

Kapitel 5: Input-Output: Funktionen

D. Bättig

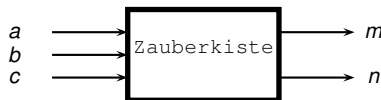
Burgdorf, 13. Februar 2020

Definition Funktion

Input-Output-Maschine = *Funktion*.
 Festlegung durch die Input- und die Output-Variablen und ihrer Zuordnung.
 Name der Funktion hier: *Zauberbox*.
 Inputs: *Argumente*; Output: *Wert* oder *Rückgabe-Wert*.

Notation:

$$(m, n) = \text{Zauberbox}(a, b, c)$$



„Zauberbox von a , b und c “.

Beispiel (Volumen eines Zylinders)

Das Volumen V eines Zylinders hängt von seiner Höhe h und seinem Radius r ab:

$$V = \text{volumenZylinder}(r, h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Dies ist eine Funktion, die von den zwei Argumenten r und h abhängt. Der Wert der Funktion ist das Volumen V . Ist $r = 0,5 \text{ m}$ und $h = 1,2 \text{ m}$, so ist

$$V = \text{volumenZylinder}(0,5 \text{ m}, 1,2 \text{ m}) = \pi \cdot (0,5 \text{ m})^2 \cdot 1,2 \text{ m} = 0,94 \text{ m}^3$$

Definition Funktion

Oft werden der Name der Funktion und der Output gleich bezeichnet: Die Wegfunktion $s = s(t)$ und die Geschwindigkeitsfunktion $v = v(t)$.

Beispiel (Eine einfache Wegfunktion)

Wegfunktionen $s = s(t)$ mit Gleichung: $s = s(t) = a \cdot t^2 + b$. Dabei seien $a = 3 \text{ m/s}^2$ und $b = 2 \text{ m}$. Zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$ ist die Position des Fahrzeugs $s(0 \text{ s})$ (ausgesprochen: „s von null Sekunden“): $s(0 \text{ s}) = a \cdot (0 \text{ s})^2 + b = b = 2 \text{ m}$. Zum Zeitpunkt 3 s befindet er sich bei Position $s(3 \text{ s})$:

$$s(3 \text{ s}) = a \cdot (3 \text{ s})^2 + b = 27 \text{ m} + 2 \text{ m} = 29 \text{ m}$$

Beispiel (Ideales Gasgesetz)

Ideales Gasgesetz für kleinen Druck p : $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$. Dabei ist $R = 8,31451 \text{ N m K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ die Gaskonstante. Mit dem Gasgesetz können Sie den Druck p berechnen, wenn n ein Mol ist:

$$p = p(T, V) = 8,31451 \text{ N m K}^{-1} \cdot T / V$$

Funktion, die von zwei Variablen abhängt. Funktionsname p gleich Funktionswert p .

Definitions- und Wertebereich

Beispiel (Summe natürlicher Zahlen)

Die Funktion mit Namen „summeN“ berechnet die Summe s der natürlichen Zahlen von null bis n :

$$s = \text{summeN}(n) = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Der Definitionsbereich der Funktion umfasst die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, usw. Man hat $\text{summeN}(0) = 0$, $\text{summeN}(1) = 1$, $\text{summeN}(2) = 3$, $\text{summeN}(3) = 6$. Der Wertebereich ist ein Teilbereich der natürlichen Zahlen.

Beispiel (Telefonbuch der Schweiz)

Das digitale Telefonverzeichnis stellt eine Funktion dar. Ein Argument ist eine Adresse und ein Rückgabe-Wert ist eine Telefonnummer. Der Definitionsbereich der Funktion ist eine Adresse in der Schweiz. Der Wertebereich ist eine zehnstellige natürliche Zahl.

Beispiel (Quadrieren)

Aus reellen Zahl x kann man Quadrat x^2 berechnen. Bezeichnen wir diese Funktion mit `quadr`, so haben wir die Funktionsschreibweise $y = \text{quadr}(x) = x^2$. Im Definitionsbereich sind alle reellen Zahlen. Die nicht-negativen reellen Zahlen y umfassen den Wertebereich der Funktion.

Funktionsdarstellung mit Wertetabellen

Beispiel (Summe von natürlichen Zahlen)

Die Funktion, welche die Summe $s = \text{summeN}(n)$ der natürlichen Zahlen von null bis n berechnet. Wir können als Definitionsbereich nur die natürlichen Zahlen von null bis zehn wählen. Wir erhalten dann die folgenden Werte für die Summe s :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$s = \text{summeN}(n)$	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

Mit dieser Wertetabelle sind die Funktionswerte übersichtlich dargestellt.

Beispiel (Ampelzustände)

Kreuzung mit zwei Ampeln: Farben rot, gelb oder grün. Eine Person beschreibt mit der Funktion $\mathbb{P}(\text{Ampel 1}, \text{Ampel 2})$ die Wahrscheinlichkeit für die auftretenden Farben:

	rot 2	gelb 2	grün 2
rot 1	10 %	5 %	25 %
gelb 1	6 %	1 %	20 %
grün 1	30 %	3 %	0 %

So ist $\mathbb{P}(\text{rot}, \text{gelb}) = 5\%$, $\mathbb{P}(\text{gelb}, \text{rot}) = 6\%$ und $\mathbb{P}(\text{grün}, \text{rot}) = 30\%$. Die Wertetabelle kann man mit einer 3×3 -Matrix speichern.

Funktionsdarstellung mit Gleichung

Bei der Funktion `quadr`, die aus einer endlichen Dezimaldarstellung x , das Quadrat $y = x^2$ berechnet, lautet die Funktionsgleichung $y = \text{quadr}(x) = x^2$ oder einfach $y = y(x) = x^2$.

Beispiel (Ideales Gasgesetz)

Das ideale Gasgesetz beschreibt den Druck p , die eine 1 mol Gasmenge auf eine Behälterwand ausübt, als Funktion des Volumens V und der Temperatur T :

$$p = p(T, V) = 8,31451 \text{ N m K}^{-1} \cdot \frac{T}{V}$$

Dies ist eine Funktionsgleichung.

Beispiel (Summe natürlicher Zahlen)

Diese Funktion kann mit einer einfachen Funktionsgleichung beschrieben werden:

$$s = \text{summeN}(n) = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

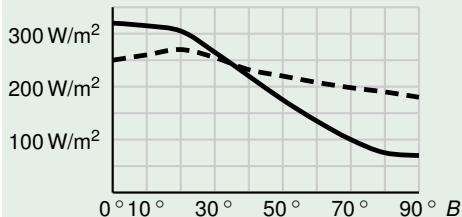
Damit ist $\text{summeN}(100) = 100 \cdot 101/2 = 5050$.

Funktionsdarstellung mit Graph

Mit dem *Graph* einer Funktion können Sie eine Funktion mit nur einer reellen Zahl als Argument und nur einer Zahl als Funktionswert visualisieren. Ist $y = y(x)$, so besteht der Graph aus allen Punkten $(x \mid y(x))$ im zweidim., kartesischen Koordinatensystem.

Beispiel (Strahlungsbilanz auf der Erdoberfläche)

Einfallende Strahlungsenergie E_{ein} hängt vom Breitengrad B ab. Die einfallende Strahlungsenergie $E_{\text{ein}} = E_{\text{ein}}(B)$ ist also eine Funktion von B :



Aus dem Graph liest man ab:
 $E_{\text{ein}}(0^\circ) \approx 320 \text{ Watt/m}^2$ und
 $E_{\text{ein}}(70^\circ) \approx 100 \text{ Watt/m}^2$ ist.

Ein Teil der einfallenden Strahlung wird reflektiert. Die gestrichelte Linie zeigt den Graph der ausfallenden Strahlung $E_{\text{aus}}(B)$.

Funktionsdarstellung mit Graph

Beispiel

Funktion mit Funktionsgleichung

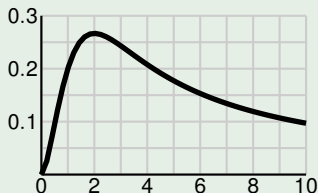
$$y = y(x) = \frac{x^2}{1 + 3x + x^3}$$

Dabei ist x eine reelle Zahl zwischen 0 und 10.

Mit MATLAB:

```
matlab> syms x
matlab> meineFunktion(x) = x^2 / (1 + 3*x + x^3);
matlab> fplot(@(x) meineFunktion(x), [0 10])
matlab> grid()
```

Der Parameter `w` regelt die Liniendicke.

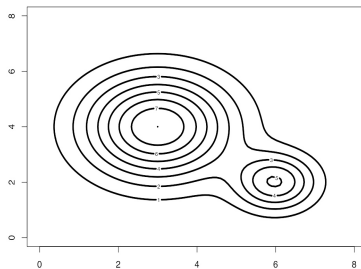
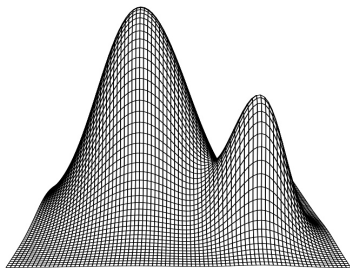


Mit MATLAB lassen sich mehrere Kurven in eine Grafik legen:

```
matlab> plot(@(t) sin(t), [0 2*pi])
matlab> hold on; plot(@(t) cos(t), [0 2*pi], 'Color', 'red')
matlab> hold off
```

Funktionsdarstellung mit Graph und Niveaukurven

Dazu muss die Funktion reelle Werte besitzen und zwei reelle Argumente haben.
Beispiel: Höhe $H = H(x, y)$ eines Geländepunktes mit Koordinaten x und y .

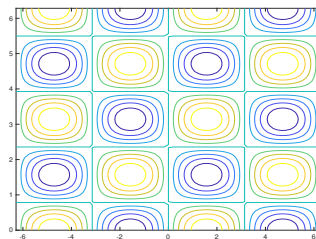
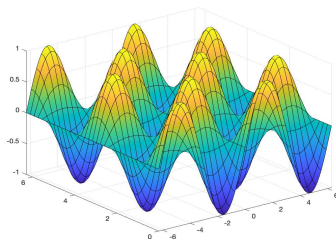


Die Linien zeigen die Punkte an, die die gleiche Höhe haben. Dies sind die Niveaulinien der Höhen-Funktion $H = H(x, y)$. Die Äuqidistanz der Linien ist 100 m.

Funktionsdarstellung mit Graph und Niveaukurven

Mit MATLAB: $H = H(x, y) = \sin(x) \cdot \cos(2 \cdot y)$ mit x zwischen -2π und 2π bzw. y zwischen 0 und 2π :

```
matlab> syms x y
matlab> H(x,y) = sin(x)*cos(2*y);
matlab> fsurf(H(x,y), [-2*pi 2*pi 0 2*pi])
matlab> fcontour(H(x,y), [-2*pi 2*pi 0 2*pi])
```

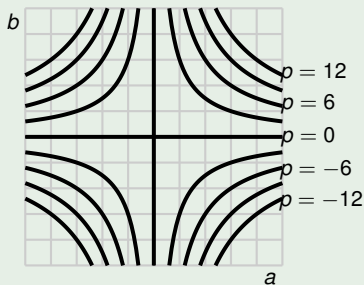


Funktionsdarstellung mit Graph und Niveaukurven

Beispiel (Produkt zweier Zahlen)

$$p = \text{produkt}(a, b) = a \cdot b$$

Die Niveaulinien sind Kurven im $(a \mid b)$ -Koordinatensystem, auf denen das Produkt $a \cdot b$ konstant ist:

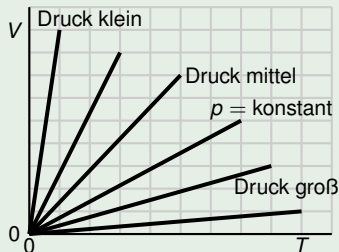


Funktionsdarstellung mit Graph und Niveaukurven

Beispiel (Ideales Gasgesetz)

$$p = p(T, V) = 8,31451 \text{ NmK}^{-1} \cdot \frac{T}{V}$$

Niveaulinien: Kurven im $(T | V)$ -Koordinatensystem mit Druck p konstant. Man nennt sie *Isobaren*. Es muss $T/V = C = \text{konstant}$. Es ist also $T = C \cdot V$. Dies sind Geraden, die durch den Nullpunkt gehen:



Programme als Funktionen

Bei den meisten Programmiersprachen werden Applikationen mit Funktionen aufgebaut.

Mit Funktionen in Computerprogrammen kann man komplexe und lange Blöcke von Befehlen in kleine Teile gliedern. So hat ein erste Funktion die Aufgabe Messwerte aus einem File zu lesen. Die zweite Funktion berechnet aus den Messwerten einen verlangten Wert. Dabei benutzt sie andere Funktionen, wie Mittelwerte oder Wurzelfunktionen. Die letzte Funktion druckt den verlangten Wert aus. Die kleinen Teile können oft vielfach für verschiedene Anwendungen benutzt werden.

In statischen Sprachen, wie C, C++ und Java, müssen die Definitionsbereiche der Argumente und die Art der Werte der Funktionen deklariert werden. Mit MATLAB oder mit Julia – dies sind dynamische Sprachen – entfällt die Zuweisung der Typen der Variablen.

Funktion mit MATLAB

Beispiel (Ideales Gasgesetz)

$$p = p(T, V) = 8,31451 \text{ NmK}^{-1} \cdot \frac{T}{V}$$

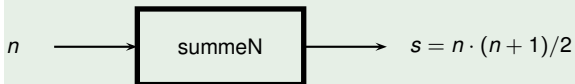
```
function p = druck(temperatur, volumen)
    % Funktion druck(temperatur, volumen) berechnet
    % den Druck fuer 1 mol gas (in Pa)
    % gegeben volumen (in m^3) und temperatur (in K)
    % mit dem idealen Gasgesetz
    p = 8.31451 * temperatur / volumen;
end
```

In **function**-Zeile: Funktion *deklariert*. Dies ist der *Kopf* (engl. *header*). Name der Funktion lautet `druck`. Die Argumente sind `temperatur` und `volumen`.

Anschließend folgt der *Funktionskörper*.

Funktion mit MATLAB

Beispiel (Summe von natürlichen Zahlen)



```
function s = summeN(n)
    % Die Funktion summeN(n) berechnet die Summe der
    % natuerlichen Zahlen 0 + 1 + 2 + 3 + ... + n
    s = (n + 1) * n/2;
end
```

Funktionen mit MATLAB

Beispiel (Summe und Produkt)

$$(s, p) = \text{summeProdukt}(a, b)$$

Dabei ist $s = a + b$ und $p = a \cdot b$. Mit MATLAB:

```
function [s, p] = summeProdukt(a, b)
    % Funktion summeProdukt(a,b) berechnet einen Vektor mit
    % erster Komponente a+b und zweiter Komponente a*b
    s = a+b;
    p = a*b;
end
```

Funktionswerte berechnen:

```
matlab> [s, p] = summeProdukt(5, 8)
s=
    13
p=
    40
```

Funktionen mit MATLAB

Beispiel (Punkt-Notation)

Oft will man mehrere Werte einer Funktion bestimmen. So könnte man versuchen die Werte der Funktion `summeN(n)` für $n = 4, 7, 12, 14$ und 21 zu berechnen. Mit MATLAB kann man mehrere Werte einer Funktion mit einer `for`-Schleife oder – meist schwieriger –, indem man die Funktion vektorisiert, berechnen. Mit Schleife:

```
matlab> n = [4; 7; 12; 14; 21]; werte = [];  
matlab> for i = 1:length(n)  
           werte = [werte; summeN(n(i))];  
       end  
matlab> werte  
werte =  
    10  
    28  
    78  
   105  
   231
```

Definition Umkehrfunktion

Die Umkehrfunktion beantwortet die Frage, ob man den Input einer Funktion aus ihrem Output bestimmen kann. Bei der Funktion `quadr`, die einer Zahl x den Wert x^2 zuordnet, lässt sich der Input nicht aus dem Output bestimmen. Ist beispielsweise $\text{quadr}(x) = 4$, so kann x nicht eindeutig bestimmt werden. Das Argument x könnte 2 oder -2 sein. Wir haben hier den Fall, dass zwei verschiedene Argumente den gleichen Wert der Funktion liefern. Dies darf nicht passieren, wenn man den Input aus dem Output berechnen will. Man definiert:

Definition

Eine Funktion heißt *injektiv* (engl. *injectiv*), wenn verschiedene Werte der Argumente immer verschiedene Werte der Funktion liefern.

Bei einer injektiven Funktion $y = y(x)$ kann man den Input x aus dem Funktionswert y (theoretisch) bestimmen. Man sagt, dass die Funktion eine *Umkehrfunktion* oder eine *inverse Funktion* hat.

Umkehrfunktion

Beispiel (Summe von natürlichen Zahlen)

Funktion, die die Summe s der natürlichen Zahlen von null bis n berechnet:

$$s = \text{summeN}(n) = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = n \cdot (n + 1)/2$$

Mit zunehmendem Argument n wird der Wert s der Funktion größer. Die Funktion ist injektiv. Die Umkehrfunktion existiert also. Wir können sie „invSummeN“ nennen. Um sie zu berechnen, muss man n in Funktion von s schreiben: $2s = n^2 + n$ oder $n^2 + n - 2s = 0$. Deshalb ist

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8s}}{2}$$

Daher:

$$n = \text{invSummeN}(s) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8s}}{2}$$

Umkehrfunktion

Beispiel (Eine Wegfunktion)

Die Wegfunktion $s = s(t)$ für t zwischen 0 s und 1000 s, gegeben durch die Funktionsgleichung

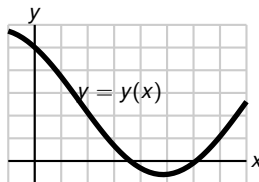
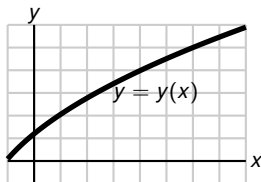
$$s = s(t) = 0,03 \text{ m s}^{-1} \cdot t + 2 \text{ m}$$

beschreibt die Position eines Fahrzeugs in Funktion der Zeit t . Je größer t ist, um so größer wird auch s . Daher ist die Wegfunktion injektiv. Die Umkehrfunktion berechnet den Zeitpunkt $t = t(s)$ in Funktion der Position s des Fahrzeugs. Stellt man die Funktionsgleichung nach t um, erhält man die Gleichung der Umkehrfunktion:

$$t = t(s) = \frac{s - 2 \text{ m}}{0,03 \text{ m s}^{-1}}$$

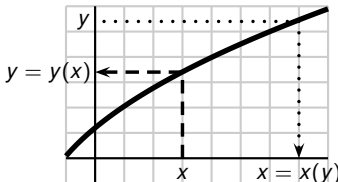
Graph und Umkehrfunktion

Der Graph einer Funktion kann helfen, um zu entscheiden, ob die Funktion injektiv ist:



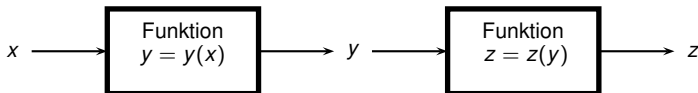
Linkes Bild: Die Funktion ist injektiv und hat daher eine Umkehrfunktion. Rechtes Bild: Die Funktion hat keine Umkehrfunktion, da beispielsweise der Wert null der Funktion durch zwei verschiedene Inputs erreicht wird.

Werte der Umkehrfunktion können dann direkt am Graph der Funktion abgelesen werden: Werte einer Funktion (gestrichelte Linie) und ihrer Umkehrfunktion (gepunktete Linie).



In Serie schalten

Aus zwei Funktionen $y = y(x)$ und $z = z(y)$ können wir eine neue Funktion konstruieren: Zuerst rechnen wir mit der ersten Funktion von x auf y . Anschließend rechnen wir mit der zweiten Funktion von y auf z :



Man sagt, dass man die beiden Funktionen in Serie schaltet oder *verkettet*. Man erhält also eine neue, aus den beiden einzelnen Funktionen *zusammengesetzte* Funktion:

$$z = z(y(x))$$

Die Funktion $z = \sin(\sqrt{x})$ ist eine verkettete Funktion. Das Argument der Funktion ist x . Zuerst wird die Wurzel $y = \sqrt{x}$ von x berechnet. Anschließend wird davon der Sinus bestimmt:

$$x \longrightarrow y = \sqrt{x} \longrightarrow z = \sin(y)$$

Mit MATLAB kann man Funktionen mit der mathematischen Schreibweise in Serie schalten:

```
matlab> sin(sqrt(2))
ans =
    0.9878
```

In Serie schalten

Beispiel

Ist etwa $y = y(x) = x^2$ und $z = z(y) = 5 + 3 \cdot y$, dann ist

$$z = z(y(x)) = z(x^2) = 5 + 3 \cdot (x^2) = 5 + 3 \cdot x^2$$

Beispiel (Weg- und Höhenfunktion)

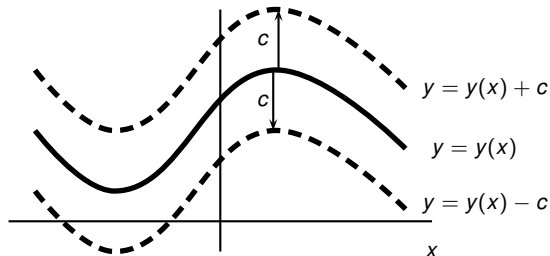
Der Weg s eines Wagens sei durch $s = \text{Weg}(t) = 5 \text{ m} + t \cdot 4 \text{ m/s}$ gegeben. Die Höhe H über Meer einer Position s des Wags ist $H = \text{Höhe}(s) = 10 \cdot s + 50 \text{ m}$. Die Höhe H über Meer des Wagens in Funktion der Zeit t : Weg- mit der Höhenfunktion in Serie schalten:

$$\begin{aligned} H = \text{Höhe}(s) &= 10 \cdot s + 50 \text{ m} = 10 \cdot \text{Weg}(t) + 50 \text{ m} \\ &= 10 \cdot (5 \text{ m} + t \cdot 4 \text{ m/s}) + 50 \text{ m} \end{aligned}$$

Verschiebung vertikal

Graphen von Funktionen im zweidimensionalen Koordinatensystem lassen sich horizontal und vertikal verschieben. Dies ist nötig, wenn die Einheiten der Argumente und der Werte einer Funktion ändert.

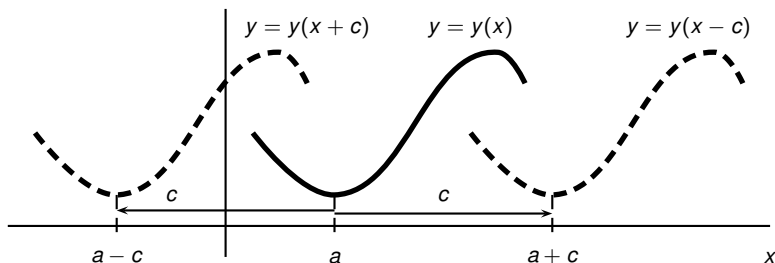
Vertikale Verschiebung mit einer Konstanten $c > 0$:



So ist der Graph der Funktion $p(x) = x^2 + 3$ gleich dem drei Einheiten nach oben verschobenen Graph der Funktion $q(x) = x^2$.

Verschiebung horizontal

Graph horizontal um $c > 0$ verschieben:



So besteht der Graph der Funktion $f(x) = (x - 1)^2$ aus dem um eine Einheit nach rechts verschobenen Graph der Funktion $g(x) = x^2$.