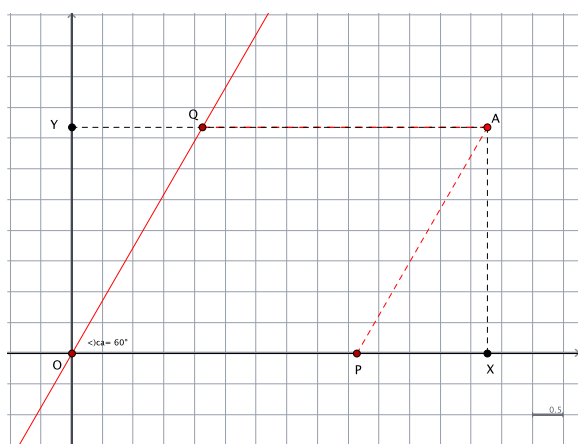


kg_aufgaben_02.docx

1. Skizzieren Sie die Achsen eines kartesischen Koordinatensystems in schwarz. Darüber legen Sie ein affines System, das denselben Ursprung und dieselbe Rechtsachse wie das kartesische System aufweist, dessen Hochachse in Rot aber zur Rechtsachse einen Winkel von 60° einnimmt.
- a) Zeichnen Sie einen Punkt A mit den kartesischen Koordinaten $[6, 4]$ und ermitteln Sie dessen Koordinaten im darüber liegenden affinen System manuell.

[3.69, 4.62]

- b) Stellen Sie allgemein dar, wie Sie aus vorliegenden kartesischen Koordinaten eines Punktes dessen affine Koordinaten bestimmen können, wenn die Hochachse des affinen Systems mit der Rechtsachse den Winkel α einschließt.



Der Winkel $\alpha = \angle POQ$ findet sich auch noch bei $\angle YQO$ und bei $\angle XPA$. Aus Kenntnis der Koordinaten x und y lässt sich OQ und damit die affine Koordinate q folgendermaßen berechnen:

$$\frac{OY}{OQ} = \sin \alpha \Rightarrow q = \frac{y}{\sin \alpha}$$

Für die Strecke PX gilt:

$$\frac{PX}{PA} = \frac{PX}{OQ} = \cos \alpha \Rightarrow PX = q \cdot \cos \alpha$$

Für die Strecke OP und damit für die Koordinate p gilt:

$$OP = OX - PX = x - q \cdot \cos \alpha$$

- c) Gegeben sind die weiteren Punkte $B:[4, 7]$, $C:[-3, 5]$, $D:[-1, -9]$ und $E:[8, -2]$ mit ihren kartesischen Koordinaten. Ermitteln Sie die affinen Koordinaten dieser Punkte in dem oben beschriebenen affinen System.

$B:[-0.041, 8.083]$, $C:[-5.887, 5.774]$, $D:[4.20, -10.39]$, $E:[9.154, -2.309]$

- d) Ermitteln Sie die Koordinaten der obigen Punkte A bis E in einem affinen System mit einem Winkel von 30° zwischen den Achsen.

$B:[-8.124, 14.0]$, $C:[-11.66, 10.0]$, $D:[14.588, -18.0]$, $E:[11.464, -4.0]$

- e) Überlegen Sie, wie Sie aus den gegebenen affinen Koordinaten eines Punktes dessen kartesische Koordinaten bestimmen können. Führen Sie diese Überlegung zunächst konkret mit dem Punkt $R:[5, 4]$ im affinen System mit dem Achsenwinkel 60° durch.

[7.0, 3.464]

Wenn die affinen Koordinaten $[p, q]$ gegeben sind, dann berechnen sich daraus die kartesischen Koordinaten über die folgenden Beziehungen:

$$x = p + PX = p + q \cdot \cos \alpha$$

Die Beziehung für PX wurde bereits oben hergeleitet.

$$y = q \cdot \sin \alpha$$

Umkehrung der oben hergeleiteten Beziehung.

- f) Die Punkte $A - E$ seien nun diejenigen im affinen System mit dem Achsenwinkel 60° . Bestimmen Sie daraus die zugehörigen kartesischen Koordinaten der Punkte.

$B:[7.5, 6.062]$, $C:[-0.5, 4.33]$, $D:[-5.5, -7.794]$, $E:[7.0, -1.732]$

- g) Interpretieren Sie die angegebenen Koordinaten der Punkte $A - E$ als solche in einem affinen System mit dem Achsenwinkel 30° . Bestimmen Sie daraus die zugehörigen kartesischen Koordinaten der Punkte.

$B:[10.062, 3.5]$, $C:[1.33, 2.5]$, $D:[-8.794, -4.5]$, $E:[6.268, -1.0]$

- h) Überprüfen Sie nochmals Ihre Ergebnisse aus den Aufgaben d), f) und g), was fällt Ihnen bei den erhaltenen Werten auf? Begründen Sie geometrisch, warum es zu diesen Auffälligkeiten kommt! Wieso kommt es bei Teilaufgabe c) nicht zu diesen Auffälligkeiten?

Die gegebenen Affinwinkel ergeben immer ein (halbes) gleichseitiges Dreieck!

2. Drücken Sie die folgenden kartesischen Koordinaten als Polarkoordinaten aus:

a) $A:[-12, 12\sqrt{3}]$; $B:[-4, -5]$; $C:[3, 7]$; $D:[2, -3]$

$A:[24, 120^\circ]$, $B:[6.403, 231.340^\circ]$, $C:[7.616, 66.801^\circ]$, $D:[3.606, 303.69^\circ]$

- b) Diskutieren Sie, welche Winkelfunktion sich am besten für diese Umrechnung eignet. Überlegen Sie dazu, was das Besondere an den Winkelfunktionen ist, skizzieren Sie deren Graphen und versuchen Sie, daraus eine Antwort auch vor dem Hintergrund zu finden, dass eine Maximafunktion erstellt werden soll, welche die eben durchgeführten Transformationen erledigt.

Der \cos ist im Intervall von $0^\circ - 180^\circ$ ein-eindeutig!

- c) Zur Lösung dieser Aufgabe werden Sie zwei Fälle unterscheiden müssen. Formulieren Sie diese Fallunterscheidung auf jeden Fall zunächst mit eigenen Worten, die Umsetzung in Maxima fällt dann nicht mehr schwer.

Man muss unterscheiden, ob der gegebene Punkt eine positive oder eine negative y -Koordinate hat. Bei einer positiven y -Koordinate liefert der \arccos den korrekten Winkel im Bereich von 0° bis 180° . Liegt der Punkt im 3. oder 4. Quadranten, so muss der vom \arccos gelieferte Winkelwert von 360° subtrahiert werden.

`if y<0 then w:360-w`

3. Nachfolgend finden Sie Polarkoordinaten verschiedener Punkte, die Sie in kartesische Koordinaten umrechnen sollen:

$A:[6, 30^\circ]$; $B:[8, 120^\circ]$; $C:[13, 256^\circ]$; $D:[5, 345^\circ]$

$A:[3\sqrt{3}, 3]$, $B:[-4, 4\sqrt{3}]$, $C:[-3.145, -12.614]$, $D:[4.83, -1.294]$

4. Finden Sie eine einfache Möglichkeit, wie Sie mit Hilfe der Umrechnungen von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten und zurück die Drehung eines Punktes P mit gegebenen Koordinaten $[x, y]$ um den Ursprung des kartesischen Systems um einen gegebenen Winkel α realisieren können.

Nach der Umrechnung von kartesischen in Polarkoordinaten addiert man zum Winkelmaß der Polarkoordinaten den gewünschten Drehwinkel und rechnet in kartesische Koordinaten zurück.

5. Wie können Sie pragmatisch Polarkoordinaten in affine Koordinaten umrechnen und wie affine Koordinaten in Polarkoordinaten?

... am Besten über den Umweg über kartesische Koordinaten.