

Jörg Mareczek

Grundlagen der Roboter- Manipulatoren – Band 2

Pfad- und Bahnplanung,
Antriebsauslegung, Regelung:
Musterlösungen

11. September 2020

Springer

Version: 1 vom 11. September 2020

Aus: Mareczek, Grundlagen der Roboter-Manipulatoren – Band 2, doi.org/10.1007/978-3-662-59561-9 © Springer-Verlag GmbH Deutschland, 2020

Inhaltsverzeichnis

Lösungen zu Kapitel 6: Pfad- und Bahnplanung	1
1.1 Bahnplanung mit trapezförmigem Geschwindigkeitsverlauf	1
1.2 Herleitung Positionsverlauf	2
1.3 Gelenk- und Arbeitsraum	3
1.4 Bahnplanung mit einem Interpolationspolynom	4
Lösungen zu Kapitel 7: Antriebsauslegung	5
2.1 Drehmomentkonstante	5
2.2 Einphasiges Ersatzmodell für Motor und Umrichter	5
2.3 Motorkonstante	7
2.4 Energieoptimale Auslegung bei beschränkter Gesamtmasse von Motor und Getriebe	8
2.5 k_i - N -Diagramm	9
Lösungen zu Kapitel 8: Regelung	13
3.1 Regelstrecke Manipulator mit Antriebsachsen	13
3.2 Lageregelung	14
3.3 Simulationsmodell	20

Lösungen zu Kapitel 6: Pfad- und Bahnplanung

1.1 Bahnplanung mit trapezförmigem Geschwindigkeitsverlauf

Gegeben: $\dot{\theta}_{\max} = 6^\circ/\text{s}$, $\Delta t = 16 \text{ s}$, $\Delta\theta = 60^\circ$.

Da der maximale Betrag der Geschwindigkeit (und nicht der Beschleunigung) spezifiziert ist, liegt Fall 2 des Bahnplanungs-Algorithmus aus Buch-Abschnitt 6.3.2.2 vor. Damit ergeben sich die Grenzggeschwindigkeiten aus der Existenzbedingung zu:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{\text{unten}} &= \frac{|\Delta\theta|}{\Delta t} = 15/4^\circ/\text{s} \\ \dot{\theta}_{\text{oben}} &= 2 \dot{\theta}_{\text{unten}} = 15/2^\circ/\text{s}\end{aligned}$$

Wegen $\dot{\theta}_{\text{unten}} < \dot{\theta}_{\max} \leq \dot{\theta}_{\text{oben}}$ existiert eine Lösung:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_{\max} &= \frac{\dot{\theta}_{\max}^2}{\Delta t \dot{\theta}_{\max} - |\Delta\theta|} = 1^\circ/\text{s}^2 \\ \Delta t_{\text{lin}} &= \Delta t - 2 \frac{\dot{\theta}_{\max}}{\ddot{\theta}_{\max}} = 4 \text{ s} \\ \Delta t_b &= \frac{\dot{\theta}_{\max}}{\ddot{\theta}_{\max}} = 6 \text{ s}\end{aligned}$$

Probe: $2 \Delta t_b + \Delta t_{\text{lin}} = 12 \text{ s} + 4 \text{ s} = 16 \text{ s} \stackrel{!}{=} \Delta t$.

Folgende Bahngleichungen sind normiert auf Einheiten:

- Positionen in $[\circ]$
- Geschwindigkeiten in $[\circ/\text{s}]$
- Beschleunigungen in $[\circ/\text{s}^2]$

Mit Zeitintervallen $t_1 : 0 \leq t < 6$, $t_2 : 0 \leq t - 6 < 4$ und $t_3 : 0 \leq t - 10 < 6$ folgt

$$\ddot{\theta}(t) = \begin{cases} 1 & : t_1 \\ 0 & : t_2 \\ -1 & : t_3 \end{cases}$$

$$\dot{\theta}(t) = \begin{cases} t & : t_1 \\ 6 & : t_2 \\ 16 - t & : t_3 \end{cases}$$

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & : t_1 \\ 6t - 18 & : t_2 \\ \frac{1}{2}(120 - (16 - t)^2) & : t_3 \end{cases}$$

Siehe Abb. 1.1 für die zugehörigen Zeitverläufe der Trajektorien.

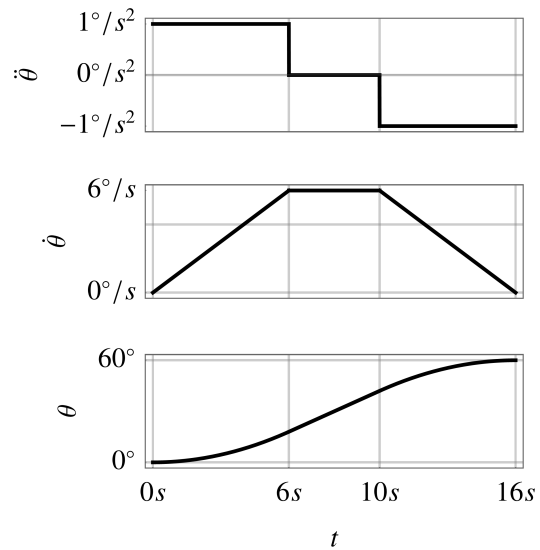


Abb. 1.1 Trajektorien der Bahnplanung aus Aufgabe 6.1

1.2 Herleitung Positionsverlauf

Phase 1: trivial.

Phase 2: $q(t_1) + s \ddot{q}_{\max} \Delta t_b \int_{\tau=t_1}^{\tau=t} 1 \, d\tau = q(t_1) + s \ddot{q}_{\max} \Delta t_b (t - t_0 - \Delta t_b)$

Phase 3: $q(t_2) + s \ddot{q}_{\max} \int_{\tau=t_2}^{\tau=t} (t_e - \tau) \, d\tau = q(t_2) - \frac{s \ddot{q}_{\max}}{2} [(t_e - t)^2]_{t_2}^t$

$$\begin{aligned}
&= q(t_2) - \frac{s \ddot{q}_{\max}}{2} ((t_e - t)^2 - (t_e - t_2)^2) = q(t_2) - \frac{s \ddot{q}_{\max}}{2} ((t_e - t)^2 - \Delta t_b^2) \\
&= q_0 - \underbrace{\frac{1}{2} s \ddot{q}_{\max} \Delta t_b^2 + (\Delta t_b + \Delta t_{\text{lin}}) s \ddot{q}_{\max} \Delta t_b - \frac{s \ddot{q}_{\max}}{2} ((t_e - t)^2 - \Delta t_b^2)}_{= q(t_2)} \\
&= q_0 + s \ddot{q}_{\max} \left(-\frac{1}{2} \Delta t_b^2 + (\Delta t_b + \Delta t_{\text{lin}}) \Delta t_b - \frac{1}{2} (t_e - t)^2 + \frac{1}{2} \Delta t_b^2 \right)
\end{aligned}$$

1.3 Gelenk- und Arbeitsraum

Abb. 1.2 zeigt oben den Gelenkraum, unten den Positionsarbeitsraum. Beim Gelenkraum werden im Koordinatensystem (Achsen θ_2 - und σ_1) Maxima und Minima der jeweiligen Gelenkvariablen eingetragen. Diese begrenzen den rechteckförmigen Gelenkraum.

Der Positionsarbeitsraum wird in Weltkoordinatenachsen dargestellt und kennzeichnet alle möglichen kartesischen Positionen des Endeffektors. Zur geometrischen Konstruktion des Positionsarbeitsraums, wird die Linearachse in seine maximale Position (ganz rechts) positioniert, das heißt das Drehgelenk liegt bei $x_0 = 0.1$ (eingezeichnete Position des Manipulators). In dieser Position wird das Drehgelenk in seinem gesamten Bereich gedreht. Daraus ergibt sich das ganz rechts liegende Kreissegment. Verschiebt sich das erste Gelenk von dieser Position nach links, so verschiebt sich das Kreissegment um diese Distanz ebenfalls nach links. Der gesuchte Positionsarbeitsraum ergibt sich so aus der Vereinigungsmenge aller verschobenen Kreissegmente. Die Begrenzung in x_0 -Richtung besteht oben und unten jeweils aus einer Strecke, die parallel zur z_0 -Achse verläuft und Länge 0.3 besitzt.

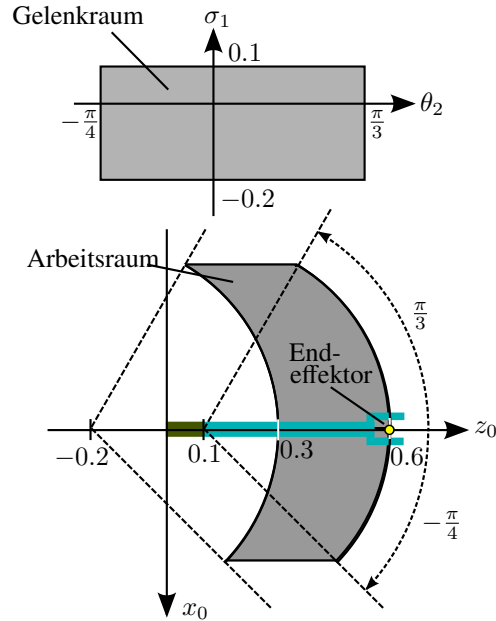


Abb. 1.2 Lösung zu Aufgabe 6.3; oben: Gelenkraum; unten: Positionsarbeitsraum und Manipulator in Nullposition; Konstruktionslinien sind gestrichelt gekennzeichnet

Die maximale Länge in x_0 -Richtung berechnet sich aus $0.5 \cdot \cos(\pi/3) = 0.5 \cdot 1/2 = 0.25$.

1.4 Bahnplanung mit einem Interpolationspolynom

Mit Randbedingungen $\dot{q}(0) = 0$, $\ddot{q}(0) = 0$, $\dot{q}(t_e) = 0$ und $\ddot{q}(t_e) = 0$ liegen insgesamt $n = 7$ Nebenbedingungen vor. Daher Ansatz mit einem Polynom 6. Ordnung:

$$q(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_6 t^6.$$

Die zeitlichen Ableitungen berechnen sich zu

$$\dot{q}(t) = a_1 + 2 a_2 t + 3 a_3 t^2 + 4 a_4 t^3 + 5 a_5 t^4 + 6 a_6 t^5$$

$$\ddot{q}(t) = 2 a_2 + 6 a_3 t + 12 a_4 t^2 + 20 a_5 t^3 + 30 a_6 t^4.$$

Wegen

$$q(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0$$

$$\dot{q}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0$$

$$\ddot{q}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 0$$

verbleibt das in der Ordnung reduzierte Gleichungssystem

$$\frac{a_3}{8} + \frac{a_4}{16} + \frac{a_5}{32} + \frac{a_6}{64} = \frac{3}{4}$$

$$8 a_3 + 16 a_4 + 32 a_5 + 64 a_6 = 1$$

$$12 a_3 + 32 a_4 + 80 a_5 + 192 a_6 = 0$$

$$12 a_3 + 48 a_4 + 160 a_5 + 480 a_6 = 0$$

mit Lösung

$$a_3 = \frac{1459}{108}$$

$$a_4 = -\frac{2783}{144}$$

$$a_5 = \frac{1351}{144}$$

$$a_6 = -\frac{331}{216}.$$

Dies ergibt die in Abb. 1.3 dargestellte Bahn.

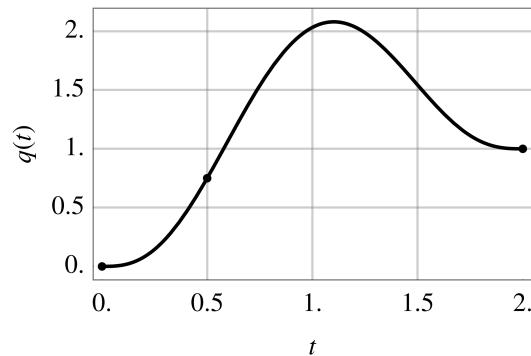


Abb. 1.3 Lösung zu Aufgabe 6.4: Interpolations-Bahn.

Lösungen zu Kapitel 7: Antriebsauslegung

2.1 Drehmomentkonstante

- a) Effektivwert I_{eff} und Amplitude $\hat{I}$ hängen zusammen gemäß

$$I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{I}.$$

Daraus folgt für die Amplitude $\hat{I} = \sqrt{2} \cdot 10 \text{ A}$ und weiter für die Drehmomentkonstante

$$k_i = \frac{\tau}{\hat{I}} = \frac{1 \text{ Nm}}{\sqrt{2} \cdot 10 \text{ A}}.$$

- b)

$$k_i = \frac{1 \text{ Nm}}{10 \text{ A}}$$

2.2 Einphasiges Ersatzmodell für Motor und Umrichter

- a) Messungen des Widerstands Klemme-Klemme mit einem Milli-Ohmmeter. Dabei ist eine 4-Punkt-Messung erforderlich, da die Ohmschen Widerstände der Messkabel in der Größenordnung des zu messenden Widerstands liegen und damit die Messung stark verfälschen würden.

Zu erwartendes Messergebnis: $R_{\text{KK}} = 2 R_1 = 2 \cdot 327.5 \text{ m}\Omega = 655 \text{ m}\Omega$

- b) Stromamplitude $\hat{I} = \tau/k_i = 1 \text{ Nm}/0.180 \text{ Nm/A} = 5.5 \text{ A}$

- c) Motorkonstante $k_M = k_i/\sqrt{R_{\text{DC}}} = k_i/\sqrt{\frac{3}{2} R_1} = 257 \text{ mNm}/\sqrt{\text{W}}$

$$\Rightarrow \text{Kupferverlustleistung } P_{\text{CU}} = (\tau/k_M)^2 = (1 \text{ Nm}/0.257 \text{ Nm}/\sqrt{\text{W}})^2 = 15.1 \text{ W}$$

d) Drehmomentbildender Spannungsanteil: $U_R = R_{\text{DC}} I = 2.73 \text{ V}$

Drehgeschwindigkeit: $\omega = 80 \cdot \frac{\pi}{3} \text{ rad/s}$

EMK-Spannung: $U_{\text{EMK}} = k_i \omega = 15.1 \text{ V}$

Induktiver Spannungsanteil:

$$U_L = Z_p \omega L_{\text{DC}} I = 10 \cdot 80 \cdot \frac{\pi}{3} \text{ rad/s} \cdot \frac{3}{2} \cdot 675 \mu\text{H} \cdot 5.5 \text{ A} = 4.71 \text{ V}$$

e) Zwischenkreisspannung:

$$\begin{aligned} U_D &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(U_R + U_{\text{EMK}})^2 + U_L^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(2.73 \text{ V} + 15.1 \text{ V})^2 + (4.71 \text{ V})^2} = 21.3 \text{ V} \end{aligned}$$

f) Leistungsaufnahme:

$$\begin{aligned} P &= P_{\text{mech}} + P_{\text{CU}} = \omega \tau + P_{\text{CU}} \\ &= 80 \cdot \frac{\pi}{3} \text{ rad/s} \cdot 1 \text{ Nm} + 15.1 \text{ W} = 98.9 \text{ W} \end{aligned}$$

Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{P_{\text{mech}}}{P_{\text{mech}} + P_{\text{CU}}} = \frac{\tau \omega}{\tau \omega + P_{\text{CU}}} = 84.7 \%$$

g) Mechanische Leistung des langsamen Lastfalls:

$$P_{\text{mech,langsam}} = 1 \text{ Nm} \cdot 10 \cdot \frac{\pi}{3} \text{ rad/s} = 10.5 \text{ W}.$$

Aus dem Leistungsgleichgewicht folgt für den Zwischenkreisstrom des langsamen Betriebspunkts:

$$I_{D,\text{langsam}} = \frac{P_{\text{mech,langsam}} + P_{\text{CU}}}{U_D} = \frac{10.5 \text{ W} + 15.1 \text{ W}}{30 \text{ V}} = 0.85 \text{ A}$$

Analog folgt der Zwischenkreisstrom beim schnelleren Betriebspunkt zu

$$I_{D,\text{schnell}} = \frac{80 \cdot \frac{\pi}{3} \text{ W} + 15.1 \text{ W}}{30 \text{ V}} = 3.30 \text{ A}.$$

h) Da beide Lastfällen das selbe Moment enthalten, tritt die minimal notwendige Zwischenkreisspannung beim schnelleren Lastfall auf. Nach Teilaufgabe e) beträgt diese 21.3 V. Wegen

$$I_D = \frac{P_{\text{mech}} + P_{\text{CU}}}{U_D}$$

erhöht sich der Zwischenkreisstrom mit sinkender Zwischenkreisspannung und steigender mechanischer Leistung. Damit folgt für den maximalen Zwischenkreisstrom

$$I_{D,\max} = \frac{\tau \omega_{\text{schnell}} + P_{\text{CU}}}{21.3 \text{ V}} = \frac{1 \text{ Nm} \cdot 80 \cdot \frac{\pi}{3} \text{ rad/s} + 15.1 \text{ W}}{21.3 \text{ V}} = 4.64 \text{ A}.$$

2.3 Motorkonstante

- a) Für Motorenmasse $m = 1 \text{ kg}$ berechnen sich die Motorkonstanten gemäß

$$k_M = \frac{m}{\frac{\Delta m}{\Delta k_M}}$$

mit Steigungen $\frac{\Delta m}{\Delta k_M}$ aus Buch-Abb. 7.29 zu den Werten aus Tabelle 2.1.

Tabelle 2.1 Lösung von Aufgabe 7.3 a): Motorkonstanten.

Hersteller	A	B	C	D
$\frac{\Delta m}{\Delta k_M}$ in $\sqrt{\text{W}}/(\text{kg Nm})$	1.3	3.8	10.2	6.8
k_M in $\text{Nm}/\sqrt{\text{W}}$	0.77	0.26	0.098	0.15

- b) Bei zwei Motoren zu je 500 g muss jeder Motor nur halbes Moment $\tau/2$ liefern. Mit Motorkonstante

$$k_{M,500\text{g}} = 385 \text{ mNm}/\sqrt{\text{W}}$$

folgt damit Verlustleistung

$$P_{\text{CU},2\text{Motoren}} = 2 \left(\frac{\tau/2}{k_{M,500\text{g}}} \right)^2 = 2 \left(\frac{\tau}{2 k_{M,500\text{g}}} \right)^2.$$

Bei einem Motor zu 1 kg verdoppelt sich die Motorkonstante, und es muss das volle Moment τ aufgebracht werden. Damit folgt

$$k_{M,1\text{kg}} = 2 k_{M,500\text{g}}$$

und weiter

$$P_{\text{CU},1\text{Motor}} = \left(\frac{\tau}{2 k_{M,500\text{g}}} \right)^2 = \frac{1}{2} P_{\text{CU},2\text{Motoren}}$$

Schlussfolgerung: Aufteilung der Motorenmasse in parallel arbeitende Motoren ist kontraproduktiv hinsichtlich der Kupfer-Verlustleistung.

2.4 Energieoptimale Auslegung bei beschränkter Gesamtmasse von Motor und Getriebe

Motor und Getriebe besitzen nach (Buch 7.48) eine Gesamtverlustleistung von

$$P_{v,\text{ges}} = \left(\frac{\tau_{\text{ab}}}{N \eta_g(N) k_M} \right)^2 + P_{\text{ab}} \frac{1 - \eta_g(N)}{\eta_g(N)}.$$

Für eine gegebene Getriebemasse m_g verbleibt für den Motor noch Masse

$$m_{\text{motor}}(N) = 0.5 \text{ kg} - m_g(N).$$

Daraus folgt Motorkonstante

$$k_M(N) = \frac{m_{\text{motor}}(N)}{\frac{\Delta m}{\Delta k_M}} = \frac{500 \text{ g} - m_g(N)}{1300 (\text{g } \sqrt{\text{W}}) / \text{Nm}}.$$

Eingesetzt ergibt sich

$$P_{v,\text{ges}}(m_g, \eta_g, N) = \left(\frac{\tau_{\text{ab}}}{N \eta_g(N) \frac{500 \text{ g} - m_g(N)}{1300 (\text{g } \sqrt{\text{W}}) / \text{Nm}}} \right)^2 + \tau_{\text{ab}} \omega_{\text{ab}} \frac{1 - \eta_g(N)}{\eta_g(N)}.$$

Für Energieoptimalität wird für N immer der größte Wert innerhalb einer Getriebestufe gewählt. Mit den gegebenen Werten folgen die Gesamtverlustleistungen in Abhängigkeit von der Übersetzung gemäß Tabelle 2.2.

Bauform	Direct-Drive	sonder	1-stufig	2-stufig	3-stufig	4-stufig
$P_{v,\text{ges}}$ in W	6.76	4.37	2.17	2.56	4.12	5.89

Tabelle 2.2 Lösung von Aufgabe 7.4: Verlustleistungen in Abhängigkeit von der Getriebeübersetzung für konstante Gesamtmasse. Die energieoptimale Lösung folgt daraus zur 1-stufigen Variante.

Die Lösung mit minimaler Verlustleistung liefert die Variante mit dem 1-stufigen Getriebe mit $N = 6$ und Masse $m_g = 260 \text{ g}$. Die Motorenmasse beträgt dabei $500 \text{ g} - 260 \text{ g} = 240 \text{ g}$.

2.5 k_i - N -Diagramm

- a) Da $\eta_g = 0.81 = \text{const}$, kann die untere Grenze der Getriebeübersetzung direkt aus (Buch 7.45e) berechnet werden:

$$N_{\min} = \frac{|\tau_{\text{ab}}|}{k_M \eta_g \sqrt{P_{\text{CU,max}}}} = \frac{10 \text{ Nm}}{31.12 \text{ mNm}/\sqrt{\text{W}} \cdot 0.81 \sqrt{10 \text{ W}}} \approx 125.13$$

Aus (Buch 7.45c) folgt

$$N_{\max} = \frac{\omega_{\text{an,max}}}{|\omega_{\text{ab}}|} = \frac{4000 \text{ U/min}}{100 \text{ U/min}} = 40.$$

Schlussfolgerung: Wegen $N_{\min} > N_{\max}$ existiert keine Lösung!

b) $N_{\max} = \frac{20\,000 \text{ U/min}}{100 \text{ U/min}} = 200$

- c) Nach (Buch 7.46) gilt für die Strombegrenzungslinie

$$\bar{k}_i(N) = \frac{|\tau_{\text{ab}}|}{\eta_g I_{\max}} \frac{1}{N} = \frac{10 \text{ Nm}}{0.81 \cdot 10 \text{ A}} \frac{1}{N} \approx 1.235 \text{ Nm/A} \frac{1}{N}.$$

Nach (Buch 7.47) ergibt sich die Spannungsbegrenzungslinie durch

$$\bar{k}_i(N) = \frac{U_D}{\mu} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\tau_{\text{ab}}}{k_M^2 N \eta_g} + N \omega_{\text{ab}}\right)^2 + \left(\frac{Z_p}{k_L^2} \frac{\tau_{\text{ab}} \omega_{\text{ab}}}{\eta_g}\right)^2}}$$

mit

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tau_{\text{ab}}}{k_M^2 N \eta_g} + N \omega_{\text{ab}}\right)^2 &= \left(\frac{10 \text{ Nm}}{(31.12 \text{ mNm}/\sqrt{\text{W}})^2 \cdot 0.81 N} + \frac{10 \pi \text{ rad/s}}{3} N\right)^2 \\ &= \left(12\,682.5 \text{ rad/s} \frac{1}{N} + 10.472 \text{ rad/s} N\right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{Z_p}{k_L^2} \frac{\tau_{\text{ab}} \omega_{\text{ab}}}{\eta_g}\right)^2 &= \left(\frac{2}{(2.717 \text{ Nm}/\sqrt{\text{W s}})^2} \frac{10 \text{ Nm} \frac{10 \pi \text{ rad/s}}{3}}{0.81}\right)^2 \\ &\approx 1226.84 \left(\frac{\text{W}^2 \text{ s}}{(\text{Nm})^2}\right)^2 = 1226.84 \left(\frac{(\text{Nm})^2 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \text{ s}}{(\text{Nm})^2}\right)^2 \\ &\stackrel{(\text{Buch 7.9})}{=} 1226.84 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \end{aligned}$$

und

$$\frac{U_D}{\mu} = \frac{24 \text{ V}}{2/\sqrt{3}} \approx 20.7846 \text{ V}.$$

Wegen

$$\frac{\text{V}}{\text{rad/s}} = \frac{\text{V}}{\frac{\text{W}}{\text{Nm}}} = \frac{\text{V Nm}}{\text{V A}} = \frac{\text{Nm}}{\text{A}}$$

folgt schließlich

$$\underline{k}_i(N) = \frac{20.7846 \text{ Nm/A}}{\sqrt{\left(10.472 N + \frac{12682.5}{N}\right)^2 + 1226.84}}.$$

Damit berechnen sich die Punkte auf den Grenzlinien nach Tabelle 2.3. Das zugehörige k_i - N -Diagramm zeigt Abb. 2.1.

Tabelle 2.3 Lösung von Aufgabe 7.5 c): Punkte auf den Grenzlinien im k_i - N -Diagramm.

N	113	128	156	216
Spannungsgrenze: k_i in mNm/A	16.04	14.43	12.12	8.955
Stromgrenze: $\underline{k}_i$ in mNm/A	10.93	9.645	7.914	5.716

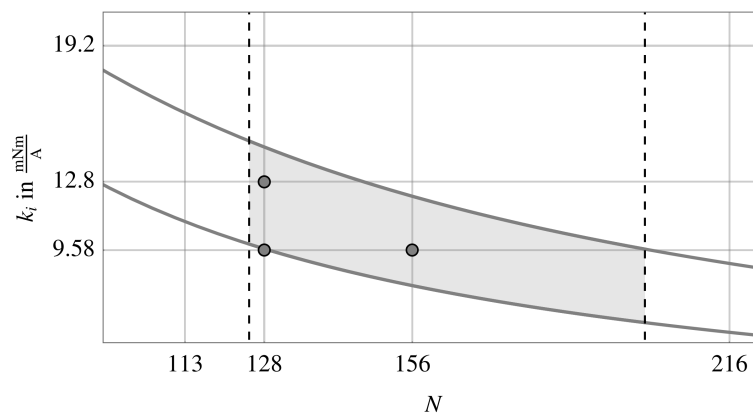


Abb. 2.1 k_i - N -Diagramm mit zulässigen Kombinationen für Aufgabe 7.5 c).

Im Rahmen der Zeichengenauigkeit lassen sich aus Abb. 2.1 die zulässigen Kombinationen

$$\left(\frac{k_i}{\text{mNm/A}}, N \right) \in \{(9.58, 156), (12.8, 128), (9.58, 128)\}$$

ablesen.

Für minimale Geräuschbelastung wird eine möglichst niedrige Motorendrehzahl angestrebt und daher die kleinste Übersetzung gewählt. Aus den verbleibenden beiden Kombinationen wird die Kombination mit der größten Drehmomentkonstante gewählt, um Drehmomentreserven zu erhalten. Dies führt auf $N = 128$ mit $k_i = 12.8 \text{ mNm/A}$.

d) Drehmoment an der Motorwelle nach (Buch 7.42) :

$$\tau_{\text{an}} = \frac{\tau_{\text{ab}}}{N \eta_g} = \frac{10 \text{ Nm}}{128 \cdot 0.81} \approx 96.45 \text{ Nm}$$

Drehzahl an der Motorwelle nach (Buch 7.39) :

$$\omega_{\text{an}} = N \omega_{\text{ab}} = 128 \cdot 100 \text{ U/min} = 12\,800 \text{ U/min}.$$

e) Kupferverluste nach (Buch 7.37) :

$$P_{\text{CU}} = \left(\frac{\tau_{\text{an}}}{k_M} \right)^2 = \left(\frac{\tau_{\text{ab}}}{N \eta_g k_M} \right)^2 = \left(\frac{10 \text{ Nm}}{128 \cdot 0.81 \cdot 31.2 \text{ mNm}\sqrt{W}} \right)^2 \approx 9.557 \text{ W}$$

Getriebeverluste nach (Buch 7.43b) :

$$P_{\text{v,g}} = P_{\text{ab}} \frac{1 - \eta_g}{\eta_g} = 10 \text{ Nm} \frac{10 \pi \text{ rad/s}}{3} \frac{1 - 0.81}{0.81} \approx 24.56 \text{ W}$$

Daraus folgt Gesamtverlustleistung

$$P_{\text{v,ges}} = P_{\text{CU}} + P_{\text{v,g}} \approx 9.557 \text{ W} + 24.56 \text{ W} \approx 34.12 \text{ W}.$$

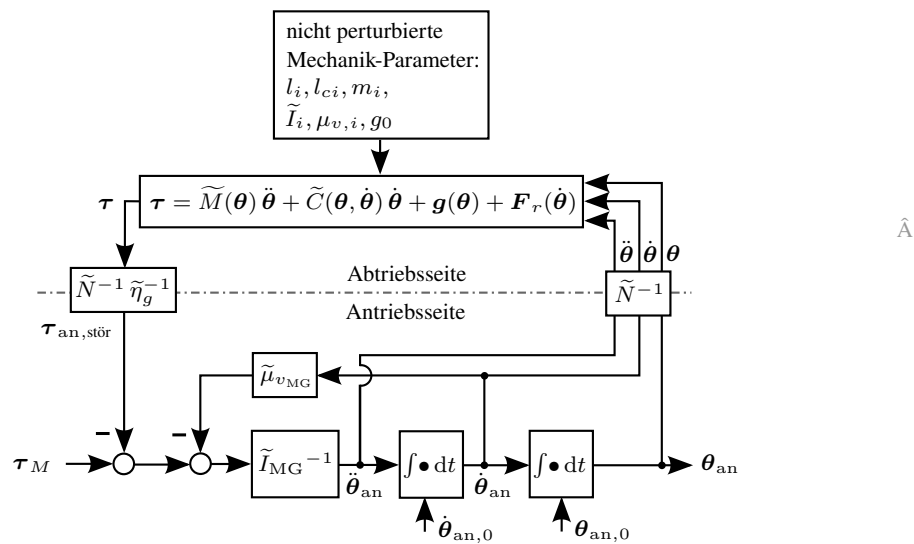
f) Änderungsvorschläge der Spezifikationen zur weiteren Reduzierung der Geräuschbelastung:

- Bessere thermische Anbindung. Dadurch steigt die maximal zulässige Motorverlustleistung, so dass die Getriebeübersetzung reduziert werden kann. Dies führt zu einer geringeren Antriebsdrehzahl und damit zu einer potentiellen Geräuschreduzierung (falls keine Resonanzen in der Nähe liegen).
- Verwendung einer höherwertigeren Motorentechnologie zur Erhöhung der Motorkonstante. Dadurch steigt das thermisch zulässige Motorwellenmoment. Die Getriebeübersetzung kann abgesenkt werden mit den selben Folgen wie oben beschrieben.

Lösungen zu Kapitel 8: Regelung

3.1 Regelstrecke Manipulator mit Antriebsachsen

- a) Die Lösung ist in Signalflussplan 3.1 gegeben.
Hinweis: Die enthaltenen vektorwertigen Signalleitungen sind nicht durch einen Doppelstrich gekennzeichnet.



Signalflussplan 3.1 Lösung zu Aufgabe 8.1 a).

- b) Es wird eine Motorstromregelung mit idealem Folgeverhalten angenommen:
 $\tau_M^s = \tau_M^{\text{ist}}$. In Realität weist jedoch der Motorstrom stets eine Restdynamik auf.

3.2 Lageregelung

- a) Stellgröße: $\tau_{M,1}$, Regelgröße: $\theta_{\text{an},1}$, Regelfehler: $e_1 = \theta_{\text{an},1}^s - \theta_{\text{an},1} = N_1 \theta_1^s - \theta_{\text{an},1}$

Moment von Gelenk 1:

$$\tau_1 = \underbrace{m_{11}(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\theta}_1 + m_{12}(\boldsymbol{\theta}) \ddot{\theta}_2}_{\mathbf{m}_1(\boldsymbol{\theta})^T \ddot{\boldsymbol{\theta}}} + \underbrace{c_{11}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \dot{\theta}_1 + c_{12}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \dot{\theta}_2}_{\mathbf{c}_1(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})^T \dot{\boldsymbol{\theta}}} + g_1(\boldsymbol{\theta}) + F_{r,1}(\dot{\boldsymbol{\theta}})$$

Damit folgt die gesuchte Störgröße zu

$$\tau_{\text{an,stör},1} = \frac{\tau_1}{N_1 \eta_{g,1}}$$

- b) Wegen $\ddot{\boldsymbol{\theta}}^s = \dot{\boldsymbol{\theta}}^s = 0$ und $\dot{e}_1 = N_1 \dot{\theta}_1^s - \dot{\theta}_{\text{an},1} = -\dot{\theta}_{\text{an},1}$ folgt

$$\tau_{\text{an},r,1} = k_{p,1} e_1 + k_{d,1} \dot{e}_1 = k_{p,1} (N_1 \theta_1^s - \theta_{\text{an},1}) - k_{d,1} \dot{\theta}_{\text{an},1}$$

- c) Fehler-Differenzialgleichung für das erste Gelenk:

$$\ddot{e}_1 + \frac{\mu_{v_{\text{MG},1}} + k_{d,1}}{I_{\text{MG},1}} \dot{e}_1 + \frac{k_{p,1}}{I_{\text{MG},1}} e_1 = \frac{\tau_{\text{an,stör},1}}{I_{\text{MG},1}}$$

- d) Hinweis: Da es sich bei rad um eine Pseudo-Einheit handelt, darf diese (beliebig) hinzugefügt oder weggelassen werden. Dies betrifft alle folgenden Teilaufgaben.

Auslegung Reglerparameter $k_{p,1}, k_{d,1}$ für Gelenk 1 nach Auslegungsprozess 8.6:

Schritt 1: $D_1 = 1$

Schritt 2: Kleinste mechanische Eigenfrequenz im System: $\omega_{\min} = 2\pi f_{\min} = 2\pi 100 \text{ rad/s}$.

Kreisfrequenz: $\omega_0 = \frac{\omega_{\min}}{2} = \pi 100 \text{ rad/s}$

Schritt 3: Resonanzbedingte Obergrenze:

$$\begin{aligned} \bar{k}_{p,1} &= \omega_0^2 I_{\text{MG},1} = (\pi 100 \text{ rad/s})^2 2000 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \\ &= 2\pi^2 \text{ kg m}^2/\text{s}^2 = 2\pi^2 \text{ Nm/rad} \approx 19.8 \text{ Nm/rad} . \end{aligned}$$

Für bestmögliche Störgrößenunterdrückung wird $k_p = \bar{k}_p$ gesetzt.

Schritt 4:

$$\begin{aligned}
k_{d,1} &= 2 D_1 \sqrt{I_{\text{MG},1} \bar{k}_{p,1} - \mu_{v_{\text{MG},1}}} \\
&= 2 \sqrt{2000 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \frac{\text{s}^2}{\text{s}^2} 2 \pi^2 \text{ Nm}} \\
&= 2 \sqrt{2000 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \frac{\text{s}^2}{\text{s}^2} 2 \pi^2 \text{ Nm}} \\
&= \frac{\pi}{25} \text{ Nm/rad/s} \approx 0.126 \text{ Nm/rad/s}
\end{aligned}$$

e) Abklingkoeffizient: $\delta_1 = D_1 \omega_0 = \pi 100 \text{ rad/s}$

Anfänglicher Regelfehler: $e_0 = N_1 \Delta\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

Konstanten aus Anfangsbedingungen:

$$c_1 = e_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}, \quad c_2 = e_0 \delta_1 = \pi^2 50 \text{ rad/s}$$

Periodendauer: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{100 \pi \text{ rad/s}} = \frac{1}{50} \text{ s} = 0.02 \text{ s}$

Zeitliche Verläufe:

$$\begin{aligned}
e_1(t) &= (c_1 + c_2 t) e^{-\delta_1 t} = \left(\frac{\pi}{2} \text{ rad} + \pi^2 50 \text{ rad/s} t \right) e^{-100 \pi t/\text{s}} \\
\dot{e}_1(t) &= (c_2 - \delta_1 (c_1 + c_2 t)) e^{-\delta_1 t} \\
&= \left(\pi^2 50 \text{ rad/s} - \pi 100 \text{ 1/s} \left(\frac{\pi}{2} \text{ rad} + \pi^2 50 \text{ rad/s} t \right) \right) e^{-100 \pi t/\text{s}} \\
&= -155031 \text{ rad/s}^2 t e^{-100 \pi t/\text{s}} \\
\tau_{M,1}(t) &= \tau_{\text{an},r,1} = k_{p,1} e_1(t) + k_{d,1} \dot{e}_1(t) \\
&= 2 \pi^2 \text{ Nm/rad} \left(\frac{\pi}{2} \text{ rad} + \pi^2 50 \text{ rad/s} t \right) e^{-100 \pi t/\text{s}} \\
&\quad - \frac{\pi}{25} \text{ Nm/rad/s} 155031 \text{ rad/s}^2 t e^{-100 \pi t/\text{s}} \\
&\approx e^{-100 \pi t/\text{s}} (31.0063 - 9740.86 t/\text{s}) \text{ Nm}
\end{aligned}$$

Um die Zeiten als Vielfaches von T_0 im Diagramm antragen zu können, wird die Lösung entsprechend umgerechnet:

$$\begin{aligned}
e_1(t/T_0) &= (c_1 + c_2 t) e^{-\delta_1 t} = e_0 (1 + D_1 2 \pi t/T_0) e^{-D_1 2 \pi t/T_0} \\
&= \frac{\pi}{2} \text{ rad } (1 + 2 \pi t/T_0) e^{-2 \pi t/T_0} \\
\dot{e}_1(t/T_0) &= (c_2 - \delta_1 (c_1 + c_2 t)) e^{-\delta_1 t} \\
&= (e_0 \delta_1 - \delta_1 (e_0 + e_0 D_1 2 \pi t/T_0)) e^{-D_1 2 \pi t/T_0} \\
&= -e_0 D_1^2 4 \pi^2 \frac{1}{T_0} \frac{t}{T_0} e^{-D_1 2 \pi t/T_0} = -100 \pi^3 \text{ rad/s } \frac{t}{T_0} e^{-2 \pi t/T_0} \\
\tau_{M,1}(t/T_0) &= \dots = \pi^3 \left(1 - 2 \pi \frac{t}{T_0}\right) \text{ Nm } e^{-2 \pi t/T_0}
\end{aligned}$$

Hinweise zur Umrechnung der Drehgeschwindigkeits-Einheiten: Siehe Anmerkung 6.5.

Extremum der Geschwindigkeit bei

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} e_1(t) &= \frac{d}{dt} (c_2 - \delta_1 (c_1 + c_2 t)) e^{-\delta_1 t} \\
&= -\delta_1 c_2 e^{-\delta_1 t} + (c_2 - \delta_1 (c_1 + c_2 t)) (-\delta_1) e^{-\delta_1 t} \\
&= \left(-\delta_1 c_2 + (c_2 - \delta_1 (c_1 + c_2 t)) (-\delta_1) \right) e^{-\delta_1 t} \\
&= \left(c_1 \delta_1 + c_2 (t \delta_1 - 2) \right) \delta_1 e^{-\delta_1 t}
\end{aligned}$$

Daraus folgt das Extremum bei

$$\begin{aligned}
c_1 \delta_1 + c_2 (t_{\text{extr}} \delta_1 - 2) &= 0 \\
\iff t_{\text{extr}} &= -\frac{c_1}{c_2} + \frac{2}{\delta_1} = \frac{1}{\pi 100} \text{ s} \approx 0.16 T_0
\end{aligned}$$

Zur Anfertigung der Zeitverläufe dient Wertetabelle 3.1. Das Einschwingverhalten zeigt Abb. 3.1.

t/T_0	0	0.16	0.5	1	3
$e_1(t)$ in °	90.	66.0425	16.1077	1.22408	≈ 0
$\dot{e}_1(t)$ in U/min	0.	-1733.57	-639.756	-55.2928	≈ 0
$\tau_{M,1}$ in Nm	31.0063	-0.0602442	-2.86953	-0.305909	≈ 0

Tabelle 3.1 Wertetabelle für Aufgabe 8.2 e)

Maximaler Betrag der Drehgeschwindigkeit: 1734 U/min.

Maximaler Betrag des Motormoments: 31 Nm.

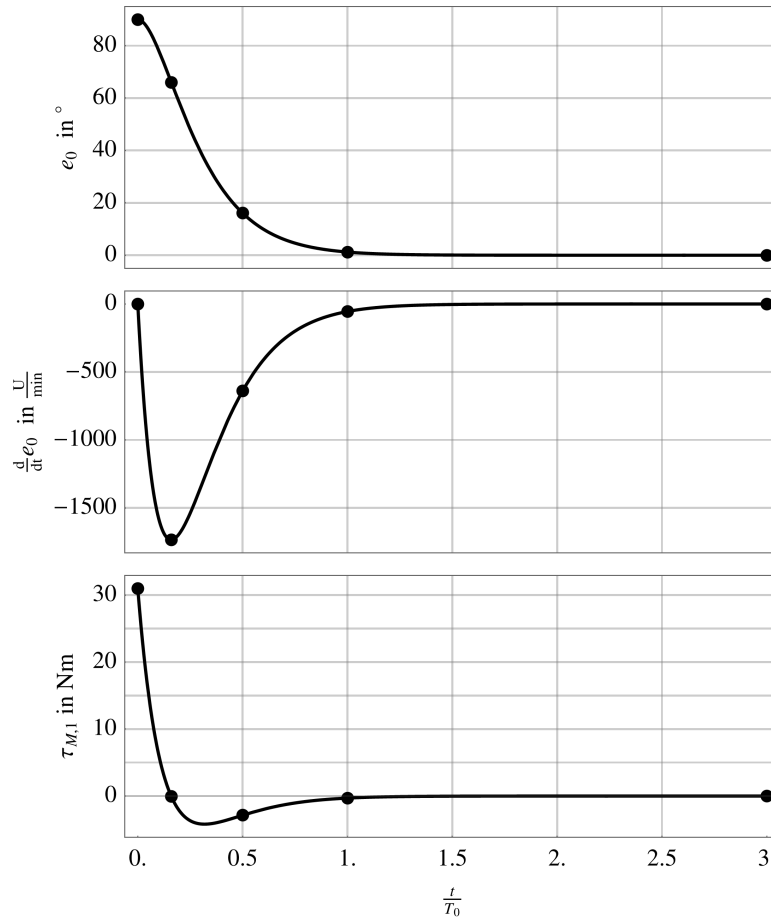


Abb. 3.1 Lösung zu Aufgabe 8.2 e).

f) Maximum des Motormoments bei $t = 0$: $\tau_{M,1}(t = 0) = k_{p,1} e_0$.

Stellwertbegrenzung: $k_{p,1} e_0 \leq 1 \text{ Nm} \implies k_{p,1} \leq \frac{1 \text{ Nm}}{\pi/2 \text{ rad}} = \frac{2}{\pi} \text{ Nm/rad}$. Für bestmögliche Störgrößenunterdrückung Wahl: $k_{p,1} = \frac{2}{\pi} \text{ Nm/rad}$.

Weiter mit Schritt 4 des Auslegungsprozesses:

$$\begin{aligned}
 k_{d,1} &= 2 D_1 \sqrt{I_{\text{MG},1} k_{p,1}} - \mu_{v_{\text{MG},1}} = 2 \sqrt{2000 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \frac{\text{s}^2}{\text{s}^2} \frac{2}{\pi} \text{ Nm}} \\
 &= 2 \sqrt{2000 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 \frac{\text{s}^2}{\text{s}^2} \frac{2}{\pi} \text{ Nm}} = \frac{1}{25 \sqrt{\pi}} \text{ Nm/rad/s} \\
 &\approx 0.02256 \text{ Nm/rad/s}
 \end{aligned}$$

g) Kreisfrequenz: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{p,1}}{I_{MG,1}}} = \frac{100}{\sqrt{\pi}} \text{ rad/s} \approx 56.42 \text{ rad/s}$

Abklingkoeffizient: $\delta_1 = D_1 \omega_0 = \frac{100}{\sqrt{\pi}} \text{ rad/s}$

Anfänglicher Regelfehler: $e_0 = N_1 \Delta\theta_1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$

Konstanten aus Anfangsbedingungen:

$$c_1 = e_0 = \frac{\pi}{2} \text{ rad}, \quad c_2 = e_0 \delta_1 = \sqrt{\pi} 50 \text{ rad/s}$$

Periodendauer: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\frac{100}{\sqrt{\pi}} \text{ rad/s}} = \frac{\pi^{3/2}}{50} \text{ s} \approx 0.1114 \text{ s}$

Zeitliche Verläufe:

$$e_1(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\delta_1 t} = \left(\frac{\pi}{2} \text{ rad} + 50 \sqrt{\pi} \text{ rad/s} t \right) e^{\frac{-100}{\sqrt{\pi}} t/s}$$

$$\dot{e}_1(t) = (c_2 - \delta_1 (c_1 + c_2 t)) e^{-\delta_1 t} = -5000 \text{ rad/s}^2 t e^{\frac{-100}{\sqrt{\pi}} t/s}$$

$$\tau_{M,1} \approx e^{\frac{-100}{\sqrt{\pi}} t/s} (1 - 56.419 t/s) \text{ Nm}$$

Um die Zeiten als Vielfaches von T_0 im Diagramm antragen zu können, wird die Lösung entsprechend umgerechnet:

$$\begin{aligned} e_1(t/T_0) &= (c_1 + c_2 t) e^{-\delta_1 t} = e_0 (1 + D_1 2\pi t/T_0) e^{-D_1 2\pi t/T_0} \\ &= \frac{\pi}{2} \text{ rad} (1 + 2\pi t/T_0) e^{-2\pi t/T_0} \\ \dot{e}_1(t/T_0) &= (c_2 - \delta_1 (c_1 + c_2 t)) e^{-\delta_1 t} \\ &= (e_0 \delta_1 - \delta_1 (e_0 + e_0 D_1 2\pi t/T_0)) e^{-D_1 2\pi t/T_0} \\ &= -e_0 D_1^2 4\pi^2 \frac{1}{T_0} \frac{t}{T_0} e^{-D_1 2\pi t/T_0} = -100 \pi^{3/2} \text{ rad/s} \frac{t}{T_0} e^{-2\pi t/T_0} \end{aligned}$$

$$\tau_{M,1}(t/T_0) = \dots = \left(1 - 2\pi \frac{t}{T_0} \right) \text{ Nm} e^{-2\pi t/T_0}$$

Hinweise zur Umrechnung der Drehgeschwindigkeits-Einheiten: Siehe Anmerkung 6.5.

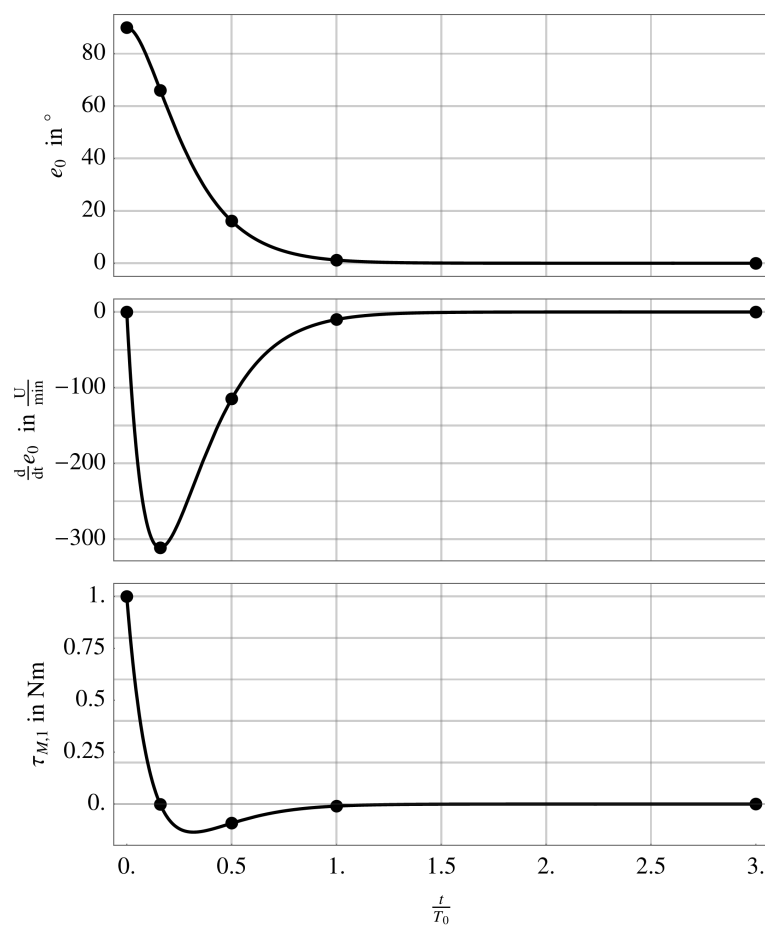
Extremum der Geschwindigkeit bei $t_{\text{extr}} = -\frac{c_1}{c_2} + \frac{2}{\delta_1} \approx 0.16 T_0$. Aus Wertetabelle 3.2 ergeben sich die zeitlichen Verläufe aus Abb. 3.2.

Maximaler Betrag der Drehgeschwindigkeit: 311 U/min .

Maximaler Betrag des Motormoments: 1 Nm .

Das Einschwingverhalten zeigt Abb. 3.2.

t/T_0	0	0.16	0.5	1	3
$e(t)$ in $^\circ$	90.	66.0425	16.1077	1.22408	≈ 0
$\dot{e}(t)$ in $[\text{U}/\text{min}]$	0.	-311.326	-114.892	-9.92987	≈ 0
τ_M in $[\text{Nm}]$	1.	-0.00194297	-0.0925466	-0.00986605	≈ 0

Tabelle 3.2 Wertetabelle für Aufgabe 8.2 g)**Abb. 3.2** Lösung zu Aufgabe 8.2 g).

- h) Ein Vergleich der Periodendauern T_0 ergibt eine Verlängerung der Einschwingdauer um einen Faktor $\frac{0.11}{0.02} \approx 5.5$.

i) Reduzierung Störgrößeneinfluss:

- Geringe Geschwindigkeiten reduzieren die mechanischen Verkopplungen der Gelenke durch Kreiselkräfte.
- Gewichtsaufschaltung der aus der Mechanik rückwirkenden Momente.
- Große Getriebeübersetzungen in den Gelenken reduzieren den Einfluss der aus der Mechanik rückwirkenden Momente.
- Genaue Identifikation der Modellparameter.
- Hohe Resonanzfrequenzen der mechanischen Komponenten (Armsegmente und Getriebe): Wegen $\omega_0 \leq \frac{1}{2} \min_i \omega_{\text{resonanz},i}$ kann damit eine höhere Kreisfrequenz gewählt werden. Dies führt wegen $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_p}{I_{\text{MG}}}}$ zu einer höheren Obergrenze für k_p .
- Motoren mit hohem Drehmoment: Da im Regelgesetz die Rückführverstärkungen linear enthalten sind, erhöht ein großes maximales Motormoment die Obergrenze von k_p .

3.3 Simulationsmodell

In Signalflussplan 3.2 sind die abgetasteten Signale mit Index $\bullet_k$ gekennzeichnet. Des Weiteren ist die zeitdiskrete Ableitung

$$\dot{\theta}_k = \frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{\Delta T}$$

mit Hilfe der z-Transformation durch $\frac{1-z^{-1}}{\Delta T}$ dargestellt. Das S&H-Glied wird durch das zeitdiskrete Verzögerungsglied z^{-1} dargestellt. Die Startwerte, sowie Abtastzeit ΔT gehen in die entsprechenden Blöcke gesondert ein.

Für die Winkelauflösung gilt

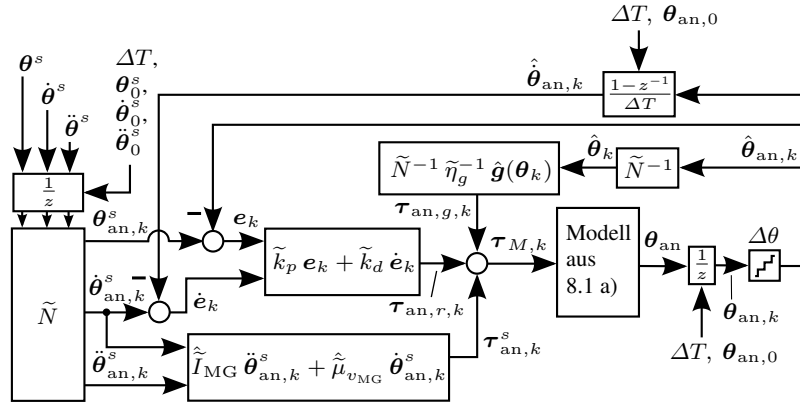
$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{1024}.$$

Die gegebenen Schätzfehler definieren perturbierte Parameter der Antriebsachsen gemäß

$$\begin{aligned}\hat{I}_{\text{MG},i} &= (1 + r_{I_{\text{MG},i}}) I_{\text{MG},i} \\ \hat{\mu}_{v_{\text{MG},i}} &= (1 + r_{\mu_{v_{\text{MG},i}}}) \mu_{v_{\text{MG},i}}.\end{aligned}$$

Für das Gewichtsmodell des Manipulators werden weitere Parameter benötigt, die hier jedoch nicht weiter detailliert werden.

Hinweis: Die enthaltenen vektorwertigen Signalleitungen sind nicht durch einen Doppelstrich gekennzeichnet.



Signalflussplan 3.2 Lösung zu Aufgabe 8.3.

Grundlagen der Roboter-Manipulatoren – Band 2
Pfad- und Bahnplanung, Antriebsauslegung, Regelung
Mareczek, J.
2020, XV, 225 S. 99 Abb., 35 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-662-59560-2