

kg_aufgaben_07.docx

1. Geben Sie drei Möglichkeiten an, um die Koordinaten des Schwerpunkts eines Dreiecks zu finden. Bewerten Sie diese drei Möglichkeiten!

1. Man kann die Geradengleichungen zweier Seitenhalbierender und deren Geradenschnittpunkt bestimmen.

2. Man kann eine Seitenhalbierende im Verh. 2:1 teilen ...

3. ... oder über das Teilverhältnis 2/1 des Schwerpunkts auf die Formel $x_s = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$

kommen.

Die erste Möglichkeit funktioniert immer, macht aber etwas Aufwand.

Für die zweite Möglichkeit ist eine Skizze hilfreich.

In Maxima lässt sich eine geschlossene Formel für die 3. Mögl. am einfachsten realisieren.

2. Stellen Sie zwei Möglichkeiten dar, um mit den Mitteln der Koordinatengeometrie den Flächeninhalt eines durch seine Eckpunkte gegebenen Dreiecks bestimmen zu können. Bewerten Sie beide Möglichkeiten.

Klassisch über Grundseite mal Höhe.

Oder über die Flächenzerlegung im Koordinatensystem in Trapeze, welche eine geschlossene Formel liefert.

Hoher Aufwand der klassischen Möglichkeit: Länge der Grundseite berechnen. Geradengleichung der Grundseite bestimmen, Lotfußpunkt bestimmen, Länge des Lotes berechnen.

3. Die Punkte $A: [-2, -3]$, $B: [8, -1]$ und $C: [-1, 5]$ bilden ein Dreieck. Bestimmen Sie ...

a) ... die Längen und die Geradengleichungen der drei Seitenhalbierenden.

$A-BC$: 7.43; $y = 0.91x - 1.18$

$B-CA$: 9.71; $y = -0.21x + 0.68$

$C-AB$: 8.06; $y = -1.75x + 3.25$

b) ... die Koordinaten des Schwerpunktes.

$[1.67, 0.33]$

c) ... die Längen und Geradengleichungen der drei Winkelhalbierenden

Winkelhalbierende durch A : $y = 1.08x - 0.85$, 7.31

Winkelhalbierende durch B : $y = -0.2x + 0.58$, 9.70

Winkelhalbierende durch C : $y = -2.18x + 2.82$, 7.86

d) ... den Mittelpunkt und den Radius des Inkreises

$[[1.12, 0.36], 2.68]$

e) ... die Längen und die Geradengleichungen der drei Höhen.

$A-BC$: 7.21; $y = 1.5x$

$B-CA$: 9.67 ; $y = -0.125x$

$C-AB$: 7.65; $y = -5x$

f) ... die Geradengleichungen der Mittelsenkrechten

AB : $y = -5x + 13$

BC : $y = 1.5x - 3.25$

CA : $y = -0.125x + 0.8125$

g) ... den Mittelpunkt und Radius des Umkreises.

[2.5, 0.5]

- h) ... den Flächeninhalt des Dreiecks.

39

4. Gegeben ist ein Viereck $ABCD$ mit den Koordinaten der Eckpunkte $A:[1, 2]$, $B:[17, 0]$, $C:[11, 12]$ und $D:[3, 14]$.

- a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Streckenmittelpunkte P (zwischen A und B), Q (zwischen B und C), R (zwischen C und D) und S (zwischen D und A).

$P:[9, 1]$, $Q:[14, 6]$, $R:[7, 13]$, $S:[2, 8]$

- b) Überprüfen Sie, ob die in a) berechneten Streckenmittelpunkte P , Q , R und S ein Parallelogramm bilden.

Ja, einfacher rechnerischer Nachweis! Koordinaten der gemeinsamen Diagonalenmitten: $[8, 7]$

- c) Weisen Sie allgemein algebraisch mit den Mitteln der Koordinatengeometrie nach, dass die vier Seitenmitten eines beliebigen Vierecks immer ein Parallelogramm bilden.

Koordinaten der Eckpunkte eines Vierecks allgemein:

$A:[x_1, y_1]$, $B:[x_2, y_2]$, $C:[x_3, y_3]$ und $D:[x_4, y_4]$

Bestimmung der Koordinaten der Streckenmitten allgemein:

$$P: \left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right], Q: \left[\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right], R: \left[\frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{y_3 + y_4}{2} \right], S: \left[\frac{x_4 + x_1}{2}, \frac{y_4 + y_1}{2} \right]$$

Mittelpunkt M_1 der Diagonalen von P nach R :

$$M_1: \left[\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{\frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_3 + y_4}{2}}{2} \right] = \left[\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} \right]$$

Mittelpunkt M_2 der Diagonalen von Q nach S :

$$M_2: \left[\frac{\frac{x_2 + x_3}{2} + \frac{x_4 + x_1}{2}, \frac{\frac{y_2 + y_3}{2} + \frac{y_4 + y_1}{2}}{2} \right] = \left[\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} \right]$$

Beide Koordinaten sind offensichtlich gleich! Damit bilden die Seitenmitten eines beliebigen Vierecks immer ein Parallelogramm.

- d) Beweisen Sie schließlich rein geometrisch, dass die Seitenmitten eines beliebigen Vierecks immer ein Parallelogramm bilden.

Jede Diagonale teilt das Ausgangsviereck in zwei Dreiecke mit gleicher Basis – nämlich eben der Diagonalen. Die gegenüberliegenden Verbindungsstrecken zwischen zwei Seitenmitten des Ausgangsvierecks sind Mittelparallelen in den jeweiligen Teildreiecken und damit parallel zur gemeinsamen Basis. Aus der Transitivität der Parallelität folgt, dass dann auch die gegenüberliegenden Verbindungen der Seitenmitten parallel zueinander sind.

Wenn der Satz von der Mittenparallelen nicht zur Verfügung steht, kann der Beweis ebenso mit Hilfe des zweiten Strahlensatzes geführt werden.

- e) Gilt der Satz, dass die Seitenmitten eines beliebigen Vierecks immer ein Parallelogramm bilden, auch für konkave Vierecke, also für solche mit einer einspringenden Ecke? Begründen Sie Ihre Antwort.

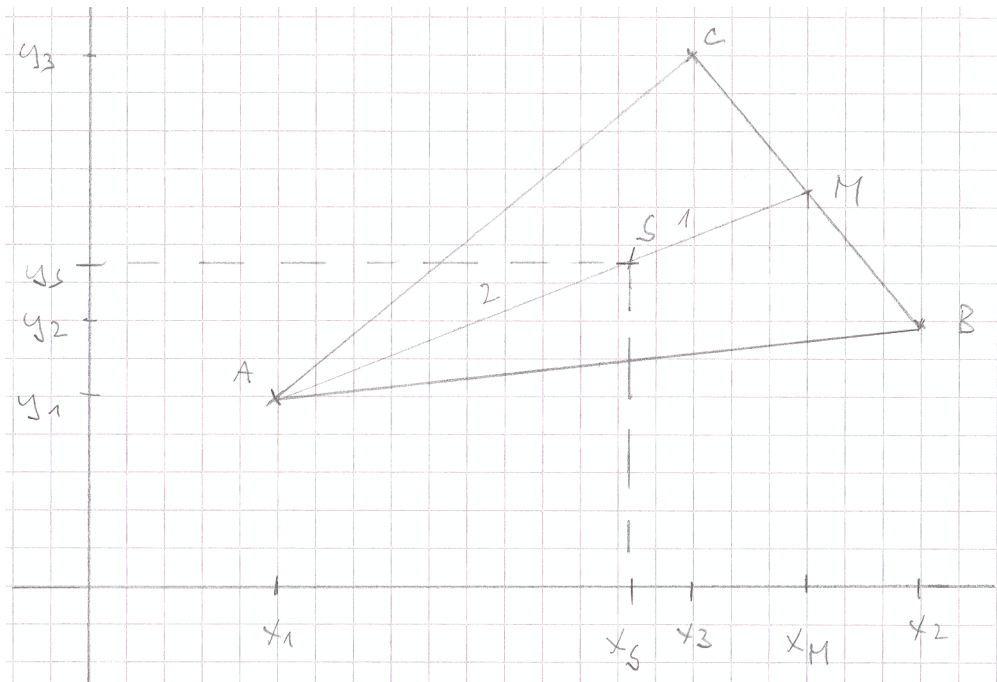
Der Satz gilt auch in solchen Fällen!

Der allgemeine algebraische Nachweis in e) schließt auch die Fälle mit ein, ebenso der geometrische Nachweis in f): Die Diagonale zwischen zwei Eckpunkten, welche der einspringenden Ecke benachbart sind, erzeugt ebenfalls zwei Dreiecke mit gleicher Grundseite.

5. Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $A:[x_1, y_1]$, $B:[x_2, y_2]$ und $C:[x_3, y_3]$. Der Schwerpunkt S dieses Dreiecks hat die Koordinaten $[x_S, y_S]$.

a) Weisen Sie nach, dass für die x - und y -Koordinaten des Schwerpunktes S gilt:

$$x_S = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad \text{und} \quad y_S = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$



S teilt AM im Verhältnis 2:1

x_S teilt $x_1 x_M$ ebenfalls 2:1

$$x_S = x_1 + \frac{2}{3} \cdot (x_M - x_1)$$

$$x_S = x_1 + \frac{2}{3} x_M - \frac{2}{3} x_1 \quad (1)$$

Für x_M gilt:

$$x_M = \frac{x_2 + x_3}{2} \quad (2)$$

(2) in (1):

$$x_S = x_1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{x_2 + x_3}{2} - \frac{2}{3} \cdot x_1$$

$$x_S = \frac{1}{3} x_1 + \frac{x_2 + x_3}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

y -Koordinate analog!

- b) Gegeben ist das Dreieck mit den Eckpunkten $A:(2, 1)$, $B:(9, 3)$ und $C:(7, 9)$. Berechnen Sie die Koordinaten seines Schwerpunktes S , seines Höhenschnittpunktes H und des Schnittpunktes seiner Mittelsenkrechten M . Es kann für die folgenden Teilaufgaben sehr

hilfreich sein, das Dreieck und die nachfolgend genannten Objekte zu zeichnen oder mindestens zu skizzieren.

S über die eben hergeleitete Formel bzw. Funktion: [6, 4.333]

M über Umkreisfunktion: [4.67, 4.89]

H über Schnittpunkt zweier Lotgeraden: [8.65, 3.22]

- c) Wie können Sie überprüfen, ob die Punkte S , H und M auf einer Geraden liegen? Was ergibt das Ergebnis dieser Überprüfung?

Gleichung der Geraden durch zwei dieser Punkte ermitteln und überprüfen, ob der dritte Punkt ebenfalls auf dieser Geraden liegt. \rightarrow true!

- d) Bestimmen Sie die Mittelpunkte M_a , M_b und M_c der jeweiligen Dreiecksseiten. Die Verbindungen dieser drei Punkte bilden das sogenannte Mittendreieck des Dreiecks ABC .

M_a : [8, 6] M_b : [4.5, 5] M_c : [5.5, 2]

- e) In welchem geometrischen Zusammenhang stehen Dreieck, Mittendreieck und Schwerpunkt?

Zeichnet man die Seitenhalbierenden ein, so erkennt man, dass das Mittendreieck aus dem Dreieck durch zentrische Streckung an S mit dem Faktor -0.5 entsteht! S ist dabei Fixpunkt, d.h., die Schwerpunkte beider Dreiecke haben dieselbe Lage!

- f) Bestimmen Sie den Höhenschnittpunkt dieses Mittendreiecks. Was fällt Ihnen auf? Beweisen Sie geometrisch, dass die von Ihnen gemachte Entdeckung einen grundsätzlichen Zusammenhang zwischen jedem beliebigen Dreieck und dessen Mittendreieck darstellt.

H im Mittendreieck durch Schnittpunkt zweier Lotgeraden ermitteln: H_M : [4.67, 4.89].

Feststellung: Der Höhenschnittpunkt im Mittendreieck ist gleich dem Umkreismittelpunkt im Dreieck.

$\rightarrow H_{\text{Mittendreieck}} = M_{ABC}$

Zeichnet man die Mittelsenkrechten im Dreieck ein, so erkennt man, dass diese die Höhen im Mittendreieck sind (die Seiten des Mittendreiecks sind ja die Mittelparallelen des Dreiecks).

- g) Zeigen Sie schließlich, dass der Schwerpunkt S , der Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten sowie der Schnittpunkt der Höhen H immer kollinear sind.

S ist Fixpunkt der zentrischen Streckung, welcher das Dreieck und sein Mittendreieck aufeinander abbildet.

Bei der Abbildung wird der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des großen Dreiecks (M_{ABC}) auf den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten des Mittendreiecks $M_{\text{Mittendreieck}}$ abgebildet. (Begründung: Die zentrische Streckung ist streckenverhältnistreu!), also:

$M_{ABC} \rightarrow M_{\text{Mittendreieck}}$

Außerdem gilt: $M_{ABC} = H_{\text{Mittendreieck}}$

Also $H_{\text{Mittendreieck}} \rightarrow M_{\text{Mittendreieck}}$

Damit werden bei der zentrischen Streckung an S der Höhenschnittpunkt H und der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten M aufeinander abgebildet.

Nach den Gesetzen der zentrischen Streckung sind Zentrum, Urbildpunkt und Bildpunkt kollinear, also sind $H_{\text{Mittendreieck}}$, S und $M_{\text{Mittendreieck}}$ kollinear, sie liegen auf der Eulergeraden.