

## kg\_aufgaben\_08.docx

1. In welcher Beziehung stehen der Sinus und der Kosinus am Einheitskreis zueinander?

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

2. Zeichnen Sie um den Ursprung des Koordinatensystems einen Kreis mit dem Radius 5. In welcher Beziehung stehen die  $x$ - und die  $y$ -Koordinaten von Punkten auf der Kreislinie zum Radius?

$$x^2 + y^2 = r^2$$

3. Gegeben ist der Mittelpunkt  $M:[1, 2]$ . Zeichnen Sie um  $M$  einen Kreis mit dem Radius  $r = 3$ . Zeichnen Sie exakt und in einem möglichst großen Maßstab.

- a) Ermitteln Sie aus Ihrer Zeichnung einige Koordinatenpaare  $[x, y]$  von Punkten auf der Kreislinie (mit ganzzahliger  $x$ -Koordinate).

$x$	-2	-1	0	1	2	3	4
$y_1$	2	-0,24	-0,83	-1	-0,83	-0,24	2
$y_2$	2	4,24	4,83	5	4,83	4,24	2

- b) Wie lautet die Definition eines Kreises?

Menge aller Punkte, welche von einem Mittelpunkt aus denselben Abstand haben.

- c) Welcher Begriff ist für das Zeichnen von Kreisen und damit in dieser Definition entscheidend?

Der Abstand.

- d) Diesen „zentralen Begriff“ haben Sie bereits ganz am Anfang diskutiert. Rufen Sie sich die rechnerische Behandlung dieses Begriffs wieder ins Gedächtnis.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- e) Schaffen Sie es, damit die in Aufgabenteil a) gefundenen Koordinaten zu überprüfen?

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

$$(y - y_M)^2 = r^2 - (x - x_M)^2$$

$$y = \sqrt{r^2 - (x - x_M)^2} + y_M$$

Die Rechnung bestätigt die oben gefundenen Koordinaten. Da es sich um eine Verlustumformung handelt, muss man beim Ziehen der Wurzel beide Lösungen berücksichtigen.

- f) Leiten Sie aus den eben gemachten Überlegungen die Hauptform der Kreisgleichung her! Wie lautet diese für den konkret in Aufgabe 3 angegebenen Kreis?

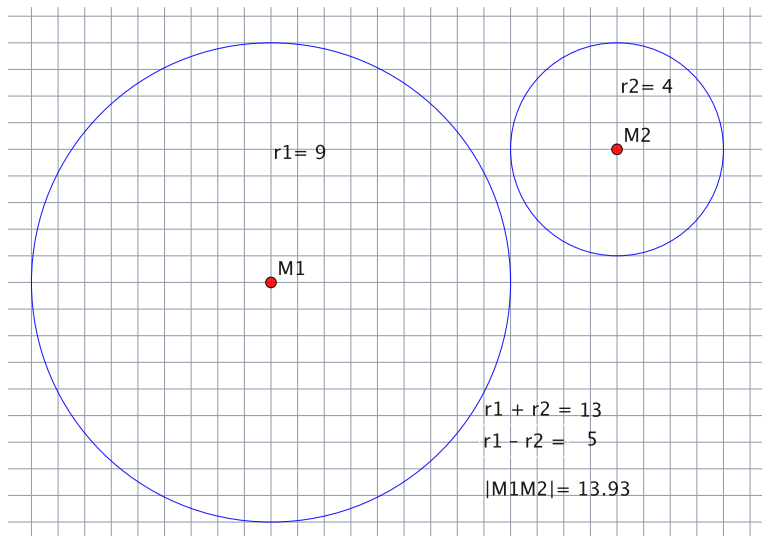
Entsprechend den vorherigen Aufgabenteilen d) und e):  $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 - r^2 = 0$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 3^2 = 0$$

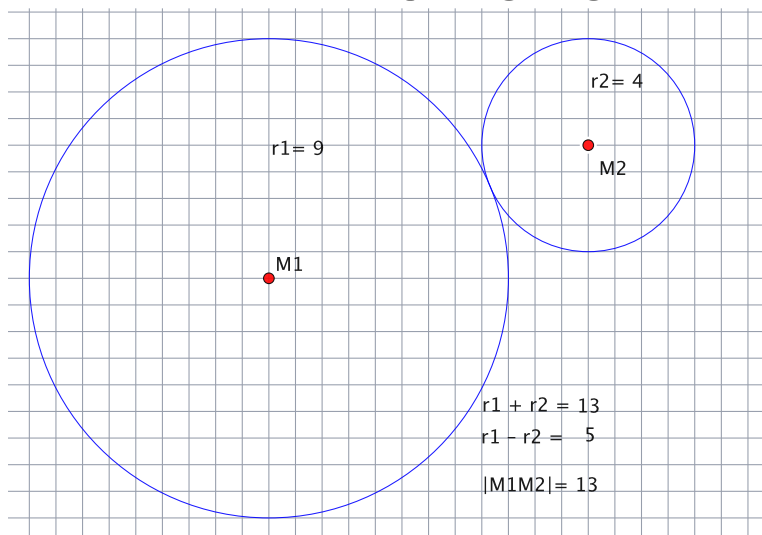
4. Gegeben sind zwei Kreise  $k_1: [M_1, r_1]$  und  $k_2: [M_2, r_2]$  mit beliebigen Radien und  $r_1 > 2r_2$ . Halten Sie  $k_1$  fix am Ort und bewegen Sie  $k_2$ . Es gibt (einschließlich Sonderfällen) zehn unterschiedliche Lagen, welche die beiden Kreise zueinander einnehmen können.

- Ermitteln Sie diese Lagen und beschreiben Sie diese in Worten.
- Stellen Sie zu jeder Lage den Zusammenhang zwischen den Radien  $r_1$  und  $r_2$  sowie dem Abstand  $d$  der Mittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$  dar.
- Visualisieren Sie diese Aufgabenstellung mit Hilfe dynamischer Geometriesoftware.

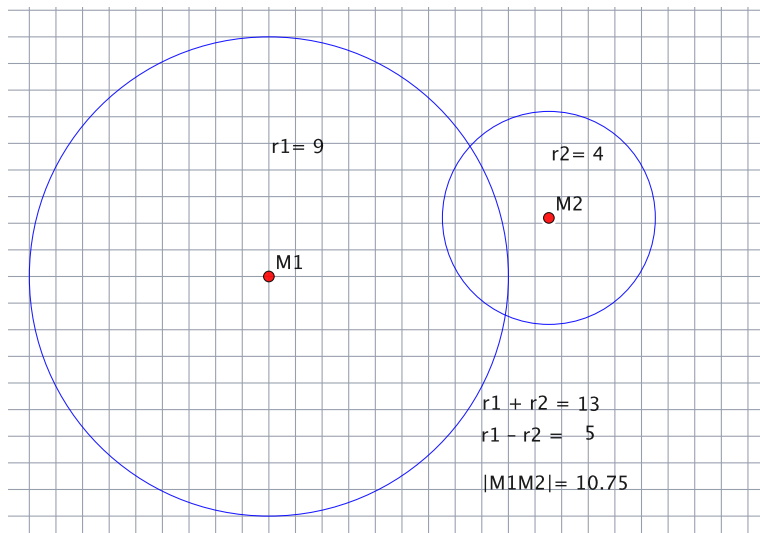
Liegt der kleine Kreis vollständig außerhalb eines anderen Kreises, dann ist der Abstand zwischen ihren Mittelpunkten größer als die Summe ihrer Radien.



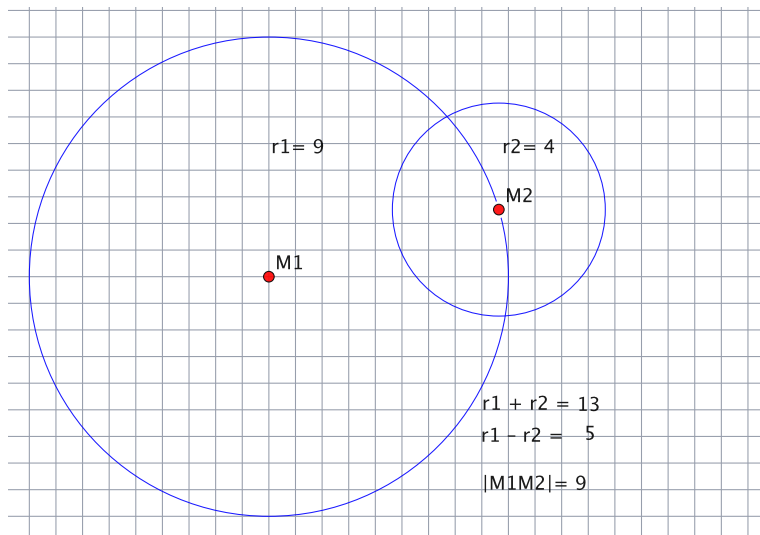
Berühren sich beide Kreise in einem Punkt, wobei sich aber die Kreisflächen nicht überlappen, dann ist der Abstand der Mittelpunkte genau gleich der Summe ihrer Radien.



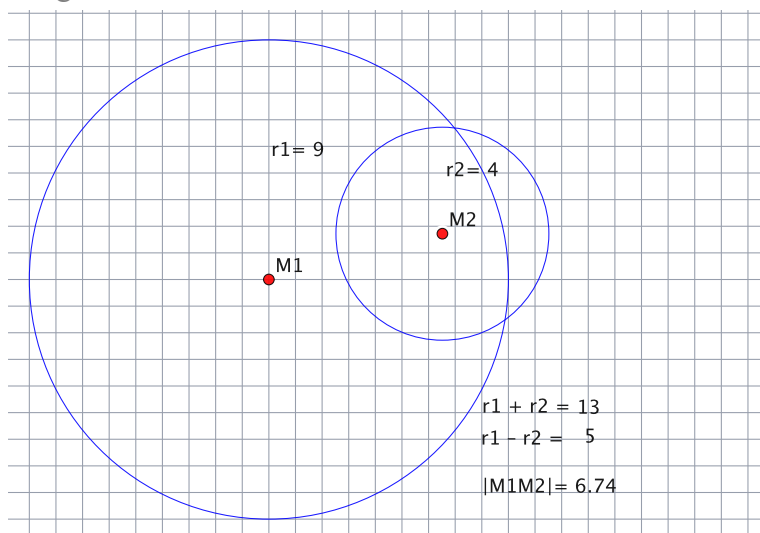
Haben die Kreislinien genau zwei gemeinsame Punkte und liegt der Mittelpunkt des kleineren Kreises noch außerhalb des größeren Kreises, so ist der Abstand ihrer Mittelpunkte kleiner als die Summe ihrer Radien, aber – wie wir gleich sehen werden – noch größer als die Differenz ihrer Radien. Außerdem ist der Abstand der Mittelpunkte größer als der größere Radius.



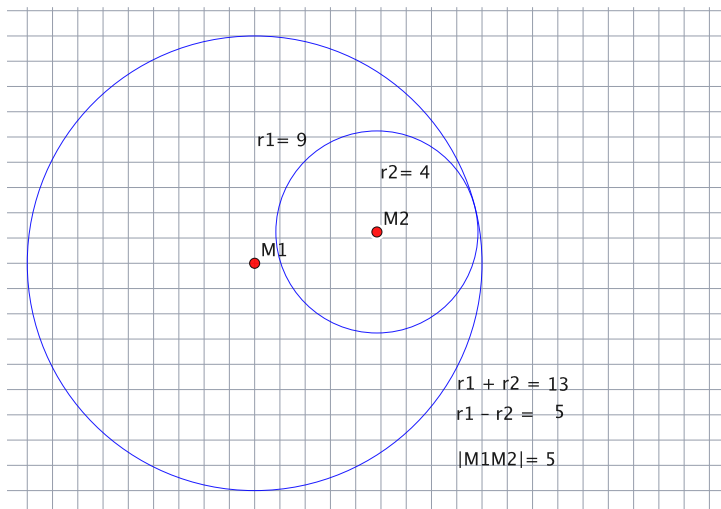
Als nächstes entsteht der (Sonder-)Fall, dass der Mittelpunkt des kleineren Kreises genau auf der Kreislinie des größeren Kreises liegt. Dann ist der Abstand der Mittelpunkte genau gleich  $r_1$ .



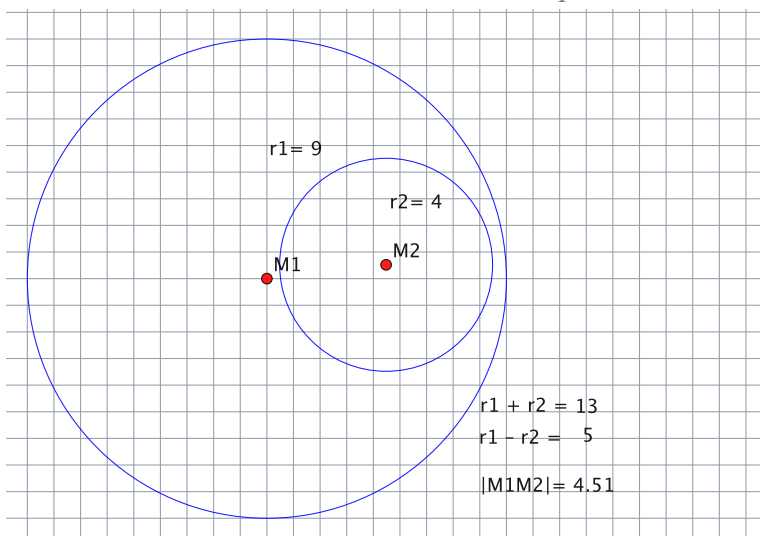
Haben die Kreise zwei Schnittpunkte und liegt der Mittelpunkt des kleinen Kreises innerhalb des Großen, so ist wiederum der Abstand ihrer Mittelpunkte kleiner als die Summe ihrer Radien und größer als die Differenz ihrer Radien. Nun ist allerdings der Abstand der Mittelpunkte kleiner als der größere Radius.



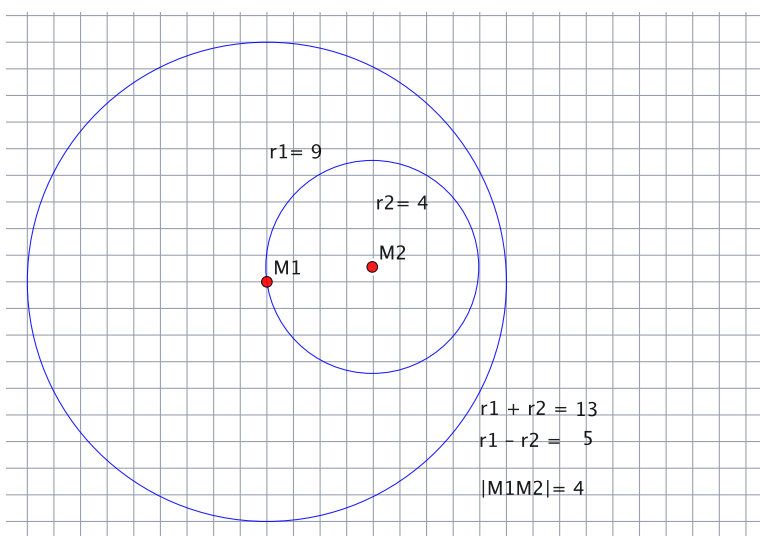
Liegt ein Kreis mit seiner Fläche innerhalb des anderen und berühren sich ihre Kreislinien genau in einem Punkt, dann ist der Abstand ihrer Mittelpunkte genau gleich der Differenz ihrer Radien.



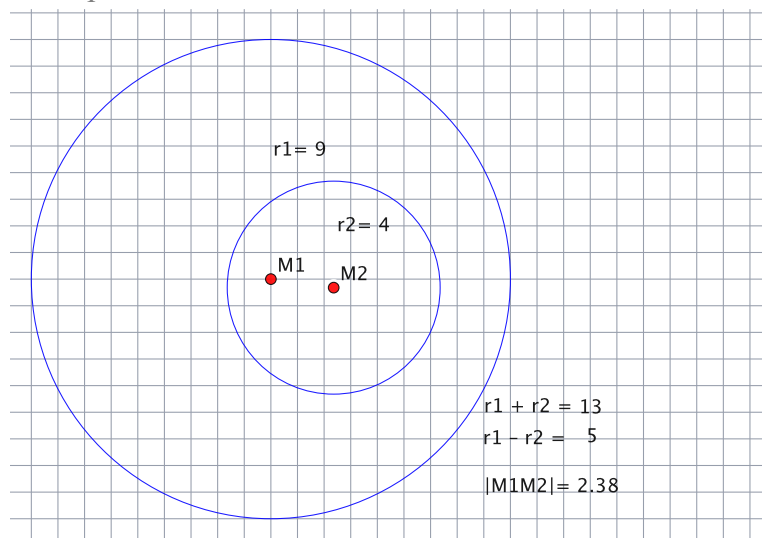
Schließlich kann ein Kreis ganz allgemein völlig innerhalb eines anderen Kreises liegen. Dies ist dann der Fall, wenn der Abstand der Mittelpunkte kleiner als die Differenz ihrer Radien ist.



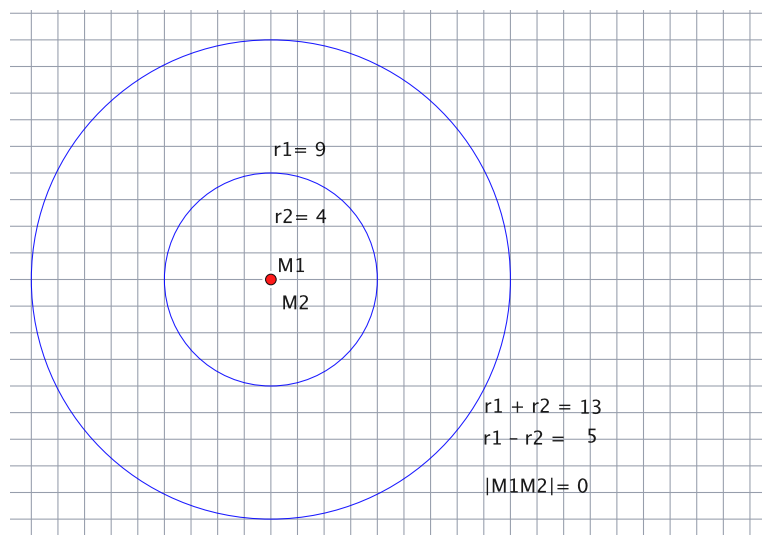
Ist der Abstand der Mittelpunkte gleich dem Radius des kleinen Kreises, dann liegt  $M_1$  auf der Kreislinie von  $M_2$



Wenn der Abstand der Mittelpunkte kleiner als der kleinere Radius  $r_2$  ist, dann liegen beide Mittelpunkte innerhalb des kleinen Kreises.



Der Sonderfall konzentrischer Kreise tritt ein, wenn der Abstand der Mittelpunkte gleich Null ist.



5. Stellen Sie für die nachfolgend aufgeführten Kreise  $k: [M, r]$  die jeweils zugehörige allgemeine Kreisgleichung in der Form  $x^2 + px + y^2 + qy + s = 0$  auf.

- |                            |                                    |
|----------------------------|------------------------------------|
| a) $k_1: [[7, 3], 5]$      | $y^2 - 6y + x^2 - 14x + 33 = 0$    |
| b) $k_2: [[15, -4], 6]$    | $y^2 + 8y + x^2 - 30x + 205 = 0$   |
| c) $k_3: [[-1, 9], 2]$     | $y^2 - 18y + x^2 + 2x + 78 = 0$    |
| d) $k_4: [[-37, -23], 12]$ | $y^2 + 46y + x^2 + 74x + 1754 = 0$ |
| e) $k_5: [[-8, -15], 17]$  | $y^2 + 30y + x^2 + 16x = 0$        |
| f) $k_6: [[0, 0], 22]$     | $y^2 + x^2 - 484 = 0$              |

6. Gegeben ist die Gleichung  $x^2 + 6x + y^2 - 4y - 12 = 0$ .

- a) Bestimmen Sie für einige (ganzzahlige)  $x$ -Werte die zugehörigen  $y$ -Werte. Für welche konkreten  $x$ -Werte können Sie  $y$ -Werte berechnen? Für welche nicht? Warum nicht?

Es können nur  $y$ -Werte nur für diejenigen  $x$ -Werte bestimmt werden, die innerhalb des Radius liegen. Für  $x$ -Werte, die außerhalb liegen, wird die Diskriminante negativ.

$x$	-8	-7	-6	-3	0	1	2
$y_1$	2	5	6	7	6	5	2
$y_2$	2	-1	-2	-3	-2	-1	2

- b) Tragen Sie zusammengehörige Wertepaare in ein Koordinatensystem ein und bestimmen Sie geometrisch den Mittelpunkt und Radius des zugrundeliegenden Kreises. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen!

$M: [-3, 2], r = 5$

Drei Punkte reichen aus, um über den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der dadurch gebildeten Strecken den Kreismittelpunkt bestimmen zu können. Der Radius ist der Abstand vom Mittelpunkt zu einem Kreispunkt.

- c) Beschreiben Sie, wie Sie Mittelpunkt und Radius algebraisch ermitteln können.

Durch eine doppelte quadratische Ergänzung.

- d) Führen Sie schließlich diese algebraische Bestimmung durch und überprüfen Sie damit Ihre Ergebnisse aus b).

7. Ermitteln Sie aus den angegebenen Gleichungen jeweils Mittelpunkt und Radius des zugehörigen Kreises.

- |  |  |
|--|--|
| a) $y^2 - 8y + x^2 - 6x = 0$           | $[3, 4], 5$ ; Kreis durch Nullpunkt          |
| b) $y^2 + 24y + x^2 - 10x = 0$         | $[5, -12], 13$ ; Kreis durch Nullpunkt       |
| c) $y^2 + x^2 - 49 = 0$                | $[0, 0], 7$ ; Kreis um Nullpunkt             |
| d) $y^2 - 10y + x^2 + 6x - 110 = 0$    | $[-3, 5], 12$                                |
| e) $y^2 + x^2 - 169 = 0$               | $[0, 0], 13$ ; Kreis um Nullpunkt            |
| f) $y^2 + 54y + x^2 + 64x - 747 = 0$   | $[-32, -27], 50$                             |
| g) $y^2 + 166y + x^2 + 92x + 8476 = 0$ | $[-46, -83], 23$                             |
| h) $y^2 + 14y + x^2 - 8x - 69 = 0$     | $[4, -7], 11.58$                             |
| i) $y^2 + 14y + x^2 - 8x + 69 = 0$     | keine Kreisgleichung!                        |
| j) $y^2 + x^2 - 10x - 25 = 0$          | $[5, 0], 7.071$ , Mittelpunkt auf $x$ -Achse |
| k) $y^2 + 4y + x^2 = 96$               | $[0, -2], 10$ , Mittelpunkt auf $y$ -Achse   |

8. Versuchen Sie, bereits aus der Form der dargestellten Kreisgleichungen auf wesentliche Eigenschaften der beschriebenen Kreise zu schließen. Vergleichen Sie dafür die eben behandelten Gleichungen mit der Lage des jeweils zugehörigen Kreises. Zeichnen Sie umgekehrt Kreise in bestimmten Lagen und untersuchen Sie, wie sich die besondere Lage in der Gleichung niederschlägt.

konstanter Zahlenparameter fehlt: Kreis durch den Nullpunkt

lineare  $x$ - und  $y$ -Glieder fehlen: Kreis um den Nullpunkt

lineares  $x$ -Glied fehlt:  $M$  auf der  $y$ -Achse

lineares  $y$ -Glied fehlt:  $M$  auf der  $x$ -Achse

lineares  $x$ -Glied  $< 0$ :  $x_M$  rechts der  $y$ -Achse sonst links

lineares  $y$ -Glied  $< 0$ :  $y_M$  oberhalb der  $x$ -Achse sonst darunter

9. Offensichtlich stellt nicht jede Gleichung der Form  $x^2 + px + y^2 + qy + s = 0$  einen Kreis dar.

- a) Können Sie ein Kriterium nennen, wann grundsätzlich Vorsicht geboten ist?

Vorsicht ist geboten, wenn  $s$  positiv ist.

- b) Arbeiten Sie eine exakte Beziehung aus, nach welcher aus den Koeffizienten der Gleichung entschieden werden kann, ob diese einen Kreis repräsentiert oder nicht!

Wenn man die Grundform der Kreisgleichung quadriert, so werden  $x_M^2$ ,  $y_M^2$  und  $r^2$  zur Konstanten  $s$  zusammengefasst:

$$x_M^2 + y_M^2 - r^2 = s$$

Daraus folgt:

$$r^2 = (x_M^2 + y_M^2) - s$$

Um überhaupt die Wurzel aus  $r^2$  ziehen zu können, muss der rechte Term  $> 0$  sein und damit  $(x_M^2 + y_M^2) > s$  sein.  $x_M$  und  $y_M$  erhält man durch die quadratischen Ergänzungen, daher kann man auch formulieren:

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \geq s : \text{Kreis!}$$

10. Im Folgenden sind Kreise  $k$  und Punkte  $P$  gegeben:

$$\begin{array}{lll} k_1: [ [3,7], 4 ]; P_1: [4,9] \text{ i} & k_2: [ [-2,3], 4 ]; P_2: [2,4] \text{ a} & k_3: [ [2,2], 5 ]; P_3: [-2,5] \text{ k} \\ k_4: [ [10,1], 13 ]; P_4: [-2,6] \text{ k} & k_5: [ [1,-3], 2 ]; P_5: [0,-1] \text{ a} & k_6: [ [-4,-5], 13 ]; P_6: [4,5] \text{ i} \end{array}$$

- a) Überprüfen Sie jeweils rechnerisch, ob  $P$  auf der Kreislinie, innerhalb oder außerhalb des Kreises liegt. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis in einigen Fällen durch eine Zeichnung.  
b) Geben Sie an, wie Sie die rechnerische Überprüfung angestellt haben.

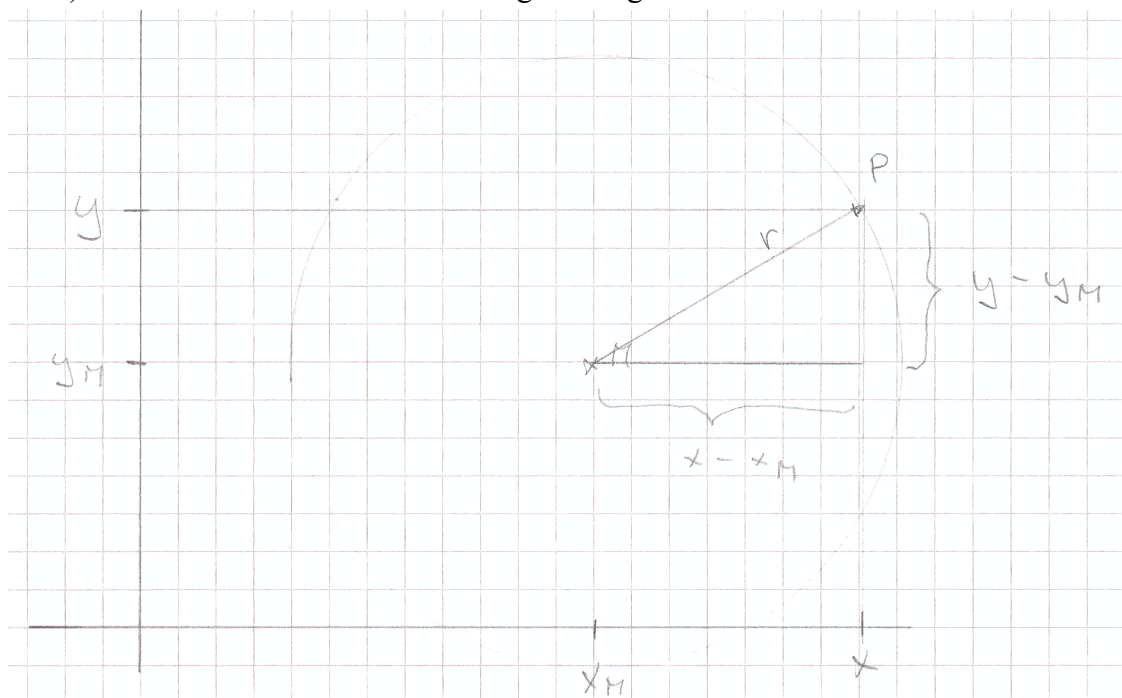
Die rechnerische Überprüfung erfolgt, indem die Kreisparameter  $x_M$ ,  $y_M$  und  $r$  sowie die  $x$ - und  $y$ -Koordinate des Punktes in die Kreisgleichung eingesetzt werden:

Beispiel 1:  $(4-3)^2 + (9-7)^2 = 4^2$

„Stimmt“ die Gleichung, dann liegt  $P$  auf  $k$ . Ist die linke Seite kleiner als die rechte, dann liegt  $P$  innerhalb, sonst außerhalb des Kreises.

11. Gegeben sind der Mittelpunkt  $M: [x_M, y_M]$  und der Radius  $r$  eines Kreises.

- a) Leiten Sie anschaulich die Kreisgleichung eines Kreises um  $M$  mit dem Radius  $r$  her.



Nach Pythagoras gilt:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

Alle Punkte, die dieser Gleichung genügen, liegen auf dem Kreis um  $M:[x_M, y_M]$  mit dem Radius  $r$ .

- b) Begründen Sie, warum die folgende Gleichung einen Kreis um den Koordinatenursprung beschreibt:

$$x^2 + y^2 - 17 = 0$$

Ist  $M:[0, 0]$ , so vereinfacht sich die Kreisgleichung zu

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ bzw. } x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

- c) Welche spezielle Lage hat der Kreis mit der Gleichung

$$y^2 + 24y + x^2 - 10x = 0?$$

Begründen Sie Ihre Antwort allgemein und belegen Sie diese anhand der gegebenen Gleichung!

Aus

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

folgt

$$x^2 - 2xx_M + x_M^2 + y^2 - 2yy_M + y_M^2 = r^2$$

$$x^2 - 2xx_M + y^2 - 2yy_M + x_M^2 + y_M^2 = r^2$$

konst. Glied!

Wenn in einer Kreisgleichung das konstante Glied und  $r^2$  verschwinden, so muss

$$x_M^2 + y_M^2 = r^2$$

gelten. Daraus folgt:

$$\sqrt{x_M^2 + y_M^2} = r$$

Die linke Seite der Gleichung gibt den Abstand des Mittelpunkts vom Ursprung an. Und wenn dieser gleich  $r$  ist, dann muss der Mittelpunkt im Abstand  $r$  vom Ursprung liegen. Also muss die Kreislinie durch den Ursprung verlaufen.

Man kann auch folgendermaßen argumentieren:

Eine Kreisgleichung „gilt“ für alle Punkte  $P:[x, y]$ , die auf der Kreislinie liegen.

Wenn in einer Kreisgleichung das konstante Glied verschwindet, dann kann man die Gleichung durch einsetzen von  $x=0$  und  $y=0$  immer in eine wahre Aussage überführen, der Ursprung muss also (auch) auf der Kreislinie liegen!

In der gegebenen Gleichung kann durch eine doppelte quadratische Ergänzung ...

$$y^2 + 24y + x^2 - 10x = 0$$

$$y^2 + 24y + 12^2 + x^2 - 10x + 5^2 = 169$$

$$(y + 12)^2 + (x - 5)^2 = 13^2$$

... das Verschwinden des konstanten Glieds „rückgängig“ gemacht werden. Damit werden die Koordinaten des Mittelpunkts  $M:[5, -12]$  ebenso sichtbar wie der Radius 13. Aufgrund des pythagoreischen Tripels  $5^2 + 12^2 = 13^2$  sieht man sofort, dass der Kreismittelpunkt genau um den Radius vom Ursprung entfernt ist, die Kreislinie muss somit durch den Ursprung verlaufen!

- d) Erläutern Sie, wie man aus einer Gleichung der Form

$$x^2 + px + y^2 + qy + s = 0$$

die relevanten Kreisparameter  $M$  und  $r$  ermitteln kann. Führen Sie dies anschaulich an der folgenden konkreten Gleichung durch:

$$x^2 + 64x + y^2 + 54y - 747 = 0$$

Doppelte quadratische Ergänzung:



$$x^2 + 64x + 32^2 + y^2 + 54y + 27^2 = 747 + 32^2 + 27^2$$

$$(x + 32)^2 + (y + 27)^2 = 2500$$

Daraus folgt:  $M: [-32, -27], r = 50$

e) Beschreibt jede Gleichung der Form

$$x^2 + px + y^2 + qy + s = 0$$

einen Kreis? Begründen Sie ihre Antwort! Geben Sie die Bedingung an, die in einer Gleichung der dargestellten Form gegeben sein muss, damit diese Gleichung einen Kreis darstellt.

Nein, dargestellt an einem Gegenbeispiel:

$$x^2 + 2x + y^2 + 4y + 100 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1^2 + y^2 + 4y + 2^2 = 1 + 4 - 100$$

$$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = -95$$

-95 müsste das Radiusquadrat sein, dieses existiert aber im Reellen nicht!

Allgemein:

$$x^2 + px + y^2 + qy + s = 0$$

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 + qy + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 - s$$

Die rechte Seite der Gleichung ist das Radiusquadrat und muss daher größer als 0 sein! Dies heißt:

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \geq s$$

f) Gegeben sind ein Kreis  $k$  um  $M: [4, 8]$  mit dem Radius  $r = 13$  und der Punkt  $P: [16, 3]$ .  $P$  kann innerhalb oder außerhalb des Kreises oder aber genau auf der Kreislinie liegen. Geben Sie an, wie Sie überprüfen können, welche der drei Lagen ein Punkt bezüglich eines Kreises einnimmt. Überprüfen Sie, wo der gegebene Punkt  $P$  bezüglich  $k$  liegt.

Wie in a) dargestellt, gilt für alle  $P \in k$

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

Liegt  $P$  innerhalb, so gilt:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 < r^2$$

Liegt  $P$  außerhalb, dann entsprechend:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 > r^2$$

Überprüfung des gegebenen Punktes  $P$  durch Einsetzen in die Kreisgleichung für den gegebenen Kreis:

$$(16 - 4)^2 + (3 - 8)^2 = 13^2$$

$$12^2 + 5^2 = 13^2$$

5, 12 und 13 sind pythagoreische Tripel,  $P$  liegt somit auf dem Kreis.

g) In welchen Punkten schneidet die Ursprungsgerade durch  $P$  den Kreis  $k$ ?

Ursprungsgerade durch  $P$  mit `zps_std()` bestimmen:  $y = \frac{3}{16} \cdot x$

Schnittpunkte der Ursprungsgerade mit Kreis  $[[4, 8], 13]$  über Funktion `schnitt_kg()` bestimmen liefert zum einen natürlich den Punkt  $P$  selbst und außerdem  $[-5.37, -1]$ .

12. Gegeben sind eine Gerade  $g: y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$  und ein Kreis  $k: [[4, -2], 5]$ .

- Skizzieren Sie die gegebene Situation und ermitteln Sie dabei die Schnittpunkte von  $g$  und  $k$  grafisch.
- Geben Sie an, wie Sie die Schnittpunkte rechnerisch bestimmen können, und tun Sie es dann.

Man stellt zunächst die Kreisgleichung auf:  $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$

und substituiert in der Kreisgleichung  $y$  durch den Funktionsterm der Geradengleichung:

$$(x-4)^2 + \left( \left( \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \right) + 2 \right)^2 - 25 = 0$$

Nun formt man um und stellt eine quadratische Gleichung für  $x$  dar:

$$(x-4)^2 + \left( \frac{1}{3}x + \frac{11}{3} \right)^2 - 25 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{22}{9}x + \frac{121}{9} - 25 = 0$$

$$9x^2 - 72x + 144 + x^2 + 22x + 121 - 225 = 0$$

$$10x^2 - 50x + 40 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Die Mitternachtsformel liefert:  $x_1=1$  und  $x_2=4$

Einsetzen in die Geradengleichung liefert:

$$y_1 = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{5}{3} = 2 \quad y_2 = \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{5}{3} = 3$$

Somit schneiden sich Kreis und Gerade in den Punkten  $P_1: [1, 2]$  und  $P_2: [4, 3]$ .

- Verfahren Sie ebenso:

$$g_2: y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4}; \quad k_2: [[-2, -1], 5]$$

Ein Schnittpunkt  $[1, 3]$

- $g_3: y = 2x + 2; \quad k_3: [[-4, 1], 3]$

Kein Schnittpunkt!

- Überprüfen Sie Ihre Rechnung mit Hilfe von Maxima

13. Gegeben sind die beiden Punkte  $A: [0,0]$  und  $B: [5\sqrt{3}, 5]$ . Diese beiden Punkte bilden eine

Seitenkante des regelmäßigen Fünfecks  $ABCDE$ , wobei die weiteren Punkte im Gegenuhrzeigersinn angeordnet sein sollen. Ihre Aufgabe wird darin bestehen, die Koordinaten der weiteren Punkte  $C$ ,  $D$  und  $E$  rechnerisch zu bestimmen.

- Skizzieren Sie zunächst ein regelmäßiges Fünfeck mit seinem Mittelpunkt und dem Umkreis sowie eines der 5 gleichschenkligen Teildreiecke und bestimmen Sie den Mittelpunktswinkel, den Innenwinkel und die Basiswinkel der Teildreiecke.

Mittelpunktswinkel:  $72^\circ$

Basiswinkel:  $54^\circ$

Innenwinkel:  $108^\circ$

- Zeichnen Sie auf eine neue Seite im Hochformat ein Koordinatensystem ( $y$ -Achse 9 cm vom linken Blattrand entfernt,  $x$ -Achse etwa 5 cm vom unteren Blattrand entfernt). Tragen Sie dort die Punkte  $A$  und  $B$  sowie die zugehörige Strecke ein. Für den weiteren

Ablauf ist es sicher sinnvoll, die durchzuführenden Rechenoperationen im Koordinatensystem geometrisch nachzuvollziehen.

- c) Bestimmen Sie zunächst den Winkel, den die Strecke  $AB$  mit der  $x$ -Achse einschließt.

Aus den Koordinaten von  $B$  wird deutlich, dass  $AB$  die Seite eines gls. Dreiecks mit der  $x$ -Achse als Symmetrielinie ist, also Steigungswinkel  $30^\circ$  – oder über die Funktion „Steigungswinkel“ berechnen.

- d) Welche Funktion hat die Mittelsenkrechte der Strecke  $AB$  in der Figur? Bestimmen Sie die Geradengleichung dieser Mittelsenkrechten.

Mittelsenkrechte von  $AB$  ist Symmetrielinie im 5-Eck, der Punkt  $D$  liegt auf ihr. Die Geradengleichung lautet  $\left[-\sqrt{3}, 10\right]$

- e) Welchen Steigungswinkel hat die Gerade durch  $A$  und den noch zu bestimmenden Umkreismittelpunkt  $M$ ? Geben Sie die Gleichung dieser Geraden an.

Steigungswinkel  $AM = \text{Steigung } AB + 54^\circ = 84^\circ$

Diese Gerade ist Ursprungsgerade mit dem Steigungswinkel  $84^\circ$

$$m = \tan 84^\circ \rightarrow y = 9.51 \cdot x$$

- f) Berechnen Sie die Koordinaten des Umkreismittelpunkts  $M$ .

$M$  ist Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von  $AB$  mit der eben ermittelten Ursprungsgeraden.

$M$ :  $[0.89, 8.46]$

- g) Berechnen Sie den Radius  $MA$  des Umkreises.

Radius ist die Distanz  $AM$ ,  $r = 8.51$

- h) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes  $D$ .

$D$  ist Schnittpunkt des Umkreises mit der Mittelsenkrechten  $AB$ .  $D$ :  $[-3.36, 15.83]$

- i) Überlegen Sie anhand Ihrer Skizze oder Zeichnung, wie nun die noch fehlenden Punkte  $C$  und  $E$  bestimmt werden können. Schließen Sie in Ihre Überlegungen auch Symmetriebetrachtungen mit ein. Berechnen Sie dann die Koordinaten der Punkte  $C$  und  $E$ .

Die Punkte  $A$  und  $C$  sind spiegelsymmetrisch zur Geraden durch  $M$  und  $B$ . Ebenso sind  $B$  und  $E$  spiegelsymmetrisch zur Geraden durch  $A$  und  $M$ .

Man schneidet das Lot von  $A$  auf  $MB$  mit dem Umkreis und erhält  $C$ .  $C$ :  $[6.58, 14.78]$

Man schneidet das Lot von  $B$  auf  $AM$  mit dem Umkreis und erhält  $E$ .  $E$ :  $[-7.43, 6.69]$

Eine andere Möglichkeit besteht darin, den Umkreis des 5-Ecks mit einem Kreis um  $D$  mit Radius  $AB$  zu schneiden – wobei diese Lösung die nachfolgende Thematik („Schnitt zweier Kreise“) vorwegnimmt.

14. Gegeben ist ein Kreis um den Koordinatenursprung mit dem Radius  $r = 5$ . In diesen Kreis soll ein Dreieck mit maximalem Flächeninhalt so eingefügt werden, dass die Dreieckspunkte auf der Kreislinie liegen. Skizzieren Sie diese Situation mit dem Dreieckspunkt  $C$ :  $[0, 5]$ .

- a) Vermuten Sie: Um welche Art von Dreieck handelt es sich? Können Sie Ihre Vermutung beweisen?

Es handelt sich auf jeden Fall um ein gleichschenkliges Dreieck.

Man zeichnet ein beliebiges Dreieck  $ABC$  in den Kreis und die Parallele zu  $AB$  als Tangente an den Kreis. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten. Diejenige Parallele mit dem größeren Abstand zu  $AB$  wird entweder durch  $C$  oder in der Nähe von  $C$  verlaufen. Wenn diese Parallele nicht durch  $C$  verläuft, so wird man die Lage von  $C$  so verändern, dass  $C$  im Berührungspunkt der Parallelen liegt. Weil durch diese Veränderung die Höhe des Dreiecks vergrößert wird, hat man ein Dreieck mit größerem Flächeninhalt erhalten. Zudem ist es aus Symmetriegründen gleichschenkelig.

Diese Optimierung kann man für die anderen Seiten  $BC$  und  $AC$  ebenso durchführen und wird dadurch ein gleichseitiges Dreieck erhalten.

- b) Es wird nun darum gehen, die genaue Lage der Punkte  $A$  und  $B$  zu ermitteln. Diese Punkte liegen für ein Dreieck mit maximalem Flächeninhalt in den Quadranten III und IV. Erstellen Sie eine Maxima-Funktion, welche aus der Vorgabe der  $x$ -Koordinate eines Kreispunkts die zugehörige  $y$ -Koordinate ermittelt.

`f(x) := -sqrt(25-x^2)`

- c) Lassen Sie sich für  $x_0 = 0$  die zugehörige  $y$ -Koordinate ermitteln.

`[0, -5]`

- d) Es liegen nun die Koordinaten des Punktes  $C$  mit `[0, 5]` und die Koordinaten der Punkte  $A: [-x_0, f(-x_0)]$  und  $B: [x_0, f(x_0)]$  vor. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

`f_dreieck(A, B, C)` liefert korrekterweise 0.

- e) Verändern Sie den Wert von  $x_0$  schrittweise und lassen Sie jeweils den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks errechnen. Versuchen Sie derart, das Dreieck mit dem maximalen Flächeninhalt anzunähern. Wie groß ist dieser Flächeninhalt?

32.476 bei  $x_0 = 4.33$

- f) Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte  $A$  und  $B$  für das flächengrößte Dreieck analytisch und überprüfen Sie Ihren empirisch gefundenen Wert.

Da es sich auf jeden Fall um ein gleichschenkliges Dreieck handelt, kann man dessen Flächeninhalt einfach aus der Höhe und der halben Grundseite berechnen: Die halbe Grundseite ist die  $x$ -Koordinate des Punktes  $B$  und die Höhe ist (der Betrag) von dessen  $y$ -Koordinate zuzüglich des Radius über dem Ursprung. Man kann die Dreiecksfläche somit auch folgendermaßen berechnen:

`g(x) := (5+sqrt(25-x^2)) * x`

Damit ist die Dreiecksfläche direkt eine Funktion der  $x$ -Koordinate. Diese Dreiecksfläche soll maximal werden, wir suchen somit das Maximum dieser Funktion. Ableiten liefert:

$$g'(x) = \sqrt{25-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}} + 5$$

Setzt man diesen Funktionsterm gleich Null und löst die Gleichung (`to_poly_solve()` verwenden!), so erhält man die symmetrischen Lösungen

`x = -4.330127018922193, x = 4.330127018922193`

Ein Aufruf von `g(x)` mit einem der Werte liefert den Maximalflächeninhalt

`32.47595264191644`

- g) Untersuchen Sie mit den gefundenen Punkten  $A$  und  $B$  die Art des jeweiligen Dreiecks.

`A0: [-(5*sqrt(3))/2, f(-(5*sqrt(3))/2)];`

`B0: [(5*sqrt(3))/2, f((5*sqrt(3))/2)];`

Eine Überprüfung der Seitenlängen ergibt, dass es sich um ein gls. Dreieck handelt.

- h) Konstruieren Sie in einen Kreis ein gleichseitiges Dreieck!

Dies gelingt mit Hilfe der „Blumenkonstruktion“: Mit dem Zirkel auf der Kreislinie den Radius abtragen!

15. Gesucht ist jeweils der Bildpunkt  $P'$ , der durch Spiegelung von  $P$  an  $g$  entsteht. Erläutern Sie zunächst, wie Sie hierfür geometrisch-konstruktiv vorgehen.

Lotgerade von  $P$  auf  $g$  mit dem Kreis um den Lotfußpunkt  $L$  mit Radius  $PL$  schneiden.

- a)  $P: [17, -3]$ ;  $g: y = 0,5 \cdot x - 7$   
`[13.4, 4.2]`

- b)  $P:[483, -577]$ ;  $g: y = 0,1 \cdot x - 55$   
[370.07, 552.31]
- c)  $P:[-23, 77]$ ;  $g: y = 84 \cdot x - 2$   
[24.87, 76.43]
- d)  $P:[3, 4]$ ;  $g: y = 0,75 \cdot x + 15$   
[-9.72, 20.96]

16. Nun wird der Punkt  $P$  an  $Z$  punktgespiegelt. Gesucht ist der jeweilige Bildpunkt  $P'$ . Wie gehen Sie dabei konstruktiv vor?

Gerade  $PZ$  mit Kreis um  $Z$  mit Radius  $PZ$  schneiden.

- a)  $P:[5, 3]$ ;  $Z:[7, 7]$   
[9, 11]
- b)  $P:[-23, 55]$ ;  $Z:[1, 9]$   
[25, -37]
- c)  $P:[675, -1305]$ ;  $Z:[23, -5]$   
[-629, 1295]
- d)  $P:[-45, -87]$ ;  $Z:[-4, -9]$   
[37, 69]

17. Schließlich wird  $P$  an  $Z$  um den Winkel  $\alpha$  gedreht. Wie ist hier Ihre Vorgehensweise?

Man verschiebt  $P$  und  $Z$  um den Vektor  $OZ$  so, dass  $Z$  im Koordinatenursprung zu liegen kommt. Dann rechnet man die kartesischen Koordinaten von  $P$  in Polarkoordinaten um und addiert zur Winkelkoordinaten den gewünschten Drehwinkel. Diese veränderten Polarkoordinaten rechnet man wieder in kartesische Koordinaten zurück und verschiebt den erhaltenen Bildpunkt um den Vektor  $OZ$ .

Auch eine Multiplikation im Bereich der komplexen Zahlen, die ja eine Drehstreckung darstellt, ist möglich.

- a)  $P:[23, 17]$ ;  $Z:[5, 7]$ ;  $\alpha = 25^\circ$   
[17.09, 23.67]
- b)  $P:[-7, -3]$ ;  $Z:[5, -6]$ ;  $\alpha = 57^\circ$   
[-4.05, -14.43]
- c)  $P:[-4, -3]$ ;  $Z:[-3, 5]$ ;  $\alpha = 100^\circ$   
[5.05, 5.40]
- d)  $P:[3, 2]$ ;  $Z:[6, -2]$ ;  $\alpha = 141^\circ$   
[5.81, -7]