

kg_aufgaben_05.docx

1. Beschreiben Sie, wie Sie ...

a) ... feststellen, ob ein Punkt auf einer gegebenen Geraden liegt.

Punktprobe

b) ... den Schnittpunkt zweier Geraden bestimmen.

Gleichungssystem

c) ... den Abstand eines Punktes von einer Geraden berechnen.

Parallele durch den Punkt legen und Geradenabstand bestimmen

d) ... die Geradengleichung einer Lotgeraden ermitteln.

Punkt-Steigungs-Form

e) ... einen Lotfußpunkt bestimmen.

Geradenschnittpunkt Lotgerade mit Gerade

f) ... die Geradengleichung einer Mittelsenkrechten ermitteln.

Lot durch den Mittelpunkt

g) ... Kollinearität feststellen.

Zweipunktform und Punktprobe ODER gleiche Steigung der Geraden durch P_1P_2 und P_2P_3

h) ... auf kopunktuale Geraden untersuchen.

Schnittpunkt zweier Geraden und dann Punktprobe mit dritter Geraden

2. Gegeben ist die Gerade $g: \left[\frac{3}{7}, -\frac{13}{11} \right]$

a) Geben Sie drei Punkte an, die auf dieser Geraden liegen.

Individuelle Lösung.

b) Überprüfen Sie, welche der nachfolgenden Punkte auf g liegen:

$$A: \left[-\frac{28}{5}, -\frac{199}{55} \right], B: \left[-\frac{3}{2}, -\frac{281}{154} \right], C: \left[\frac{6}{7}, -\frac{439}{539} \right],$$

$$D: \left[\frac{167}{13}, \frac{4327}{1001} \right], E: \left[\frac{4328}{123}, \frac{43877}{3157} \right], F: \left[4597, \frac{151611}{77} \right]$$

B, C, E inzidieren, A, D und F nicht.

3. Ermitteln Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden g und h .

a) $g: y = \frac{1}{2}x + 5$ $h: y = -3x + 19$ $[4, 7]$

b) $g: y = \sqrt{3} \cdot x - 2$; $h: y = -\sqrt{2}x + 3$ $[1.59, 0.75]$

4. Ermitteln Sie den Abstand des Punktes P von der Geraden g .

a) $P: [3, 4]$; $g: y = \frac{3}{2}x + 3$ 1.94

b) $P: \left[11, \frac{22}{3} \right]$ $g: y = \frac{7}{11}x + \frac{3}{9}$ 0

c) $P: [-4, 3]$; $g: y = \frac{4}{3}x$ 5.0

- d) $P:[5, -2.5]; \quad g: y = \frac{7}{4}x - 2 \quad 4.59$
- e) $P:[243, -463]; \quad g: y = \frac{1}{10}x - 500 \quad 12.64$
5. Geben Sie die Gleichung der Lotgeraden durch den Punkt P zur Geraden g an.
- a) $P:[4, 0]; \quad g: y = \frac{3}{2}x + 3 \quad \left[-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right]$
- b) $P:[-3, 7]; \quad g: y = -\frac{5}{2}x - 1 \quad [0.4, 8.2]$
6. Bestimmen Sie die Lotfußpunkte der in der vorigen Aufgabe bestimmten Lote.
 $[-0.15, 2.77] \quad [-3.17, 6.93]$
7. Bestimmen Sie die Geradengleichung der Mittelsenkrechten auf die durch ihre Endpunkte P und Q angegebenen Strecken.
- a) $P:[3, 4]; Q:[5, 7] \quad \left[-\frac{2}{3}, 8.17\right]$
- b) $P:[-7, 9]; Q:[3, -4] \quad [0.77, 4.04]$
8. Gegeben ist das Dreieck $A:[2, 1], B:[11, 5]$ und $C:[8, 12]$.
- a) Bestimmen Sie den Umfang des Dreiecks.
 $\sqrt{97} + \sqrt{58} + \sqrt{157} \approx 30$
- b) Geben Sie die Abstände der Dreieckspunkte von den gegenüberliegenden Seiten an.
 Länge h_a : 9.85, Länge h_b : 5.99, Länge h_c : 7.62
- c) Überprüfen Sie rechnerisch, ob sich die Höhen dieses Dreiecks in einem Punkt schneiden. Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts bzw. der Schnittpunkte an.
 $\left[\frac{836}{75}, \frac{123}{25}\right]$
- d) Überprüfen Sie rechnerisch, ob sich die Mittelsenkrechten dieses Dreiecks in einem Punkt schneiden. Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts bzw. der Schnittpunkte an.
 $\left[\frac{739}{150}, \frac{327}{50}\right]$
- e) Überprüfen Sie rechnerisch, ob sich die Seitenhalbierenden dieses Dreiecks in einem Punkt schneiden. Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts bzw. der Schnittpunkte an.
 $[7, 6]$
9. Sie haben in einer Aufgabe des vorhergehenden Kapitels vier zur Geraden $g: \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{5}\right]$ parallele Geraden ermittelt. Besorgen Sie sich die damals errechneten Parameter dieser Parallelen. Damit liegt Ihnen eine Schar von fünf parallelen und äquidistanten Geraden vor.
- a) Neu kommt die Gerade $h: \left[-\frac{1}{10}, 7\right]$ hinzu. Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von h mit den 5 Parallelen.

$h \cap g_3: [1.03, 6.9]$, $h \cap g_1: [4.17, 6.58]$, $h \cap g: [7.30, 6.27]$, $h \cap g_2: [10.44, 5.96]$, $h \cap g_4: [13.57, 5.64]$

- b) Begründen Sie anschaulich, warum die Parallelschar die Gerade h in vier äquidistante Teilstücke zerlegt.

Strahlensatzfigur, dazu Senkrechte zur Parallelschar durch den Schnittpunkt von h mit g_3 zeichnen.

Oder über Kongruente rechtwinklige Dreiecke nach WSW

- c) Überprüfen Sie rechnerisch, ob die ausgeschnittenen Strecken tatsächlich gleich lang sind. Wie lang sind die Streckenstücke?

$$\frac{36\sqrt{101}}{115} \approx 3.15$$

10. Sind die drei angegebenen Punkte jeweils kollinear? Falls ja, geben Sie die Steigung dieser Geraden an.

a) $[0, 0]$, $[1, \sqrt{3}]$, $[3, 3\sqrt{3}]$ $y = \sqrt{3} \cdot x$

b) $[-9, 7]$, $[-5, 4]$, $[3, -2]$ $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$

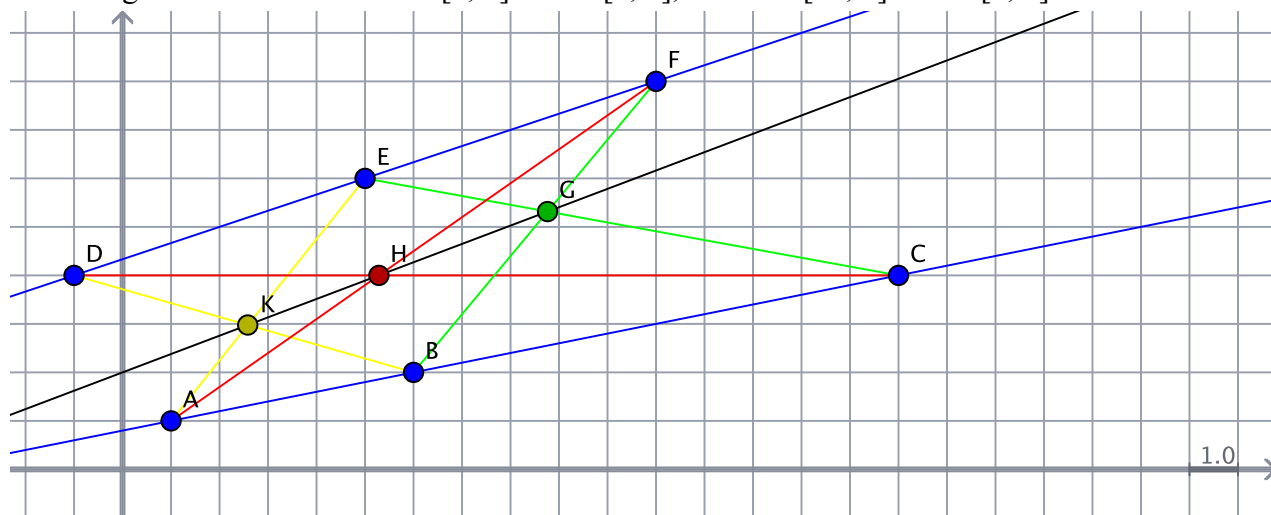
11. Sind die drei Geraden jeweils kopunktal? Falls ja, geben Sie den gemeinsamen Schnittpunkt an.

a) $g_1: y = 4x - 14$ $g_2: y = -\frac{2}{5}x - \frac{4}{5}$ $g_3: y = -5x + 13$ $[3, -2]$

b) $g_1: y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$ $g_2: y = 3x - \frac{49}{10}$ $g_3: y = \frac{1}{2}x - \frac{115}{10}$ nicht kopunktal

c) $g_1: y = \frac{33}{20}x - \frac{13}{2}$ $g_2: y = \frac{1}{20}x + \frac{19}{2}$ $g_3: y = -\frac{31}{30}x + \frac{61}{3}$ $[10, 10]$

12. Gegeben sind die Punkte $A: [1, 1]$ und $B: [6, 2]$, sowie $D: [-1, 4]$ und $E: [5, 6]$.



- a) Wie können Sie aus zwei gegebenen Punkten die Geradengleichung der dadurch festgelegten Geraden in der Standardform ermitteln? Geben Sie die beiden Geradengleichungen der Geraden g durch A und B sowie der Geraden h durch D und E an.

Über die Zweipunkteform $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Leftrightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Einsetzen und nach y auflösen. In Maxima über die Funktion `zpf_std()`.

$$g(A,B): y = \frac{1}{5} \cdot x + \frac{4}{5} \text{ und } h(D,E): y = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{13}{3}$$

- b) Geben Sie die (ganzzahligen) Koordinaten zweier Punkte C und F an, die jeweils rechts von A und B bzw. D und E auf der Geraden g bzw. h liegen. Wie gehen Sie vor?

Allgemein: x -Wert wählen und y berechnen. Um ganzzahlige Koordinaten zu bekommen, bietet es sich an, um 5 bzw. 3 Einheiten weiter nach rechts zu gehen.

$$C:[11,3] \text{ oder } [16,4] \quad F:[8,7] \text{ oder } [11,8]$$

- c) Beschreiben Sie allgemein, wie der Schnittpunkt zweier Geraden bestimmt werden kann. Bestimmen Sie dann die Schnittpunkte der Geraden AE und BD , BF und CE sowie AF und CD .

Lösen des linearen Gleichungssystems.

$$AE \cap BD \quad K: \left[\frac{111}{43}, \frac{128}{43} \right] \approx [2.58, 2.98]$$

$$BF \cap CE \quad G: \left[\frac{333}{38}, \frac{101}{19} \right] \approx [8.76, 5.32]$$

$$AF \cap CD \quad H: \left[\frac{37}{7}, 4 \right] \approx [5.29, 4.0]$$

- d) Geben Sie zwei verschiedene Möglichkeiten an, wie Sie überprüfen können, ob drei gegebene Punkte auf einer Geraden liegen! Überprüfen Sie dann, ob die in der vorigen Teilaufgabe bestimmten Schnittpunkte kollinear sind.

1. Zwei Geraden sind kollinear, wenn die Gerade durch AB dieselbe Steigung hat wie diejenige durch BC .

2. Punktprobe: Liegt C auf der Geraden durch AB ?

Kollinearität von K , G und H : Überprüfung in Maxima ergibt `true`.

- e) Nun sollen Sie algebraisch-analytisch nachweisen, dass diese drei Schnittpunkte immer kollinear sind, indem Sie die symbolischen Fähigkeiten von Maxima nutzen. Am besten führen Sie dazu einen Neustart von Maxima aus, laden wieder Ihr Funktionenpaket und definieren die Funktion `steigung()` folgendermaßen:

`steigung(P1, P2) := (P2[2] - P1[2]) / (P2[1] - P1[1]);`

Dann deklarieren Sie die Punkte P_1 , P_2 , Q_1 und Q_2 allgemein:

`P1: [x1, y1];`

`P2: [x2, y2];`

`Q1: [x4, y4];`

`Q2: [x5, y5];`

P_1 und P_2 legen die Gerade g fest, Q_1 und Q_2 definieren die Gerade h . Wie lauten die Gleichungen für g und h jeweils in der Standardform?

P1 und P2 legen die Gerade g fest:

```
(%i11) g:zpf_std(P1,P2);
(%o11) [ $\frac{y2-y1}{x2-x1}$ ,  $y1 - \frac{x1(y2-y1)}{x2-x1}$ ]
```

Q1 und Q2 legen die Gerade h fest:

```
(%i12) h:zpf_std(Q1,Q2);
(%o12) [ $\frac{y5-y4}{x5-x4}$ ,  $y4 - \frac{x4(y5-y4)}{x5-x4}$ ]
```

- f) Wir benötigen einen weiteren Punkt P_3 auf g sowie einen weiteren Punkt Q_3 auf h .
 P_3 soll die x -Koordinate x_3 haben, wie lautet dann der Term für seine zugehörige y -Koordinate?
 Q_3 soll die x -Koordinate x_6 haben, wie lautet der Term für seine zugehörige y -Koordinate?

weiterer Punkt P3 auf g mit der x-Koordinate x3:

```
(%i13) P3:[x3,g[1]*x3+g[2]];
(%o13) [ $x3$ ,  $\frac{x3(y2-y1)}{x2-x1} - \frac{x1(y2-y1)}{x2-x1} + y1$ ]
```

weiterer Punkt Q3 auf h mit der x-Koordinate x6

```
(%i14) Q3:[x6,h[1]*x6+h[2]];
(%o14) [ $x6$ ,  $\frac{x6(y5-y4)}{x5-x4} - \frac{x4(y5-y4)}{x5-x4} + y4$ ]
```

- g) Bestimmen Sie mit Hilfe von Maxima die Koordinaten der Schnittpunkte
 S_1 als Schnittpunkt der Geraden P_1Q_2 und P_2Q_1 ,
 S_2 als Schnittpunkt der Geraden P_2Q_3 und P_3Q_2 sowie
 S_3 als Schnittpunkt der Geraden P_1Q_3 und P_3Q_1 .
 Notieren Sie die von Maxima bestimmten Koordinaten des Schnittpunktes S_1 . Die Koordinaten von S_2 und S_3 brauchen Sie nicht zu notieren.

Schnittpunkt aus P1Q2 mit P2Q1

```
(%i15) S1:geradenschnittpunkt(zpf_std(P1,Q2),zpf_std(P2,Q1));
(%o15) [ $\frac{\frac{x1(y5-y1)}{x5-x1} - \frac{x2(y4-y2)}{x4-x2} + y2 - y1}{\frac{y5-y1}{x5-x1} - \frac{y4-y2}{x4-x2}}$ ,  $\frac{(y5-y1) \left( \frac{x1(y5-y1)}{x5-x1} - \frac{x2(y4-y2)}{x4-x2} + y2 - y1 \right)}{(x5-x1) \left( \frac{y5-y1}{x5-x1} - \frac{y4-y2}{x4-x2} \right)} - \frac{x1(y5-y1)}{x5-x1} + y1$ ]
```

- h) Wie überprüfen Sie nun auf Kollinearität der drei Schnittpunkte S_1 , S_2 und S_3 ? Was ergibt die Überprüfung?

Überprüfung auf Kollinearität

```
(%i18) kollinear(S1,S2,S3);
(%o18) true
```

Es handelt sich hierbei um eine Anwendung und einen Beweis des Satzes von Pappos:

Sind A , B und C drei auf einer Geraden liegende Punkte, D , E und F drei Punkte auf einer anderen Geraden, dann liegen die drei Schnittpunkte K , H und G der Geraden AE und BD , BF und CE , AF und CD ebenfalls auf einer Geraden.