

kg_aufgaben_03.docx

- Bestimmen Sie die Längen der jeweils durch die Koordinaten ihrer Endpunkte angegebenen Strecken:

a) $[2, 3]; [7, 4]$	5,099
b) $[2, 3]; [-7, -4]$	11,402
c) $[-3, 4]; [3, -4]$	10
d) $[3, 70^\circ]; [4, 120^\circ]$	3,094
e) $[5, 225^\circ]; [7, 355^\circ]$	10,908
f) $[7.3, 78^\circ]; [7.3, 258^\circ]$	14,6

- Bestimmen Sie die Mittelpunkte der in der vorhergehenden Aufgabe durch die Koordinaten der Endpunkte der angegebenen Strecken. Geben Sie die Ergebnisse im jeweils selben Koordinatensystem an.

$[4.5, 3.5]$	$[-2.5, -0.5]$	$[0, 0]$
$[3.179, 98.811^\circ]$	$[2.693, 309.668^\circ]$	$[0, 0]$

- In der vorhergehenden Aufgabe mussten Sie in drei Fällen die Mittelpunkte von Strecken bestimmen, deren Endpunkte durch Polarkoordinaten festgelegt sind. Welche Vorgehensweise liegt hierfür nahe?

Umrechnung in kartesische Koordinaten, dann im kartesischen System den Mittelpunkt bestimmen und schließlich dessen Koordinaten wieder in das Polarsystem umrechnen.

- Eine Strecke ist durch die Polarkoordinaten ihrer Endpunkte $A: [9.22, 12.5^\circ]$ sowie $B: [6.08, 80.5^\circ]$ festgelegt. Bestimmen Sie den Mittelpunkt direkt aufgrund der gegebenen Polarkoordinaten!

Die Vorgehensweise wird im Folgenden gleich für den allgemeinen Fall dargestellt, deshalb benennen wir die Koordinaten des ersten Punktes mit $[r_1, \varphi_1]$, diejenigen des zweiten Punktes mit $[r_2, \varphi_2]$.

Die Punkte OAB spannen ein Dreieck auf, in welchem die Länge der Strecke AB mit Hilfe des Kosinussatzes berechnet werden kann:

$$\overline{AB} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

Im gegebenen Fall errechnet sich die Länge 8.94.

Der Winkel BAO – wir nennen ihn kurz α – kann mit Hilfe des Sinussatzes errechnet werden:

$$\frac{\sin \alpha}{r_2} = \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\overline{AB}} \Rightarrow \sin \alpha = r_2 \cdot \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\overline{AB}}$$

Im konkreten Fall hat er die Größe 39.1° .

Der gesuchte Mittelpunkt M der Strecke AB halbiert diese. Wir betrachten im Folgenden das Dreieck OAM , von welchem wir die Strecken $OA=r_1$ und $AM=AB/2$ kennen. Damit können wir – erneut mit Hilfe des Kosinussatzes – die Länge der Strecke OM und damit den Betrag der Polarkoordinate von M bestimmen:

$$\overline{OM} = r_M = \sqrt{r_1^2 + \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 - 2 \cdot r_1 \cdot \frac{\overline{AB}}{2} \cdot \cos \alpha}$$

Wir erhalten für r_M den Wert 6.4.

Im Dreieck OAM sind nun alle Seiten bekannt, außerdem der Winkel α , so dass schließlich mit Hilfe des Sinussatzes der zwischen den Strecken OA und OM eingeschlossene Winkel φ_3 bestimmt werden kann:

$$\frac{\sin \varphi_3}{MA} = \frac{\sin \alpha}{r_M} \Rightarrow \sin \varphi_3 = \overline{MA} \cdot \frac{\sin \alpha}{r_M}$$

Hierfür erhalten wir in der konkreten Aufgabe den Wert 26.1° .

Um das Argument des Mittelpunkts zu erhalten, muss hierzu noch das Argument φ_1 von A addiert werden:

$$\varphi_M = \varphi_1 + \varphi_3$$

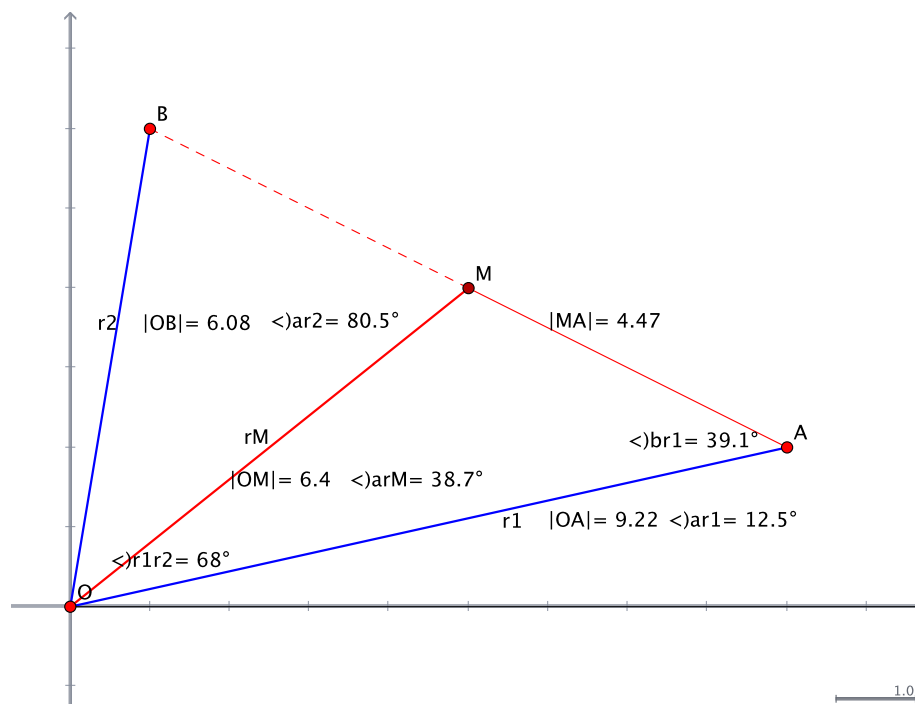
Hierfür ergibt sich der Wert 38.7° , so dass die Polarkoordinaten von M vollständig bestimmt sind.
 $M: [6.4, 38.7]$

Alternativ kann die Länge der Seitenhalbierenden OM und damit die Länge von r_M über die Formel zur Berechnung der Länge einer Seitenhalbierenden im Dreieck bestimmt werden:

$s_a = \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$ (Diese Formel wird über eine zweifache Anwendung des Kosinussatzes hergeleitet.)

In unserem Fall gilt somit $OM = \sqrt{2(r_1^2 + r_2^2) - AB^2}$.

Dafür muss aber zunächst die Länge der Seite OM wie oben dargestellt mit Hilfe des Kosinussatzes bestimmt werden.



5. Zeichnen Sie eine beliebige Strecke AB .

a) Konstruieren Sie geometrisch auf AB den Teilpunkt T mit dem Teilverhältnis $\frac{5}{3}$

Konstruktion über die Strahlensatzfigur

Alternative: Durch die Streckenendpunkte zwei Parallelen ziehen. Auf der einen Parallelen von A aus 5 Einheiten nach oben, auf der anderen 3 Einheiten nach unten abtragen, die Endpunkte mit einer Geraden verbinden. Dort wo diese Gerade die zu teilende Strecke schneidet ist der gesuchte Teilpunkt.

- b) In welchem Verhältnis teilt T die Strecke BA ?

Im Verhältnis $3/5$

- c) Konstruieren Sie einen Teilpunkt S , der AB im Verhältnis 2 teilt. In welchem Verhältnis teilt S die Strecke BA ?

Im Verhältnis $1/2$

- d) Ein Punkt T teile eine Strecke AB im Verhältnis λ . In welchem Verhältnis teilt T die Strecke BA ?

Im Verhältnis $1/\lambda$

6. Überlegen Sie gedanklich, mit Hilfe von Skizzen oder am besten anhand eines dynamischen Geometriesystems, was mit dem Teilverhältnis λ_{AB} passiert, wenn Sie den Teilungspunkt T zwischen A und B immer näher an B herschieben.

Das TV wird immer größer

- a) Welches Teilverhältnis erhalten Sie, wenn T genau auf B zu liegen kommt? Machen Sie ggf. eine Grenzwertbetrachtung!

Das TV ist nicht definiert, da Division durch 0. Der Grenzwert geht gegen $+\infty$.

- b) Welche Teilverhältnisse erhalten Sie, wenn Sie T über B hinaus immer weiter schieben? Schieben Sie dabei in Gedanken bis ins Unendliche weiter.

Macht man die Grenzwertbetrachtung weiter, so „kommt“ das TV von $-\infty$ und wird immer kleiner. Schiebt man T ins Unendliche, so erreicht das TV einen Grenzwert von -1 .

- c) Nun in die andere Richtung: Schieben Sie T innerhalb von AB immer näher an A heran. Wie ändert sich das Teilverhältnis?

Es wird immer kleiner.

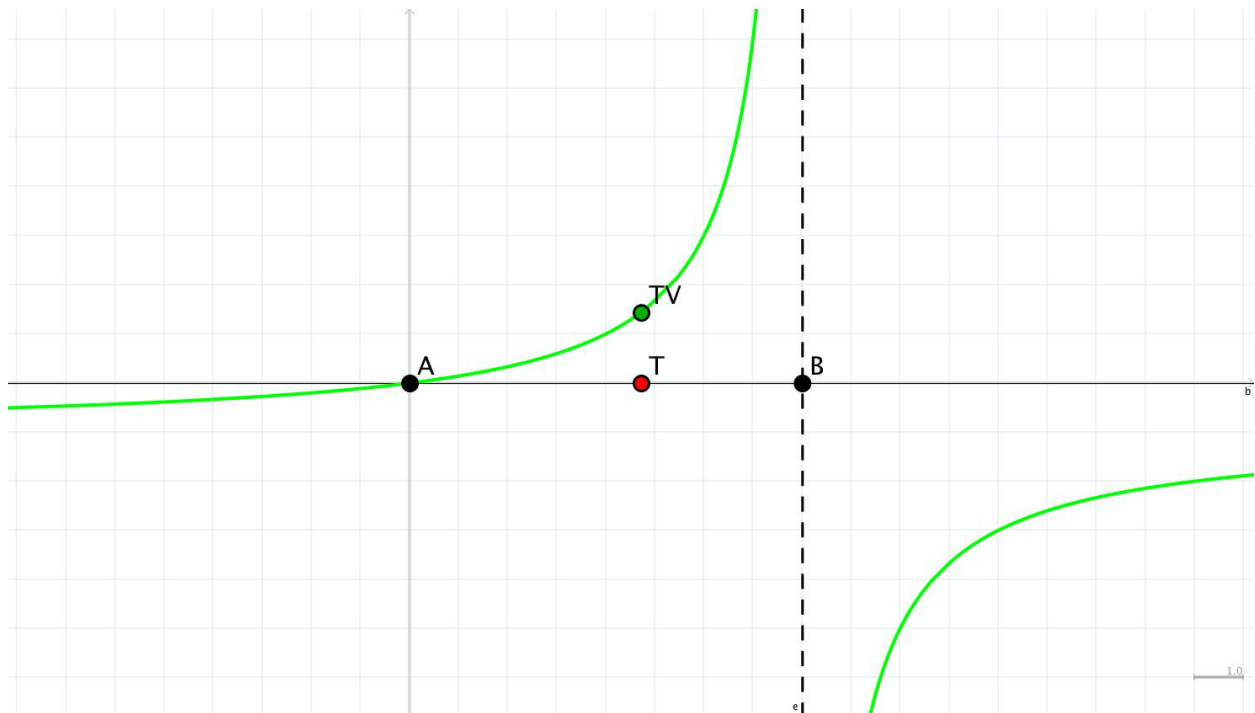
- d) Welches Teilverhältnis ergibt sich, wenn T auf A zu liegen kommt? Ist wieder eine Grenzbetrachtung nötig?

Das TV wird 0, es ist keine Grenzwertbetrachtung nötig.

- e) Schieben Sie weiter über A hinaus bis ins Unendliche. Welche Werte nehmen die zugehörigen Teilverhältnisse an? Welchen Grenzwert erhalten Sie für das Teilverhältnis im Unendlichen?

von „ -0 “ bis -1

- f) Legen Sie die zu teilende Strecke AB auf die x -Achse eines Koordinatensystems: A in den Ursprung und B irgendwo weiter rechts auf den positiven Teil der x -Achse. Tragen Sie dann für einige Punkte der x -Achse das Teilverhältnis, mit welchem dieser Punkt die Strecke AB teilt, als Funktionswert y über dem jeweiligen Teilpunkt auf. Skizzieren Sie schließlich den Graphen aller Teilverhältnisse über AB .



7. Ein Punkt T teile die Strecke AB außen im Verhältnis $\lambda_{AB} = -\frac{9}{4}$.

a) Konstruieren Sie diesen äußeren Teilpunkt einer beliebigen Strecke AB geometrisch.

Das Teilverhältnis $-9/4$ bedeutet, dass man 9 Schritte von A aus in Richtung B zu T läuft und dann wieder 4 Schritte zurück zu B gehen muss. Daraus folgt schließlich, dass man AB in 5 Teile aufteilen und diese Teilung über B hinaus noch um 4 weitere Teilabschnitte hinaus fortsetzen muss.

Alternative: Durch die Streckenendpunkte zwei Parallelen ziehen. Auf der einen Parallelen von A aus 9 Einheiten nach oben, auf der anderen 4 Einheiten nach oben abtragen, die Endpunkte mit einer Geraden verbinden. Dort wo diese Gerade die Trägergerade der zu teilenden Strecke schneidet ist der gesuchte Teilpunkt.

b) Der Punkt S teile AB außen im Verhältnis $\lambda_{AB} = -\frac{3}{4}$. Konstruieren Sie auch diesen

Teilpunkt geometrisch.

Das λ ist kleiner als 1, also liegt der Teilpunkt „links“ von A . Durch die Streckenendpunkte zwei Parallelen ziehen. Auf der einen Parallelen von A aus 3 Einheiten nach oben, auf der anderen 4 Einheiten ebenfalls nach oben abtragen, die Endpunkte mit einer Geraden verbinden. Dort wo diese Gerade die Trägergerade der zu teilenden Strecke schneidet ist der gesuchte Teilpunkt.

8. Bestimmen Sie die Koordinaten des Teilungspunktes, der die gegebene Strecke P_1P_2 im Verhältnis λ teilt:

- | | |
|------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| a) $P_1: [2, 3], P_2: [3, 4], \lambda = 3$ | $\left[\frac{11}{4}, \frac{15}{4}\right]$ |
| b) $P_1: [-4, -2], P_2: [8, 4], \lambda = 1/2$ | $[0, 0]$ |
| c) $P_1: [-7, 13], P_2: [6, -12], \lambda = 4$ | $\left[\frac{17}{5}, -7\right]$ |
| d) $P_1: [2, 3], P_2: [3, 4], \lambda = -3$ | $\left[\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right]$ |

- e) $P_1: [-4, -2], P_2: [8, 4], \lambda = -1/2$ $[-16, -8]$
- f) $P_1: [-7, 13], P_2: [6, -12], \lambda = -4$ $\left[\frac{31}{3}, -\frac{61}{3} \right]$
- g) $P_1: [-7, 13], P_2: [6, -12], \lambda = -1/4$ $\left[-\frac{34}{3}, \frac{64}{3} \right]$