{x^2 + 3x + y^2 + 2y - 15 - 4 - 5(x - 1) - 8(y - 2)}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2}} \\ = & \frac{x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2}} \\ = & \frac{(x - 1)^2 + (y - 3)^2}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2}} = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2} \\ = & |(x, y) - (1, 3)| \end{aligned}$$

Die letzte Zeile zeigt uns, dass der Grenzübergang $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)}$ ohne Probleme vonstatten geht und dass er gleich 0 ist. Also existiert wegen der Gleichheit auch der Grenzwert in der ersten Zeile und ist gleich 0.

Zu (b):

Nach (5.9) ist

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 4 + 5(x - 1) + 8(y - 3).$$

Also ist die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(1, 3, f(1, 3))$:

$$5x + 8y - 8 = 25.$$

Zu (c):

Das vollständige oder totale Differential ist dann nach (5.8):

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy = 5 dx + 8 dy$$

Zu (d):

Nach Satz 5.6 ist

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = (5, 8)$$

die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion f . Um den Anstieg zu berechnen, brauchen wir den Einheitsvektor \vec{m} in diese Richtung:

$$\vec{m} = \frac{(5, 8)}{\sqrt{89}}$$

Damit ist

$$\frac{\partial f(1, 3)}{\partial m} = \text{grad } f(1, 3) \cdot \vec{m} = \frac{(5, 8)}{\sqrt{89}} \cdot (5, 8) = \sqrt{89}.$$

9.3 Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x, y) := x \sin y$$

$$\text{in Richtung } \vec{m} := \frac{(1, 2)}{|(1, 2)|} \text{ im Punkt } (x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right).$$

Lösung:

Wir berechnen zunächst den Gradienten:

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) = (\sin y_0, x_0 \cos y_0)$$

Es ist

$$|(1, 2)| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \text{ also } \vec{m} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Daher folgt mit $x_0 = \frac{\pi}{2}$ und $y_0 = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial m} &= \text{grad } f(x_0, y_0) \cdot \vec{m} = (\sin y_0, x_0 \cos y_0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \\ &= \frac{\sin y_0}{\sqrt{5}} + \frac{2x_0 \cos y_0}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}} + \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{\pi}{\sqrt{10}} = \frac{1 + \pi}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

Lösungen zu Übung 10

10.1 Bestimmen Sie die relativen Extrema von

(a)

$$f(x, y) := x^2 + 3x + y^2 + 2y - 15,$$

(b)

$$f(x, y) := \frac{x^3}{3} + 4xy - 2y^2,$$

(c)

$$f(x, y) := e^{xy} + x^2 + ay^2 \text{ für } a > 0.$$

Lösung:

Zu (a):

Wie in der Schule suchen wir hier zuerst an Hand der notwendigen Bedingung, dass der Gradient in Extrempunkten verschwindet, nach möglichen Kandidaten für Minima und Maxima (vgl. S. 95):

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = (2x_0 + 3, 2y_0 + 2) \stackrel{!}{=} (0, 0)$$

Das führt auf die beiden Gleichungen

$$2x_0 + 3 = 0 \quad \text{und} \quad 2y_0 + 2 = 0.$$

Das ergibt den einzigen stationären Punkt

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{3}{2}, -1\right).$$

Jetzt untersuchen wir die Hesse-Matrix:

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Es ist daher

$$\begin{aligned} \det H_f \left(-\frac{3}{2}, -1\right) &= f_{xx} \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cdot f_{yy} \left(-\frac{3}{2}, -1\right) - f_{xy}^2 \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \\ &= 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0. \end{aligned}$$

Dieser Wert ist größer als 0, und es ist

$$f_{xx} \left(-\frac{3}{2}, -1\right) = 2 > 0$$

ebenfalls größer als 0. Daher ist im Punkt $(-\frac{3}{2}, -1)$ ein relatives Minimum mit Wert

$$f\left(-\frac{3}{2}, -1\right) = \frac{9}{4} - 3 \cdot \frac{3}{2} + (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 15 = -\frac{73}{4}.$$

Zu (b):

Unser Vorgehen ist wie oben.

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \left(\frac{3x^2}{3} + 4y, 4x - 4y\right) \stackrel{!}{=} (0, 0).$$

Daraus folgt

$$x^2 + 4y = 0 \quad \text{und} \quad 4x - 4y = 0.$$

Wir addieren beide Gleichungen und erhalten

$$x^2 + 4x = 0, \quad \text{also} \quad x(x + 4) = 0.$$

Hieraus folgt

entweder $x = 0$ und daraus $y = 0$, also $(0, 0)$

oder $x = -4$ und daraus $y = -4$, also $(-4, -4)$.

Wir haben insgesamt zwei stationäre Punkte gefunden, die wir jetzt einzeln weiter untersuchen.

Zuerst zum Punkt $(0, 0)$:

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2x & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist -4 , also negativ. Als ist $(0, 0)$ ein Sattelpunkt.

Zum Punkt $(-4, -4)$:

$$H_f(-4, -4) = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante ist 16, also positiv. Wegen

$$f_{xx}(-4, -4) = -8 < 0$$

ist in $(-4, -4)$ ein relatives Maximum mit Wert

$$f(-4, -4) = \frac{32}{3}.$$

Zu (c):

Diese Aufgabe ist für absolute Freaks der Fallunterscheidungen.

Es ist

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = (y_0 e^{x_0 y_0} + 2x_0, x_0 e^{x_0 y_0} + 2ay_0).$$

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2 + y_0^2 e^{x_0 y_0} & (1 + x_0 y_0) e^{x_0 y_0} \\ (1 + x_0 y_0) e^{x_0 y_0} & 2a + x_0^2 e^{x_0 y_0} \end{pmatrix}$$

Suche nach stationären Punkten:

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = (0, 0)$$

Offensichtlich erfüllt der Punkt $(0, 0)$ diese Gleichung. Untersuchen wir diesen Punkt weiter. Wegen

$$H_f(0, 0) = 4a - 1 \text{ und } f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$$

ist also

für $a > \frac{1}{4}$ in $(0, 0)$ ein relatives Minimum,

für $0 < a < \frac{1}{4}$ in $(0, 0)$ ein Sattelpunkt,

für $a = \frac{1}{4}$ in $(0, 0)$ mit unserem Kriterium keine Aussage möglich. Wir untersuchen diesen Fall so: Für $(x, y) \neq (0, 0)$ und $a = \frac{1}{4}$ ist

$$\begin{aligned} f(x, y) &= e^{xy} + x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 + \left(x + \frac{y}{4}\right)^2 + (e^{xy} - 1 - xy) \\ &> 1 + \left(x + \frac{y}{4}\right)^2 \\ &> 1 = f(0, 0) \end{aligned}$$

Also ist in $(0, 0)$ auch für $a = \frac{1}{4}$ ein relatives Minimum; denn alle umgebenden Funktionswerte sind größer als 1.

Weitere Suche nach stationären Punkten ergibt, wenn wir die erste Gleichung mit x_0 und die zweite mit y_0 multiplizieren:

$$\begin{aligned} y_0 e^{x_0 y_0} &= -2x_0 \implies x_0 y_0 e^{x_0 y_0} = -2x_0^2 \\ x_0 e^{x_0 y_0} &= -2ay_0 \implies x_0 y_0 e^{x_0 y_0} = -2ay_0^2 \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der beiden rechts stehenden Gleichungen erhält man:

$$x_0^2 = ay_0^2 \implies x_0 = \pm \sqrt{a} \cdot y_0$$

Die letzte Gleichung sagt uns: wenn $x_0 \neq 0$ ist, ist auch $y_0 \neq 0$. Aus der Gleichung $x_0 y_0 e^{x_0 y_0} = -2x_0^2$ folgt, weil $2x_0^2 > 0$ und zugleich $e^{x_0 y_0} > 0$ ist, dass x_0 und y_0 verschiedenes Vorzeichen haben. Also ist

$$x_0 = -\sqrt{a} \cdot y_0 \text{ für } x_0 \neq 0, y_0 \neq 0.$$

Mit dieser Kenntnis folgt jetzt aus dem Nullsetzen der partiellen Ableitung nach x

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \implies e^{-\sqrt{a}y_0^2} = 2\sqrt{a}.$$

Jetzt wieder Fallunterscheidung. Die linke Seite dieser Gleichung ist stets kleiner als 1; denn schauen Sie sich die e-Funktion an. Für $\sqrt{a} > \frac{1}{2}$ ist die rechte Seite aber größer als 1. Also gibt es im Fall $\sqrt{a} > \frac{1}{2}$ keinen stationären Punkt.

Für $\sqrt{a} = \frac{1}{2}$ ist $2\sqrt{a} = 1$. Damit folgt aus $e^{-\sqrt{a}y_0^2} = 1$ die Gleichung $-\sqrt{a}y_0^2 = 0$ und daraus $y_0 = 0$. Den Punkt hatten wir oben schon.

Für $\sqrt{a} < \frac{1}{2}$ gibt es zwei Lösungen der Gleichung:

$$y_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{\ln(2\sqrt{a})}{\sqrt{a}}},$$

also auch zwei zugehörige x -Werte und damit zwei stationäre Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) . In diesen Punkten ist

$$\det H_f(x_1, y_1) = \det H_f(x_2, y_2) = 16a \ln(2\sqrt{a}) > 0.$$

Da in beiden Punkten auch $f_{xx} > 0$ ist, liegt dort jeweils ein relatives Minimum. Uff!

10.2 Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x, y) := (y - x^2) \cdot (y - 2 \cdot x^2)$$

auf relative Extrema.

Lösung:

Bestimmung der stationären Punkte:

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= -2x_0^2 \cdot (y_0 - 2x_0^2) - 4x_0 \cdot (y_0 - x_0^2) \\ &= -2x_0(y_0 - 2x_0^2 + 2y_0 - 2x_0^2) \\ &= -2x_0(3y_0 - 4x_0^2) \end{aligned}$$

Analog:

$$f_y(x_0, y_0) = y_0 - 2x_0^2 + y_0 - x_0^2 = 2y_0 - 3x_0^2$$

Notwendige Bedingung für stationäre Punkte:

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = (0, 0),$$

also

$$-2x_0(3y_0 - 4x_0^2) = 0, \quad \text{und} \quad 2y_0 - 3x_0^2 = 0.$$

Hieraus folgt

entweder $x_0 = 0$ und dann aus 2. Gleichung $y_0 = 0$,

oder $3y_0 - 4x_0^2 = 0$, also $y_0 = \frac{4}{3}x_0^2$ und dann aus 2. Gleichung $y_0 = \frac{3}{2}x_0^2$.

Daraus folgt

$$\frac{4}{3}x_0^2 - \frac{3}{2}x_0^2 = 0, \quad \text{also} \quad x_0 = 0, y_0 = 0.$$

Also ist $(0, 0)$ einziger stationärer Punkt der Funktion $f(x, y)$.

Als hinreichende Bedingung untersuchen wir die Determinante der Hesse-Matrix:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x_0, y_0) &= -2(3y_0 - 4x_0^2) + 16x_0^2 = -6y_0 + 24x_0^2 \\ f_{xy}(x_0, y_0) &= f_{yx}(x_0, y_0) = -6x_0 \\ f_{yy}(x_0, y_0) &= 2 \end{aligned}$$

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -6y_0 + 24x_0^2 & -6x_0 \\ -6x_0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\det(x_0, y_0) = (-6y_0 + 24x_0^2) \cdot 2 - (-6x_0)(-6x_0) = -12y_0 + 12x_0^2,$$

also

$$\det(0, 0) = 0,$$

und hier verlässt uns unser Kriterium. Wir müssen einen anderen Weg beschreiten, um ein Ergebnis zu finden.

Wie schon so oft, fällt uns ein Trick ein: Im Punkt $(0, 0)$ hat die Funktion den Wert 0: $f(0, 0) = 0$. Wir betrachten daher die Höhenlinien der Funktion $f(x, y)$ zum Niveau 0, wollen also herausfinden, welche Werte die Funktion in einer Umgebung von $(0, 0)$ annimmt. Wir erhalten:

$$f(x, y) = 0 \implies y - x^2 = 0 \text{ oder } y - 2x^2 = 0.$$

Das sind beides Parabeln $y = x^2$ und $y = 2x^2$.

Über diesen beiden Parabeln ist die Funktion also 0. Wir haben drei Bereiche A , B und C gekennzeichnet.

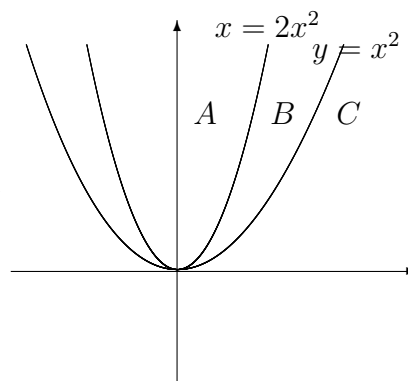
In A ist $y > x^2$ und $y > 2x^2$. Die beiden Klammern in der Funktionsgleichung sind also positiv, daher ist $f(x, y)$ in A positiv.

In B , also zwischen den beiden Parabeln, ist $y > x^2$, aber $y < 2x^2$, also ist dort $f(x, y) < 0$.

In C ist $y < x^2$ und $y < 2x^2$, beide Terme sind negativ, ihr Produkt ist also positiv. In C ist also $f(x, y) > 0$.

Die Bereiche A , B und C kommen dem Punkt $(0, 0)$ beliebig nahe. Wir haben also in beliebig kleiner Umgebung von $(0, 0)$ Werte der Funktion $f(x, y)$ größer als 0 und kleiner als 0. Also ist der Punkt $(0, 0)$ ein Sattelpunkt von $f(x, y)$.

War doch nicht schlecht, so eine Überlegung, oder?



Lösungen zu Übung 11

11.1 Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) := e^{x-2y}$$

und es sei $x = \sin t$, $y = t^3$. Durch Einsetzen entsteht die Funktion $F(t)$. Berechnen Sie $\frac{dF(t)}{dt}$ auf zweierlei Art.

Lösung:

Es ist

$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

und damit

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

oder ausführlich

$$\begin{aligned} F'(t) = \frac{dF(t)}{dt} &= \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial x} \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f(x(t), y(t))}{\partial y} \cdot \frac{dy(t)}{dt} \\ &= e^{x(t)-2y(t)} \cdot \cos t + (-2)e^{x(t)-2y(t)} \cdot 3t^2 \\ &= e^{\sin t - 2t^3} (\cos t - 6t^2) \end{aligned}$$

Wenn wir gleich die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ in die Funktion $f(x, y)$ einsetzen, erhalten wir die Funktion

$$F(t) = e^{\sin t - 2t^3},$$

die wir direkt wie in der Schule ableiten können:

$$F'(t) = e^{\sin t - 2t^3} (\cos t - 6t^2),$$

wie wir es auch oben erhalten haben.

11.2 Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Grades (vgl. Formel (5,27) , Seite 100) für die Funktion

(a)

$$f(x, y) := \cos(xy) + x e^{y-1}$$

an der Stelle $(x_0, y_0) = (\pi, 1)$,

(b)

$$f(x, y) := \cos x \sin y$$

an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Lösung:

Wir halten uns treu an die Formel (5,27). Zuerst zur Stelle $(x_0, y_0) = (\pi, 1)$:

$$\begin{array}{llll} f(x, y) & = & \cos(xy) + x \cdot e^{y-1} & \implies f(\pi, 1) = -1 + \pi \\ f_x(x, y) & = & -y \sin(xy) + e^{y-1} & \implies f_x(\pi, 1) = 1 \\ f_y(x, y) & = & -x \sin(xy) + x \cdot e^{y-1} & \implies f_y(\pi, 1) = \pi \\ f_{xx}(x, y) & = & -y^2 \cos(xy) & \implies f_{xx}(\pi, 1) = 1 \\ f_{xy}(x, y) & = & -\sin(xy) - xy \cdot \cos(xy) + e^{y-1} & \implies f_{xy}(\pi, 1) = 1 + \pi \\ f_{yy}(x, y) & = & -x^2 \cos(xy) + x \cdot e^{y-1} & \implies f_{yy}(\pi, 1) = \pi^2 - \pi \end{array}$$

Dann lautet das Taylorpolynom 2. Grades an der Stelle $(\pi, 1)$:

$$\begin{aligned} T_2(\pi, 1) &= -1 + \pi \\ &\quad + 1(x - \pi) + \pi(y - 1) \\ &\quad + \frac{1}{2!} [1(x - \pi)^2 + 2(1 + \pi)(x - \pi)(y - 1) + (\pi^2 - \pi)(y - 1)^2] \\ &= -1 + \frac{\pi}{2} + 2\pi^2 - 2\pi x - (\pi + 2\pi^2)y + \frac{1}{2}x^2 + (1 + \pi)xy + \frac{1}{2}(\pi + \pi^2)y^2 \end{aligned}$$

Jetzt zur Stelle $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

$$\begin{array}{llll} f(x, y) & = & \cos x \sin y & \implies f(0, 0) = 0 \\ f_x(x, y) & = & -\sin x \sin y & \implies f_x(0, 0) = 0 \\ f_y(x, y) & = & \cos x \cos y & \implies f_y(0, 0) = 1 \\ f_{xx}(x, y) & = & -\cos x \sin y & \implies f_{xx}(0, 0) = 0 \\ f_{xy}(x, y) & = & -\sin x \cos y & \implies f_{xy}(0, 0) = 0 \\ f_{yy}(x, y) & = & -\cos x \sin y & \implies f_{yy}(0, 0) = 0 \end{array}$$

Dann lautet das Taylorpolynom 2. Grades an der Stelle $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} T_2(0, 0) &= 0 + 0 \cdot (x - 0) + 1 \cdot (y - 0) + \frac{1}{2} [0 \cdot (x - 0)^2 + 2 \cdot 0 \cdot (x - 0)'(y - 0) + 0 \cdot (y - 0)^2] \\ &= y \end{aligned}$$