

kg_aufgaben_04.docx

1. Gegeben sei eine diophantische Gleichung der Form $Ax + By + C = 0$. Variieren Sie die Parameter A , B und C , geben Sie diese Gerade – soweit möglich – in der Standardform an und untersuchen Sie die dadurch symbolisierte Gerade: $y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$

a) $A = 2, B = -5, C = 3$

$$2x - 5y + 3 = 0$$

Geradengleichung $y = -\frac{A}{B} \cdot x - \frac{C}{B}$

b) $A = 1, B = 1, C = -5$

$$x + y = 5$$

$$y = -x + 5$$

Geradengleichung (mit Steigung -1)

c) $A = 6, B = 3, C = 0$

$$6x + 3y = 0$$

$$y = -2x$$

Ursprungsgerade

d) $A = 2, B = 0, C = 8$

$$2x + 8 = 0$$

$$x = -4$$

Parallele zur y-Achse

e) $A = 0, B = 1, C = 1$

$$y + 1 = 0$$

$$y = -1$$

Parallele zur x-Achse

f) $A = 0, B = 0, C = 2$

$$2 = 0$$

unlösbar Gleichung

g) $A = 0, B = 0, C = 0$

$0 = 0$ Gleichung wird von allen Punkten erfüllt, sie stellt also die gesamte Zeichenebene dar.

h) Welche Sonderfälle können bei welcher Parameterkonstellation auftreten?

$A = 0$: Parallele zur x-Achse

$B = 0$: Parallele zur y-Achse

$C = 0$: Ursprungsgerade

2. Eine Gerade g hat den y-Achsenabschnitt 1,5 und einen Steigungswinkel von 45° .

a) Geben Sie die Geradengleichung in der Standardform und in der allgemeinen Form mit ganzzahligen Koeffizienten an.

Steigung: $m = 1$, also $y = x + 1,5$

Umformen, z.B.: $2x - 2y + 3 = 0$

b) Ermitteln Sie aus den Angaben: Achsenabschnitt $= \sqrt{27}$, Steigungswinkel $= 30^\circ$ wiederum die Geradengleichung in Standardform und in der allgemeinen Form, letztere jedoch nun mit reellen Koeffizienten.

Steigung: $m = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, also $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{27}$

Umformen, z.B.: $x - \sqrt{3}y + 9 = 0$

3. Geben Sie die Steigung und den Achsenabschnitt der folgenden allgemeinen Gleichungen an:

a) $2x + 3y + 7 = 0$

$$m = -\frac{2}{3}, b = -\frac{7}{3}$$

b) $15x - 3y + 21 = 0$

$$m = 5, b = 7$$

4. Die Gerade g hat die Steigung m und geht durch den Punkt P . Bestimmen Sie die Standardgleichung von g :

a) $P:[4, 2], m = 2$

Lösung durch Einsetzen in $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$:

$$y - 2 = 2 \cdot (x - 4) \Leftrightarrow y - 2 = 2x - 8 \Leftrightarrow y = 2x - 6$$

b) $P:\left[\frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right], m = -\frac{1}{3} \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{21}{20}$

c) $P:[4, 0], m = \sqrt{2} \quad y = \sqrt{2}x - 4\sqrt{2}$

d) $P:\left[0, \frac{3}{2}\right], m = -1 \quad y = -x + \frac{3}{2}$

5. Die Gerade g geht durch die Punkte A und B . Bestimmen Sie die Geradengleichung in der Standardform.

a) $A:[1, 2], B:[5, 4]$

Lösung durch Einsetzen in $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ und umwandeln in $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - \frac{(y_2 - y_1)x_1}{x_2 - x_1}$

$$\frac{y - 2}{x - 1} = \frac{4 - 2}{5 - 1} \Leftrightarrow \frac{y - 2}{x - 1} = \frac{2}{4} \Leftrightarrow y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

b) $A:[-3, 2], B:[5, -2] \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

c) $A:[1, \sqrt{5}], B:[7, \sqrt{5}] \quad y = \sqrt{5}$

d) $A:[u, v], B:[1, 2] \quad y = \frac{2 - v}{1 - u}x + v - \frac{u(2 - v)}{1 - u}$

Vertauscht man die beiden Punkte, so erhält man für den Achsenabschnitt: $2 - \frac{v - 2}{u - 1}$. Beide

Terme sind gleichwertig, dies kann man durch eine algebraische Gegenüberstellung leicht zeigen.

e) $A:[a, 0], B:[0, b] \quad y = -\frac{b}{a}x + b$

6. Eine Gerade schneidet die x -Achse im Punkt X und die y -Achse im Punkt Y . Bestimmen Sie die Standardform der Geradengleichung.

a) $X:[7, 0], Y:[0, 3]$

Lösung durch Einsetzen: $y = -\frac{3}{7} \cdot x + 3$

b) $X:[3, 0], Y:[0, 3] \quad y = -x + 3$

c) $X:[3, 0], Y:[0, -5] \quad y = 5/3x - 5$

d) $X:[-12, 0], Y:[0, -5] \quad y = -5/12x - 5$

7. Eine Gerade g schneidet die x -Achse bei $A = 8$ und die y -Achse bei $B = 6$.

- a) Wie lautet die Achsenabschnittsform dieser Geraden?

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$$

- b) Wie lautet die Geradengleichung in der Standardform?

$$y = -\frac{3}{4}x + 6$$

- c) Wie groß ist der Abstand der Geraden g vom Ursprung? Geben Sie mindestens drei Möglichkeiten an, wie Sie diese Streckenlänge bestimmen können und bewerten Sie diese drei Möglichkeiten.

1. Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks OAB kann auf zwei Arten bestimmt werden:

$$F = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \quad \text{oder} \quad F = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot d$$

Die Länge der Strecke AB ist 10 (pyth. Tripel), daraus folgt für $d = 4,8$

2. Über Ähnlichkeitsbeziehungen: Der gesuchte Abstand ist die Höhe auf der Seite AB . Eine Höhe im rechtwinkligen Dreieck zerlegt dieses in zwei zum Ausgangsdreieck ähnliche Teildreiecke. Teilt man die Hypotenuse des großen Dreiecks in die Abschnitte q und p , so gelten die

$$\text{Beziehungen: } \frac{q}{d} = \frac{b}{a} \text{ und } \frac{p}{d} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Daraus folgt: } q = d \cdot \frac{b}{a} \text{ und } p = d \cdot \frac{a}{b}$$

Addiert man beide Gleichungen und bezieht dabei mit ein, dass $p+q = 10$, so gilt für d :

$$10 = d \cdot \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right) = d \cdot \frac{a^2 + b^2}{ab} \Rightarrow d = \frac{10ab}{a^2 + b^2}, \text{ was ebenfalls } 4,8 \text{ für } d \text{ ergibt.}$$

3. Über Winkelfunktionen: Die Steigung der Geraden ist der Tangens ihres Steigungswinkels, der Steigungswinkel α kann also über $\text{atan}(m)$ bestimmt werden. Im vorliegenden Fall liefert der $\text{atan}(-\frac{3}{4})$ den Winkelwert $-36,87^\circ$, d.h. der Innenwinkel im Dreieck bei A beträgt $36,87^\circ$. Der

Geradenabstand vom Ursprung ist also gleich $d = 8 \cdot \sin(36,87) = 4,8$

4. Über den Katheten- und Höhensatz:

Kathetensätze:

$$8^2 = p \cdot 10 \Rightarrow p = 6,4$$

$$6^2 = q \cdot 10 \Rightarrow q = 3,6$$

Höhensatz:

$$h^2 = p \cdot q, \text{ also } h^2 = 6,4 \cdot 3,6 \Rightarrow h = 4,8$$

5. d steht senkrecht auf AB , d.h. die Steigung von d ist der negative Kehrwert der Steigung von AB , außerdem handelt es sich um eine Ursprungsgerade. Damit kann man beide Geraden schneiden und den Abstand des Schnittpunktes vom Ursprung bestimmen.

6. Pythagoras für d^2 in beiden Teildreiecken aufstellen:

$$d^2 + p^2 = 8^2 \quad (1)$$

$$d^2 + q^2 = 6^2 \quad (2)$$

Außerdem gilt:

$$p+q = 10 \Rightarrow q = 10-p \Rightarrow q^2 = 100-20p+p^2 \dots \text{Einsetzen in Gl. (2):}$$

$$d^2 + 100-20p+p^2 = 36 \quad (2a)$$

$$(1) - (2a):$$

$$-100 + 20p = 64 - 36$$

$$20p = 128$$

$$p = 6,4 \quad (3)$$

(3) in (1):

$$d^2 + 6,4^2 = 8^2 \Rightarrow d = 4,8$$

8. Erläutern Sie die Zweipunkteform einer Geradengleichung.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \text{ oder } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \text{ aus der Konstanz der Steigung!}$$

a) Leiten Sie aus der Zweipunkteform die Achsenabschnittsform ab.

Bei der Achsenabschnittsform sind y_1 und x_2 gleich 0, daraus folgt:

$$\frac{y}{y_2} = \frac{x - x_1}{-x_1} \Leftrightarrow \frac{y}{y_2} = -\frac{x}{x_1} + 1 \Leftrightarrow \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_2} = 1$$

b) Eine Gerade g schneidet die x -Achse bei a und die y -Achse bei b . Wie lautet die Achsenabschnittsform dieser Geraden?

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

c) Skizzieren Sie die Situation in etwa mit den Maßen der vorherigen Aufgabe und zeichnen Sie den Abstand d der Geraden vom Ursprung ein. Der Abstand d schließt mit der x -Achse den Winkel φ ein. Wo in Ihrer Skizze finden Sie diesen Winkel φ noch? In welcher Beziehung steht dieser Winkel φ mit dem Steigungswinkel der Geraden?

Der Winkel φ findet sich noch als Winkel zwischen g und der y -Achse, er ist genau 90° kleiner als der Steigungswinkel.

d) Drücken Sie die Achsenabschnitte a und b mit Hilfe des Abstands d und des Winkels φ aus.

$$\frac{d}{a} = \cos \varphi \text{ und } \frac{d}{b} = \sin \varphi \Rightarrow a = \frac{d}{\cos \varphi} \text{ und } b = \frac{d}{\sin \varphi}$$

e) Ersetzen Sie schließlich a und b in der in b) hergeleiteten Achsenabschnittsform durch die in der vorhergehenden Teilaufgabe d) gefundenen Terme und bringen Sie diese Gleichung in die Nullform.

$$x \cdot \cos(\varphi) + y \cdot \sin(\varphi) - d = 0$$

f) Welche Art von Geradengleichung haben Sie erhalten? Welchen wesentlichen Vorteil hat diese Art der Geradengleichung?

Die Polarform gibt explizit den Geradenabstand vom Nullpunkt an, außerdem kann man durch Addition von 90° den Steigungswinkel der Geraden ansehen.

9. Bringen Sie die Geradengleichung der Geraden g aus Aufgabe 7 in die allgemeine Form $Ax + By + C = 0$. Ist diese Form äquivalent zu der in Aufgabe 8 f) gefundenen Form? Zur Entscheidungsfindung sollten Sie überlegen, ob der oben genannte „wesentliche Vorteil“ bei der aktuellen Gleichung ebenfalls zum Ausdruck kommt!

$$6x + 8y - 48 = 0$$

Die grobe Struktur beider Gleichungen ist gleich, allerdings ist 48 sicher nicht der Geradenabstand vom Ursprung!

a) Welcher grundlegende Zusammenhang besteht zwischen den Winkelfunktionen \sin und \cos ? Dieser Zusammenhang wird insbesondere am Einheitskreis deutlich!

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

b) Überprüfen Sie unter Anwendung dieses grundlegenden Zusammenhangs der beiden Winkelfunktionen nochmals die Gleichwertigkeit beider Gleichungsformen.

$$6^2 + 8^2 \neq 48, \text{ damit stellt die aktuelle Gleichung keine Polarform dar!}$$

c) Überlegen Sie eine Methode, wie die fragliche Äquivalenz nachgewiesen werden kann.

Man multipliziert die gesamte Gleichung mit einem Faktor k . Dieser Faktor k muss so gewählt werden, dass gilt:

$$(k \cdot 6)^2 + (k \cdot 8)^2 = 1$$

$$36k^2 + 64k^2 = 1$$

$$100k^2 = 1$$

$$k^2 = 1/100$$

$$k = 1/10$$

d) Wie groß ist der Abstand der Geraden g vom Ursprung?

Bei Multiplikation mit k verändert sich die Geradengleichung zu

$0,6x + 0,8y - 4,8 = 0$ Hieraus kann der Abstand 4,8 direkt abgelesen werden.

e) Wie lautet eine geschlossene Formel, mit der Sie aus einer Geradengleichung in allgemeiner Form $Ax + By + C = 0$ den Abstand der zugehörigen Geraden vom Ursprung bestimmen können?

$$(k \cdot A)^2 + (k \cdot B)^2 = 1$$

$$(A^2 + B^2) \cdot k^2 = 1$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Mit diesem Faktor k muss die ganze Gleichung durchmultipliziert werden, um sie in die Polarform zu überführen. Für die Abstandsbestimmung muss insbesondere das konstante Glied mit k multipliziert werden. Da ein Abstand immer positiv ist, verwendet man den Betrag dieses Produkts. Für den Abstand d gilt somit:

$$d = \left| C \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

10. Gegeben ist eine Gerade in der Polarform $y \cdot \sin 30^\circ + x \cdot \cos 30^\circ - 5 = 0$.

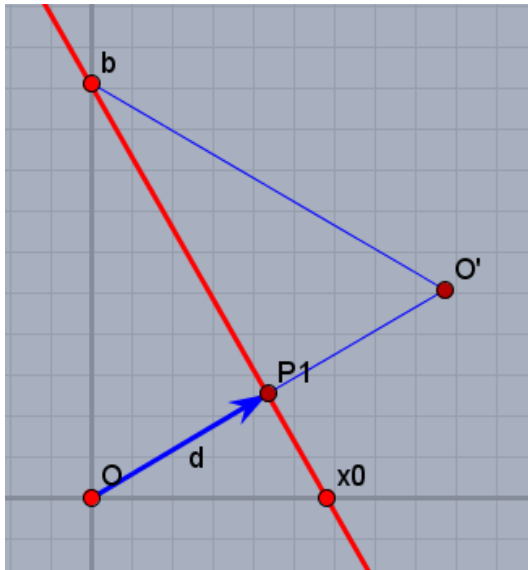
a) Geben Sie die Gleichung in der Standardform an

$$y = -\frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} \cdot x + \frac{5}{\sin 30^\circ} = -\cot 30^\circ \cdot x + 10 = -\sqrt{3} \cdot x + 10$$

b) Weisen Sie den errechneten Wert für den Achsenabschnitt geometrisch nach.

d ist die halbe Streckenlänge im gleichseitigen Dreieck $OO'b$. Die Strecke Ob ist also doppelt so lang.

c) Begründen Sie, dass der errechnete Wert für die Steigung korrekt ist.



Aus $\varphi = 30^\circ$ folgt, dass der Steigungswinkel der Geraden $30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$ ist.

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

Die Steigung ist der Tangens des Steigungswinkel, also

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

11. Wie kann eine Geradengleichung in der Standardform in die Polarform übergeführt werden? Geben Sie die folgenden Geradengleichungen in der Polarform an:

a) $y = \frac{2}{3}x + 2$

Man bestimmt zunächst über $m = \tan \alpha$ den Steigungswinkel der Geraden und addiert dazu 90° . Der Abstand der Geraden vom Nullpunkt wird über $d = b \cdot \sin \beta$ berechnet werden.

$$\arctan(2/3) = 33,69^\circ \Rightarrow \beta = 123,69^\circ$$

$$d = 2 \cdot \sin \beta = 1,66$$

$$x \cdot \cos 123,69^\circ + y \cdot \sin 123,69^\circ - 1,66 = 0$$

b) $y = -\sqrt{3} \cdot x + 3$

$$x \cdot \cos 30^\circ + y \cdot \sin 30^\circ - 1,5 = 0$$

12. Die Polarform einer Geradengleichung lautet: $x \cdot \cos(\varphi) + y \cdot \sin(\varphi) - d = 0$. Machen Sie sich nochmals den Zusammenhang zwischen der Polarform und der Standardform einer Geradengleichung klar!

Der Winkel φ der Polarform weicht um 90° vom Steigungswinkel der Geraden ab. Der Parameter d der Polarform gibt den Abstand der Geraden vom Ursprung an.

- a) Lösen Sie die Polarform algebraisch nach y auf.

$$y = -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \cdot x + \frac{d}{\sin \varphi} = -\cot(\varphi) \cdot x + \frac{d}{\sin \varphi}$$

- b) Zeigen Sie, dass eben ermittelte Gleichung genau der Standardform der Geradengleichung entspricht!

Hinweis: $-\cot x = \tan(x + 90^\circ)$

Entsprechend dem Hinweis erhalten wir: $y = \tan(\varphi + 90^\circ) \cdot x + \frac{d}{\sin \varphi}$. Der $\tan(\varphi + 90^\circ)$ ist aber der

Tangens des Steigungswinkels und damit genau m , also haben wir: $y = m \cdot x + \frac{d}{\sin \varphi}$.

Für den Achsenabschnitt b gilt: $\frac{d}{b} = \sin \varphi \Rightarrow b = \frac{d}{\sin \varphi}$ und damit: $y = mx + b$.

13. Erstellen Sie die Funktionen `parallel(m1,m2)` und `orthogonal(m1,m2)`, welche anhand der Steigungen m_1 und m_2 zweier Geraden überprüfen, ob die beiden Geraden zueinander parallel bzw. orthogonal sind. Maxima soll je nach Vorliegen der entsprechenden Bedingung die Wahrheitswerte `true` oder `false` liefern. Verwenden Sie dafür die bereits erstellte Funktion `gleich()`.

```
parallel(g1,g2):=
gleich(g1[1],g2[1]);
orthogonal(g1,g2):=
gleich(g1[1]*g2[1],-1);
```

14. Entscheiden Sie, ob die nachfolgend angegebenen Geradenpaare g und h parallel (bzw. orthogonal) sind oder nicht:

a)	$g: y = \frac{3}{2}x + 5$	$h: x = \frac{3}{2}x - 4$	parallel
b)	$g: y = -\frac{13}{4}x - 7$	$h: \frac{4}{13}x + 2$	senkrecht
c)	$g: y = \frac{57}{100}x - 0,5$	$h: y = \frac{4}{7}x + 0,75$	

15. Bestimmen Sie den Abstand der in der in der vorhergehenden Aufgabe angegebenen zueinander parallelen Geraden.

$$\frac{18}{\sqrt{13}} \approx 5$$

- a) Erstellen Sie die Funktion `geradenabstand(g1,g2)`, welche diesen Abstand aus den angegebenen Geradenparametern $[m_1, b_1]$ und $[m_2, b_2]$ ermittelt.

```
geradenabstand(g1,g2):=block(
[m1,b1,m2,b2],
[m1,b1]:g1,
[m1,b2]:g2,
if not(parallel(g1,g2)) then
print(g1, " nicht parallel zu ", g2)
else
abs(b2-b1)*cos(atan(m1)));
```

- b) Erstellen Sie außerdem die Funktion `geradenabstand_norm(g1,g2)`, welche den Abstand zweier paralleler und in Polarform angegebener Geraden bestimmt.

```
geradenabstand_norm(g1,g2):=block(
[r1,phi1,r2,phi2],
[r1,phi1]:g1,
[r2,phi2]:g2,
if not(gleich(phi1,phi2)) then
print(g1, " nicht parallel zu ", g2)
else
abs(r2-r1));
```

16. Bestimmen Sie den Schnittwinkel desjenigen Geradenpaares aus Aufgabe 15, welches weder parallel noch orthogonal ist.

$$0,06^\circ$$

17. Gegeben sind die drei Punkte $A:[2, 1]$, $B:[11, 5]$ und $C:[8, 12]$ eines Dreiecks. Bestimmen Sie die Innenwinkel des Dreiecks.

$$\alpha = 37.43^\circ, \beta = 90.76^\circ, \gamma = 51.81^\circ$$

Achtung: Es handelt sich um gerichtete Winkel! Welche Gerade muss mathematisch positiv gedreht werden, um auf dem anderen Schenkel zu liegen?

18. Gegeben sind drei Geraden g , h und k anhand ihrer Geradengleichungen in der Standardform. Dabei soll h senkrecht zu g verlaufen und k senkrecht zu h .

a) Können Sie beweisen, dass g parallel zu k ist?

Wenn g die Steigung m hat, dann hat h als Senkrechte die Steigung $-1/m$. Da k senkrecht zu h ist, hat k als Steigung den negativen Kehrwert der Steigung von h , also wiederum m . Also sind g und k parallel.

b) Müssen Sie dies streng genommen beweisen?

Nein, dies folgt bereits aus der Definition von „parallel“: Zwei Geraden sind parallel, wenn sie auf einer gemeinsamen dritten senkrecht stehen.

19. Gegeben ist die Gerade g mit der Steigung $\frac{2}{3}$ und dem Achsenabschnitt $\frac{7}{5}$.

a) Ermitteln Sie die Parameter m und b der beiden Geraden g_1 und g_2 , die im Abstand $d = 2$ parallel zu g verlaufen.

Man ermittelt den Steigungswinkel der Geraden g als \arctan der Steigung: 33.69° .

Der Abstand des Achsenabschnitts der parallelen Geraden errechnet sich aus $\frac{2}{\cos \varphi} = 2.4$

(Hierfür rechtwinkliges Dreieck aus y -Achse, Gerade und Abstandsvektor zeichnen!)

Bei parallelen Geraden bleibt die Steigung gleich, der Achsenabschnitt ist jeweils um 2.4 nach oben und unten verschoben, also gilt für die parallelen Geraden

$$g_1: \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{5} \right] \text{ und } g_2: \left[\frac{2}{3}, -1 \right]$$

b) Ermitteln Sie ebenso die Geraden g_3 und g_4 , die zu g_1 und g_2 ebenfalls im Abstand 2 parallel verlaufen. Diese Ergebnisse werden wir in einer späteren Aufgabe wieder aufgreifen!

$$g_3: \left[\frac{2}{3}, \frac{31}{5} \right] \text{ und } g_4: \left[\frac{2}{3}, -\frac{17}{5} \right]$$

20. Die vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 mit ihren Koordinaten $P_1:[-4, -3]$, $P_2:[5, -1]$, $P_3:[7, 4]$ und $P_4:[-6, 5]$ bilden ein Viereck. Zeichnen Sie dieses Viereck in ein Koordinatensystem ein.

a) Erläutern Sie allgemein, wie man die Koordinaten M_x und M_y des Mittelpunkts M derjenigen Strecke bestimmen kann, welche durch die Endpunkte $P_1:[x_1, y_1]$ und $P_2:[x_2, y_2]$ festgelegt ist.

$$M_x = \frac{(x_1 + x_2)}{2} \quad M_y = \frac{(y_1 + y_2)}{2}$$

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Mittelpunkte M_1 (von P_1P_2), M_2 (von P_2P_3), M_3 (von P_3P_4) und M_4 (von P_4P_1).

$$M_1:[0.5, -2]; \quad M_2:[6, 1.5]; \quad M_3:[0.5, 4.5]; \quad M_4:[-5, 1]$$

c) Bestimmen Sie rechnerisch die Geradengleichungen der durch die Mittelpunkte verlaufenden Geraden g_1 (durch M_1M_2), g_2 (durch M_2M_3), g_3 (durch M_3M_4) und g_4 (durch M_4M_1). Zeichnen Sie diese Geraden in Ihre Zeichnung ein. Was stellen Sie fest?

$$g_1: \left[\frac{7}{11}, -\frac{51}{22} \right]$$

$$g_2: \left[-\frac{6}{11}, \frac{105}{22} \right]$$

$$g_3: \left[\frac{7}{11}, \frac{46}{11} \right]$$

$$g_4: \left[-\frac{6}{11}, -\frac{19}{11} \right]$$

Jeweils gegenüberliegende Geraden haben dieselbe Steigung, sind also parallel.

- d) „Verbindet man aufeinander folgende Seitenmitten eines beliebigen Vierecks miteinander, so entsteht ein Parallelogramm.“ Können Sie die Gültigkeit dieses Satzes rechnerisch an Ihrer Konstruktion nachweisen?

Die Steigungen von g_1 und g_3 sowie g_2 und g_4 sind gleich, daher sind die entsprechenden Geraden parallel.

- e) Beweisen Sie den vorgenannten Satz über die Seitenmitten allgemein. Gehen Sie aus von vier beliebigen Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 mit den allgemeinen Koordinaten $P_1: [x_1, y_1]$, $P_2: [x_2, y_2]$, $P_3: [x_3, y_3]$, $P_4: [x_4, y_4]$ und führen Sie die oben durchgeführten konkreten Berechnungen allgemein durch.

Wir bilden die Seitenmitten:

$$M_1: \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \quad M_2: \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right)$$

$$M_3: \left(\frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{y_3 + y_4}{2} \right) \quad M_4: \left(\frac{x_4 + x_1}{2}, \frac{y_4 + y_1}{2} \right)$$

Es reicht aus, die Steigungen zweier Geraden durch die zugehörigen Mittelpunkte zu bestimmen, beispielsweise für g_1 und g_3 . Die Steigungen errechnen sich immer nach $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

$$\text{Steigung von } g_1 \text{ durch } M_1M_2: \frac{\frac{y_2 + y_3}{2} - \frac{y_2 + y_1}{2}}{\frac{x_2 + x_3}{2} - \frac{x_2 + x_1}{2}} = \frac{y_2 + y_3 - y_2 - y_1}{x_2 + x_3 - x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

$$\text{Steigung von } g_3 \text{ durch } M_3M_4: \frac{\frac{y_3 + y_4}{2} - \frac{y_4 + y_1}{2}}{\frac{x_3 + x_4}{2} - \frac{x_4 + x_1}{2}} = \frac{y_3 + y_4 - y_4 - y_1}{x_3 + x_4 - x_4 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

Die beiden resultierenden Quotienten sind gleich, daher sind auch die Steigungen der Geraden gleich. Nachweis für die beiden anderen Geraden:

$$\text{Steigung von } g_2 \text{ durch } M_2M_3: \frac{\frac{y_2 + y_3}{2} - \frac{y_3 + y_4}{2}}{\frac{x_2 + x_3}{2} - \frac{x_3 + x_4}{2}} = \frac{y_2 + y_3 - y_3 - y_4}{x_2 + x_3 - x_3 - x_4} = \frac{y_2 - y_4}{x_2 - x_4}$$

$$\text{Steigung von } g_4 \text{ durch } M_4M_1: \frac{\frac{y_4 + y_1}{2} - \frac{y_1 + y_2}{2}}{\frac{x_4 + x_1}{2} - \frac{x_1 + x_2}{2}} = \frac{y_4 + y_1 - y_1 - y_2}{x_4 + x_1 - x_1 - x_2} = \frac{y_4 - y_2}{x_4 - x_2} = \frac{y_2 - y_4}{x_2 - x_4}$$

Der Nachweis ist prinzipiell auch möglich, wenn man zeigt, dass die Koordinaten der Mittelpunkte der Diagonalen gleich sind.