

kg_aufgaben_09.docx

1. Geben Sie die Schnittpunkte der angegebenen Kreise an. Sie können die Lösungen „von Hand“ ermitteln oder im Direktmodus von Maxima.

- a) $k_1: [[3, 4], 5]$; $k_2: [[6, 7], 8]$
 $[-1.82, 5.32], [4.32, -0.82]$
- b) $k_1: [[-13, 25], 37]$; $k_2: [[26, -34], 39]$
 $[-5.69, -11.27], [17.51, 4.06]$
- c) $k_1: [[-3, -4], 5]$; $k_2: [[5, 12], 13]$
 $[-1.6, 0.8], [0, 0]$
- d) $k_1: [[1, 7], 5]$; $k_2: [[12, 7], 13]$
 $[-0.05, 2.11], [-0.05, 11.89]$
- e) $k_1: [[-12, -5], 14]$; $k_2: [[8, -5], 6]$
 $[2, -5]$
- f) $k_1: [[4, -8], 14]$; $k_2: [[8, -5], 6]$
 $[\]$

2. Versuchen Sie „von Hand“ mit den herkömmlichen algebraischen Methoden die Schnittpunkte der beiden Kreise zu bestimmen.

- a) $k_1: [[1, 2], 3]$; $k_2: [[7, -1], 2]$

Aufstellen der Kreisgleichungen:

$$k_1: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$$

$$k_2: (x-7)^2 + (y+1)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 14x + y^2 + 2y + 46 = 0$$

Subtrahieren liefert:

$$12x - 6y - 50 = 0 \text{ und damit die Geradengleichung } y = 2x - \frac{25}{3}.$$

Substitution von y in k_1 liefert:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + \left(2x - \frac{25}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(2x - \frac{25}{3}\right) - 4 &= 0 \\ x^2 - 2x + 4x^2 - \frac{100}{3}x + \frac{625}{9} - 8x + \frac{100}{3} - 4 &= 0 \\ 5x^2 - 10x - \frac{100}{3}x + \frac{625}{9} + \frac{300}{9} - \frac{36}{9} &= 0 \\ 5x^2 - \frac{30}{3}x - \frac{100}{3}x + \frac{961}{9} &= 0 \\ 5x^2 - \frac{130}{3}x + \frac{961}{9} &= 0 \\ x^2 - \frac{26}{3}x + \frac{961}{45} &= 0 \end{aligned}$$

Die Mitternachtsformel führt nun auf einen negativen Radikand, also gibt es keine Schnittpunkte:

$$x_{1,2} = \frac{13}{3} \pm \sqrt{\frac{169}{9} - \frac{961}{45}} = \frac{13}{3} \pm \sqrt{\frac{845}{45} - \frac{961}{45}} = \frac{13}{3} \pm \sqrt{-\frac{116}{45}}$$

- b) Die Gleichsetzungs- oder Subtraktionsmethode der beiden Kreisgleichungen liefert eine Geradengleichung. Wie verläuft diese Gerade?

Senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte. Sind beide Kreisradien gleich groß, dann handelt es sich um die Mittelsenkrechte.

- c) Zeichnen Sie in Cinderella zwei Kreise mit unterschiedlichen Radien. Beide Kreislinien sollen sich schneiden. Erstellen Sie die Schnittpunkte beider Kreise und legen Sie eine Gerade durch diese beiden Schnittpunkte. Verändern Sie dann die Lage der Kreismittelpunkte und/oder die Länge der Radien so, dass sich die Kreise nicht mehr schneiden. Was passiert mit den Kreis-Schnittpunkten? Was passiert mit der Geraden?

Die Schnittpunkte verschwinden, nicht jedoch die Gerade!

- d) Untersuchen Sie Sonderfälle! Zum Beispiel: Gleiche x - bzw. y -Koordinaten der Kreismittelpunkte, gleiche Kreisradien.
- e) Versuchen Sie, die Tatsachen und Erkenntnisse aus b), c) und d) zu erläutern. Beschreiben Sie dazu mit eigenen Worten, was denn eine Kreisgleichung tatsächlich aussagt. Was „steht“ auf der linken Seite der Kreisgleichung, was auf deren rechten Seite?

Die linke Seite einer Kreisgleichung beschreibt das Quadrat des Abstands des mit den Koordinaten x und y gegebenen Punktes vom (gegebenen) Mittelpunkt. Auf der rechten Seite wird das Radiusquadrat notiert. Wenn beide Seiten gleich sind, dann liegt der Punkt $[x, y]$ auf der Kreislinie um M mit dem Radius r .

Bringt man die Gleichung auf die Nullform, so ist die Gleichung für alle $[x, y]$ erfüllt, welche von der Kreislinie den Abstand 0 (=rechte Gleichungsseite haben).

Setzt man nun zwei verschiedenen Kreisgleichungen in der Nullform gleich, dann geht zwar diese explizite Angabe „Abstand 0 von der Kreislinie“ verloren. Erhalten bleibt aber die Abstandsbeziehung insgesamt, was zur dargestellten Geraden führt.

Die folgenden Aufgaben sollen Sie zunächst konstruktiv und dann mit Hilfe Ihrer bereits in Maxima vorliegenden Funktionen lösen:

3. Gegeben sind ein Punkt $P: [-16, 7]$ und ein Kreis k mit dem Mittelpunkt $M: [5, 3]$ sowie dem Radius $r = 10$.

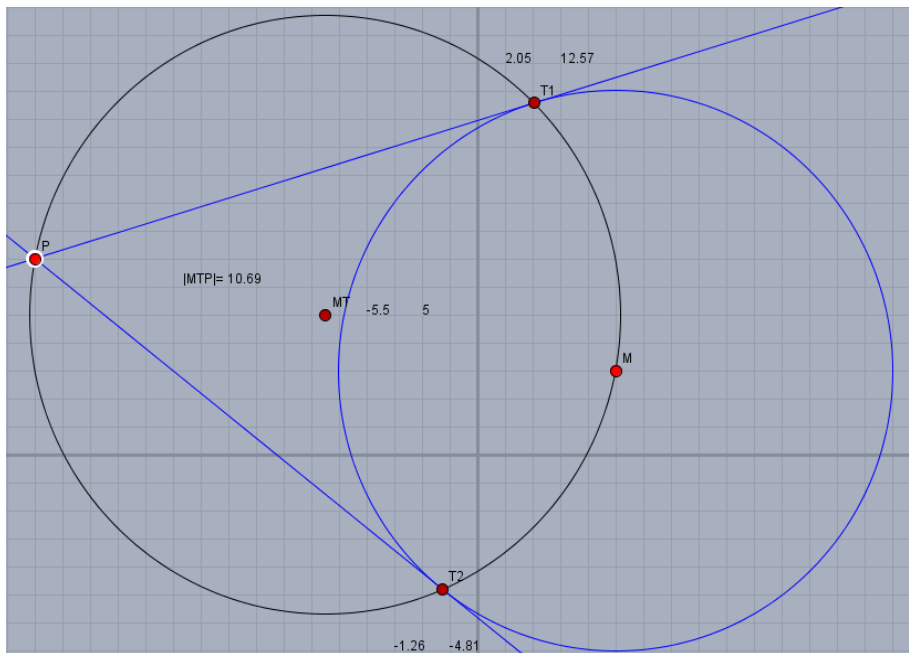
```
(%i2) P: [-16, 7];
(%o2) [-16, 7]
(%i3) M: [5, 3];
(%o3) [5, 3]
(%i4) r: 10;
(%o4) 10
```

- a) Bestimmen Sie die Berührungspunkte der Tangenten durch P am Kreis.

```
(%i5) MT: mittelpunkt(P, M);
(%o5) [-5.5, 5.0]
(%i6) rT: dist_cart(P, MT);
(%o6) 10.68877916321597
(%i7) [T1, T2]: kreisschnitt([M, r], [MT, rT]);
(%o8) [[-1.24896661949157, -4.80707475233074],
      [2.058594628244305, 12.5576217982826]]
```

- b) Bestimmen Sie die Gleichungen der Tangenten.

```
(%i13) zpf_std(T1, P);
(%o14) [-0.80042356679446, -5.806777068711405]
(%i15) zpf_std(T2, P);
(%o16) [0.30775494509358, 11.92407912149733]
```



4. Gegeben sind zwei Kreise $k_1: M_1: [-3, -2], r_1 = 10$ und $k_2: M_2: [15, 2], r_2 = 4$. An diese Kreise können zwei Tangentenpaare konstruiert werden: Ein Paar „äußerer Tangenten“, welche sich außerhalb der Kreise schneiden und ein Paar „innerer Tangenten“, deren Schnittpunkt zwischen den Kreismittelpunkten liegt. Für diese Problemstellung gibt es zwei Lösungsansätze!

```
(%i17) M1: [-3, -2];
(%o17) [-3, -2]
(%i18) r1: 10;
(%o18) 10
(%i19) M2: [15, 2];
(%o19) [15, 2]
(%i20) r2: 4;
(%o20) 4
```

a) Bestimmen Sie die Tangentenberührungspunkte der äußeren Tangenten am Kreis k_1 .

Man verkleinert die Radien beider Kreise gleichmäßig, bis $r_2=0$ ist, damit ist k_2 zum Punkt entartet. k_1 hat dann den Radius r_1-r_2 . An diesen Kreis werden nun die Tangenten von M_2 aus konstruiert.

```
(%i21) rx: r1-r2;
(%o21) 6
(%i22) MT: mittelpunkt(M1, M2);
(%o22) [6.0, 0.0]
(%i23) rT: dist_cart(M1, MT);
(%o23) 9.219544457292887
(%i24) [T1, T2]: kreisschnitt([M1, rx], [MT, rT]);
(%o27) [[-2.324865584058543, 3.961895128263445],
[0.1366302899409, -7.114836304734032]]
```

Dies sind die Tangentenpunkte am Kreis $M_1, (r_1-r_2)$. Um die Tangentenpunkte an k_1 zu bestimmen, legt man durch M_1 und die eben ermittelten Berührungspunkte jeweils eine Gerade und schneidet diese mit k_1 .

```
(%i28) g1: zpf_std(M1, T1);
(%o29) [8.830678732248812, 24.49203619674644]
(%i30) schnitt_kg([M1, r1], g1);
```

```
(%o31) [[-4.125224026569094,-11.93649188043907],
        [-1.874775973430906,7.936491880439071]]
```

Diese Gerade g_1 schneidet k_1 in zwei Punkten. Man muss nun – am besten aufgrund einer Skizze – entscheiden, welches der gesuchte Tangentenpunkt ist. In unserem Fall ist dies der hier zweitgenannte Punkt **$[-1.87, 7.94]$**

Nun dasselbe für T_2 :

```
(%i44) g2:zpf_std(M1,T2);
(%o50) [-1.630678732248808,-6.892036196746425]
(%i53) schnitt_kg([M1,r1],g2);
(%o54) [[-8.227717149901492,6.524727174556725],
        [2.227717149901493,-10.52472717455673]]
```

Hier ist nun ebenfalls der zweitgenannte Punkt **$[2.23, -10.53]$** der gesuchte Tangentenpunkt.

b) Bestimmen Sie die Geradengleichungen der beiden Tangenten.

Hierzu ermittelt man aus den Tangenten zum Mittelpunkt M_2 die Steigung. Dann kann man mit der Punkt-Steigungsform die Gerade durch den eigentlichen Tangentenpunkt ermitteln.

```
(%i32) steigung1:steigung(T1,M2);
(%o33) -0.11324157862839
(%i48) steigung2:steigung(T2,M2);
(%o49) 0.61324157862839
(%i50) tangente1:psf_std(tan1,steigung1);
(%o51) [-0.11324157862839,7.72418928963318]
(%i52) tangente2:psf_std(tan2,steigung2);
(%o53) [0.61324157862839,-11.89085595629985]
```

c) Wie lauten etwa die Tangentenpunkte am Kreis k_2 ?

Dazu schneidet man die eben errechneten Tangenten mit dem Kreis 2. Allerdings findet Maxima aufgrund von Rundungsfehlern keine Berührungspunkte:

```
(%i70) tan1k2:schnitt_kg([M2,r2],tangente1);
(%o70) []
```

Man behilft sich, indem man den Kreis ein ganz klein wenig größer macht:

```
(%i71) tan1k2:schnitt_kg([M2,r2+0.0000001],tangente1);
(%o72) [[15.44920086344765,5.974697395310741],
        [15.45097835780763,5.974496109040508]]
(%i73) tan2k2:schnitt_kg([M2,r2+0.0000001],tangente2);
(%o74) [[17.0903243848952,-1.410358451229346],
        [17.09184933502599,-1.409423288416037]]
```

Alle Ergebnisse stimmen mit der Konstruktion sehr gut überein.

d) Nun zu den inneren Tangenten. Welches sind ihre Berührungspunkte am Kreis k_1 ?

Die Tangentenpunkte am großen Kreis r_1+r_2 um M_1 sind:

```
(%i41) rx:r1+r2;
(%o41) 14
(%i42) [T1,T2]:kreisschnitt([M1,rx],[MT,rT]);
(%o43) [[9.352941176470589,-8.588235294117647],
        [5.4,9.199999999999999]]
```

Die Geraden durch M_1 und T_1, T_2 sind:

```
(%i44) g1:(zpf_std(M1,T1));
(%o44) [-8/15,-18/5]
(%i46) g2:(zpf_std(M1,T2));
(%o46) [4/3,2]
```

Schnitt dieser Geraden mit k_1 :

```
(%i48) tanp1:schnitt_kg([M1,r1],g1);
(%o49) [[5.823529411764706,-6.705882352941177],
        [-11.82352941176471,2.705882352941177]]
```

Der erste Punkt ist der Gesuchte!

```
(%i53) tanp2:schnitt_kg([M1,r1],g2);
(%o53) [[3,6],[-9,-10]]
```

Hier ist ebenfalls der erste Punkt der Gesuchte!

e) Wie lauten ihre Geradengleichungen?

Ermittlung der Steigungen von den beiden Tangentenpunkten aus zu M_2 :

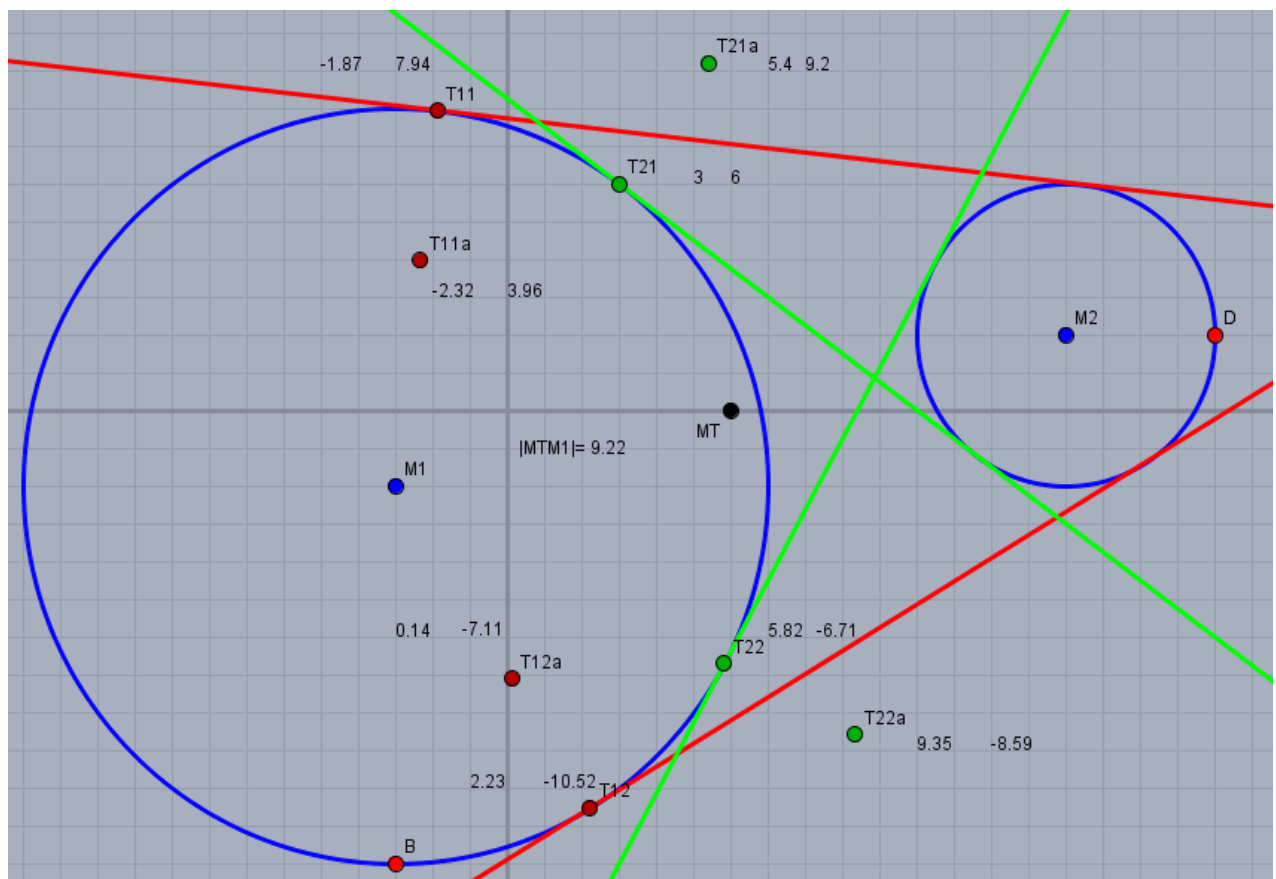
```
(%i73) steigung1:steigung(T1,M2);
(%o73) 15/8
(%i74) steigung2:steigung(T2,M2);
(%o74) -3/4
```

Damit haben wir die Punkt-Steigungsform und können umrechnen:

```
(%i75) tangent1:psf_std(tanp1,steigung1);
(%o76) [1.875,-17.625]
(%i77) tangent2:psf_std(tanp2,steigung2);
(%o78) [-0.75,8.25]
```

f) Welches sind die Berührungspunkte am Kreis k_2 ?

```
(%i80) schnitt_kg([M2,r2],tangent1);
(%o81) [[11.47058823529412,3.882352941176471]]
(%i82) schnitt_kg([M2,r2],tangent2);
(%o83) [[12.6,-1.2]]
```



Eine weitere Lösungsmöglichkeit erhält man über den Strahlensatz bzw. die Ermittlung des Teilpunktes von P auf der Geraden durch M_1M_2 . Da die Berührungsradien jeweils senkrecht auf den Tangenten stehen und sie dadurch parallel zueinander sind, kann der Strahlensatz angewandt werden und so die Lage von P bestimmt werden. Siehe hierzu auch die geometrische Konstruktion von inneren und äußeren Teilpunkten.

- g) Erstellen Sie Maxima-Funktionen für die Berechnung der inneren und äußeren Tangenten an zwei Kreise.

```
aeussere_tangenten(k1,k2):=block(
  [M1,r1,M2,r2,TP,BP],
  [M1,r1]:k1,
  [M2,r2]:k2,
  TP:teilpunkt(M1,M2,-r1/r2),
  BP:tangente_Pk(TP,k1),
  t1:zpf_std(TP,BP[1]),
  t2:zpf_std(TP,BP[2]),
  [t1,t2])
```

Die Funktion für die inneren Tangenten unterscheidet sich ausschließlich durch ein anderes Vorzeichen für das Teilverhältnis!

5. Gegeben sind die Punkte $A: [-1.5, 4.5]$ und $B: [9.5, 2]$.

- a) Was haben alle Kreise gemeinsam, die durch A und B verlaufen?

Deren Mittelpunkt muss auf der Mittelsenkrechten von AB liegen...

- b) Ermitteln Sie die vollständigen Angaben für den Kreis, dessen x -Koordinate des Mittelpunkts 7 ist und dessen Kreislinie durch A und B verläuft.

Gleichung der Mittelsenkrechten ermitteln und über deren Geradengleichung die y -Koordinate des Mittelpunkts bestimmen. Der Abstand dieses Mittelpunkts von einem der Punkte A oder B ist der Kreisradius.

$M: [7, 16.45]$

$r = 14.66$

- c) Ermitteln Sie zwei weitere Kreise, welche durch A und B verlaufen

individuelle Lösungen

6. Gegeben sind die Punkte $A: [-1.5, 4.5]$, $B: [9.5, 2]$ und $C: [8, 5]$. Ermitteln Sie den Kreis, welcher durch diese drei Punkte festgelegt ist.

$[[3.455, 0.853], 6.153]$

7. Kreise können über Punkte der Kreislinie festgelegt werden.

- a) Diskutieren Sie den Fall, dass ein Kreis durch zwei gegebene Punkte verlaufen soll.

Hier gibt es unendlich viele Lösungen, die Mittelpunkte der infrage kommenden Kreise liegen auf der Mittelsenkrechten der gegebenen Punkte. Will man eine (bzw. zwei) eindeutige Lösung(en), so muss man den Kreisradius vorgeben.

- b) Geben Sie die geometrische Lösung an, um anhand dreier vorgegebener Punkte den zugehörigen Kreis (Mittelpunkt und Radius) zu finden.

Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von je zwei Punktepaaaren.

- c) Sie kennen die Koordinaten dreier Punkte. Wie können Sie den durch sie verlaufenden Kreis algebraisch finden?

Die Kreisgleichung $x^2 + px + y^2 + qy + s = 0$ enthält mit p , q und s 3 Unbekannte. Man benötigt also die Koordinatenpaare (x, y) dreier Punkte um eindeutige Lösungen für p , q und s zu finden und schließlich aus dieser konkreten Kreisgleichung M und r ermitteln zu können.

- d) Bestimmen Sie M und r des Kreises, der durch die Punkte $A:[234\ 553, 565\ 325]$, $B:[-573\ 927, 943\ 728]$ und $C:[-349\ 857, -764\ 784]$ verläuft auf algebraischem Weg.

```
kreis_Mr(kreisgleichung([234553,565325],[-573927,943728],[-349857,-764784]));  
[[-482208, 86808], 861815]
```

8. Die Punkte $A:[2, 1]$, $B:[14, 3]$ und $C:[9, 8]$ bilden ein Dreieck.

- a) Weisen Sie rechnerisch nach, dass sich alle Mittelsenkrechten dieses Dreiecks in demselben Punkt M schneiden. Wie lauten die Koordinaten des Mittelpunkts?

$M:[8, 2]$

- b) Weisen Sie außerdem rechnerisch nach, dass dieser Schnittpunkt M auf der Strecke AB liegt.

Punktprobe!

- c) Was bedeutet diese besondere Lage von M für die Art des Dreiecks ABC ?

ABC ist rechtwinklig

- d) Geben Sie die Gleichung des Umkreises des Dreiecks ABC an.

$$y^2 - 4y + x^2 - 16x + 31 = 0$$

- e) Ermitteln Sie die Koordinaten zweier weiterer Punkte C_1 und C_2 , welche auf dem Umkreis des Dreiecks ABC liegen und die beide die y -Koordinate 4 haben.

$[2.255, 4.0]$ und

$[13.745, 4.0]$

- f) Welche Eigenschaft haben die Dreiecke ABC , ABC_1 und ABC_2 gemeinsam? Begründen Sie Ihre Vermutung und überprüfen Sie diese rechnerisch.

Alle Dreiecke sind rechtwinklig, da die Punkte C auf dem Halbkreis über AB liegen.

- g) Verändern Sie nun die Koordinate des Punktes C auf $[9, 10]$. Bestimmen Sie die Gleichung des Umkreises dieses Dreiecks und ermitteln Sie wieder die Koordinaten zweier Punkte C_1 und C_2 , welche auf diesem Umkreis liegen und die y -Koordinate 4 haben. Bestimmen Sie sodann die Innenwinkel der drei Dreiecke bei den Punkten C , C_1 und C_2 .

73.4126614430726

- h) Was stellen Sie fest? Auf welchem geometrischen Sachverhalt beruht Ihre Feststellung?

Alle Winkel sind gleich groß, es handelt sich um Peripheriewinkel über der Sehne AB .

9. In einem kartesischen Koordinatensystem sind zwei Punkte $P:[4, 6]$ und $Q:[7, 13]$ gegeben.

- a) Durch P verläuft die Gerade g mit der Steigung 0,75. Wie kann aus den gegebenen Werten die Geradengleichung in der Standardform ermittelt werden? Wie lautet konkret die Gleichung dieser Geraden?

$$y = \frac{3}{4}x + 3$$

- b) Wie kann die Geradengleichung einer Senkrechten ermittelt werden? Wie lautet die Geradengleichung der Senkrechten h zu g durch den Punkt Q ?

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{67}{3}$$

- c) Der Punkt $A:[5, 13]$ soll an der Geraden g gespiegelt werden. Wie gehen Sie vor? Wie lauten die Koordinaten seines Bildpunktes A' ?

[11,5]

- d) Spiegeln Sie den Bildpunkt A' nun an der Geraden h . Wie lauten die Koordinaten des resultierenden Bildpunktes A'' ?

$$\left[\frac{339}{25}, \frac{172}{25} \right] = [13.56, 6.92]$$

- e) Hätte man dasselbe Ergebnis erhalten, wenn man A zuerst an h und diesen Bildpunkt dann an g gespiegelt hätte?

Rechnerischer Nachweis durch Maxima führt zum selben Punkt!

- f) Weisen Sie nach, dass der resultierende Bildpunkt A'' auch das Ergebnis einer Punktspiegelung von A am Schnittpunkt Z der beiden Geraden g und h ist!

Wenn das so ist, dann ...

müssen A , A'' und Z kollinear sein und

der Abstand AZ gleich dem Abstand ZA'' sein.

Nachweis der Kollinearität mit Maxima und Nachweis der gleichen Abstände ebenfalls.

- g) Die Gerade i ist eine Ursprungsgerade und verläuft parallel zu g . Spiegeln Sie den Punkt A zunächst wieder an g und diesen Bildpunkt A' anschließend an der Geraden i . Wie lauten die Koordinaten des resultierenden Bildpunktes A^* ?

$$\left[\frac{197}{25}, \frac{229}{25} \right] = [7.88, 9.16]$$

- h) Bestimmen Sie den Abstand der Punkte A und A^* sowie den Abstand der beiden Geraden g und i . Was fällt Ihnen auf?

$$\text{Abstand } AA^*: \frac{24}{5}$$

$$\text{Abstand } gi: \frac{12}{5}$$

Der Abstand der Punkte ist doppelt so groß wie der Abstand der beiden Geraden.

- i) Weisen Sie allgemein nach: Die Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen an zueinander parallelen Achsen ist eine Verschiebung senkrecht zur Achsenrichtung um den doppelten Abstand der beiden Achsen.

Punkt und Bildpunkt einer Achsenspiegelung liegen auf einer Senkrechten zur Achse. Spiegelt man den Bildpunkt ein weiteres Mal an einer parallelen Achse, so sind alle drei Punkte kollinear auf einer gemeinsamen Senkrechten zu beiden Achsen. Die Richtung des Verschiebungsvektors ist daher senkrecht zur Achsenrichtung.

Urbild- und Bildpunkt einer Achsenspiegelung haben immer denselben Abstand zur Spiegelachse. Daraus lässt sich leicht ableiten, dass die Länge des Verschiebungsvektors doppelt so groß wie der Abstand der beiden Achsen ist. Man muss dabei allerdings eine Fallunterscheidung machen:

1. Fall: Addition der Abstände

2. Fall: Subtraktion der Abstände

10. Gegeben sind die Punkte $A:[0, 0]$ und $B:[10, 0]$.

- a) Diese Punkte bilden den Durchmesser eines Kreises. Wie lautet die Kreisgleichung dieses Kreises?

$$(x-5)^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 25$$

$$x^2 - 10x + y^2 = 0$$

b) Wie lautet die Gleichung eines Kreises um den Ursprung mit dem Radius $r = 6$?

$$x^2 + y^2 = 36$$

$$x^2 + y^2 - 36 = 0$$

c) Bestimmen Sie denjenigen Schnittpunkt C beider Kreise, der im ersten Quadranten liegt.

$$10x = 36$$

$$x = 3,6$$

$$3,6^2 + y^2 = 36 \quad C:[3,6, 4,8]$$

$$y = \sqrt{36 - 3,6^2} = 4,8$$

d) Wie lang ist die Strecke CB ?

$$CB^2 = 4,8^2 + (10 - 3,6)^2$$

$$CB^2 = 23,04 + 40,96 = 64$$

$$CB = 8$$

e) Bilden Sie die Summe der Quadrate der Streckenlängen AC und CB und vergleichen Sie mit dem Quadrat der Streckenlänge AB . Was stellen Sie fest?

Satz des Pythagoras!

f) Jetzt wird der Punkt B verschiebbar auf der (positiven) x -Achse angebracht, seine Koordinate sei $[x_B, 0]$. Wie lautet nun die Kreisgleichung, wenn AB der Durchmesser des Kreises ist?

$$\left(x - \frac{x_B}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{x_B}{2}\right)^2$$

$$x^2 - x \cdot x_B + \left(\frac{x_B}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{x_B}{2}\right)^2$$

$$x^2 - x \cdot x_B + y^2 = 0$$

g) Wie lautet die Gleichung eines Kreises um den Ursprung mit dem Radius r ?

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

h) Bestimmen Sie den Schnittpunkt C beider Kreise, der im ersten Quadranten liegt.

$$\begin{aligned} x \cdot x_B &= r^2 \\ \text{x-Koordinate: } x &= \frac{r^2}{x_B} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{r^2}{x_B}\right)^2 + y^2 - r^2 = 0$$

$$\text{y-Koordinate: } y^2 = r^2 - \left(\frac{r^2}{x_B}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{r \sqrt{x_B^2 - r^2}}{x_B}$$

$$y = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r^2}{x_B}\right)^2}$$

i) Dieser Schnittpunkt C hat vom Ursprung und damit vom Punkt A den Abstand r . Wie groß ist der Abstand d des Punktes C vom Punkt B ?

$$d^2 = y_C^2 + (x_B - x_C)^2$$

$$d^2 = r^2 - \left(\frac{r^2}{x_B}\right)^2 + \left(x_B - \frac{r^2}{x_B}\right)^2$$

$$d^2 = r^2 - \left(\frac{r^2}{x_B}\right)^2 + (x_B)^2 - 2r^2 + \left(\frac{r^2}{x_B}\right)^2$$

$$d^2 = r^2 + (x_B)^2 - 2r^2$$

$$d^2 = (x_B)^2 - r^2$$

j) Bestimmen Sie schließlich die Summe der Quadrate der Abstände r und d !

$$r^2 + d^2 = r^2 + (x_B)^2 - r^2 = (x_B)^2$$

k) Was stellen Sie fest? Was haben Sie in den Schritten f) bis j) durchgeführt? Begründen Sie Ihre Antwort!

Die Summe der Quadrate ist gleich dem Quadrat der Länge AB . Dies ist ein allgemeiner rechnerischer Beweis des Satzes von Pythagoras!

11. Gegeben ist ein Dreieck mit den Punkten $A:[2, 1]$, $B:[17, 4]$ und $C:[8, 10]$. Benennen Sie die Seite BC mit a , die Seite AC mit b und die Seite AB mit c .

a) Bestimmen Sie die Punkte P auf a , Q auf b und R auf c so, dass alle diese Punkte lauter ganzzahlige Koordinaten haben. Hinweis: Auf jeder Dreiecksseite gibt es zwei solcher Punkte. Verwenden Sie zunächst diejenigen Punkte mit der jeweils größeren y -Koordinate!

Diese Punkte kann man aus der Zeichnung ablesen oder über die Geradensteigung ermitteln.

$$a: \left[-\frac{2}{3}, \frac{46}{3}\right] \Rightarrow P: [11, 8]$$

$$b: \left[\frac{3}{2}, -2\right] \Rightarrow Q: [6, 7]$$

$$c: \left[\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right] \Rightarrow R: [12, 3]$$

b) Erläutern Sie, wie Sie aus drei gegebenen Punkten einer Kreislinie den Mittelpunkt und den Radius dieses Kreises bestimmen können.

Man bestimmt den Kreismittelpunkt als Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten. Der Radius ist der Abstand des Mittelpunkts zu den Eckpunkten.

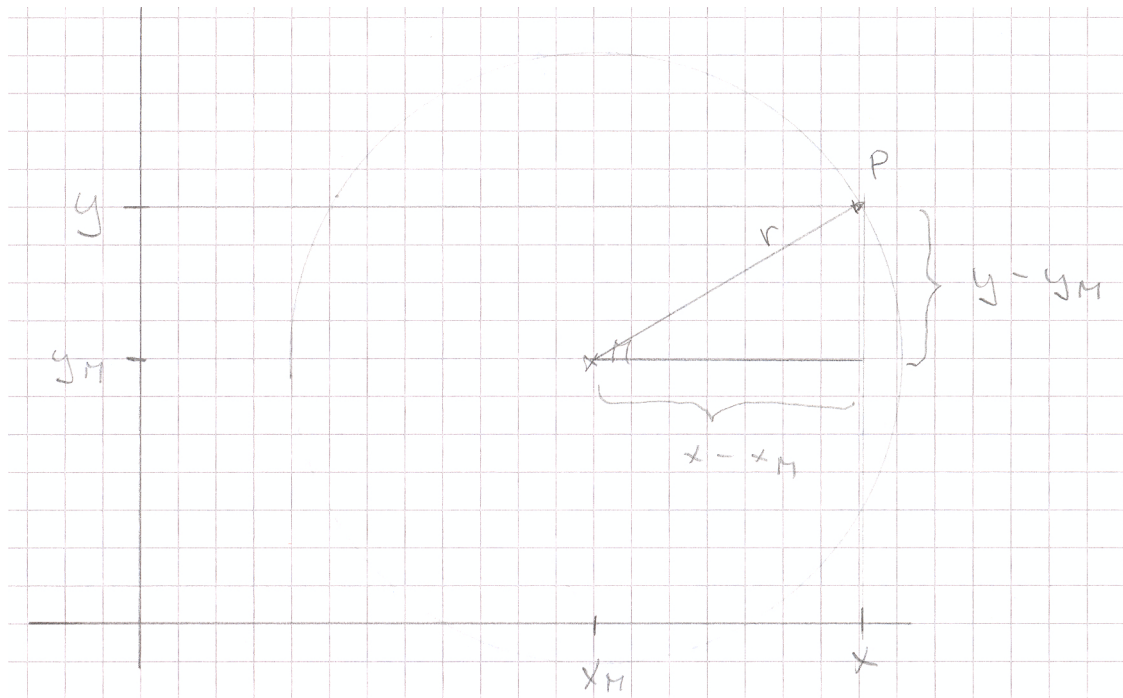
c) Bestimmen Sie jeweils Mittelpunkt und Radius der drei Kreise k_A , k_B und k_C , die jeweils durch die drei Punkte A, R, Q bzw. B, P, R bzw. C, P, Q verlaufen.

$$\text{Kreis } ARQ: \left[[7, 2], \sqrt{26}\right]$$

$$\text{Kreis } BPR: \left[[14, 6], \sqrt{13}\right]$$

$$\text{Kreis } CPQ: \left[\left[\frac{17}{2}, \frac{15}{2}\right], \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}\right]$$

d) Stellen Sie anschaulich dar, wie aus den Koordinaten des Mittelpunktes sowie der Angabe des Radius die zugehörige Kreisgleichung angegeben werden kann.



Nach Pythagoras gilt:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

Alle Punkte, die dieser Gleichung genügen, liegen auf dem Kreis um $M: [x_M, y_M]$ mit dem Radius r .

- e) Geben Sie die konkreten Gleichungen der Kreise k_A durch A , k_B durch B und k_C durch C an.

$$k_A: (x-7)^2 + (y-2)^2 = 26$$

$$k_B: (x-14)^2 + (y-6)^2 = 13$$

$$k_C: \left(x - \frac{17}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{15}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$$

- f) Erläutern Sie ausführlich, wie man aus den vorliegenden Gleichungen zweier Kreise deren Schnittpunkt(e) ermitteln kann.

Durch algebraische Transformation der beiden Kreisgleichungen (Gleichsetzen, Subtraktionsverfahren, ...) erhält man eine Geradengleichung. Dies ist die Gleichung der Geraden durch die beiden Kreisschnittpunkte.

Durch algebraisches Schneiden dieser Geradengleichung mit einer Kreisgleichung erhält man schließlich die Kreisschnittpunkte.

- g) Ermitteln Sie alle Schnittpunkte der Kreise k_A , k_B und k_C . Was fällt Ihnen auf?

$$k_A \cap k_B: \left[\frac{52}{5}, \frac{29}{5}\right], [12, 3]$$

$$k_B \cap k_C: [11, 8], \left[\frac{52}{5}, \frac{29}{5}\right]$$

$$k_C \cap k_A: [11, 8], \left[\frac{52}{5}, \frac{29}{5}\right]$$

Alle Kreise schneiden sich in einem Punkt!

- h) Wählen Sie die Punkte P , Q und R auf den Seiten a , b und c jeweils in der anderen Lage mit ganzzahligen Koordinaten! Führen Sie dann die Schritte c), e) und g) mit diesen neuen Lagen der Punkte P , Q und R nochmals durch und überprüfen Sie Ihr Ergebnis!

$$P': [14, 6]$$

$$Q': [4, 4]$$

$$R': [7, 2]$$

$$\text{Kreis um } A: \left[\left[\frac{9}{2}, \frac{3}{2} \right], \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}} \right]$$

$$\text{Kreis um } B: \left[\left[\frac{25}{2}, \frac{1}{2} \right], \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{2}} \right]$$

$$\text{Kreis um } C: \left[[9, 5], \sqrt{26} \right]$$

Schnittpunkte:

$$k_A \cap k_B: \left[\frac{34}{2}, \frac{2}{5} \right], [7, 2]$$

$$k_B \cap k_C: \left[\frac{34}{2}, \frac{2}{5} \right], [14, 6]$$

$$k_C \cap k_A: \left[\frac{34}{2}, \frac{2}{5} \right], [4, 4]$$

(Anwendung: Miquel-Punkt)

