Jörg Mareczek

Grundlagen der Roboter-Manipulatoren – Band 1

Modellbildung von Kinematik und Dynamik: Musterlösungen

11. September 2020

Springer

Version: 1 vom 11. September 2020
Aus: Mareczek, Grundlagen der Roboter-Manipulatoren – Band 1, doi.org/10.1007/978-3-662-52759-7 © Springer-Verlag GmbH Deutschland, 2020

Inhaltsverzeichnis

Lösungen zu Kapitel 1: Einführung 1
1.1 Skalarprodukt 1
1.2 Kreuzprodukt 1
1.3 Matrizen 2
1.4 Business Case „Robotik“ 3
1.5 Mechatronischer Charakter der Robotik 4
Literaturverzeichnis 6

Lösungen zu Kapitel 2: Direkte Kinematik 7
2.1 Koordinatensystem-Basis 7
2.2 Homogene Transformationsmatrix 1 8
2.3 Homogene Transformationsmatrix 2 9
2.4 Elementar-Rotationen 10
2.5 InvEuler323-Funktion als Nassi-Shneiderman-Struktogramm 11
2.6 Euler-Winkel 1 12
2.7 Euler-Winkel 2 12
2.8 Euler-Winkel 3 12
2.9 Rotationsreihenfolge 12
2.10 Transformationsgraph 1 12
2.11 Transformationsgraph 2 13
2.12 Transformationsgraph 3 14
2.13 Artikulierter planarer 3-DoF Ellenbogen-Manipulator 16
2.14 Artikulierter 2-DoF Ellenbogen-Manipulator mit Achsversatz 17
2.15 Basis-Kinematik 3 19
2.16 Kartesischer 2-DoF Manipulator 19
2.17 Kinematik eines Manipulators mit Gelenkreihenfolge Translation-Rotation 20
2.18 Anthropomorpher 6-DoF-Manipulator 21

Lösungen zu Kapitel 3: Inverse Kinematik 23
3.1 Planarer 2-DoF Ellenbogen-Manipulator 23
3.2 Kartesischer 2-DoF Manipulator 27
3.3 Planarer 3-DoF Ellenbogen-Manipulator 27
3.4 Existenz und Bedeutung geschlossener Lösungen 30

Lösungen zu Kapitel 4: Differenzielle Kinematik 31
4.1 Endeffektorgeschwindigkeiten für Basiskinematik 3 31
4.2 Euler-Jacobi-Matrix bei einer ZYX Euler-Drehung 34
4.3 Statik von Basis-Kinematik 3 35
4.4 Planarer 2-DoF Ellenbogen-Manipulator mit Rotationsgelenken 35

Lösungen zu Kapitel 5: Dynamik 39
5.1 Freiheitsgrade und Zwangsbindungen 39
5.2 Massenträgheitstensor eines zusammengesetzten Körpers 41
5.3 Berechnung von Drehmomenten des planaren 2-DoF Ellenbogen-Manipulators 46
5.4 Manipulator mit zwei senkrecht aufeinander stehenden Drehachsen und Punktmassen 46
5.5 Manipulator mit Gelenkreihenfolge Translation-Rotation 52
5.6 Simulation der Bewegungsgleichung eines Manipulators in Kooperation mit dem Menschen 58

Lösungen zu Kapitel 1: Einführung

1.1 Skalarprodukt

a) $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$

b) $S = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z$

c) Bei $S = 0$ ist $\phi = \pi/2$, das heißt $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ senkrecht

1.2 Kreuzprodukt

a) $\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} a_y\, b_z - a_z\, b_y \\ a_z\, b_x - a_x\, b_z \\ a_x\, b_y - a_y\, b_x \end{pmatrix}$

b)
- Lorentzkraft: Ursache technischer Stromfluss (Daumen), Vermittlung Magnetfeld (Zeigefinder), Wirkung Kraft (Mittelfinger)
- Geschwindigkeitsvektor eines Punktes auf einem rotierenden Körper Daumen: Richtung des Drehgeschwindigkeitsvektors, Zeigefinger: Richtung des Abstandsvektors von der Drehachse zum Punkt, Mittelfinger Richtung des Geschwindigkeitsvektors im Punkt

c) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$

1.3 Matrizen

a) Matrixprodukt:

$$\widetilde{R}\,\widetilde{U} = \left[\begin{array}{c|c|c} r_{11}\,u_{11} + r_{12}\,u_{21} + r_{13}\,u_{31} & r_{11}\,u_{12} + r_{12}\,u_{22} + r_{13}\,u_{32} & \cdots \\ \hline r_{21}\,u_{11} + r_{22}\,u_{21} + r_{23}\,u_{31} & r_{21}\,u_{12} + r_{22}\,u_{22} + r_{23}\,u_{32} & \cdots \\ \hline r_{31}\,u_{11} + r_{32}\,u_{21} + r_{33}\,u_{31} & r_{31}\,u_{12} + r_{32}\,u_{22} + r_{33}\,u_{32} & \cdots \end{array}\right.$$
$$\left.\begin{array}{c|} \cdots \\ \hline r_{11}\,u_{13} + r_{12}\,u_{23} + r_{13}\,u_{33} \\ \hline r_{21}\,u_{13} + r_{22}\,u_{23} + r_{23}\,u_{33} \\ \hline r_{31}\,u_{13} + r_{32}\,u_{23} + r_{33}\,u_{33} \end{array}\right]$$

b) Matrix $\widetilde{A}$ besitzt die Form:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

Das Produkt mit einer Matrix $\widetilde{B}$ wird gebildet durch:

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \bullet & \cdots \\ \bullet & \cdots \end{bmatrix}}_{\widetilde{B}}$$

Daraus folgt: $\widetilde{B}$ muss $m = 2$ Zeilen besitzen. Zahl n der Spalten von $\widetilde{B}$ ist beliebig. Das Ergebnis ist eine $(3 \times n)$-Matrix. Für $n = 1$ liegt beispielsweise als Ergebnis ein stehender Vektor ((3×1)-Matrix) vor.

Dabei gilt folgende anschauliche Regel: Schreibt man die Ordnungszahl-Paare der Matrizen in der Reihenfolge des Matrizenprodukts an, so müssen nebeneinander stehende Ordnungszahlen gleich sein. Die äußeren Ordnungszahlen bestimmen die Ordnungszahlen des Ergebnisses. Für die vorligende Aufgabe bedeutet dies:

$$\underbrace{(3 \times 2)}_{\widetilde{A}} \cdot \underbrace{(2 \times n)}_{\widetilde{B}} = \underbrace{(3 \times n)}_{\widetilde{A} \cdot \widetilde{B}}$$

c)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

d) Genau eine Lösung $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$, dann und nur dann, wenn $\mathrm{Det}(\widetilde{A}) \neq 0$.

e) Berechnung der Determinanten zum Beispiel über die *nordwestlichen Unterdeterminanten*:

$$D_1 = a_{11}\,\mathrm{Det}(\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}) = a_{11}\ (a_{22}\,a_{33} - a_{32}\,a_{23})$$

$$D_2 = -a_{12}\,\mathrm{Det}(\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}) = -a_{12}\ (a_{12}\,a_{33} - a_{32}\,a_{13})$$

$$D_3 = a_{13}\,\mathrm{Det}(\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}) = a_{13}\ (a_{12}\,a_{23} - a_{22}\,a_{13})$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Det}(\widetilde{A}) = D_1 + D_2 + D_3$$

Alternative bei 3×3-Matrizen: *Regel von Sarrus*

f) Falls $\mathrm{Det}(\tilde{A}) = 0$, so existiert entweder keine Lösung oder eine Lösungsvielfalt. Weitere Bedingung für Lösungsvielfalt: $\boldsymbol{b}$ muss linear abhängig zu einem der Spaltenvektoren von $\widetilde{A}$ sein. Dies bezeichnet man in der linearen Algebra als den *unterbestimmten* Fall: Es liegen mehr Variablen als Gleichungen vor (liegende Matrix).
Andernfalls existiert keine Lösung. Dies bezeichnet man in der linearen Algebra als den *überbestimmten* Fall: Es liegen mehr Gleichungen als Variablen vor (stehende Matrix).

1.4 Business Case „Robotik“

a) Hauptarbeitsgebiete der Robotik umfassen

- Mechanische Manipulation,
- Telepräsenz- und Teleaktion,
- Lokomotion (Beförderung),
- künstliche Intelligenz und
- maschinelles Sehen und Selbstlokalisation.

b) Sinkende Anschaffungs-, Inbetriebnahme-, und Betriebskosten von Manipulatoren, steigende Lohnkosten von Menschen.

c) Roboter stellten in der Vergangenheit nur dann einen erfolgreichen Business-Case dar, wenn sie wesentliche Fähigkeitslücken des Menschen ergänzten. Diese Lücke kann man als *ökonomische Nische* am Markt interpretieren. Die entsprechenden Roboter sind an diese Nische hochangepasst und damit konkurrenzfähig.
Analogie zur Biologie: Spezies benötigen immer eine *ökologische Nische* zum Überleben. Sonst ist der Konkurrenzdruck durch andere Spezies zu hoch.
Bei den angegebenen Roboter-Anwendungsbeispielen stellt der Mensch eine zu große Konkurrenz für den Roboter dar.

1.5 Mechatronischer Charakter der Robotik

Allgemein gilt: Voraussetzung für ein mechatronisches System sind Produktanforderungen aus unterschiedlichen Fachbereichen. Der mechatronische Charakter zeigt sich darin, dass eine optimale Produktlösung für einzelne Fachbereiche in der Regel keine optimale Lösung darstellt. Was in einem Fachbereich optimal ist, verschlechtert die Lösung in anderen Fachbereichen. Daher wird die optimale Lösung aus Sicht der Fachbereiche („Froschperspektive“) als Kompromisslösung wahrgenommen.

Aus dem Unvermögen heraus, das Optimierungsproblem *fachübergreifend* zu verstehen, entsteht ein hohe Konfliktpotential zwischen den Fachbereichen.

Im vorliegenden Fall kommen Anforderungen aus den Fachbereichen: Antriebstechnik, Elektronik und Konstruktion.

a) Folgende technische Merkmale führen aus Sicht der Antriebstechnik zu einer optimalen Lösung (=möglichst hohe Manipulator-Geschwindigkeit):

   - Geringe Massen
   - Große Motoren
   - Geringe Getriebeuntersetzungen
   - Hohe Zwischenkreisspannung (Versorgungsspannung der Motorcontroller)
   - Große Gelenkbeschleunigungen
   - Hohe Steifigkeiten

   Nachteile dieser technischen Merkmale in den anderen Fachbereichen:

   - Antriebstechnik $\Longleftrightarrow$ Elektronik $\Longleftrightarrow$ Konstruktion:
     Hohe Zwischenkreisspannungen (ab ca. 48V) erfordern relativ schwere Spannungs-Tiefsetzsteller (DC-DC-Wandler), um Verbraucher mit sehr niedrigen Spannungen versorgen zu können.
     Spannungen deutlich über 48V erfordern in der Regel größere Steckkontakte sowie spezielle Schutzmaßnahmen für den Menschen.
     Bei einer Integration in den Armsegmenten erhöht dies die zu bewegenden Massen und schränkt Möglichkeiten zur Leichtbau-Konstruktion ein.
   - Regelungstechnik (Informatik) $\Longleftrightarrow$ Antriebstechnik:
     Große Gelenkbeschleunigungen regen die Gelenke des Manipulators zum Schwingen an: In steilen Beschleunigungsrampen sind viele Frequenzen enthalten, so dass die mechanischen Eigenfrequenzen der Gelenke und Getriebe stärker angeregt werden. Dies kann durch schwerere Armsegmente reduziert werden.
   - Regelungstechnik (Informatik) $\Longleftrightarrow$ Antriebstechnik:
     Je geringer die Getriebeübersetzungen, desto stärker wirken sich die dynamischen Verkopplungen der Gelenke untereinander aus. Dies erfordert eine Gelenkregelung mit tendenziell niedrigeren Rückführverstärkungen. Große Gelenkbeschleunigungen erfordern jedoch regelungstechnisch hohe Rückführverstärkungen.

- Konstruktion $\Longleftrightarrow$ Antriebstechnik:
  Große Motoren erhöhen die Gesamtmasse, so dass die Konstruktion weniger Masse für Aussteifungen zur Verfügung hat. Außerdem müssen die Gelenkverbinder mit größeren Wandstärken konstruiert werden, um die schweren Motoren tragen zu können.

Eine optimale Lösung für das Gesamtsystem zieht damit immer technische Kompromisse der einzelnen Fachbereiche nach sich. Zum Beispiel akzeptiert der Fachbereich Elektronik den Mehraufwand größerer DC-DC-Wandler, damit die Antriebstechnik kleinere Motoren einsetzten kann und damit die Konstruktion mehr Masse-Spielraum für Aussteifungen erhält.
Wenn die optimale Gesamtsystemlösung nur durch technische Kompromisse der Fachbereiche Mechanik (Konstruktion), Elektronik, Antriebstechnik, Regelungstechnik und Informatik erzielt werden kann, so handelt es sich um ein mechatronisches System.

b) Fachbereiche:

- Mechanische Konstruktion
- Elektronik
- Antriebstechnik
- Regelungstechnik und Sensorik
- Informatik
- Einkauf
- Fertigung
- Vertrieb

c) Typische Hauptarbeitsgebiete der Elektrotechnik bei der Entwicklung eines Manipulators:
Teilbereich Elektronik:

- Spannungsversorgungen
- Kabelbäume und Steckverbinder
- Aufstecknutzmodule (Bereitstellung elektrischer und informationstechnischer (BUS) Schnittstellen)
- Bereitstellung lokaler Rechenleistung für die Informatik (Gelenkregelung) in den einzelnen Gelenken
- Zwischenkreiselektronik (elektrische Leistung) für die Antriebssysteme
- Aufbereitung und Vorverarbeitung (zum Beispiel Filterung) von Messdaten

Teilbereich Antriebstechnik:

- Antriebssystem-Auslegungen
- Simulation mechanischer Lastfälle
- Simulation elektrischer Größen für die Antriebssysteme

Teilbereich Regelungstechnik:

- Regelungsstrukturen incl. Sensorik für Gelenke definieren
- Modellbasierte Reglerauslegung

- Simulative Validierung des Regelungsverhaltens

d) Projektmanagement mit agilem / inkrementellem Phasenmodell:
Prinzip:

- Projektablauf setzt sich aus Sequenz von Inkrementen zusammen.
- Inkremente bestehen immer aus gleichen Teilphasen, z. B. Analyse → Entwurf → Implementierung → Integration → Installation → Einsatz.
- Jedes Inkrement behandelt eine Teilmenge der Gesamtanforderungen.
- Menge an Anforderungen wächst von Inkrement zu Inkrement.

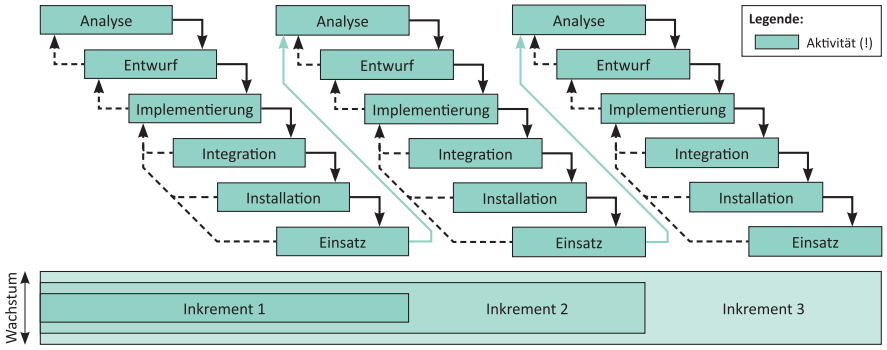


Abb. 1.1 Agiles Phasenmodell für Aufgabe 1.5 d); aus [1], Abbildung 1.11a-6, S. 363; mit freundlicher Genehmigung der GPM (Deutsche Gesellschaft für Projektmanagement).

Literaturverzeichnis

1. Gessler, M., Kaestner, R. (eds.): Kompetenzbasiertes Projektmanagement (PM3), 8 edn. GPM Deutsche Gesellschaft für Projektmanagement, Nürnberg (2016) 1.1

Lösungen zu Kapitel 2: Direkte Kinematik

2.1 Koordinatensystem-Basis

a)

$$\widetilde{R}_{01} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{t}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Basisvektoren von S_1 in S_0-Koordinaten:

$$\boldsymbol{e}^0_{x1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}^0_{y1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}^0_{z1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Trivial - Basisvektoren von S_1 in S_1-Koordinaten:

$$\boldsymbol{e}^1_{x1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}^1_{y1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}^1_{z1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$\boldsymbol{t}^1_1 = \boldsymbol{0}\,, \quad \boldsymbol{t}^0_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Skizze Koordinatensysteme: Siehe Abb. 2.1.

e) Die Punkte sind in S_1-Koordinaten angegeben.

f) Siehe Abb. 2.1; Abschätzung der S_0-Koordinaten:

$$P^0_1 \approx (1.9; 1; 0)\,, \qquad P^0_2 \approx (0.5; 1.4; 0)\,, \qquad P^0_3 \approx (1.4; 1.9; 0)$$

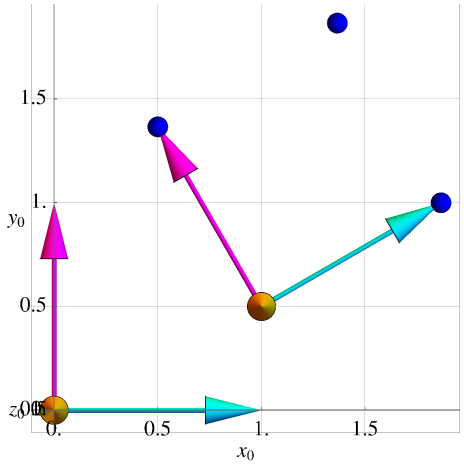


Abb. 2.1 Lösung zu Aufgabe 2.1 d)

g) Berechnung:

$$\widetilde{T}_{01} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.866 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P_1^0 = (1.866; 1; 0)\,;$$

analog berechnen sich die beiden anderen Punkte zu:

$$P_2^0 = (0.5; 1.366; 0)\,, P_3^0 = (1.366; 1.866; 0)\,.$$

2.2 Homogene Transformationsmatrix 1

a) Basisvektoren als Spaltenvektoren der Rotationsmatrix $\widetilde{R}_{01}$:

$$\boldsymbol{e}_{x1}^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_{y1}^0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_{z1}^0 = \boldsymbol{e}_{x1}^0 \times \boldsymbol{e}_{y1}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Vorfaktoren dienen dabei der Normierung auf Länge 1.

Position des Ursprungs von S_1 in S_0: $\boldsymbol{t}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Zusammengefasst folgt homogene Transformationsmatrix

$$\widetilde{T}_{01} = \left[\begin{array}{ccc:c} & \boldsymbol{e}^0_{x1} & & \boldsymbol{t}_1 \\ & \boldsymbol{e}^0_{y1} & & \\ & \boldsymbol{e}^0_{z1} & & \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] .$$

b) Mit (Buch 2.12) ergibt sich

$$\widetilde{T}_{10} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 2\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

c) Ursprung von S_0 in S_1-Koordinaten: $S_0^1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}; 2\sqrt{\frac{2}{3}}; -\sqrt{2})$

d) $\widetilde{T}_{01}\,\widetilde{T}_{10} = \widetilde{E}$ beschreibt Transformation $S_0 \to S_1 \to S_0$. Es ändert sich also nichts am Koordinatensystem, so dass als homogene Transformationsmatrix die 4×4-Einheitsmatrix folgt.

2.3 Homogene Transformationsmatrix 2

a) Skizze siehe Abb. 2.2. Die Achsen von S_1 sind zur besseren Unterscheidung von den Achsen von S_0 verkürzt und dünner dargestellt.

b) S_1-Basisvektoren in S_0-Koordinaten:

$$\boldsymbol{e}^0_{x1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}^0_{y1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}^0_{z1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zusammengefasst liefert dies Basis bzw. Rotationsmatrix

$$\widetilde{R}_{01} = \widetilde{B}^0_1 = \left[\boldsymbol{e}^0_{x1}\ \boldsymbol{e}^0_{y1}\ \boldsymbol{e}^0_{z1}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} .$$

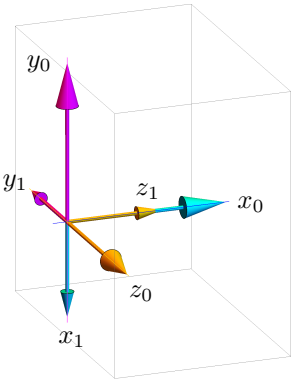


Abb. 2.2 Lösung zu Aufgabe 2.3 a)

c) Analog zur vorangegangenen Teilaufgabe ergibt sich

$$\widetilde{B}^1_0 = \widetilde{R}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

d) Die Inverse ergibt sich aus der (einfach zu ermittelnden) Transponierten:

$$\widetilde{R}_{10} = \widetilde{R}_{01}{}^{-1} = \widetilde{R}_{01}{}^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

e) Drehung von S_0 um die z_0-Achse um $-\pi/2$. Dann Drehung um die gedrehte x-Achse um $-\pi/2$.

f) Nach der *Regel für verkettete Rotationen* aus Abschnitt 2.3.3 folgt: Drei Rotationen um feste Achsen ergeben die selbe Endorientierung, wie die selben Rotationen in umgekehrter Reihenfolge um die bewegten Achsen.
Daraus ergibt sich: Drehung von S_0 um die x_0-Achse um $-\pi/2$. Dann Drehung um die (fixe) z_0-Achse um $-\pi/2$.

2.4 Elementar-Rotationen

Drehung 30° um die z_0-Achse: $\widetilde{R}_{z_0}(30^\circ)$

2.5 InvEuler323-Funktion als Nassi-Shneiderman-Struktogramm

InvEuler323

Eingangsvariablen

$r_{12}, r_{13}, r_{22}, r_{23}, r_{31}, r_{32}, r_{33}$	{Elemente der Rotationsmatrix}

interne Parameter

$\alpha^* = 0$	{Wert für den Eulerwinkel α im Falle $\beta \in \{0, \pi\}$ (Singularität der Euler-Kinematik); in rad}

interne Variablen

κ	{Hilfsvariable in rad, benötigt im Fall der Euler-Singularität.}

Ausgangsvariablen

$\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}, \gamma_{1,2}$	{Euler Winkel in rad; Fall 1: $0 \leq \beta < \pi$, Fall 2: $\pi \leq \beta < 2\,\pi$}

$|r_{33}| = 1$?

WAHR

// Euler-Singularität liegt vor

$\kappa = \text{atan2}[r_{22}, -r_{12}]$

$r_{33} = 1$?

WAHR

// Summe bestimmbar

$\alpha_1 = \alpha*$

$\beta_1 = 0$

$\gamma_1 = \kappa - \alpha_1$

$\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = \text{NaN}$

FALSCH

// Differenz bestimmbar

$\alpha_2 = \alpha*$

$\beta_2 = \pi$

$\gamma_2 = \alpha_2 - \kappa$

$\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \text{NaN}$

FALSCH

// keine Euler-Singularität

$\beta_{1,2} = \text{atan2}\left[r_{33}, \pm\sqrt{{r_{31}}^2 + {r_{32}}^2}\right]$

$\alpha_{1,2} = \text{atan2}\left[\frac{r_{13}}{s_{\beta_{1,2}}}, \frac{r_{23}}{s_{\beta_{1,2}}}\right]$

$\gamma_{1,2} = \text{atan2}\left[\frac{-r_{31}}{s_{\beta_{1,2}}}, \frac{r_{32}}{s_{\beta_{1,2}}}\right]$

$\varnothing$

Algorithmus 2.1 Algorithmus InvEuler323 für Aufgabe 2.5

Hinweis: Die Fallunterscheidungskriterien $|r_{33}| = 1$ und $r_{33} = 1$ müssen numerisch stabil implementiert werden. Auf einem PC liegt ein binäres Zahlensystem zugrunde. Verwendet man zur Zahlendarstellung das Fließkomma-Format, so können nicht alle Zahlen dargestellt werden. Besteht zwischen 0 und der nächsten darstellbaren Zahl Abstand ϵ, so ergeben sich die numerisch stabilen Kriterien zu $||r_{33}| - 1| \leq \epsilon$ und $|r_{33} - 1| \leq \epsilon$.

2.6 Euler-Winkel 1

Wegen $|r_{33}| = 1$ liegt die Euler-Singularität vor. Wegen $r_{33} = +1$ gilt $\beta = 0$ sowie $\alpha + \gamma = \pi/6$.

2.7 Euler-Winkel 2

$\alpha = 0, \beta = \pi/2, \gamma = -\pi/2$

2.8 Euler-Winkel 3

$\alpha = 0, \beta = 135°, \gamma = 144.7°$

2.9 Rotationsreihenfolge

Die Matrixprodukte für die Gesamt-Rotationsmatrizen sind:

a) $\widetilde{R}_y(\Psi)\,\widetilde{R}_x(\Phi)\,\widetilde{R}_z(\theta)$
b) $\widetilde{R}_z(\theta)\,\widetilde{R}_x(\Phi)\,\widetilde{R}_x(\Psi)$
c) $\widetilde{R}_z(\alpha)\,\widetilde{R}_y(\Psi)\,\widetilde{R}_x(\Phi)\,\widetilde{R}_z(\theta)$
d) $\widetilde{R}_z(\alpha)\,\widetilde{R}_z(\theta)\,\widetilde{R}_x(\Phi)\,\widetilde{R}_x(\Psi)$

2.10 Transformationsgraph 1

a) Transformationsgraph: Siehe Abb. 2.3.

b) $\widetilde{T}_{01} = \widetilde{T}_{02}\,\widetilde{T}_{21} = \widetilde{T}_{20}{}^{-1}\,\widetilde{T}_{12}{}^{-1} = \left(\widetilde{T}_{12}\,\widetilde{T}_{20}\right)^{-1}$

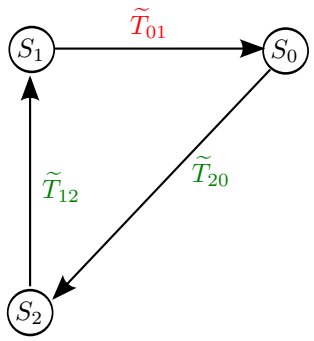


Abb. 2.3 Lösung zu Aufgabe 2.10 a)

2.11 Transformationsgraph 2

a)

$$\widetilde{T}_{01} = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]; \qquad \widetilde{T}_{02} = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

b) Transformationsgraph: Siehe vorangegangene Aufgabe.

$$\widetilde{T}_{12} = \widetilde{T}_{10}\,\widetilde{T}_{02} = \widetilde{T}_{01}{}^{-1}\,\widetilde{T}_{02}$$

c) Mit Inverser nach (Buch 2.12) gemäß

$$T_{01}{}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

folgt

$$\widetilde{T}_{12} = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Erneutes Anwenden von (Buch 2.12) liefert

$$\widetilde{T}_{21} = \widetilde{T}_{12}{}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

d)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1^1 \\ 1 \end{pmatrix} = \widetilde{T}_{10} \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1^0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies P_1^1 = (0;0;-1)$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \widetilde{T}_{02}{}^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1^0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies P_1^2 = (0;1;0)$$

Dabei wurde die Inverse verwendet:

$$\widetilde{T}_{02}{}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Plausibilitätstest durch Ablesen der Koordinaten von Punkt P_1 aus Buch-Abb. 2.36.

e)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_2^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \widetilde{T}_{21} \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_2^1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies P_2^1 = (1/2; 0; 0)$$

Plausibilitätstest durch Ablesen der S_1-Koordinaten von Punkt P_2 aus Buch-Abb. 2.36.

2.12 Transformationsgraph 3

a) Transformationsgraph: Siehe Abb. 2.4,

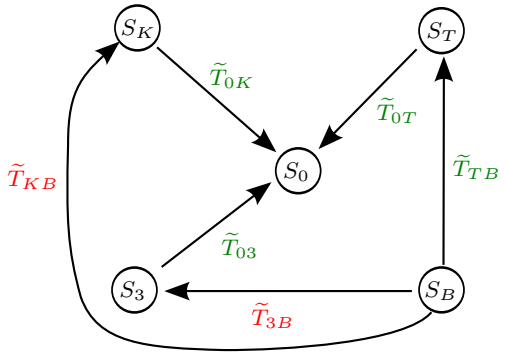


Abb. 2.4 Lösung zu Aufgabe 2.12 a). Gegebene Transformationen sind dunkelgrün, gesuchte Transformationen rot gekennzeichnet.

Durch Ablesen der Basisvektoren in S_0-Koordinaten und mit den gegebenen Ursprungs-Positionen ergeben sich homogene Transformationsmatrizen

$$\widetilde{T}_{03} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.36 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \; ; \quad \widetilde{T}_{TB} = \left[\begin{array}{c:c} \widetilde{E} & \begin{pmatrix} 0.15 \\ 0.15 \\ 0.32 \end{pmatrix} \\ \hdashline \mathbf{0}^T & 1 \end{array}\right]$$

$$\widetilde{T}_{0K} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0.625 \\ 0 & -1 & 0 & 0.225 \\ 0 & 0 & -1 & 0.6 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \; ; \quad T_{0T} = \left[\begin{array}{c:c} \widetilde{E} & \begin{pmatrix} 0.4 \\ -0.15 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hdashline \mathbf{0}^T & 1 \end{array}\right] .$$

Die Inversen von $\widetilde{T}_{03}$ und $\widetilde{T}_{0K}$ berechnen sich zu

$$T_{03}{}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -0.36 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \; ; \quad T_{0K}{}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -0.625 \\ 0 & -1 & 0 & 0.225 \\ 0 & 0 & -1 & 0.6 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Mit obigem Transformationsgraphen und den homogenen Transformationsmatrizen folgen schließlich die gesuchten Transformationen zu

$$\widetilde{T}_{3B} = \widetilde{T}_{30}\,\widetilde{T}_{0B} = \widetilde{T}_{03}{}^{-1}\,\widetilde{T}_{0T}\,\widetilde{T}_{TB} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0 & 1 & -0.04 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\widetilde{T}_{KB} = \widetilde{T}_{K0}\,\widetilde{T}_{0B} = \widetilde{T}_{0K}{}^{-1}\,\widetilde{T}_{0T}\,\widetilde{T}_{TB} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -0.075 \\ 0 & -1 & 0 & 0.225 \\ 0 & 0 & -1 & 0.28 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] .$$

b) Position des Ursprungs von S_B in Endeffektorkoordinaten (S_3-Koordinaten) ergibt sich aus der letzten Spalte von $\widetilde{T}_{3B}$ zu:

$$\boldsymbol{t}^3_{3\,B} = \begin{pmatrix} 0.05 \\ -0.04 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die x_3-Achse steht senkrecht auf der Seitenfläche der Bearbeitungszelle. Daher folgt der gesuchte Abstand durch die x_3-Koordinate der Position von $\widetilde{S}_B$ in S_3-Koordinaten zu

$$\text{Abstand} = 0.05\,.$$

c) Aus dem Transformationsgraphen und mit obigen Matrizen ergibt sich

$$\widetilde{T}_{K3} = \widetilde{T}_{0K}{}^{-1}\,\widetilde{T}_{03} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0.125 \\ 0 & 0 & 1 & 0.225 \\ 0 & -1 & 0 & 0.24 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Die letzte Spalte ist der gesuchte Abstandsvektor

$$\boldsymbol{t}_{K\,3}^{K} = \begin{pmatrix} -0.125 \\ 0.225 \\ 0.24 \end{pmatrix}.$$

2.13 Artikulierter planarer 3-DoF Ellenbogen-Manipulator

a) Für die gegebenen Werte folgt

$$\widetilde{T}_{0\,\mathrm{EE}}(\theta_1 = 0, \theta_2 = -60°, \theta_3 = 105°) = \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & b + \frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & h + \frac{l_1\sqrt{3}}{2} - \frac{l_2}{\sqrt{2}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{(h = b = 0.1, l_1 = 0.3, l_2 = 0.25)}{=} \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0.426777 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0.183031 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Die gesuchte Orientierung wird durch die darin enthaltene Rotationsmatrix spezifiziert. Diese besteht aus der NW-(3×3)-Untermatrix.
Die gesuchte Position ergibt sich aus der letzten Spalte von $\widetilde{T}_{0\,\mathrm{EE}}$, wenn man das 4. Element (die 1) weglässt.

b) Plausibilitätscheck:
Von den in der Rotationsmatrix aus Teilaufgabe a) enthaltenden Basisvektoren liest man für Projektion $y_0 = 0$ ab:

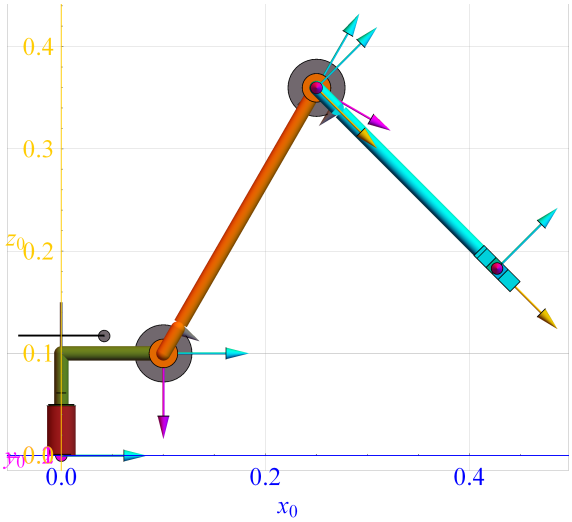


Abb. 2.5 Skizze zur Lösung von Aufgabe 2.13 b).

$$\boldsymbol{e}^0_{\mathrm{EE}x}\big|_{y_0=0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{e}^0_{\mathrm{EE}z}\big|_{y_0=0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Dies entspricht der Orientierung des Endeffektorkoordinatensystems in Weltkoordinaten aus Abb. 2.5.

Ursprungsposition Endeffektorkoordinatensystem in Weltkoordinaten: Aus Abb. 2.5 liest man Schätzwerte ab: $\begin{pmatrix}0.42 & 0 & 0.18\end{pmatrix}^T$.

c) Die gesuchten Euler-Winkel folgen aus Algorithmus 2.1 mit Rotationsmatrix aus $\widetilde{T}_{0\,\mathrm{EE}}$ ($\rightarrow$ Teilaufgabe b)) zu

$$\alpha = 0^\circ\,, \qquad \beta = 135^\circ\,, \qquad \gamma = 180^\circ\,.$$

2.14 Artikulierter 2-DoF Ellenbogen-Manipulator mit Achsversatz

a) Koordinatensysteme nach DH siehe Abb. 2.6.

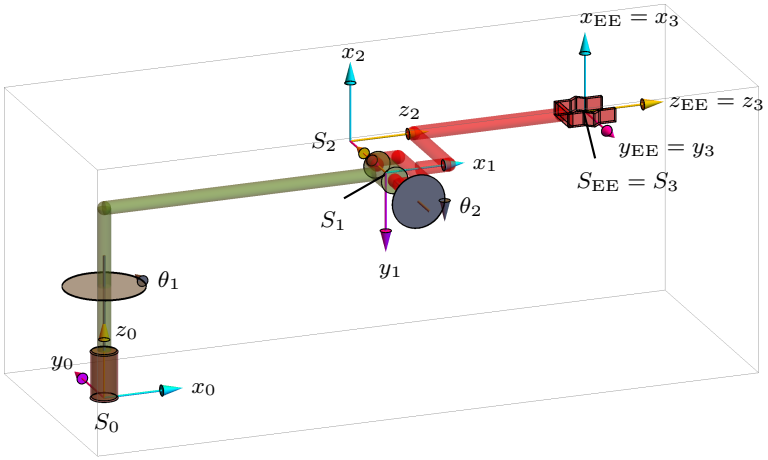


Abb. 2.6 Lösung zu Aufgabe 2.14 a)

Es treten $n + 1 = 3$ Koordinatentransformationen auf, da zur Anbindung des Endeffektorsystems eine weitere Transformation erforderlich ist.

Bei Koordinatensystem S_2 fällt auf, dass es außerhalb der Manipulator-Konturen zu liegen kommt.

Hinweis: Ursprungspositionen außerhalb von Manipulator-Konturen treten oft bei Manipulatoren mit Achsversatz / Kröpfung auf. Für die Festlegung der Koordinatensysteme nach DH spielt die Kontur der Arme und Gelenke überhaupt keine Rolle. Entscheidend sind Position und Orientierung der Drehachsen und des Endeffektorkoordinatensystems.

b) DH-Parameter: siehe Tabelle 2.1.

Tabelle 2.1 DH-Parameter für den Manipulator aus Abb. 2.6.

i	φ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	h	l_1	$-\pi/2$
2	$\theta_2 - \pi/2$	b	0	$-\pi/2$
3	0	l_2	0	0

Hinweis: Die Anbindung des Endeffektors kann in diesem Spezialfall durch eine Koordinatentransformation erfolgen, die ebenfalls dem DH-Standard entspricht.

c)

$$\widetilde{T}_{01}(\theta_1) = \left[\begin{array}{ccc:c} c_1 & 0 & -s_1 & c_1 l_1 \\ s_1 & 0 & c_1 & l_1 s_1 \\ 0 & -1 & 0 & h \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \widetilde{T}_{12}(\theta_2) = \left[\begin{array}{ccc:c} s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ -c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & b \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$\widetilde{T}_{2\,\mathrm{EE}} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \mathrm{const}$$

Hinweis zu $\widetilde{T}_{12}$: Obige Lösung ergibt sich mit den trigonometrischen Vereinfachungen $\cos(\theta_2 - \pi/2) = \sin(\theta_2)$ und $\sin(\theta_2 - \pi/2) = -\cos(\theta_2)$.
Ausführen der Matrizenmultiplikationen ergibt:

$$\widetilde{T}_{02}(\boldsymbol{\theta}) = \widetilde{T}_{01}(\theta_1)\,\widetilde{T}_{12}(\theta_2) = \left[\begin{array}{ccc:c} c_1\,s_2 & s_1 & c_1\,c_2 & c_1\,l_1 - b\,s_1 \\ s_1\,s_2 & -c_1 & c_2\,s_1 & c_1\,b + l_1\,s_1 \\ c_2 & 0 & -s_2 & h \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\widetilde{T}_{0\,\mathrm{EE}}(\boldsymbol{\theta}) = \widetilde{T}_{02}(\boldsymbol{\theta})\,\widetilde{T}_{2\,\mathrm{EE}} = \left[\begin{array}{ccc:c} c_1\,s_2 & s_1 & c_1\,c_2 & c_1\,c_2\,l_2 + c_1\,l_1 - b\,s_1 \\ s_1\,s_2 & -c_1 & c_2\,s_1 & c_1\,b + s_1\,c_2\,l_2 + l_1\,s_1 \\ c_2 & 0 & -s_2 & h - l_2\,s_2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

d) Die gesuchte Position und Orientierung des Endeffektors folgt aus der Rotationsmatrix und dem Translationsvektor von:

$$T_{0\,\mathrm{EE}}(\theta_1 = 45\,^\circ, \theta_2 = -60\,^\circ) = \left[\begin{array}{ccc:c} -0.612372 & 0.707107 & 0.353553 & 0.22981 \\ -0.612372 & -0.707107 & 0.353553 & 0.371231 \\ 0.5 & 0 & 0.866025 & 0.416506 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

e) Nach Algorithmus 2.1 folgt: $\alpha = 45°$; $\beta = 30°$; $\gamma = 180°$

2.15 Basis-Kinematik 3

Die DH-Parameter sind in Tabelle 2.2 zusammengefasst.

i	φ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	l_1	0	$-\pi/2$
2	θ_2	0	0	$\pi/2$
3	θ_3	l_2	0	0

Tabelle 2.2 DH-Parameter für den Manipulator aus Buch-Abb. 3.9.

2.16 Kartesischer 2-DoF Manipulator

Das fehlende DH-Koordinatensystem S_1 zeigt Buch-Abb. 4.8, die DH-Parameter sind in Tabelle 2.3 aufgelistet.

i	φ_i	d_i	a_i	α_i
1	$\pi/2$	σ_1	0	$\pi/2$
2	0	σ_2	0	0

Tabelle 2.3 DH-Parameter für den Manipulator aus Buch-Abb. 4.8.

2.17 Kinematik eines Manipulators mit Gelenkreihenfolge Translation-Rotation

a) Die beiden fehlenden DH-Koordinatensysteme S_1 und S_2 zeigt Abb. 2.7, die DH-Parameter sind in Tabelle 2.4 aufgelistet. Die Anbindung des Endeffektorkoordinatensystems erfolgt in diesem Fall durch

i	φ_i	d_i	a_i	α_i
1	0	σ_1	0	$\pi/2$
2	θ_2	0	0	$-\pi/2$

Tabelle 2.4 DH-Parameter für den Manipulator aus Abb. 2.7.

$$\widetilde{T}_{2\,\mathrm{EE}} = \mathrm{Trans}_z(l)\,.$$

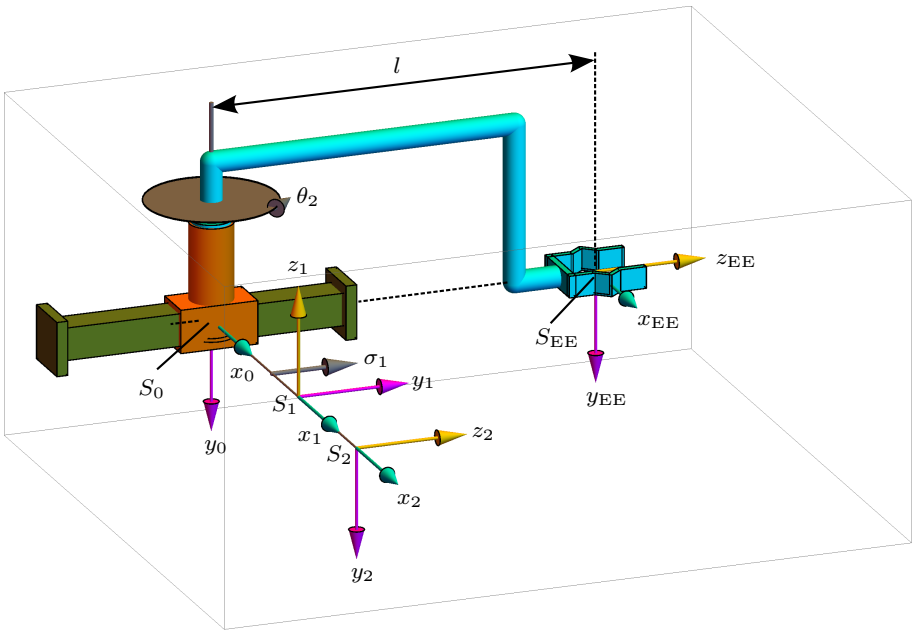


Abb. 2.7 Lösung zu Aufgabe 2.17.

b Für die Transformationen angrenzender Gelenke folgt

$$\widetilde{T}_{01}(\sigma_1) = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sigma_1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \widetilde{T}_{12}(\theta_2) = \left[\begin{array}{ccc:c} c_2 & 0 & -s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Damit ergibt sich

$$\widetilde{T}_{02}(\sigma_1,\theta_2) = \widetilde{T}_{01}\,\widetilde{T}_{12} = \left[\begin{array}{ccc:c} c_2 & 0 & -s_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 & \sigma_1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\widetilde{T}_{0\,\mathrm{EE}}(\sigma_1,\theta_2) = \widetilde{T}_{02}\,\widetilde{T}_{2\,\mathrm{EE}} = \left[\begin{array}{ccc:c} c_2 & 0 & -s_2 & -l\,s_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 & l\,c_2+\sigma_1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2.18 Anthropomorpher 6-DoF-Manipulator

Die DH-Parameter sind in Tabelle 2.5 zusammengefasst.

Tabelle 2.5 DH-Parameter für den anthropomorphen 6-DoF Manipulator aus Buch-Abb. 3.11.

i	φ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	h	b	$-\pi/2$
2	θ_2	0	l_1	0
3	$\theta_3 - \pi/2$	0	0	$-\pi/2$
4	θ_4	l_2	0	$-\pi/2$
5	θ_5	0	0	$\pi/2$
6	θ_6	l_3	0	0

Lösungen zu Kapitel 3: Inverse Kinematik

3.1 Planarer 2-DoF Ellenbogen-Manipulator

a) Nassi-Shneiderman-Struktogramm für inverse Basiskinematik 2:

InvKinEllenbogen

Eingangsvariablen

x, y {Weltkoordinaten vom Ursprung des EE in m}

lokale konstante Parameter

l_1, l_2 {Armlängen in m}

lokale Variablen

φ, α, β {Hilfswinkel in rad}

L, p, r {Hilfslängen in m}

Ausgangsvariablen

$\theta_{1,o}, \theta_{2,o}, \theta_{1,u}, \theta_{2,u}$ {Gelenkwinkel in rad; Konfiguration o/u: „Ellenbogen oben“ / „unten“ }

$L = \sqrt{x^2 + y^2}$

//Arbeitsraumbeschränkungen prüfen

$|l_1 - l_2| \overset{?}{\leq} L \overset{?}{\leq} l_1 + l_2$

WAHR | FALSCH

$x = y = 0$?

FALSCH | WAHR

// es existieren zwei Lösungen	*// Gelenkwinkel θ_1 unbestimmt*	*// es existiert keine Lösung; Arbeitsraumbeschränkungen aktiv*
$p = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 + L)$	$\theta_{1,o} = \theta_{1,u} = \mathrm{NaN}$	$\theta_{1,o} = \theta_{2,o} = \theta_{1,u} = \theta_{2,u} = \mathrm{NaN}$
$r = \sqrt{\frac{(p-l_1)(p-l_2)(p-L)}{p}}$	$\theta_{2,o} = -\pi$ $\theta_{2,u} = \pi$	
$\alpha = 2\arctan\frac{r}{p-l_1}$ $\beta = 2\arctan\frac{r}{p-l_2}$	∅	∅
$\varphi = \mathrm{atan2}(x, y)$		
$\theta_{1,o} = \varphi + \beta\,,\ \theta_{2,o} = -(\alpha + \beta)$ $\theta_{1,u} = \varphi - \beta\,,\ \theta_{2,u} = \alpha + \beta$		

Algorithmus 3.2 InvKinEllenbogen

Hinweise:

- Hilfswinkel α in Algorithmus 3.2 ist nicht zu verwechseln mit dem ZYZ Euler-Winkel α.
- Für negative Werte von x vertauschen sich die Konfigurationen „oben“ und „unten“; das heißt die oben-Winkel aus Algorithmus 3.2 liefern eine Konfiguration, bei der der Ellenbogen unterhalb des Endeffektors liegt und vice versa.

Realisierung des Algorithmus als `MATLAB-function`[1]:

```
function [theta_1_o,theta_2_o,theta_1_u,theta_2_u ] = ...
    InvKinEllenbogen( x,y, l1,l2)
% Hinweis zur Aufgabenstellung: für negative x-Werte
% vertauschen sich die Konfigurationen "oben" und "unten"

L = sqrt(x^2+y^2);
if abs(l1-l2) <= L <= l1 + l2 % Arbeitsraumbeschränkung pruefen
    if abs(x)<=eps(0) && abs(y)<=eps(0)
        % x = y = 0: Gelenkwinkel theta1 unbestimmt
        theta_1_o = NaN;
        theta_1_u = NaN;
        theta_2_o = -pi;
        theta_2_u = pi;
    else
        % es exitieren zwei Lösungen
        p = 1/2*(l1+l2+L);
        r = sqrt((p-l1)*(p-l2)*(p-L)/p);
        alpha = 2*atan(r/(p-l1));
        beta = 2*atan(r/(p-l2));
        phi = atan2(y,x); % Vorsicht: Argumentenreihenfolge
        theta_1_o = phi + beta;
        theta_1_u = phi - beta;
        theta_2_o = -(alpha+beta);
        theta_2_u = alpha+beta;
    end %if abs(x)<=eps && abs(y)<=eps
else
    % es existiert keine Lösung, da
    % Arbeitsraumbeschränkung aktiv
    theta_1_o = NaN;
    theta_2_o = NaN;
    theta_1_u = NaN;
    theta_2_u = NaN;
end %if abs(l1-l2) <= L <= l1 + l2

if x < 0 % für negative x-Werte: Vertausche "oben" und "unten"
    zw = theta_1_o;
    theta_1_o = theta_1_u;
    theta_1_u = zw;

    zw = theta_2_o;
```

[1] Version R2016a

```
    theta_2_o = theta_2_u;
    theta_2_u = zw;
end %if
end % function
```

Realisierung eines Testprogramms mittels `MATLAB-script`:

```
%% MATLAB-Script zum Test der Funktion InvKinEllenbogen
clear all   % lösche alle Variablen  im Workspace
clc         % lösche Bildschirm

% Parameter
l1 = 1;     % Armlänge 1
l2 = 1;     % Armlänge 2
rad2grad = 180/pi;  % Umrechnungsfaktor von rad nach °

% Arm schließt mit x-Achse ein gleichseitiges Dreieck ein
x = 1;
y = 0;
[theta_1_o,theta_2_o,theta_1_u,theta_2_u ] = ...
    InvKinEllenbogen( x,y, l1,l2);
fprintf('(x,y)=(%g,%g):\n',x,y);
fprintf('oben: (theta1, theta2) = (%3.3f°,%3.3f°)\n',...
    theta_1_o*rad2grad,theta_2_o*rad2grad)
fprintf('unten: (theta1, theta2) = (%3.3f°,%3.3f°)\n',...
    theta_1_u*rad2grad,theta_2_u*rad2grad)

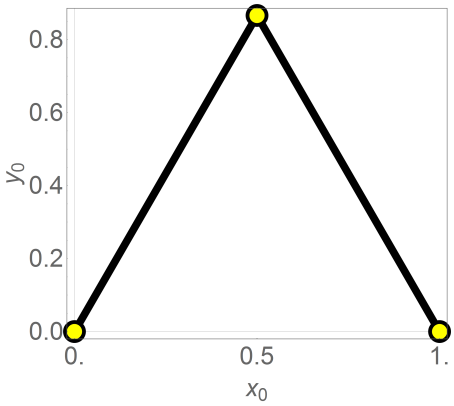
% unterer Arm ist 45° Halbierende des I. Quadranten;
% oberer Arm ist horizontal (parallel zur y-Achse)
x = 1/sqrt(2)+1;
y = 1/sqrt(2);
[theta_1_o,theta_2_o,theta_1_u,theta_2_u ] = ...
    InvKinEllenbogen( x,y, l1,l2);
fprintf('(x,y)=(%g,%g):\n',x,y);
fprintf('oben: (theta1, theta2) = (%3.3f°,%3.3f°)\n',...
    theta_1_o*rad2grad,theta_2_o*rad2grad)
fprintf('unten: (theta1, theta2) = (%3.3f°,%3.3f°)\n',...
    theta_1_u*rad2grad,theta_2_u*rad2grad)

% ausgestreckter Fall, 45°, halbierende des I. Quadranten
x = sqrt(2);
y = sqrt(2);
[theta_1_o,theta_2_o,theta_1_u,theta_2_u ] = ...
    InvKinEllenbogen( x,y, l1,l2);
fprintf('(x,y)=(%g,%g):\n',x,y);
fprintf('oben: (theta1, theta2) = (%3.3f°,%3.3f°)\n',...
    theta_1_o*rad2grad,theta_2_o*rad2grad)
fprintf('unten: (theta1, theta2) = (%3.3f°,%3.3f°)\n',...
    theta_1_u*rad2grad,theta_2_u*rad2grad)
```

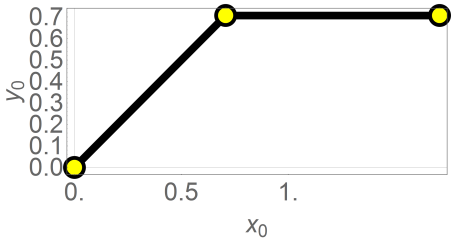
Bildschirmausgabe des obigen Testprogramms:

```
(x,y)=(1,0):
oben: (theta1, theta2) = (60.000°,-120.000°)
unten: (theta1, theta2) = (-60.000°,120.000°)
(x,y)=(1.70711,0.707107):
oben: (theta1, theta2) = (45.000°,-45.000°)
unten: (theta1, theta2) = (-0.000°,45.000°)
(x,y)=(1.41421,1.41421):
oben: (theta1, theta2) = (45.000°,-0.000°)
unten: (theta1, theta2) = (45.000°,0.000°)
>>
```

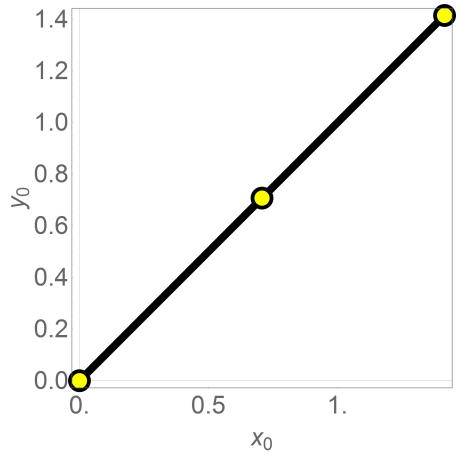
2. $\theta_{1,o} = 60\,^\circ$, $\theta_{2,o} = -120\,^\circ$, $\theta_{1,u} = -60\,^\circ$, $\theta_{2,u} = 120\,^\circ$
   Euler-Winkel (unter der Bedingung $\gamma = 0$): $\alpha_o = -60\,^\circ$, $\alpha_u = 60\,^\circ$
   Konfiguration „oben“:



3. $\theta_{1,o} = 45\,^\circ$, $\theta_{2,o} = -45\,^\circ$, $\theta_{1,u} = 0\,^\circ$, $\theta_{2,u} = 45\,^\circ$
   Euler-Winkel (unter der Bedingung $\gamma = 0$): $\alpha_o = 0\,^\circ$, $\alpha_u = 45\,^\circ$,
   Konfiguration „oben“:



4. $\theta_{1,o} = 45\,^\circ$, $\theta_{2,o} = 0\,^\circ$, $\theta_{1,u} = 45\,^\circ$, $\theta_{2,u} = 0\,^\circ$
   Euler-Winkel (unter der Bedingung $\gamma = 0$): $\alpha_o = 45\,^\circ$, $\alpha_u = 45\,^\circ$,
   Konfiguration „oben“:



3.2 Kartesischer 2-DoF Manipulator

Da nur kartesische Gelenke vorhanden sind, bestehen die Gelenkvariablen aus den beiden Vorschüben σ_1 und σ_2. Diese sind so angeordnet, dass sich der einfache Zusammenhang ablesen lässt:

$$\sigma_1 = z^0_{\mathrm{EE}}$$
$$\sigma_2 = x^0_{\mathrm{EE}}\,.$$

Dies stellt gleichzeitig die inverse Kinematik dar.

3.3 Planarer 3-DoF Ellenbogen-Manipulator

a) Konfigurationen:

- Ellenbogen „oben“: $-\pi \leq \theta_2 \leq 0$
- Ellenbogen „unten“: $0 \leq \theta_2 \leq \pi$

b) Die Handwurzelposition berechnet sich in Weltkoordinaten zu

$$\boldsymbol{t}_2 = \begin{pmatrix} t_{2,x} \\ t_{2,y} \\ t_{2,z} \end{pmatrix} = \boldsymbol{t}_3 - l_3\,\boldsymbol{r}_1\,.$$

Damit ergeben sich die beiden ersten Gelenkwinkel für Konfiguration „oben“ zu

$$\begin{pmatrix}\theta_{1,o}\\ \theta_{2,o}\end{pmatrix} = \mathrm{InvKinEllenbogen}(t_{2,x}, t_{2,y})\,.$$

Mit diesen Winkeln kann $\widetilde{R}_{02}(\theta_{1,o}, \theta_{2,o})$ berechnet werden und zusammen mit dem gegebenen $\widetilde{R}_{03}$ folgt für die Rotation von S_2 nach S_3 Rotationsmatrix (in Werten, nicht mehr von einem Winkel abhängig):

$$\widetilde{R}_{23,o} = \widetilde{R}_{20}(\theta_{1,o}, \theta_{2,o})\,\widetilde{R}_{03} = \widetilde{R}_{02}(\theta_{1,o}, \theta_{2,o})^T\,\widetilde{R}_{03}\,.$$

Aus einem Vergleich mit Elementar-Rotation

$$\widetilde{R}_z(\theta_3) = \begin{bmatrix}\cos\theta_3 & -\sin\theta_3 & 0\\ \sin\theta_3 & \cos\theta_3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ergibt sich schließlich mit r_{11} als 1-1-Element und r_{21} als 2-1-Element von $\widetilde{R}_{23}$ für den dritten Winkel

$$\theta_{3,o} = \mathrm{atan2}(\underbrace{r_{11}}_{\text{x-Anteil}}, \underbrace{r_{21}}_{\text{y-Anteil}})\,.$$

c) Mit Handwurzelposition

$$\boldsymbol{t}_2 = \begin{pmatrix}0.58956\\ 0.21082\\ 0\end{pmatrix} - 0.15\begin{pmatrix}0.906308\\ 0.422618\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.453613\\ 0.147427\\ 0\end{pmatrix}$$

folgen die Winkel

$$\begin{pmatrix}\theta_{1,o}\\ \theta_{2,o}\end{pmatrix} = \mathrm{InvKinEllenbogen}(0.453613, 0.147427) = \begin{pmatrix}45\,^\circ\\ -60\,^\circ\end{pmatrix}\,.$$

Zwischenergebnisse zur Validierung beim Algorithmus InvKinEllenbogen(0.453613,0.147427):

$$\begin{aligned} L &= 0.47697 & \alpha &= 0.576037\,\mathrm{rad}\\ p &= 0.513485 & \beta &= 0.471161\,\mathrm{rad}\\ r &= 0.0632462 & \varphi &= 0.314238\,\mathrm{rad}\end{aligned}$$

Nun wird der dritte Gelenkwinkel berechnet: Mit den DH-Parametern aus Tabelle 2.2 folgen Rotationsmatrizen:

$$\widetilde{R}_{01} = \begin{bmatrix}c_1 & -s_1 & 0\\ s_1 & c_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \widetilde{R}_{12} = \begin{bmatrix}c_2 & -s_2 & 0\\ s_2 & c_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \widetilde{R}_{02} = \widetilde{R}_{01}\,\widetilde{R}_{12} = \begin{bmatrix}c_{12} & -s_{12} & 0\\ s_{12} & c_{12} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\,.$$

Mit den Werten der ersten beiden Gelenkwinkel ergibt dies

$$\widetilde{R}_{02,o}(\theta_{1,o}, \theta_{2,o}) = \begin{bmatrix} 0.965926 & 0.258819 & 0 \\ -0.258819 & 0.965926 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und weiter

$$\widetilde{R}_{23,o} = \widetilde{R}_{20,o}\,\widetilde{R}_{03} = \widetilde{R}_{02,o}{}^{T}\,\widetilde{R}_{03} = \begin{bmatrix} 0.766044 & -0.642788 & 0 \\ 0.642788 & 0.766044 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Aus einem Vergleich mit

$$\widetilde{R}_{23} = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

folgt schließlich

$$\theta_{3,o} = \operatorname{atan2}(0.766044, 0.642788) \overset{(x \geq 0)}{=} \arctan\frac{0.642788}{0.766044} = 40\,^{\circ} .$$

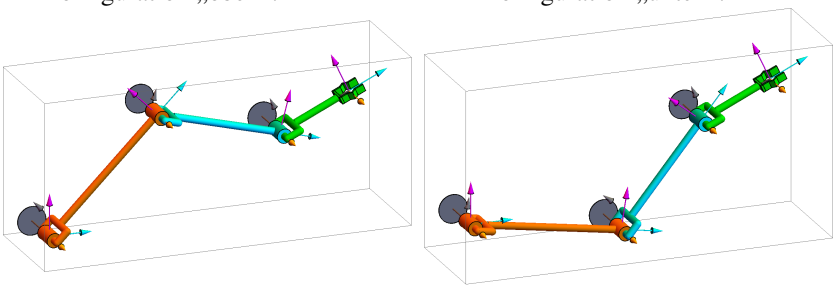
Analog findet man die Winkelwerte für Konfiguration „unten“:

$$\theta_{1,u} = -8.991\,^{\circ}\,,\ \theta_{2,u} = 60\,^{\circ}\,,\ \theta_{3,u} = -26.009\,^{\circ}$$

Hinweis: Bereits kleinere Rundungsfehler in den Zwischenschritten der Berechnungen können zu Abweichungen von mehreren Grad bei den Winkelwerten führen.

Für die beiden Konfigurationen ergeben sich folgende Manipulator-Stellungen:

Konfiguration „oben“: Konfiguration „unten“:



3.4 Existenz und Bedeutung geschlossener Lösungen

a) Hinreichendes Existenzkriterium für Berechenbarkeit einer geschlossenen Lösung eines 6-DoF Manipulators nach Pieper: Mindestens drei hintereinanderliegende Achsen schneiden sich in einem Punkt oder sind parallel (Interpretation: Schnitt im Unendlichen).

b) Für jeden 3-DoF Manipulator existiert eine geschlossene Lösung der inversen Kinematik. Begründung: Der 3-DoF Manipulator kann immer durch ein Kugelgelenk zu einem 6-DoF Manipulator erweitert werden, für den es dann nach Pieper eine geschlossene Lösung gibt. Dann muss es auch eine Lösung für den 3-DoF Manipulator geben.

c) Vorteile:
   - Geringerer numerischer Rechenaufwand.
   - Keine Probleme mit Anfangswerten.
   - Klare Zuordnung der berechneten Winkel zur Konfiguration.
   - Kenntnis der Lage aller Singularitäten, so dass diese durch entsprechende Pfadplanung vermieden werden können.

d) Die verfügbare Rechenleistung reicht nicht aus. Mögliche Abhilfe: Ersatz der rechenzeit-intensiven trigonometrischen Funktionen durch Lookup-Tabellen.

e) Die inverse Kinematik wird auch als „Herzstück der Manipulator-Steuerung“ bezeichnet. Durch sie ist es möglich, komplexen Pfaden im Arbeitsraum zu folgen. Dies ist insbesondere bei Manipulatoren mit vielen Freiheitsgraden und komplizierten Kinematiken wichtig.

f) Der Manipulator wird im Teach-Modus (durch eine sogenannte Nullmomentenregelung werden Trägheiten und Gewichtskräfte des Manipulators kompensiert, so dass auch sehr große Manipulatoren leicht von Hand bewegt werden können) von Hand zu den Via-Punkten des Pfads gebracht. Dort werden die Gelenkpositionen für diesen Punkt abgespeichert. Mit vielen solchen „gelernten“ und abgespeicherten Via-Punkten kann ein ausreichend glatter Verlauf entlang des Pfads realisiert werden, in dem die Punkte nacheinander angefahren werden.

Lösungen zu Kapitel 4: Differenzielle Kinematik

4.1 Endeffektorgeschwindigkeiten für Basiskinematik 3

a) Nach Berechnungsschema (Buch 4.9) für die Elemente der Jacobi-Matrix benötigt man die Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_{z0}^0, \boldsymbol{e}_{z1}^0, \boldsymbol{e}_{z2}^0$ der Drehachsen sowie die Abstandsvektoren $\boldsymbol{r}_{03}^0, \boldsymbol{r}_{13}^0, \boldsymbol{r}_{23}^0$. Dies erhält man aus der direkten Kinematik. Die DH-Parameter sind aus Aufgabe 2.15 bekannt. Damit ergeben sich die ersten beiden homogenen Transformationsmatrizen zu

$$\widetilde{T}_{01} = \left[\begin{array}{cccc} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & l_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \widetilde{T}_{12} = \left[\begin{array}{cccc} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

und es folgt

$$\widetilde{T}_{02} = \widetilde{T}_{01}\,\widetilde{T}_{12} = \left[\begin{array}{cccc} c_1\,c_2 & -s_1 & c_1\,s_2 & 0 \\ c_2\,s_1 & c_1 & s_1\,s_2 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 & l_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Translationsvektor $\boldsymbol{t}_3$ ergibt sich aus $\widetilde{T}_{02} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (von S_2 zu S_3 muss lediglich in Richtung der z_2-Achse um l_2 verschoben werden) zu

$$\boldsymbol{t}_3 = \boldsymbol{r}_{03} = \begin{pmatrix} l_2\,c_1\,s_2 \\ l_2\,s_1\,s_2 \\ l_1 + l_2\,c_2 \end{pmatrix}.$$

Alternativ könnte $\boldsymbol{t}_3$ auch aus $\widetilde{T}_{03} = \widetilde{T}_{02}\,\widetilde{T}_{23}$ ermittelt werden. Dies würde jedoch die aufwendige und unnötige Berechnung von $\widetilde{R}_{03}$ einschließen.

Mit den restlichen Abstandsvektoren

$$\boldsymbol{r}_{13} = \boldsymbol{t}_3 - \boldsymbol{t}_1 = \begin{pmatrix} l_2\, c_1\, s_2 \\ l_2\, s_1\, s_2 \\ l_2\, c_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}_{23} = \boldsymbol{r}_{13}$$

folgt schließlich die gesuchte Jacobi-Matrix zu

$$\widetilde{J} = \begin{bmatrix} -l_2\, s_1\, s_2 & l_2\, c_1\, c_2 & 0 \\ l_2\, c_1\, s_2 & l_2\, c_2\, s_1 & 0 \\ 0 & -l_2\, s_2 & 0 \\ 0 & -s_1 & c_1\, s_2 \\ 0 & c_1 & s_1\, s_2 \\ 1 & 0 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Daraus ergibt sich

$$\boldsymbol{v}_3^0 = \underbrace{\begin{bmatrix} -l_2\, s_1\, s_2 & l_2\, c_1\, c_2 & 0 \\ l_2\, c_1\, s_2 & l_2\, c_2\, s_1 & 0 \\ 0 & -l_2\, s_2 & 0 \end{bmatrix}}_{\widetilde{J}_v} \dot{\boldsymbol{\theta}}\,, \quad \boldsymbol{\omega}_3^0 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -s_1 & c_1\, s_2 \\ 0 & c_1 & s_1\, s_2 \\ 1 & 0 & c_2 \end{bmatrix}}_{\widetilde{J}_\omega} \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

b) $l_2 = 0$

c) Es liegen $M = 3$ Endeffektorfreiheitsgrade und $N = 3$ Gelenkvariablen vor. Die Determinante von $\widetilde{J}_v$ verschwindet, da die letzte Spalte ein $\mathbf{0}$-Vektor ist. Damit ist hinreichende Bedingung 4.18 für Unterbestimmtheit erfüllt.

d) Nicht möglich, da der Manipulator unterbestimmt ist.
Es können zum Beispiel nur zwei Komponenten von $\boldsymbol{v}_3$ realisiert werden. Die dritte Komponente ergibt sich dann als Linearkombination dieser zwei realisierten Geschwindigkeitskomponenten.
Es könnte beispielsweise v_{3z} mit

$$\dot{\theta}_2 = \frac{v_{3z}}{-l_2\, s_2}$$

realisiert werden. Die y-Geschwindigkeitskomponente würde dann realisiert werden können mit

$$v_{3y} = l_2\, c_1\, s_2\, \dot{\theta}_1 + l_2\, c_2\, s_1\, \underbrace{\frac{v_{3z}}{-l_2\, s_2}}_{\dot{\theta}_2}$$

$$\Longrightarrow \quad \dot{\theta}_1 = \frac{v_{3y} - l_2\, c_2\, s_1\, \frac{v_{3z}}{-l_2\, s_2}}{l_2\, c_1\, s_2}\,.$$

Die x-Geschwindigkeitskomponente kann dann nicht vorgegeben werden, sondern ergibt sich als Funktion von v_{3y} und v_{3z} zu

$$\begin{aligned} v_{3x} &= -l_2\, s_1\, s_2\, \dot\theta_1 + l_2\, c_1\, c_2\, \dot\theta_2 \\ &= -l_2\, s_1\, s_2\, \frac{v_{3y} - l_2\, c_2\, s_1\, \frac{v_{3z}}{-l_2\, s_2}}{l_2\, c_1\, s_2} + l_2\, c_1\, c_2\, \frac{v_{3z}}{-l_2\, s_2} \end{aligned}$$

e) Für $\theta_2 \in \{0, \pi\}$ ergibt sich

$$\widetilde{J}_v = \begin{bmatrix} 0 & c_1\, l_2 & 0 \\ 0 & s_1\, l_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \boldsymbol{v}_3^0 = \begin{bmatrix} c_1\, l_2 \\ s_1\, l_2 \\ 0 \end{bmatrix} \dot\theta_2$$

Die Endeffektorlineargeschwindigkeit hängt somit nur noch von $\dot\theta_2$ ab:

$$v_{3x} = l_2\, c_1\, \dot\theta_2\,, \quad v_{3y} = l_2\, s_1\, \dot\theta_2\,, \quad v_{3z} = 0$$

Der Manipulator ist damit zweifach unterbestimmt: Für die drei geforderten Endeffektorgeschwindigkeitskomponenten ist nur eine „wirksame Steuergröße“ in Form von $\dot\theta_2$ verfügbar.

f) $\widetilde{J}_\omega$: siehe oben
Es liegen $M = 3$ Endeffektorfreiheitsgrade und $N = 3$ Gelenke vor. Wegen $\mathrm{Det}(\widetilde{J}_\omega) = -s_2$ liegt nach (Buch 4.18) jeweils eine Singularität für $\theta_2 \in \{0, \pi\}$ vor; dies impliziert gleichzeitig Manipulator-Unterbestimmtheit.
Außerhalb der Singularität ist nach Bedingung 4.12 Manipulator-Vollbestimmt gegeben.

g) Zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{\omega}_3^0 = \widetilde{J}_\omega\, \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

nach $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ wird hier die Lösungsmethode nach der *Cramer-Regel* angewendet, siehe mathematische Standard-Formelsammlungen. Die Cramer-Regel basiert auf der Berechnung von Determinanten. Bei händischer Berechnung der Lösung ist diese Methode weniger fehleranfällig als alternative Lösungsmethoden, wie zum Beispiel die Gauß-Eliminations-Methode.

Mit $D = \mathrm{Det}(\widetilde{J}_\omega) = -s_2$ und

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} \omega_{3\,x}^0 & -s_1 & c_1\, s_2 \\ \omega_{3\,y}^0 & c_1 & s_1\, s_2 \\ \omega_{3\,z}^0 & 0 & c_2 \end{vmatrix} = c_1\, c_2\, \omega_{3\,x}^0 + c_2\, s_1\, \omega_{3\,y}^0 - s_2\, \omega_{3\,z}^0 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} 0 & \omega_{3\,x}^0 & c_1\, s_2 \\ 0 & \omega_{3\,y}^0 & s_1\, s_2 \\ 1 & \omega_{3\,z}^0 & c_2 \end{vmatrix} = s_1\, s_2\, \omega_{3x} - c_1\, s_2\, \omega_{3\,y} \end{aligned}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & -s_1 & \omega^0_{3\,x} \\ 0 & c_1 & \omega^0_{3\,y} \\ 1 & 0 & \omega^0_{3\,z} \end{vmatrix} = -c_1\,\omega_{3\,x} - s_1\,\omega_{3\,y}$$

folgt damit als Lösung

$$\begin{aligned} \dot\theta_1 &= \frac{D_1}{D} = \frac{c_1\,c_2\,\omega^0_{3\,x} + c_2\,s_1\,\omega^0_{3\,y} - s_2\,\omega^0_{3\,z}}{-s_2} \\ \dot\theta_2 &= \frac{D_2}{D} = \frac{s_1\,s_2\,\omega^0_{3\,x} - c_1\,s_2\,\omega^0_{3\,y}}{-s_2} \\ \dot\theta_3 &= \frac{D_3}{D} = \frac{-c_1\,\omega^0_{3\,x} - s_1\,\omega^0_{3\,y}}{-s_2}\,. \end{aligned}$$

Alternativ kann auch zum Beispiel mit einem Formelmanipulationsprogramm die inverse Jacobi-Matrix analytisch berechnet werden. Damit ergibt sich die alternative Lösungsform

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \widetilde{J}_\omega{}^{-1}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}^0_3 = \begin{bmatrix} -\frac{c_1\,c_2}{s_2} & -\frac{c_2\,s_1}{s_2} & 1 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ \frac{c_1}{s_2} & \frac{s_1}{s_2} & 0 \end{bmatrix}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}^0_3\,.$$

4.2 Euler-Jacobi-Matrix bei einer ZYX Euler-Drehung

Die erste Drehung erfolgt um die z-Achse des Weltkoordinatensystems, so dass

$$\boldsymbol{\omega}^0_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,\dot\alpha\,.$$

Die Einheitsvektoren des um α gedrehten Weltkoordinatensystems sind durch $\widetilde{R}_z(\alpha)$ gegeben. Die zweite Drehung erfolgt damit um die y-Achse dieses gedrehten Koordinatensystems, so dass

$$\boldsymbol{\omega}^0_\beta = \begin{pmatrix} -s_\alpha \\ c_\alpha \\ 0 \end{pmatrix}\,\dot\beta\,.$$

Die dritte Drehung erfolgt schließlich um die x-Achse des gedrehten Koordinatensystems und damit um die erste Spalte von

$$\widetilde{R}_z(\alpha)\,\widetilde{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} c_\alpha\,c_\beta & -s_\alpha & c_\alpha\,s_\beta \\ s_\alpha\,c_\beta & c_\alpha & s_\alpha\,s_\beta \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix}\,.$$

Damit ergibt sich durch Summation die gesuchte Transformationsvorschrift zu

$$\boldsymbol{\omega}^0 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -s_\alpha & c_\alpha\, c_\beta \\ 0 & c_\alpha & s_\alpha\, c_\beta \\ 1 & 0 & -s_\beta \end{bmatrix}}_{= \widetilde{J}_{\mathrm{Euler321}}} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} .$$

4.3 Statik von Basis-Kinematik 3

a) Eine externe Kraft bzw. ein externes Moment stützt sich gegen das inertiale System bzw. das Weltsystem ab. Nicht-externe Kräfte sind zum Beispiel Lagerreaktionskräfte in einer Gelenklagerung, die nicht am Fußpunkt des Roboters sitzt.

b) Gemäß (Buch 4.26) ergibt sich der gesuchte Zusammenhang zu

$$\boldsymbol{\tau} = \widetilde{J}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_{\mathrm{extern}} \\ \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{extern}} \end{pmatrix}$$

mit $\widetilde{J}$ aus Aufgabe 4.1.

4.4 Planarer 2-DoF Ellenbogen-Manipulator mit Rotationsgelenken

a) Die DH-Parameter ergeben sich aus den vorgegebenen Koordinatensystemen zu den Werten aus Tabelle 4.1.

Tabelle 4.1 DH-Parameter für den planaren 2-DoF Ellenbogen-Manipulator aus Aufgabe 4.4.

i	φ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	l_1	0
2	θ_2	0	l_2	0

Damit folgt homogene Transformationsmatrix

$$\widetilde{T}_{01}(\theta_1) = \left[\begin{array}{cc|c|c} c_1 & -s_1 & 0 & c_1\, l_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & s_1\, l_1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{und analog} \quad \widetilde{T}_{12}(\theta_2) = \left[\begin{array}{cc|c|c} c_2 & -s_2 & 0 & c_2\, l_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & s_2\, l_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] .$$

Da von $\widetilde{T}_{02}$ nur der Translationsvektor benötigt wird, genügt es, die 4. Spalte von $\widetilde{T}_{02}$ zu berechnen:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{t}_2 \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \widetilde{T}_{01}(\theta_1) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_2\, l_2 \\ s_2\, l_2 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{4. Spalte} \\ \text{von } \widetilde{T}_{12}(\theta_2)}}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1\, c_2\, l_2 - s_1\, s_2\, l_2 + 0 + c_1\, l_1 \\ s_1\, c_2\, l_2 + c_1\, s_2\, l_2 + 0 + s_1\, l_1 \\ \hline 0 + 0 + 0 + 0 \\ \hline 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{(Additions-} \\ \text{theoreme)}}}{=} \begin{pmatrix} c_{12}\, l_2 + c_1\, l_1 \\ s_{12}\, l_2 + s_1\, l_1 \\ \hline 0 \\ \hline 1 \end{pmatrix}.$$

Die benötigten Einheitsvektoren der Drehachsen (z-Achsen) folgen damit zu

$$\boldsymbol{e}_{z0}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_{z1}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die Abstandsvektoren zu

$$\boldsymbol{r}_{02} = \boldsymbol{t}_2\,, \; \boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{t}_2 - \boldsymbol{t}_1 = \begin{pmatrix} l_2\, c_{12} \\ l_2\, s_{12} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert nach (Buch 4.9) den gesuchten Zusammenhang zu

$$\begin{pmatrix} v_{2x}^0 \\ v_{2y}^0 \\ \omega_{2z}^0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ c_1 l_1 + c_{12} l_2 & c_{12} l_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\widetilde{J}(\theta_1, \theta_2)} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}.$$

b) Es liegt immer ein unterbestimmter Manipulator vor, da die Jacobi-Matrix stehend ist, das heißt es sind mehr Endeffektorfreiheitsgrade M gefordert, als Gelenke N vorhanden sind: $M > N$.

c) Für $\theta_2 = 0$ folgt

$$\begin{bmatrix} v_{2x}^0 \\ v_{2y}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{12}\, s_1 & -l_2\, s_1 \\ l_{12}\, c_1 & l_2\, c_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

Die Zeilen der darin enthaltenen Lineargeschwindigkeits-Jacobi-Matrix $\widetilde{J}_v$ sind linear abhängig wegen: (Zeile 1) $\cdot\; c_1 = -$(Zeile 2) $\cdot\; s_1$. Daraus folgt

$$v_{2x}^0\, c_1 = -v_{2y}^0\, s_1$$

und wegen $v_{2x}^0 = -v_{2y}^0 \, \frac{s_1}{c_1}$ mit einem frei wählbaren Parameter $\mu = v_{2y}^0$ weiter

$$\begin{pmatrix} v_{2x}^0 \\ v_{2y}^0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -\frac{s_1}{c_1} \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Im Sonderfall $c_1 = 0$ gilt $v_{2y}^0 = 0$.

Der Zusammenhang ist also nur von θ_1 abhängig. Stellt man Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}_2$ im S_1-System dar, so muss diese Abhängigkeit verschwinden und man erhält für $c_1 \neq 0$ den einfacher interpretierbaren konstanten Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} v_{2x}^1 \\ v_{2y}^1 \end{pmatrix} = \widetilde{R}_{10} \begin{pmatrix} v_{2x}^0 \\ v_{2y}^0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & s_1 \\ -s_1 & c_1 \end{bmatrix}}_{=\widetilde{R}_{01}{}^T} \mu \begin{pmatrix} -\frac{s_1}{c_1} \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{{s_1}^2}{c_1} + c_1 \end{pmatrix}$$

$$= \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{{s_1}^2 + {c_1}^2}{c_1} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{c_1} \end{pmatrix}$$

In S_1-Koordinaten verschwindet also stets die v_{2x}^1-Komponente, während die v_{2y}^1-Komponente frei wählbar ist. Geschwindigkeitsvektoren und damit Bewegungsrichtungen auf der Singularität können damit nur *senkrecht zum ausgestreckten Arm* zeigen. Damit kann sich der Endeffektor auf der Singularität nur auf der Kreisbahn des ausgestreckten Arms bewegen. Andere Bewegungsrichtungen sind nicht möglich. Vergleiche auch alternative Herleitung der Kreisbahn aus Beispiel 4.7.

d) Auf der zweiten Singularität gilt $\theta_2 = \pi$ und damit

$$\boldsymbol{v}_2^0 = \begin{bmatrix} (l_2 - l_1)\, s_1 & l_2\, s_1 \\ -(l_2 - l_1)\, c_1 & -l_2\, c_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}$$

Analog zum obigen Vorgehen ergibt sich durch die lineare Abhängigkeit Zusammenhang

$$-(\text{Zeile } 1) \cdot c_1 = -(\text{Zeile } 2) \cdot s_1$$

und damit weiter

$$-v_{2x}^0\, c_1 = v_{2y}^0\, s_1 \, .$$

Daraus folgen die selben möglichen Geschwindigkeits-Richtungen wie bei vorangegangener Teilaufgabe.

e) Mit der inversen Lineargeschwindigkeits-Jacobi-Matrix $\widetilde{J}_v{}^{-1}$ gilt außerhalb der Singularität

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \widetilde{J}_v{}^{-1} \begin{pmatrix} v_{2x}^0 \\ v_{2y}^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{s_2} \begin{bmatrix} \frac{c_{12}}{l_1} & \frac{s_{12}}{l_1} \\ -\left(\frac{c_{12}}{l_1} + \frac{c_1}{l_2}\right) & -\left(\frac{s_{12}}{l_1} + \frac{s_1}{l_2}\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{2x}^0 \\ v_{2y}^0 \end{pmatrix}$$

Mit $v_{2y}^0 = 0$ und $v_{2x}^0 = 1$ folgt für die betragsmäßig maximalen Winkelgeschwindigkeiten

$$\dot{\theta_1}^{\max} \geq \left| \frac{c_{12}}{s_2\, l_1} \right| \quad \wedge \quad \dot{\theta_2}^{\max} \geq \left| \frac{1}{s_2} \left(\frac{c_{12}}{l_1} + \frac{c_1}{l_2} \right) \right| .$$

f)

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \widetilde{J}^T \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} -l_1\, s_1 - l_2\, s_{12} & l_1\, c_1 + l_2\, c_{12} & 1 \\ -l_2\, s_{12} & l_2\, c_{12} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

g) Anstelle von $\widetilde{J}$ wird nur noch $\widetilde{J}_v$ berücksichtigt, da kein externes Moment anliegt:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \left(\widetilde{J}_v{}^T \right)^{-1} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{s_2} \begin{bmatrix} \frac{c_{12}}{l_1} & -\left(\frac{c_{12}}{l_1} + \frac{c_1}{l_2} \right) \\ \frac{s_{12}}{l_1} & -\left(\frac{s_{12}}{l_1} + \frac{s_1}{l_2} \right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \quad \text{für } s_2 \neq 0$$

h) Der Kraftvektor besitzt (nach algebraischen Umformungen) den gesuchten Betrag

$$\|\boldsymbol{F}\| = \frac{1}{|s_2|} \sqrt{\left(\frac{\tau_1 - \tau_2}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{\tau_2}{l_2} \right)^2 + \frac{2\, \tau_2\, (\tau_2 - \tau_1)\, c_2}{l_1\, l_2}} .$$

Für $\theta_2 \to \pi$ oder $\theta_2 \to 0$ strebt $\|\boldsymbol{F}\| \to \infty$. In einer nahen Umgebung der Singularitäten können also mit geringen Gelenkmomenten sehr große externe Kräfte erzeugt werden! (Dieses Prinzip findet daher Anwendung zum Beispiel bei Metallpressen zur Herstellung von Halbzeugen.)

Lösungen zu Kapitel 5: Dynamik

5.1 Freiheitsgrade und Zwangsbindungen

a) Ein Fahrzeug mit Rädern besitzt sechs Freiheitsgrade:

- Rotation: Nicken (um Fahrzeugquerachse), Gieren (um Fahrzeughochachse), Rollen (Wanken: Drehbewegung des Fahrzeugs um seine Längsachse)
- Translation: vor - zurück (x), rechts-links (y), im Rahmen der Federung auf - ab (z)

b) Ein Zug besitzt einen Freiheitsgrad: Vorschub/ Weg in Richtung der Schiene. Falls das Fahrzeug gefedert ist, kommen eventuell weitere Freiheitsgrade (Rotation) hinzu.

c) Bei diesem Manipulator wird die Bewegung in der Ebene betrachtet:

- Zwei Körper (Gelenkverbinder): $n = 2$
- Zwei Drehgelenke: Bindung $b = 2 \cdot 2 = 4$

$\Longrightarrow$ Freiheitsgrad: $f = 3 \cdot n - b = 6 - 4 = 2$

Zwei kooperierende Manipulatoren:

- Drei Körper (Gelenkverbinder): $n = 3$
- Vier Drehgelenke: Bindung $b = 4 \cdot 2 = 8$

$\Longrightarrow$ Freiheitsgrad: $f = 3 \cdot n - b = 9 - 8 = 1$

Das von beiden Manipulatoren gegriffene Werkstück kann nur noch in einem Freiheitsgrad bewegt werden. Damit kann also Position und Orientierung des Werkstücks in der Ebene nicht mehr vollständig frei eingestellt werden. Vielmehr ist die Bewegung des Werkstücks stark eingeschränkt.
Um das Werkstück in allen drei Freiheitsgraden der Ebene bewegen zu können, müssen zwei weitere Freiheitsgrade vorliegen. Dies erreicht man beispielsweise, in dem einer der beiden Manipulatoren zwei weitere Freiheitsgrade durch zum

Beispiel Rotationsgelenke erhält. Dann liegen $n = 5$ Körper und sechs Gelenke vor und es folgt für die Gesamtanordnung:

$$f = 3 \cdot 5 - 6 \cdot 2 = 15 - 12 = 3$$

d) An jedem Ende eines Beines befindet sich jeweils ein Kardan-Gelenk mit $f_{\text{kardan}} = 2$. Zwischen diesen ist ein prismatisches Gelenk angeordnet. Es soll einen translatorischen Freiheitsgrad binden, nicht jedoch einen rotatorischen Freiheitsgrad (die Linearführung sichert nicht die Achse gegen Verdrehung). Das heißt das prismatische Gelenk soll $f_{\text{prism}} = 2$ Freiheitsgrade aufweisen (Translation entlang der Linearachse und Rotation um die Linearachse).
Ein Bein besteht aus zwei unabhängigen Körpern: Ein Körper zwischen Kardan-Gelenk 1 und prismatischem Gelenk; ein zweiter Körper zwischen prismatischem Gelenk und Kardan-Gelenk 2.

Die Bewegung erfolgt im Raum:

- Anzahl Körper: n = 6 (Beine) mal 2 Körper pro Bein + 1 mal Plattform = 13
- Anzahl Bindungen der sechs prismatischen Gelenke: $b_{\text{prism}} = 6 \cdot (6 - f_{\text{prism}}) = 6 \cdot 4 = 24$;
  Anzahl Bindungen der 12 Kardan-Gelenke: $b_{\text{kardan}} = 12 \cdot (6 - f_{\text{kardan}}) = 12 \cdot 4 = 48$;
  Anzahl Bindungen gesamt: $b = b_{\text{kardan}} + b_{\text{prism}} = 24 + 48 = 72$

$\Longrightarrow$ Freiheitsgrad der Gesamtanordnung: $f = 6 \cdot n - b = 78 - 72 = 6$

Der Manipulator ist 6-fach statisch-unterbestimmt; eine Bewegung ist damit in sechs Freiheitsgraden möglich. Dies bedeutet, dass Position und Orientierung der Plattform vollständig (das heißt in jeweils allen Koordinaten) einstellbar ist.

Wiesen die prismatischen Gelenke nur einen Freiheitsgrad auf, so gälte:

$$f_{\text{prism}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad b_{\text{prism}} = 6 - 1 = 5\,.$$

In diesem Fall ergäbe sich ein Freiheitsgrad der Gesamtanordnung von

$$f = 6 \cdot 13 - (6 \cdot 5 + 12 \cdot 4) = 78 - (30 + 48) = 0\,,$$

so dass der Manipulator statisch bestimmt und keine Bewegung mehr möglich wäre. Die Kinematik ist also für einen Manipulator ungeeignet.

5.2 Massenträgheitstensor eines zusammengesetzten Körpers

a) Aus Buch-Abb. 5.15 liest man die Einheitsvektoren von S_1 in S_0-Koordinaten ab und erhält so

$$\widetilde{R}_{01} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Mit (Buch 5.23) ist der Trägheitstensor des Hauptachsensystems eines Quaders nach Buch-Abb. 5.5 gegeben. Die dabei festgelegte Orientierung der Achsen stimmt mit der Orientierung der Achsen des Quaders aus Buch-Abb. 5.15 überein. Damit ergibt sich

$$\widetilde{I}_1^1 = \frac{m_1}{12} \begin{bmatrix} {b_1}^2+{h_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & {h_1}^2+{l_1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & {b_1}^2+{l_1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.101625 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0330281 & 0 \\ 0 & 0 & 0.114328 \end{bmatrix}$$

b) Bedeutung der beiden tiefgestellten Indizes in $\boldsymbol{\omega}_{0\,1}^{0}$:

- Erster tiefgestellter Index 0: Nummer des Koordinatensystems, in dem die Drehgeschwindigkeit gemessen wird.
- Zweiter tiefgestellter Index 1: Nummer des drehenden Körpers bzw. Nummer des drehenden Koordinatensystems.

Der hochgestellte Index kennzeichnet die Nummer des Koordinatensystems, dessen Orientierung für das beschreibende Koordinatensystem verwendet wird. (Der Ursprung des beschreibenden Koordinatensystems soll nach der hier getroffenen Konvention im Schwerpunkt des Körpers liegen.)

In S_1 kann keine Drehgeschwindigkeit beobachtet werden, da sich S_1 als körpereigenes Koordinatensystem mit dem Körper mitdreht. Daher gilt $T_{1\,1} = 0$.

In S_0 beobachtet man Drehgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}_{0\,1}^{0}$. Nach der getroffenen Konvention des vorliegenden Buchs können die 0-Indizes zur Vereinfachung weggelassen werden. So ergibt sich nach (Buch 5.25) die kinetische Energie zu

$$T_{1,\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{\omega}_1{}^T\, \widetilde{I}_1^0\, \boldsymbol{\omega}_1 \,. \tag{5.1}$$

Wegen $\boldsymbol{\omega}_1 = \widetilde{R}_{01}\, \boldsymbol{\omega}_1^1$ lässt sich die selbe Energie darstellen mit Geschwindigkeitskoordinaten bezogen auf S_1:

$$T_{1,\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\, \left(\widetilde{R}_{01}\, \boldsymbol{\omega}_1^1\right)^T\, \widetilde{I}_1^0\, \widetilde{R}_{01}\, \boldsymbol{\omega}_1^1 = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{\omega}_1^{1\,T}\, \underbrace{\widetilde{R}_{01}{}^T\, \widetilde{I}_1^0\, \widetilde{R}_{01}}_{\widetilde{I}_1^1}\, \boldsymbol{\omega}_1^1$$

Linksmultiplikation mit $\widetilde{R}_{01}$ liefert

$$\widetilde{I}_1^1 = \widetilde{R}_{01}{}^T\, \widetilde{I}_1^0\, \widetilde{R}_{01} \quad \Longleftrightarrow \quad \widetilde{R}_{01}\, \widetilde{I}_1^1 \stackrel{!}{=} \widetilde{R}_{01}\, \widetilde{R}_{01}{}^T\, \widetilde{I}_1^0\, \widetilde{R}_{01} = \widetilde{I}_1^0\, \widetilde{R}_{01}\,.$$

Anschließende Rechtsmultiplikation mit $\widetilde{R}_{01}{}^T$ ergibt daraus die gesuchte Umrechnungsformel

$$\widetilde{R}_{01}\, \widetilde{I}_1^1\, \widetilde{R}_{01}{}^T \stackrel{!}{=} \widetilde{I}_1^0\, \widetilde{R}_{01}\, \widetilde{R}_{01}{}^T = \widetilde{I}_1^0\,,$$

vergleiche auch (Buch 5.26) . Mit Zahlenwerten ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\widetilde{I}_1^0 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.101625 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0330281 & 0 \\ 0 & 0 & 0.114328 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.101625 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0330281 & 0 \\ 0 & 0 & 0.114328 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -0.0330281 & 0 \\ 0 & 0 & 0.114328 \\ -0.101625 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.0330281 & 0 & 0 \\ 0 & 0.114328 & 0 \\ 0 & 0 & 0.101625 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

c) Der größere Quader soll sich nun um Ursprung S_0 drehen. In diesem Fall tritt neben der Rotationsenergie um den eigenen Schwerpunkt noch eine Translationsenergie durch die Schwerpunktbewegung auf. Diese Translationsenergie berechnet sich zu

$$T_{1,\mathrm{trans}} = \frac{m_1}{2}\, \boldsymbol{v}_{\mathrm{SP}_1}{}^T \boldsymbol{v}_{\mathrm{SP}_1}$$

mit Schwerpunktgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{SP}_1} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{t}_{01} = \begin{pmatrix} \omega_{1,y}\, t_{01,z} - \omega_{1,z}\, t_{01,y} \\ \omega_{1,z}\, t_{01,x} - \omega_{1,x}\, t_{01,z} \\ \omega_{1,x}\, t_{01,y} - \omega_{1,y}\, t_{01,x} \end{pmatrix}.$$

Um zu einer kompakten Darstellungsform mit Matrizenmultiplikation zu gelangen, wird das Kreuzprodukt durch eine *schiefsymmetrische* Matrix $\widetilde{S}_{01}$ dargestellt:

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{SP}_1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & t_{01,z} & -t_{01,y} \\ -t_{01,z} & 0 & t_{01,x} \\ t_{01,y} & -t_{01,x} & 0 \end{bmatrix}}_{\widetilde{S}_{01}} \begin{pmatrix} \omega_{1,x} \\ \omega_{1,y} \\ \omega_{1,z} \end{pmatrix}.$$

Eingesetzt folgt

$$T_{1,\mathrm{trans}} = \frac{m_1}{2}\,(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{t}_{01})^T\,(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{t}_{01}) = \frac{m_1}{2}\,\boldsymbol{\omega}_1{}^T\,\widetilde{S}_{01}{}^T\,\widetilde{S}_{01}\,\boldsymbol{\omega}_1\,.$$

Zusammen mit dem translativen Anteil der kinetischen Energie ergibt sich so

$$\begin{aligned} T_{1,\mathrm{trans}} + T_{1,\mathrm{rot}} &= \frac{m_1}{2}\,\boldsymbol{\omega}_1{}^T\,\widetilde{S}_{01}{}^T\,\widetilde{S}_{01}\,\boldsymbol{\omega}_1 + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}_1{}^T\,\widetilde{I}_1^0\,\boldsymbol{\omega}_1 \\ &= \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}_1{}^T\Big(\underbrace{m_1\,\widetilde{S}_{01}{}^T\,\widetilde{S}_{01} + \widetilde{I}_1^0}_{\widetilde{I}_{1,\mathrm{ges}}^0}\Big)\,\boldsymbol{\omega}_1 \end{aligned}$$

mit Trägheitstensor

$$\widetilde{I}_{1,\mathrm{ges}}^0 = m_1\,\widetilde{S}_{01}{}^T\,\widetilde{S}_{01} + \widetilde{I}_1^0\,, \tag{5.2}$$

der mit Steiner-Anteil

$$m_1\,\widetilde{S}_{01}{}^T\,\widetilde{S}_{01} = m_1 \begin{bmatrix} t_{01,y}{}^2 + t_{01,z}{}^2 & -t_{01,x}\,t_{01,y} & -t_{01,x}\,t_{01,z} \\ -t_{01,x}\,t_{01,y} & t_{01,x}{}^2 + t_{01,z}{}^2 & -t_{01,y}\,t_{01,z} \\ -t_{01,x}\,t_{01,z} & -t_{01,y}\,t_{01,z} & t_{01,x}{}^2 + t_{01,y}{}^2 \end{bmatrix}$$

nun auch den translativen Anteil der Bewegung berücksichtigt. Für die gegebenen Werte folgt

$$\widetilde{I}_{1,\mathrm{ges}}^0 = \begin{bmatrix} 1.28302 & -0.85365 & -1.06706 \\ -0.85365 & 2.3704 & -0.60975 \\ -1.06706 & -0.60975 & 2.08331 \end{bmatrix}\,.$$

Ein Formelmanipulationsprogramm berechnet dafür ein Eigensystem. Aus den normierten Eigenvektoren folgt Rotationsmatrix

$$\widetilde{R}_{0\,H_1} = \begin{bmatrix} 0.082773 & -0.659896 & -0.746784 \\ -0.834073 & 0.364239 & -0.414308 \\ 0.545408 & 0.657166 & -0.520252 \end{bmatrix}\,.$$

Im Hauptachsensystem ergibt sich damit Trägheitstensor

$$\widetilde{I}_{H_1} = \widetilde{R}_{0\,H_1}{}^T\,\widetilde{I}_{1,\mathrm{ges}}^0\,\widetilde{R}_{0\,H_1} = \mathrm{Diag}\left(2.85384\ 2.81685\ 0.0660423\right)\,.$$

Die Hauptträgheitsmomente stellen dabei die Eigenwerte des Eigensystems dar.

Hinweis: Beim Zusammensetzen von $\widetilde{R}_{0\,H_1}$ aus den Eigenvektoren von $\widetilde{I}_{1,\mathrm{ges}}^0$ muss eine Reihenfolge gewählt werden, für die die Spalten von $\widetilde{R}_{0\,H_1}$ ein Rechtssystem bilden. Außerdem müssen die Spalten auf 1 normiert werden. Die Reihenfolge der Eigenvektoren bestimmt dann auch die Reihenfolge der Hauptdiagonalelemente (=Eigenwerte) in $\widetilde{I}_{H_1}$.

d) Mit Massen

$$m_1 = 12.195\,,\ m_2 = 2.28656$$

liegt der Gesamtschwerpunkt bei

$$\boldsymbol{t}_{03} = \frac{\boldsymbol{t}_{01}\, m_1 + \boldsymbol{t}_{02}\, m_2}{m_1 + m_2} = \begin{pmatrix} 0.367763 \\ 0.196053 \\ 0.273684 \end{pmatrix}\,.$$

e) Die in S_0 beobachtbare kinetische Energie bei Rotation um den Gesamtschwerpunkt S_3 beträgt

$$\begin{aligned} T_{1+2} &= \frac{1}{2}\,{\boldsymbol{\omega}_3}^T \left(\widetilde{I}_{1,\mathrm{ges}} + \widetilde{I}_{2,\mathrm{ges}}\right) \boldsymbol{\omega}_3\,. \\ &= \frac{1}{2}\,{\boldsymbol{\omega}_3^3}^T \underbrace{{\widetilde{R}_{01}}^T \left(\widetilde{I}_{1,\mathrm{ges}} + \widetilde{I}_{2,\mathrm{ges}}\right) \widetilde{R}_{01}}_{\widetilde{I}^3_{1+2,\mathrm{ges}}}\, \boldsymbol{\omega}_3^3 \end{aligned}$$

Dabei wurde die Tatsache ausgenutzt, dass nach Angabe $\widetilde{R}_{03} = \widetilde{R}_{01}$ gelten soll. Bei der vorliegenden Rotation um Schwerpunkt S_3 tritt bei jedem Körper auch ein translatorischer Energieanteil bzw. ein Steiner-Anteil auf. Mit (5.2) kann dieser berücksichtigt werden und es folgt für die beiden Gesamtträgheitstensoren:

$$\begin{aligned} \widetilde{I}_{1,\mathrm{ges}} &= m_1\, {\widetilde{S}_{31}}^T\, \widetilde{S}_{31} + \widetilde{R}_{01}\, \widetilde{I}_1^1\, {\widetilde{R}_{01}}^T\,, \\ \widetilde{I}_{2,\mathrm{ges}} &= m_2\, {\widetilde{S}_{32}}^T\, \widetilde{S}_{32} + \widetilde{R}_{01}\, \widetilde{I}_2^2\, {\widetilde{R}_{01}}^T. \end{aligned}$$

Mit den Vektoren vom Gesamtschwerpunkt zu den körpereigenen Schwerpunkten

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}_{31} &= \boldsymbol{t}_{01} - \boldsymbol{t}_{03} = \begin{pmatrix} -0.0177632 & 0.00394737 & -0.0236842 \end{pmatrix}^T \\ \boldsymbol{t}_{32} &= \boldsymbol{t}_{02} - \boldsymbol{t}_{03} = \begin{pmatrix} 0.0947368 & -0.0210526 & 0.126316 \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

können die darin benötigten schiefsymmetrischen Matrizen

$$\widetilde{S}_{31} = \begin{bmatrix} 0 & -0.0236842 & -0.00394737 \\ 0.0236842 & 0 & -0.0177632 \\ 0.00394737 & 0.0177632 & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$\widetilde{S}_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0.126316 & 0.0210526 \\ -0.126316 & 0 & 0.0947368 \\ -0.0210526 & -0.0947368 & 0 \end{bmatrix}$$

berechnet werden. Damit und wegen $\widetilde{R}_{03} = \widetilde{R}_{01}$ folgt

$$\begin{aligned}\widetilde{I}^{3}_{1+2,\mathrm{ges}} &= \widetilde{R}_{03}{}^{T}\left(\widetilde{I}_{1,\mathrm{ges}} + \widetilde{I}_{2,\mathrm{ges}}\right)\widetilde{R}_{03} \\ &= \widetilde{R}_{01}{}^{T}\left(m_1\,\widetilde{S}_{31}{}^{T}\,\widetilde{S}_{31} + m_2\,\widetilde{S}_{32}{}^{T}\,\widetilde{S}_{32}\right)\widetilde{R}_{01} + \widetilde{I}^{1}_{1} + \widetilde{I}^{2}_{2} \\ &= \begin{bmatrix} 0.129342 & -0.0324933 & -0.00722072 \\ -0.0324933 & 0.0829151 & -0.00541554 \\ -0.00722072 & -0.00541554 & 0.187382 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

mit einer Rotationsmatrix von zum Hauptachsensystem (aus normierten Eigenvektoren von $\widetilde{I}^{3}_{1+2,\mathrm{ges}}$ als Rechtssystem) gemäß

$$\widetilde{R}_{3\,H_3} = \begin{bmatrix} -0.11271 & 0.881033 & 0.459431 \\ -0.0163036 & -0.463955 & 0.885709 \\ 0.993494 & 0.092338 & 0.0666565 \end{bmatrix}$$

und Trägheitstensor in Hauptachsen

$$\widetilde{I}^{H_3}_{1+2} = \widetilde{R}_{3\,H_3}{}^{T}\,\widetilde{I}^{3}_{1+2,\mathrm{ges}}\,\widetilde{R}_{3\,H_3} = \mathrm{Diag}\left(0.18829\ 0.145696\ 0.0656527\right)\ .$$

Hier gilt der selbe Hinweis zur Reihenfolge der Spalten in $\widetilde{R}_{3\,H_3}$ und Diagonalelemente in $\widetilde{I}^{H_3}_{1+2}$ wie bei Teilaufgabe c).

Zur Veranschaulichung und als Plausibilitätscheck ist S_{H_3} in Abb. 5.1 in die Anordnung der Körper zusätzlich eingetragen.

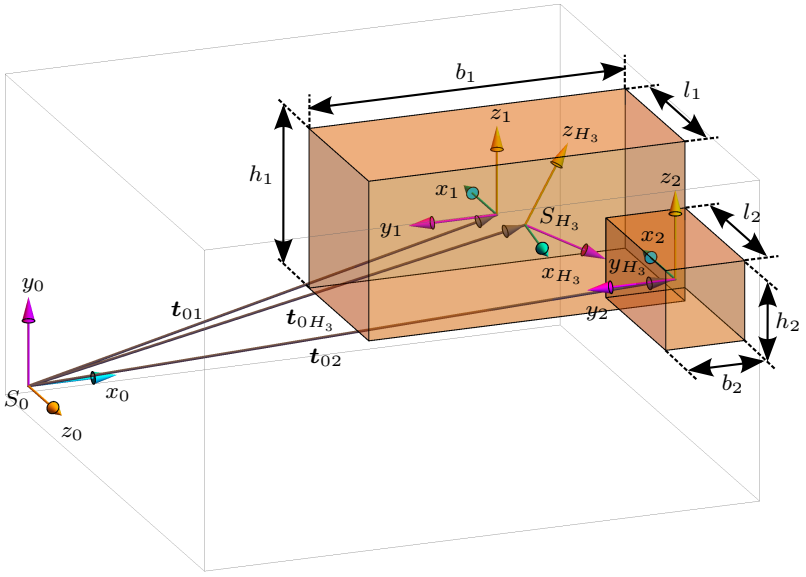


Abb. 5.1 Hauptachsensystem S_{H_3} des zusammengesetzten Körpers aus Aufgabe 5.2.

5.3 Berechnung von Drehmomenten des planaren 2-DoF Ellenbogen-Manipulators

Durch Einsetzen der gegebenen Betriebspunkte in die gegebenen Bewegungsgleichungen erhält man die folgenden Momente für Gelenk 1 (τ_1) und Gelenk 2 (τ_2):

a) Gesamtmoment:
Betriebspunkt 1: $\tau_1 = 46.4\,, \qquad \tau_2 = 24.5$
Betriebspunkt 2: $\tau_1 = 28.9\,, \qquad \tau_2 = 7.05$

b) Die Gewichtsmomente sind für beide Betriebspunkte gleich, da sich nur die Drehgeschwindigkeiten unterscheiden: $\tau_{1,g} = 11.8\,, \qquad \tau_{2,g} = 1.77$

c) Momente aufgrund von Kreiselkräften:
Betriebspunkt 1: $\tau_{1,c} = \tau_{2,c} = 17.7$
Betriebspunkt 2: $\tau_{1,c} = \tau_{2,c} = \frac{1}{10^2} \cdot 17.7 = 0.177$

d) Die Beschleunigungsmomente sind für beide Betriebspunkte gleich, da sich nur die Drehgeschwindigkeiten unterscheiden: $\tau_{1,i} = 17.0\,, \qquad \tau_{2,i} = 5.10$

e) Verhältnisse Kreisel zu Gesamt:
Betriebspunkt 1: $\frac{\tau_{1,c}}{\tau_1} = 0.381\,, \qquad \frac{\tau_{2,c}}{\tau_2} = 0.720$
Betriebspunkt 2: $\frac{\tau_{1,c}}{\tau_1} = 0.006\,, \qquad \frac{\tau_{2,c}}{\tau_2} = 0.025$
Interpretation:

- Der Kreiselkraft-Einfluss reduziert sich stark bei geringen Geschwindigkeiten und kann gegenüber den anderen Momenten-Komponenten vernachlässigt werden.
- Bei hohen Geschwindigkeiten wird der Kreiselkraft-Einfluss jedoch dominant.

5.4 Manipulator mit zwei senkrecht aufeinander stehenden Drehachsen und Punktmassen

a) Jeder Körper besteht nur aus einer Punktmasse. Damit liegt die Punktmasse im jeweiligen Schwerpunkt. Die kinetische Energie ist daher vollständig durch die translative Bewegung der Punktmassen gegeben. Man benötigt also keine Massenträgheitstensoren.

b) Die DH-Parameter sind in Tabelle 5.1 dargestellt.

Tabelle 5.1 DH-Parameter für Aufgabe 5.4 a) für den Manipulator aus Buch-Abb. 5.16.

i	φ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	0	l_1	$\pi/2$
2	θ_2	0	l_2	0

c) Anwendung von Algorithmus 5.4:

Schritt 1 Die direkte Kinematik ergibt sich aus den DH-Parametern nach Tabelle 5.1 mit (Buch 2.25a) zu:

$$\widetilde{T}_{01}(\theta_1) = \left[\begin{array}{ccc:c} c_1 & 0 & s_1 & l_1\,c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & l_1\,s_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \widetilde{T}_{12}(\theta_2) = \left[\begin{array}{ccc:c} c_2 & -s_2 & 0 & l_2\,c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2\,s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\widetilde{T}_{02}(\theta_1,\theta_2) = \widetilde{T}_{01}\,\widetilde{T}_{12} = \left[\begin{array}{ccc:c} c_1\,c_2 & -c_1\,s_2 & s_1 & c_1\,(l_1 + l_2\,c_2) \\ s_1\,c_2 & -s_1\,s_2 & -c_1 & s_1\,(l_1 + l_2\,c_2) \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2\,s_2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Schritt 2 Rotationsmatrizen und Translationsvektoren:

$$\widetilde{R}_{01} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{t}_1 = \begin{pmatrix} l_1\,c_1 \\ l_1\,s_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{R}_{02} = \begin{bmatrix} c_1\,c_2 & -c_1\,s_2 & s_1 \\ s_1\,c_2 & -s_1\,s_2 & -c_1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{t}_2$ wird nicht benötigt.

Schritt 3 Entfällt, da keine Massenträgheitstensoren notwendig sind.

Schritt 4 Schwerpunktkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1^0 \\ \hdashline 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} c_1 & 0 & s_1 & l_1\,c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & l_1\,s_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1\,c_1 \\ l_1\,s_1 \\ 0 \\ \hdashline 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_2^0 \\ \hdashline 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} c_1\,c_2 & -c_1\,s_2 & s_1 & c_1\,(l_1 + l_2\,c_2) \\ s_1\,c_2 & -s_1\,s_2 & -c_1 & s_1\,(l_1 + l_2\,c_2) \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2\,s_2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\,(l_1 + l_2\,c_2) \\ s_1\,(l_1 + l_2\,c_2) \\ l_2\,s_2 \\ \hdashline 1 \end{pmatrix}$$

Initialisierung Gelenkindex $i = 1$ und Lagrange-Funktion $L = 0$. Beginn Iteration von i:

Schritt 5.1 Jacobi-Matrizen: Beide Jacobi-Matrizen bestehen wegen $i = 1$ nur aus einer Spalte:

$$\widetilde{J}_{v_{\mathrm{SP},1}} = \left[\boldsymbol{J}_{v_{\mathrm{SP},1}}\right] = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}l_1\,c_1\\l_1\,s_1\\0\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}-l_1\,s_1\\l_1\,c_1\\0\end{bmatrix}$$

$\widetilde{J}_{\omega_{\mathrm{SP},1}}$ muss nicht berechnet werden.

Schritt 6.1 Geschwindigkeiten:

$$\boldsymbol{v}_1^0 = \widetilde{J}_{v_{\mathrm{SP},1}}\,\dot{\theta}_1 = l_1\,\dot{\theta}_1 \begin{pmatrix}-s_1\\c_1\\0\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\omega}_1^0$ muss nicht berechnet werden.

Schritt 7.1 Energien und Lagrange-Funktion:

$$T_1 = \frac{1}{2}\,m_1\,{l_1}^2\,{\dot{\theta}_1}^2\,\left(-s_1\;c_1\;0\right)\begin{pmatrix}-s_1\\c_1\\0\end{pmatrix} = \frac{{l_1}^2\,m_1}{2}\,{\dot{\theta}_1}^2$$

$$V_1 = -m_1\,{\boldsymbol{g}_0}^T\,\boldsymbol{c}_1^0 = -m_1\,\left(0\;0\;-g_0\right)\begin{pmatrix}l_1\,c_1\\l_1\,s_1\\0\end{pmatrix} = 0$$

Lagrange-Funktion für das erste Armsegment:

$$L = L_1 = T_1 - V_1 = \frac{{l_1}^2\,m_1}{2}\,{\dot{\theta}_1}^2$$

Inkrementiere i (auf 2).

Schritt 5.2 Beide Jacobi-Matrizen bestehen nun aus $i = 2$ Spalten:

$$\widetilde{J}_{v_{\mathrm{SP},2}} = \left[\boldsymbol{J}_{v_{\mathrm{SP},1}}\;\boldsymbol{J}_{v_{\mathrm{SP},2}}\right]\,,\quad \widetilde{J}_{\omega_{\mathrm{SP},2}} = \left[\boldsymbol{J}_{\omega_{\mathrm{SP},1}}\;\boldsymbol{J}_{\omega_{\mathrm{SP},2}}\right]$$

mit $$\boldsymbol{J}_{v_{\mathrm{SP},1}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}c_1\;\left(l_1 + l_2\,c_2\right)\\s_1\;\left(l_1 + l_2\,c_2\right)\\l_2\,s_2\end{pmatrix} = \left(l_1 + l_2\,c_2\right)\begin{pmatrix}-s_1\\c_1\\0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{v_{\mathrm{SP},2}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} c_1\ (l_1 + l_2\, c_2) \\ s_1\ (l_1 + l_2\, c_2) \\ l_2\, s_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_1\, c_1 \\ l_1\, s_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= l_2 \begin{pmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1\, c_2 \\ s_1\, c_2 \\ s_2 \end{pmatrix} = l_2 \begin{pmatrix} -c_1\, s_2 \\ -s_1\, s_2 \\ ({s_1}^2 + {c_1}^2)\, c_2 \end{pmatrix} = -l_2 \begin{pmatrix} c_1\, s_2 \\ s_1\, s_2 \\ -c_2 \end{pmatrix}$$

Hinweis: $\boldsymbol{J}_{v_{\mathrm{SP},1}}$ aus Schritt 5.1 und Schritt 5.2 sind nicht gleich. Warum nicht?

Schritt 6.2

Geschwindigkeiten: $\boldsymbol{v}_2^0 = \widetilde{J}_{v_{\mathrm{SP},2}} \begin{pmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1\,(l_1 + l_2\, c_2) & -l_2\, c_1\, s_2 \\ c_1\,(l_1 + l_2\, c_2) & -l_2\, s_1\, s_2 \\ 0 & l_2\, c_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot\theta_1 \\ \dot\theta_2 \end{pmatrix}$

$$= - \begin{pmatrix} s_1\,(l_1 + l_2\, c_2)\ \dot\theta_1 + l_2\, c_1\, s_2\, \dot\theta_2 \\ -c_1\ (l_1 + l_2\, c_2)\ \dot\theta_1 + l_2\, s_1\, s_2\, \dot\theta_2 \\ -l_2\, c_2\, \dot\theta_2 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\omega}_1^0$ muss nicht berechnet werden.

Schritt 7.2 Energien und Lagrange-Funktion für Segment 2:
Nebenrechnung zur Quadratnorm $\|\boldsymbol{v}_2\|^2 = {\boldsymbol{v}_2}^T\, \boldsymbol{v}_2$: Unter Berücksichtigung des trigonometrischen Pythagoras ${c_i}^2 + {s_i}^2 = 1$ folgt

$$\begin{aligned}
&\Big(s_1\,(l_1 + l_2\, c_2)\ \dot\theta_1 + l_2\, c_1\, s_2\, \dot\theta_2\Big)^2 + \Big(-c_1\ (l_1 + l_2\, c_2)\ \dot\theta_1 + l_2\, s_1\, s_2\, \dot\theta_2\Big)^2 + \\
&\quad + \Big(l_2\, c_2\, \dot\theta_2\Big)^2 \\
&= \Big(s_1\,(l_1 + l_2\, c_2)\ \dot\theta_1\Big)^2 + 2\, s_1\,(l_1 + l_2\, c_2)\ \dot\theta_1\, l_2\, c_1\, s_2\, \dot\theta_2 + \Big(l_2\, c_1\, s_2\, \dot\theta_2\Big)^2 + \\
&\quad \Big(-c_1\ (l_1 + l_2\, c_2)\ \dot\theta_1\Big)^2 - 2\, c_1\ (l_1 + l_2\, c_2)\ \dot\theta_1\, l_2\, s_1\, s_2\, \dot\theta_2 + \Big(l_2\, s_1\, s_2\, \dot\theta_2\Big)^2 + \\
&\quad \Big(l_2\, c_2\, \dot\theta_2\Big)^2 \\
&= (l_1 + l_2\, c_2)^2\ {\dot\theta_1}^2 + {l_2}^2\, {\dot\theta_2}^2 \Big(\underbrace{{c_1}^2\, {s_2}^2 + {s_1}^2\, {s_2}^2}_{{s_2}^2} + {c_2}^2 \Big) \\
&= (l_1 + l_2\, c_2)^2\ {\dot\theta_1}^2 + {l_2}^2\, {\dot\theta_2}^2 \,.
\end{aligned}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\, m_2\, \boldsymbol{v}_2{}^T\, \boldsymbol{v}_2 = \frac{m_2}{2}\, \left(\dot{\theta}_1{}^2\, \left(l_1 + l_2\, c_2\right)^2 + \dot{\theta}_2{}^2\, l_2{}^2\right)$$

$$V_2 = -m_2\, \boldsymbol{g}_0{}^T\, \boldsymbol{c}_2^0 = -m_2\, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -g_0 \end{pmatrix}\, \begin{pmatrix} c_1\, \left(l_1 + l_2\, c_2\right) \\ s_1\, \left(l_1 + l_2\, c_2\right) \\ l_2\, s_2 \end{pmatrix} = m_2\, g_0\, l_2\, s_2$$

Vollständige Lagrange-Funktion:

$$L_2 = T_2 - V_2 = \frac{m_2}{2}\, \left(\dot{\theta}_1{}^2\, \left(l_1 + l_2\, c_2\right)^2 + \dot{\theta}_2{}^2\, l_2{}^2\right) - m_2\, g_0\, l_2\, s_2$$

$$L = L_1 + L_2 = \frac{l_1{}^2\, m_1}{2}\, \dot{\theta}_1{}^2 + \frac{m_2}{2}\, \left(\dot{\theta}_1{}^2\, \left(l_1 + l_2\, c_2\right)^2 + \dot{\theta}_2{}^2\, l_2{}^2\right) - m_2\, g_0\, l_2\, s_2$$

Schritt 8 Armsegment 1:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= \dot{\theta}_1\, \left(l_1{}^2\, m_1\right) + m_2\, \dot{\theta}_1\, \left(l_1 + l_2\, c_2\right)^2 = \dot{\theta}_1\, \left(l_1{}^2\, m_1 + \left(l_1 + l_2\, c_2\right)^2\, m_2\right) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= \ddot{\theta}_1\, \left(l_1{}^2\, m_1 + \left(l_1 + l_2\, c_2\right)^2\, m_2\right) + \dot{\theta}_1\, 2\, \left(l_1 + l_2\, c_2\right)\, m_2\, l_2\, \left(-s_2\right)\, \dot{\theta}_2 \\
&= \ddot{\theta}_1\, \left(l_1{}^2\, m_1 + \left(l_1 + l_2\, c_2\right)^2\, m_2\right) - \dot{\theta}_1\, \dot{\theta}_2\, 2\, m_2\, l_2\, s_2\, \left(l_1 + l_2\, c_2\right) \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= 0 \\
\Longrightarrow \ddot{\theta}_1\, &\left(l_1{}^2\, m_1 + \left(l_1 + l_2\, c_2\right)^2\, m_2\right) - \dot{\theta}_1\, \dot{\theta}_2\, 2\, m_2\, l_2\, s_2\, \left(l_1 + l_2\, c_2\right) = \tau_1
\end{aligned}$$

Armsegment 2:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= \dot{\theta}_2\, m_2\, l_2{}^2 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= \ddot{\theta}_2\, m_2\, l_2{}^2 \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= m_2\, \dot{\theta}_1{}^2\, \left(l_1 + l_2\, c_2\right)\, l_2\, \left(-s_2\right) - m_2\, g_0\, l_2\, c_2 \\
\Longrightarrow \ddot{\theta}_2\, &m_2\, l_2{}^2 + \dot{\theta}_1{}^2\, m_2\, \left(l_1 + l_2\, c_2\right)\, l_2\, s_2 + m_2\, g_0\, l_2\, c_2 = \tau_2
\end{aligned}$$

Schritt 9 In Standardform zusammengefasst und um die Antriebskraft und das Antriebsmoment ergänzt folgt Differenzialgleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} {l_1}^2\, m_1 + (l_1 + l_2\, c_2)^2\, m_2 & 0 \\ 0 & m_2\, {l_2}^2 \end{bmatrix}}_{\widetilde{M}} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -\dot{\theta}_1\, \dot{\theta}_2\, 2\, m_2\, l_2\, s_2\, (l_1 + l_2\, c_2) \\ {\dot{\theta}_1}^2\, m_2\, (l_1 + l_2\, c_2)\, l_2\, s_2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{n}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ m_2\, l_2\, c_2 \end{pmatrix} g_0}_{\boldsymbol{g}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{Q}_{\mathrm{nk}}} .$$

d) Aus $\boldsymbol{n}$ lässt sich nicht eindeutig Kreiselkräftematrix $\widetilde{C}$ bestimmen. Vielmehr müssen die Elemente von $\widetilde{C}$ gemäß (Buch 5.41) durch partielles Ableiten der Elemente der Massenmatrix bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} M_{k1} + \frac{\partial}{\partial \theta_k} M_{11} - \frac{\partial}{\partial \theta_1} M_{k1} \right) \dot{\theta}_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta_k} M_{11}\, \dot{\theta}_k \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} M_{11}\, \dot{\theta}_1 + \frac{\partial}{\partial \theta_2} M_{11}\, \dot{\theta}_2 \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} M_{11}\, \dot{\theta}_2 \\
&= m_2\, (l_1 + l_2\, c_2)\, l_2\, (-s_2)\, \dot{\theta}_2 \\
C_{12} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_2} M_{k1} + \frac{\partial}{\partial \theta_k} M_{21} - \frac{\partial}{\partial \theta_1} M_{k2} \right) \dot{\theta}_k \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_2} M_{k1} - \frac{\partial}{\partial \theta_1} M_{k2} \right) \dot{\theta}_k = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} M_{11}\, \dot{\theta}_1 \\
&= m_2\, (l_1 + l_2\, c_2)\, l_2\, (-s_2)\, \dot{\theta}_1 \\
C_{21} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} M_{k2} + \frac{\partial}{\partial \theta_k} M_{12} - \frac{\partial}{\partial \theta_2} M_{k1} \right) \dot{\theta}_k \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} M_{k2} - \frac{\partial}{\partial \theta_2} M_{k1} \right) \dot{\theta}_k = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} M_{11}\, \dot{\theta}_1 = -C_{12} \\
C_{22} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_2} M_{k2} + \frac{\partial}{\partial \theta_k} M_{22} - \frac{\partial}{\partial \theta_2} M_{k2} \right) \dot{\theta}_k = 0 .
\end{aligned}$$

In Matrixform ergibt sich damit

$$\widetilde{C} = m_2\, l_2\, s_2\, (l_1 + l_2\, c_2) \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2 & -\dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\widetilde{M}(\theta_2(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\begin{bmatrix} {l_1}^2\, m_1 + (l_1 + l_2\, \cos(\theta_2(t)))^2\, m_2 & 0 \\ 0 & m_2\, {l_2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\, m_2\, l_2\, s_2\, (l_1 + l_2\, c_2)\, \dot{\theta}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

folgt schließlich Matrix

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\widetilde{M} - 2\,\widetilde{C} = 2\, m_2\, l_2\, s_2\, (l_1 + l_2\, c_2)\, \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_1 \\ -\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

die schiefsymmetrisch ist.

e) Determinante der Massenmatrix:

$$\mathrm{Det}(\widetilde{M}) = \left({l_1}^2\, m_1 + (l_1 + l_2\, c_2)^2\, m_2\right)\left(m_2\, {l_2}^2\right) > 0$$

Wegen $\mathrm{Det}(\widetilde{M}) > 0$ ist $\widetilde{M}$ stets invertierbar und man erhält

$$\widetilde{M}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(\widetilde{M})}\begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{12} & m_{11} \end{bmatrix} \overset{(m_{12}=0)}{=} \frac{1}{\mathrm{Det}(\widetilde{M})}\begin{bmatrix} m_2\, {l_2}^2 & 0 \\ 0 & {l_1}^2\, m_1 + (l_1 + l_2\, c_2)^2\, m_2 \end{bmatrix}.$$

Damit ergibt sich nach den Beschleunigungen aufgelöst:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \widetilde{M}^{-1}\begin{pmatrix} \tau_1 + \dot{\theta}_1\, \dot{\theta}_2\, 2\, m_2\, l_2\, s_2\, (l_1 + l_2\, c_2) \\ \tau_2 - {\dot{\theta}_1}^2\, m_2\, (l_1 + l_2\, c_2)\, l_2\, s_2 - m_2\, g_0\, l_2\, c_2 \end{pmatrix}$$

5.5 Manipulator mit Gelenkreihenfolge Translation-Rotation

a) Armsegment 1 führt eine reine Translationsbewegung durch. Massenträgheitsmomente werden nicht benötigt, da diese zur Beschreibung der kinetischen Energie bei Rotationsbewegungen dienen.

Armsegment 2 kann aufgrund der Kinematik nur um die y_2-Achse drehen. Daher wird nur das zugehörige Hauptträgheitsmoment benötigt.

b) Anwendung von Algorithmus 5.4:

Schritt 1 Die direkte Kinematik wird aus der Musterlösung zu Aufgabe 2.17 entnommen:

$$\widetilde{T}_{01}(\sigma_1) = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sigma_1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \; \widetilde{T}_{02}(\sigma_1, \theta_2) = \left[\begin{array}{ccc:c} c_2 & 0 & -s_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 & \sigma_1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Schritt 2 Extraktion Rotationsmatrizen und Translationsvektoren:

$$\widetilde{R}_{01} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sigma_1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{t}_1 = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sigma_1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_1 \end{pmatrix}$$

Analog folgt: $\widetilde{R}_{02} = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{t}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_1 \end{pmatrix}$

Schritt 3 Für Armsegment 2 wird nur das Massenträgheitsmoment bei Rotation um die körpereigene y_2-Achse benötigt. Da diese stets parallel zur y_0-Achse steht, wird immer um die selbe Achse gedreht. Damit reduziert sich der benötigte Trägheitstensor zu einem Skalar und es gilt $\widetilde{I}^0_{y_2} = I^2_{y_2}$.

Schritt 4 Schwerpunktkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1^0 \\ \hdashline 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sigma_1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l/2 \\ \hdashline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -l/2 \\ \sigma_1 \\ \hdashline 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_2^0 \\ \hdashline 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} c_2 & 0 & -s_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_2 & 0 & c_2 & \sigma_1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{pmatrix} 0 \\ -l/2 \\ l/2 \\ \hdashline 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l\, s_2/2 \\ -l/2 \\ l\, c_2/2 + \sigma_1 \\ \hdashline 1 \end{pmatrix}$$

Initialisierung Gelenkindex $i = 1$ und Lagrange-Funktion $L = 0$.
Beginn Iterationen von i:

Schritt 5.1 Jacobi-Matrizen: Beide Jacobi-Matrizen bestehen wegen $i = 1$ nur aus einer Spalte. Da ein Translationsgelenk vorliegt, gilt

$$\widetilde{J}_{v_{\mathrm{SP},1}} = \left[\boldsymbol{J}_{v_{\mathrm{SP}},1}\right] = \left[\widetilde{R}_{00} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\widetilde{J}_{\omega_{\mathrm{SP},1}} = \left[\boldsymbol{J}_{\omega_{\mathrm{SP}},1}\right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Schritt 6.1 Geschwindigkeiten:

$$\boldsymbol{v}_1^0 = \widetilde{J}_{v_{\mathrm{SP},1}}\,\dot{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\sigma}_1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\omega}_1^0 = \widetilde{J}_{\omega_{\mathrm{SP},1}}\,\dot{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schritt 7.1 Energien und Lagrange-Funktion:

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(m_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\sigma}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\sigma}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \widetilde{I}_1^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{m_1}{2}\,{\dot{\sigma}_1}^2$$

$$V_1 = -m_1\,{\boldsymbol{g}_0}^T\,\boldsymbol{c}_1^0 = -m_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -l/2 \\ \sigma_1 \end{pmatrix} = -m_1\,g_0\,\sigma_1$$

Lagrange-Funktion für das erste Armsegment:

$$L = L_1 = T_1 - V_1 = \frac{m_1}{2}\left({\dot{\sigma}_1}^2 + 2\,g_0\,\sigma_1\right)$$

Inkrementiere i (auf 2).

Schritt 5.2 Beide Jacobi-Matrizen bestehen nun aus $i = 2$ Spalten:

$$\widetilde{J}_{v_{\mathrm{SP},2}} = \left[\boldsymbol{J}_{v_{\mathrm{SP}},1}\ \boldsymbol{J}_{v_{\mathrm{SP}},2}\right], \qquad \widetilde{J}_{\omega_{\mathrm{SP},2}} = \left[\boldsymbol{J}_{\omega_{\mathrm{SP}},1}\ \boldsymbol{J}_{\omega_{\mathrm{SP}},2}\right]$$

mit

$$\boldsymbol{J}_{v_{\mathrm{SP},1}} = \left(\widetilde{R}_{00} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{v_{\mathrm{SP}},2} = \left(\widetilde{R}_{01}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix}-l\,s_2/2\\-l/2\\l\,c_2/2+\sigma_1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\\sigma_1\end{pmatrix}\right)$$
$$= -\frac{l}{2}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}s_2\\1\\-c_2\end{pmatrix} = -\frac{l}{2}\begin{pmatrix}c_2\\0\\s_2\end{pmatrix}$$

und $\quad \boldsymbol{J}_{\omega_{\mathrm{SP}},1} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{J}_{\omega_{\mathrm{SP}},2} = \widetilde{R}_{01}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$

Schritt 6.2 Geschwindigkeiten:

$$\boldsymbol{v}_2^0 = \widetilde{J}_{v_{\mathrm{SP},2}}\begin{pmatrix}\dot\sigma_1\\\dot\theta_2\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -l\,c_2/2\\0 & 0\\1 & -l\,s_2/2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\dot\sigma_1\\\dot\theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-l\,c_2/2\,\dot\theta_2\\0\\\dot\sigma_1 - l\,s_2/2\,\dot\theta_2\end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{\omega}_2^0 = \widetilde{J}_{\omega_{\mathrm{SP},2}}\begin{pmatrix}\dot\sigma_1\\\dot\theta_2\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & -1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\dot\sigma_1\\\dot\theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\dot\theta_2\\0\end{pmatrix}$$

Schritt 7.2 Energien und Lagrange-Funktion für Segment 2:

$$T_2 = \frac{1}{2}\left(m_2\,\begin{pmatrix}-\frac{l\,c_2}{2}\,\dot\theta_2 & 0 & \dot\sigma_1 - \frac{l\,s_2}{2}\,\dot\theta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-l\,c_2/2\,\dot\theta_2\\0\\\dot\sigma_1 - l\,s_2/2\,\dot\theta_2\end{pmatrix}\right.$$
$$\left. + \begin{pmatrix}0 & -\dot\theta_2 & 0\end{pmatrix}\widetilde{I}_2^0\begin{pmatrix}0\\-\dot\theta_2\\0\end{pmatrix}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(m_2\left(\left(\frac{l\,c_2}{2}\,\dot\theta_2\right)^2 + \left(\dot\sigma_1 - \frac{l\,s_2}{2}\,\dot\theta_2\right)^2\right) + I_{y_2}^2\,{\dot\theta_2}^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-l\,m_2\,s_2\,\dot\theta_2\,\dot\sigma_1 + m_2\,{\dot\sigma_1}^2 + {\dot\theta_2}^2\left(I_{y_2}^2 + \frac{l^2\,m_2}{4}\right)\right)$$

$$V_2 = -m_2\,{\boldsymbol{g}_0}^T\,\boldsymbol{c}_2^0 = -m_2\,\begin{pmatrix}0 & 0 & g_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-l\,s_2/2\\-l/2\\l\,c_2/2+\sigma_1\end{pmatrix}$$
$$= -m_2\,g_0\left(\frac{l\,c_2}{2}+\sigma_1\right)$$

Lagrange-Funktion für zweites Armsegment:

$$L_2 = T_2 - V_2 = \frac{1}{2}\left(-l\,m_2\,s_2\,\dot{\theta}_2\,\dot{\sigma}_1 + m_2\,{\dot{\sigma}_1}^2 + {\dot{\theta}_2}^2\,\left(I_{y_2}^2 + \frac{l^2\,m_2}{4}\right)\right) + \\ + m_2\,g_0\,\left(\frac{l\,c_2}{2} + \sigma_1\right)$$

Vollständige Lagrange-Funktion:

$$L = L_1 + L_2 = \frac{m_1}{2}\left({\dot{\sigma}_1}^2 + 2\,g_0\,\sigma_1\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(-l\,m_2\,s_2\,\dot{\theta}_2\,\dot{\sigma}_1 + m_2\,{\dot{\sigma}_1}^2 + {\dot{\theta}_2}^2\,\left(I_{y_2}^2 + \frac{l^2\,m_2}{4}\right)\right) \\ + m_2\,g_0\,\left(\frac{l\,c_2}{2} + \sigma_1\right).$$

Schritt 8 Armsegment 1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\sigma}_1} &= m_1\,\dot{\sigma}_1 - \frac{l\,m_2\,s_2}{2}\,\dot{\theta}_2 + m_2\,\dot{\sigma}_1 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\sigma}_1} &= (m_1 + m_2)\,\ddot{\sigma}_1 - \frac{l\,m_2\,s_2}{2}\,\ddot{\theta}_2 - \frac{l\,m_2\,c_2}{2}\,{\dot{\theta}_2}^2 \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma_1} &= (m_1 + m_2)\,g_0 \\ \Longrightarrow\ (m_1 + m_2)\,\ddot{\sigma}_1 - \frac{l\,m_2\,s_2}{2}\,\ddot{\theta}_2 - \frac{l\,m_2\,c_2}{2}\,{\dot{\theta}_2}^2 - (m_1 + m_2)\,g_0 &= F_1 \end{aligned}$$

Armsegment 2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= -\frac{l\,m_2\,s_2}{2}\,\dot{\sigma}_1 + \dot{\theta}_2\,\left(I_{y_2}^2 + \frac{l^2\,m_2}{4}\right) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= -\frac{l\,m_2\,s_2}{2}\,\ddot{\sigma}_1 - \frac{l\,m_2\,c_2}{2}\,\dot{\sigma}_1\,\dot{\theta}_2 + \left(I_{y_2}^2 + \frac{l^2\,m_2}{4}\right)\ddot{\theta}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= -\frac{l\,m_2\,c_2}{2}\,\dot{\theta}_2\,\dot{\sigma}_1 - \frac{l\,m_2\,s_2}{2}\,g_0 \\ \Longrightarrow\ -\frac{l\,m_2\,s_2}{2}\,\ddot{\sigma}_1 + \left(I_{y_2}^2 + \frac{l^2\,m_2}{4}\right)\ddot{\theta}_2 + \frac{l\,m_2\,s_2}{2}\,g_0 &= \tau_2 \end{aligned}$$

Schritt 9 In Standardform zusammengefasst und um die Antriebskraft und das Antriebsmoment ergänzt folgt mit Abkürzung $m_{12} = m_1 + m_2$ Differenzialgleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_{12} & -l\,m_2\,s_2/2 \\ -l\,m_2\,s_2/2 & I_{y_2}^2 + m_2\,l^2/4 \end{bmatrix}}_{\widetilde{M}} \begin{pmatrix} \ddot{\sigma}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} \underbrace{- \begin{pmatrix} \frac{l\,m_2\,c_2}{2}\,{\dot{\theta}_2}^2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{n}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -m_{12} \\ \frac{l\,m_2\,s_2}{2} \end{pmatrix} g_0}_{\boldsymbol{g}} = \underbrace{\begin{pmatrix} F_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{Q}_{\mathrm{nk}}}.$$

c) Kreiselkräftematrix: Mit $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix}\sigma_1 & \theta_2\end{pmatrix}$ folgt nach (Buch 5.41) :

$$
\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}M_{k1} + \frac{\partial}{\partial q_k}M_{11} - \frac{\partial}{\partial q_1}M_{k1}\right)\dot{q}_k = 0\\
C_{12} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial q_2}M_{k1} + \frac{\partial}{\partial q_k}M_{21} - \frac{\partial}{\partial q_1}M_{k2}\right)\dot{q}_k\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \theta_2}M_{11} + \frac{\partial}{\partial \sigma_1}M_{21} - \frac{\partial}{\partial \sigma_1}M_{12}\right)\dot{\sigma}_1\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \theta_2}M_{21} + \frac{\partial}{\partial \theta_2}M_{21} - \frac{\partial}{\partial \sigma_1}M_{22}\right)\dot{\theta}_2\\
&= \frac{\partial}{\partial \theta_2}M_{21}\,\dot{\theta}_2 = -\frac{l\,m_2\,c_2}{2}\,\dot{\theta}_2\\
C_{21} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial q_1}M_{k2} + \frac{\partial}{\partial q_k}M_{12} - \frac{\partial}{\partial q_2}M_{k1}\right)\dot{q}_k\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \sigma_1}M_{12} + \frac{\partial}{\partial \sigma_1}M_{12} - \frac{\partial}{\partial \theta_2}M_{11}\right)\dot{\sigma}_1\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \sigma_1}M_{22} + \frac{\partial}{\partial \theta_2}M_{12} - \frac{\partial}{\partial \theta_2}M_{21}\right)\dot{\theta}_2 = 0\\
C_{22} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial q_2}M_{k2} + \frac{\partial}{\partial q_k}M_{22} - \frac{\partial}{\partial q_2}M_{k2}\right)\dot{q}_k = 0
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich Kreiselkräftematrix

$$\widetilde{C} = -\frac{l\,m_2\,c_2}{2}\,\dot{\theta}_2\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Die zeitliche Ableitung der Massenmatrix berechnet sich zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\widetilde{M}(\theta_2(t)) = -\frac{l\,m_2\,c_2}{2}\,\dot{\theta}_2\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

so dass Matrix

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\widetilde{M} - 2\,\widetilde{C} = -\frac{l\,m_2\,c_2}{2}\,\dot{\theta}_2\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

schiefsymmetrisch ist.

d) Determinante Massenmatrix:

$$\mathrm{Det}(\widetilde{M}) = I_{y_2}^2\, m_{12} + \frac{l^2\, m_2}{4}\left(m_1 + m_2(1 - {s_2}^2)\right)$$

Wegen $1 - {s_2}^2 \geq 0$ gilt $\mathrm{Det}(\widetilde{M}) > 0$. Daher ist $\widetilde{M}$ stets invertierbar und man erhält

$$\widetilde{M}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(\widetilde{M})}\begin{bmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{12} & m_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{Det}(\widetilde{M})}\begin{bmatrix} I_{y_2}^2 + \frac{l^2\, m_2}{4} & \frac{l\, m_2\, s_2}{2} \\ \frac{l\, m_2\, s_2}{2} & m_{12} \end{bmatrix}$$

Damit ergibt sich nach den Beschleunigungen aufgelöst:

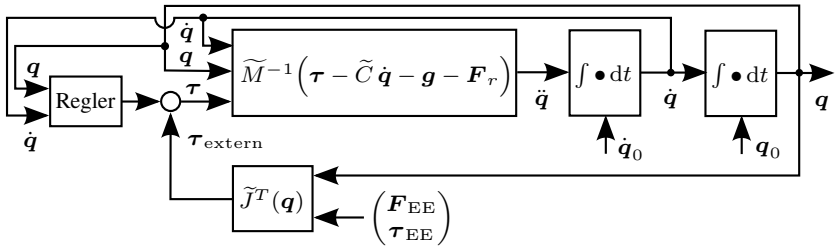
$$\begin{pmatrix} \ddot{\sigma}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \widetilde{M}^{-1}\begin{pmatrix} F_1 + \frac{l\, m_2\, c_2}{2}\,{\dot{\theta}_2}^2 + (m_1 + m_2)\, g_0 \\ \tau_2 - \frac{l\, m_2\, s_2}{2}\, g_0 \end{pmatrix}$$

5.6 Simulation der Bewegungsgleichung eines Manipulators in Kooperation mit dem Menschen

Momente und Kräfte, die vom Menschen am TCP eingeprägt werden, verursachen in den Gelenken zusätzliche Momente und Kräfte gemäß

$$\boldsymbol{\tau} = \widetilde{J}^T(\boldsymbol{q})\begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_{\mathrm{EE}} \\ \boldsymbol{M}_{\mathrm{EE}} \end{pmatrix}.$$

Diese zusätzlichen Momente und Kräfte werden als Störgrößen zum Reglerausgang addiert. Regelstrecke „Manipulator“ ist durch Buch-Signalflussplan 5.2 gegeben. Ergänzt um den Einfluss der externen Kräfte und Momente ergibt sich Signalflussplan 5.1. Zur Bedeutung der Elemente eines Signalflussplans siehe auch Kapitel 8.



Signalflussplan 5.1 Geregelter Manipulator bei Mensch-Roboter-Kollaboration aus Aufgabe 5.6. Der kleine Kreis symbolisiert ein Summationsglied; bei der inversen Dynamik sind die Abhängigkeiten von den Systemzuständen aus Platzgründen weggelassen worden.

http://www.springer.com/978-3-662-52758-0

Grundlagen der Roboter-Manipulatoren – Band 1
Modellbildung von Kinematik und Dynamik
Mareczek, J.
2020, XV, 284 S. 112 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-662-52758-0