

kg_aufgaben_10.docx

1. Warum hat dieses Kapitel die Überschrift *Kegelschnitte*?

- a) Informieren Sie sich im WWW oder in der Literatur über Kegelschnitte!
- b) Welche geometrischen Objekte können als Kegelschnitte entstehen?

Ellipse, Hyperbel, Parabel, Kreis, Gerade, Geradenpaar und Punkt.

- c) Bei welchem Schnitt entsteht welches Objekt?

Wir gehen aus von einem Doppelkegel. Schneidet man senkrecht zu dessen Drehachse, so entstehen im Allgemeinen Kreise, schneidet man jedoch durch die sich berührenden Spitzen, so erhält man einen Punkt.

Legt man die Schnittebene nicht senkrecht zur Achse sondern leicht geneigt, so erhält man eine Ellipse. Je schräger man die Schnittebene anlegt, umso mehr entfernt sich die Ellipse von der Kreisform, sie bekommt eine immer höhere Exzentrizität.

Führt man die Schrägstellung der Schnittfläche immer weiter, dann wird die Schnittfläche irgendwann parallel zur Mantellinie des Doppelkegels verlaufen. In genau diesem Moment erfolgt der Übergang von einer Ellipse als Schnittfläche zur Parabel.

Schneidet man noch steiler, so schneidet die Schnittebene auch noch durch den zweiten Kegel und man erhält ein Paar von Hyperbelästen.

Schneidet man parallel zur Drehachse in unterschiedlichen Entfernungen zur Drehachse, so erhält man ebenfalls ein Paar von Hyperbelästen. Je weiter man die Schnittebene zur Drehachse hin bewegt, umso näher rücken die Hauptscheitel zusammen und umso „spitzer“ werden die Hyperbeläste.

Schneidet man genau entlang der Drehachse, so erhält man ein sich in der gemeinsamen Spitze schneidendes Geradenpaar, dessen Schnittwinkel dem Öffnungswinkel des Kegels entspricht.

Schneidet man schließlich genau entlang einer Mantellinie, dann erhält man als Schnittfigur eine Gerade.

2. Auf der Homepage zum Buch finden Sie eine Seite mit konzentrischen Kreisen um einen roten und einen blauen Mittelpunkt. Jeder blaue Kreis markiert einen bestimmten Abstand zum blauen Mittelpunkt, entsprechend machen die roten Kreise. Drucken Sie sich diese Seite zweimal aus. Suchen Sie den blauen Kreis mit dem Abstand 4 zum blauen Mittelpunkt. Suchen Sie außerdem den roten Kreis mit dem Abstand 12 zum roten Mittelpunkt. Markieren Sie die Schnittpunkte beider Kreise! Die Summe der Abstände dieses Schnittpunktes zu den Kreismittelpunkten beträgt offensichtlich 16.

- a) Diese Abstandssumme 16 finden Sie auch noch auf dem blauen Kreis mit Abstand 5 und dem roten Kreis mit Abstand 11. Markieren Sie die entsprechenden Punkte.
- b) Markieren Sie alle weiteren Schnittpunkte blauer und roter Kreise, welche von den Mittelpunkten die Abstandssumme 16 haben.
- c) Verbinden Sie alle diese Punkte. Welche Form erhalten Sie?
- d) Suchen, markieren und verbinden Sie entsprechend alle Schnittpunkte mit der Abstandssumme 12 (... mit der Abstandssumme 24).
- e) Wie sind Sie beim Markieren aller Punkte mit derselben Abstandssumme vorgegangen? Welches arithmetische Prinzip erkennen Sie darin?

Der eine Kreis um 1 größer, den anderen um 1 kleiner machen -> gegensinniges Verändern bewirkt eine Konstanz der Summe.

- f) Was erhalten Sie, wenn Sie alle Punkte mit der Abstandssumme 8 markieren?

Strecke F_1F_2 .

- g) Was erhalten Sie, wenn Sie alle Punkte mit der Abstandssumme 7 markieren?

Leere Menge -> Die Abstandssumme muss größer sein als der Abstand der beiden Brennpunkte.

3. Nehmen Sie nun Ihren zweiten Ausdruck zur Hand. Suchen Sie den blauen Kreis mit dem Abstand 3 und den roten Kreis mit dem Abstand 5 vom jeweils zugehörigen Mittelpunkt. Markieren Sie deren Schnittpunkte.
- Die Abstandsdifferenz (größerer Abstand – kleinerer Abstand) beträgt im dargestellten Fall 2. Welche Schnittpunkte blauer und roter Kreise haben ebenfalls die Abstandsdifferenz „roter Radius – blauer Radius = 2“? Markieren Sie alle diese Schnittpunkte auf dem Blatt.
 - Verbinden Sie alle diese Punkte. Welche Form erhalten Sie?
 - Suchen Sie entsprechend den roten Kreis mit dem Abstand 3 und den blauen Kreis mit dem Abstand 5 und markieren Sie deren Schnittpunkt. Markieren Sie alle weiteren Schnittpunkte von Kreisen, welche der Bedingung „blauer Radius – roter Radius = 2“ genügen. Verbinden Sie auch diese Punkte.
 - Suchen und verbinden Sie alle Schnittpunkte mit der Abstandsdifferenz 3 (4, 5, 6, 7). Beobachten Sie die Veränderung!
 - Wie sind Sie beim Markieren aller Punkte mit derselben Abstandsdifferenz vorgegangen? Welches arithmetische Prinzip erkennen Sie darin?

Beide Kreise um 1 größer oder kleiner machen -> gleichsinniges Verändern bewirkt eine Konstanz der Differenz.

- f) Was erhalten Sie, wenn Sie alle Punkte mit der Abstandsdifferenz 8 markieren?

Zwei Strahlen, die von den Brennpunkten ausgehend nach „außen“ weglaufen.

- g) Was erhalten Sie, wenn Sie alle Punkte mit der Abstandsdifferenz 9 markieren?

Leere Menge -> die Abstandsdifferenz muss kleiner sein als der Abstand der beiden Brennpunkte.

- h) Was erhalten Sie, wenn Sie alle Punkte mit der Abstandsdifferenz 0 markieren?

Die Mittelsenkrechte!

4. Informieren Sie sich in der Literatur oder im WWW über die sogenannte „Gärtnerkonstruktion“.

- a) Welche Objekte können mit Hilfe dieser „Gärtnerkonstruktion“ gezeichnet werden?

Ellipsen

- Besorgen Sie sich die benötigten Utensilien und führen Sie diese Konstruktionsmethode mehrfach durch!
- Was ist das Funktionsprinzip der „Gärtnerkonstruktion“?

Die konstante Abstandssumme wird durch die feste Fadenlänge repräsentiert.

5. Beim Zeichnen von Ellipsen und Hyperbeln werden Angaben über deren Brennpunktabstand $2e$ und die Abstandssumme l bzw. Abstandsdifferenz d benötigt. In der Ellipsen- bzw. Hyperbelgleichung erfolgt die Festlegung der Figur durch die Angaben über die Halbachsen bzw. Hauptscheitel a und b .

- a) Stellen Sie für die Ellipse dar, wie Sie aus Kenntnis der Parameter a und b die Parameter e und l gewinnen können.

Betrachtet man einen Ellipsenpunkt auf der x -Achse, so wird deutlich: $l = 2a$

Legt man den Ellipsenpunkt auf die y -Achse, so folgt daraus: $e^2 + b^2 = a^2$

- b) Wie können Sie aus der Kenntnis von e und l umgekehrt auf a und b schließen?

Durch Termumformungen: $a = l/2$ und $b = \sqrt{a^2 - e^2}$

- c) Nun zur Hyperbel. Wie können Sie hier aus den Parametern a und b Aussagen über e und d gewinnen?

Hyperbelpunkt auf x -Achse: $d = 2a$

e ist die Diagonale im Rechteck mit den Seiten a und b , also $e^2 = a^2 + b^2$

- d) Nun seien e und d gegeben, was folgt daraus für a und b ?

Termumformungen: $a = d/2$ und $b = \sqrt{e^2 - a^2}$

6. Bestimmen Sie das jeweils andere Parameterpaar.

- | | | |
|-------------|-------------------|--|
| a) Ellipse: | $[a,b] : [5,2]$ | $[l,e] : [10, \sqrt{21}]$ |
| | $[a,b] : [7,3]$ | $[l,e] : [14, 2\sqrt{10}]$ |
| | $[l,e] : [18,4]$ | $[a,b] : [9, \sqrt{65}]$ |
| | $[l,e] : [18,10]$ | $[a,b] : [9, \sqrt{19} \cdot i]$ Abstandssumme zu klein! |
| b) Hyperbel | $[a,b] : [5,2]$ | $[d,e] : [10, \sqrt{29}]$ |
| | $[a,b] : [7,3]$ | $[d,e] : [14, \sqrt{58}]$ |
| | $[d,e] : [18,4]$ | $[a,b] : [9, \sqrt{65} \cdot i]$ Brennpunktabstand zu klein! |
| | $[d,e] : [18,10]$ | $[a,b] : [9, \sqrt{19}]$ |

7. In den obigen Aufgabenteilen sind Sie teilweise auf unrealistische Werte gestoßen.

- a) Welches sind die Grenzbedingungen für konstruierbare Ellipsen bezüglich der Größen l und e ? Versuchen Sie außerdem, diese Grenzbedingungen anschaulich zu formulieren („Gärtnerkonstruktion“) und daraus Aussagen auf die Form der Ellipse abzuleiten!

Die Abstandssumme l ($=2a$) muss größer sein als der Brennpunktabstand $2e$.

Man kann, bei gegebener Fadenlänge, die beiden Brennpunkte näher zusammen bringen oder weiter auseinander ziehen. Damit verändert man die Form der Ellipse. Nähert man die Brennpunkte einander an, dann geht die Ellipse in einen Kreis über, zieht man die Brennpunkte auseinander, dann wird die Ellipse immer schmäler. Wenn der Brennpunktabstand gleich der Fadenlänge ist, dann ist die Ellipse zur Strecke F_1F_2 entartet.

- b) Welche Grenzbedingungen müssen die Parameter d und e bei Hyperbeln einhalten? Formulieren Sie diese Bedingung ebenfalls anschaulich und beziehen Sie die Form der Hyperbeln jeweils mit ein!

Die Abstandsdifferenz d ($=2a$) muss kleiner sein als der Brennpunktabstand $2e$.

8. In Maxima können Ellipsen und Hyperbeln vorzugsweise mit der Funktion `draw2d()` geplottet werden. Ein beispielhafter Funktionsaufruf soll die Anwendung verdeutlichen. Zunächst muss diese externe Funktion eingebunden werden:

```
load(draw)
```

Dann weist man vorteilhaft einer Variablen den impliziten Funktionsterm zu:

```
ellipse: 9*x^2+25*y^2-225=0
```

Schließlich ruft man die Funktion folgendermaßen auf:

```
draw2d(proportional_axes=xy,
xrange=[-10,10], yrange=[-7,7],
xaxis=true, xaxis_type=solid, xaxis_width=3,
yaxis=true, yaxis_type=solid, yaxis_width=3,
color=red,
implicit(ellipse, x, -5, 5, y, -3, 3))
```

Die x - und y -Bereiche können nach Bedarf angepasst werden. Um mehrere Kegelschnitte zeichnen zu lassen, wiederholt man die implicit-Anweisungen. Dabei können auch andere Farben gewählt werden.

- Erstellen Sie von den oben angegebenen Ellipsen und Hyperbeln die implizite Gleichungsform und lassen Sie sich diese Figuren ausplotten.
- Untersuchen Sie insbesondere die diskutierten Grenzfälle! Lassen Sie die Ellipse und die Hyperbel mit den „unrealistischen“ Angaben plotten. Welche Figur erhalten Sie? Begründen Sie, warum Sie diese Figur erhalten!

Eine „unrealistische“ Ellipse ergibt eine Hyperbel und umgekehrt. Eine formale Begründung findet sich in der Ellipsen- bzw. Hyperbelgleichung, die sich ja nur in einem Rechenzeichen unterscheiden. Dies wird bereits bei der Berechnung von b aus a und e deutlich. Für die Ellipse gilt: $b^2 = a^2 - e^2$ und für die Hyperbel: $b^2 = e^2 - a^2$. Die rechten Seiten gehen durch Multiplikation mit -1 ineinander über.

Entsteht durch die Berechnung von b eine negative Wurzel (z.B. die Wurzel aus -19), so kann man sich ja über die „Unmöglichkeit“ dieser Zahl hinwegsetzen und diese einfach quadrieren, was dann -19 ergibt. Damit wird in der Ellipsengleichung ein negativer Bruch subtrahiert, was der Subtraktion eines positiven Bruches gleichkommt. Damit ist aus der Ellipsen- eine Hyperbelgleichung entstanden. Umgekehrt entsteht so aus einer Hyperbel- eine Ellipsengleichung.

- Lassen Sie mit der vorgestellten Funktion verschiedene Ellipsen plotten. Gehen Sie dabei strukturiert vor, indem Sie immer einen Parameter a bzw. b konstant halten und den anderen variieren.

- Welche Veränderungen einer Ellipse bewirkt eine Variation des Parameters a ?

Es ändert sich nur die Länge der großen Achse $2a$.

- Welche Veränderungen einer Ellipse bewirkt eine Variation des Parameters b ?

Es ändert sich nur die Länge der kleinen Achse $2b$.

- Machen Sie dasselbe für eine Hyperbel.

a : Es ändert sich nur der Hauptscheitelabstand $2a$.

b : Es ändert sich nur die „Krümmung“ am Scheitel bzw. Steigung der Hyperbeläste.

- Stellen Sie die Gleichung einer Hyperbel mit $a=2$ und $b=5$ in impliziter Form auf.

$$25x^2 - 4y^2 - 100 = 0$$

- Lassen Sie diese Hyperbel von Maxima im Bereich $-5 < x < +5$ darstellen.
- Lassen Sie danach dieselbe Hyperbel im Bereich $-500 < x < +500$ darstellen. Was „sehen“ Sie auf diesem zweiten Plot?

... zwei Ursprungsgeraden

- Gehen Sie diesem „Phänomen“ algebraisch auf den Grund. Bringen Sie dazu die allgemeine Hyperbelgleichung auf die Form $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + 1$ und überlegen Sie, was in der Gleichung passiert, wenn bei gegebenen und damit konstanten Werten a und b die Koordinaten x und y immer größer und größer werden. Welcher Teil der Gleichung kann dann praktisch unter den Tisch fallen?

Der Wert der Brüche nähert sich immer weiter an, der Summand $+1$ wird immer bedeutungsloser.

- Lösen Sie die diese reduzierte Gleichung nach y auf, was erhalten Sie?

$y = \frac{b}{a} \cdot x$ und damit die Gleichung einer Ursprungsgeraden

- Interpretieren Sie dieses Ergebnis, indem Sie es nun wieder in Beziehung zur Hyperbel bringen.

Dies ist die Gleichung der Asymptoten der Hyperbel.

11. Eine Ellipse ist durch ihre Halbachsen a und b gegeben. Erstellen Sie die zugehörigen Ellipsengleichungen in der impliziten Form und überprüfen Sie Ihre Rechnung, indem Sie die Ellipse mit dem `draw2d()` plotten lassen.

- a) $[a, b]: [4, 1]$ $x^2 + 16y^2 - 16 = 0$
- b) $[a, b]: [3, 7]$ $49x^2 + 9y^2 - 441 = 0$
- c) $[a, b]: [84, 57]$ $3249x^2 + 7056y^2 - 22\,924\,944 = 0$
- d) Bestimmen Sie nun aus den in a) bis c) gegebenen Werten die Gleichung für eine Hyperbel.

Ergebnisse s.o. – nur mit negativem Parameter für y^2 .

12. Nun sollen Sie umgekehrt vorgehen: Bestimmen Sie anhand der nachfolgenden Gleichungen, ob es sich um eine Ellipse oder eine Hyperbel handelt und geben Sie deren Halbachsen an.

- a) $9604x^2 - 36y^2 - 345744 = 0$ $[6, -98]$
- b) $169x^2 + 289y^2 - 48841 = 0$ $[17, 13]$
- c) $342.25x^2 + 556.96y^2 - 190619.56 = 0$ $[23.6, 18.5]$
- d) $268.96x^2 - 515.29y^2 - 138592.3984 = 0$ $[22.7, -16.4]$

13. Lassen Sie von Maxima die Gleichung $4x^2 + 25y^2 - 48 = 0$ plotten.

- a) Bevor Sie plotten: Welche Figur erwarten Sie? Welche Figur erhalten Sie tatsächlich? Bestimmen Sie deren Formparameter a und b näherungsweise aus dem Plot.

Ellipse, [3.46, 1.39]

- b) Wie können Sie die Parameter a und b algebraisch aus der gegebenen Gleichung ermitteln? Bringen Sie dazu die gegebene Gleichung in die Form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, dann können Sie die gesuchten Werte einfach ablesen.

$$\frac{4}{48}x^2 + \frac{25}{48}y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{48}{4}} + \frac{y^2}{\frac{48}{25}} - 1 = 0 \quad \text{Die Brüche } \frac{48}{4} \text{ und } \frac{48}{25} \text{ sind die Quadrate der}$$

Halbachsen [3.46, 1.39].

- c) Machen Sie dasselbe mit der Gleichung: $323x^2 + 728y^2 - 1358 = 0$

[2.05, 1.37]

- d) Wie gehen Sie hierbei grundsätzlich vor? Erarbeiten Sie sich einen *Algorithmus*, um aus solchen Gleichungen die Halbachsen zu bestimmen, damit Sie diese Aufgabe Maxima übertragen können.

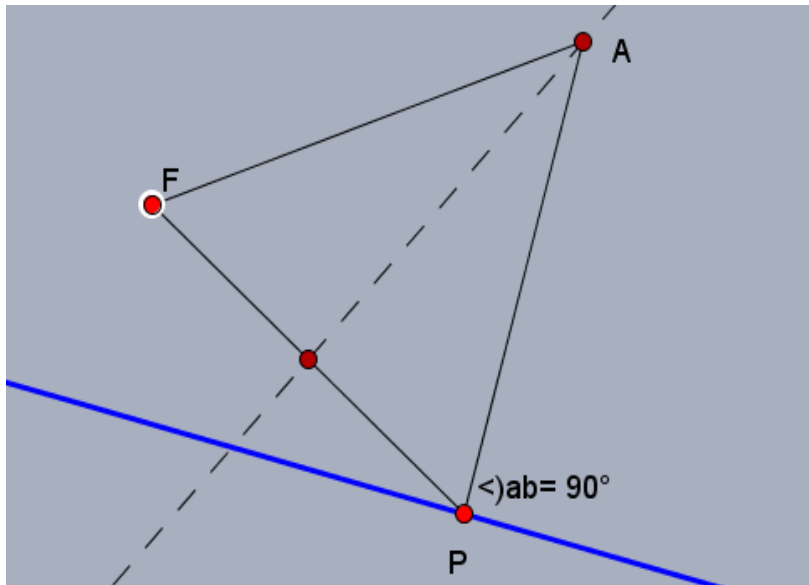
Allgemeine Vorgehensweise:

Eine Gleichung der Form $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$ durch $-F$ dividieren, damit erhält man eine Gleichung der Form $\frac{A}{-F}x^2 + \frac{C}{-F}y^2 - 1 = 0$ und damit schon die Hauptform der Ellipsen- bzw.

Hyperbelgleichung. Diese ist äquivalent zu $\frac{x^2}{\frac{-F}{A}} + \frac{y^2}{\frac{-F}{C}} - 1 = 0$. Damit gilt für die Hauptachsen

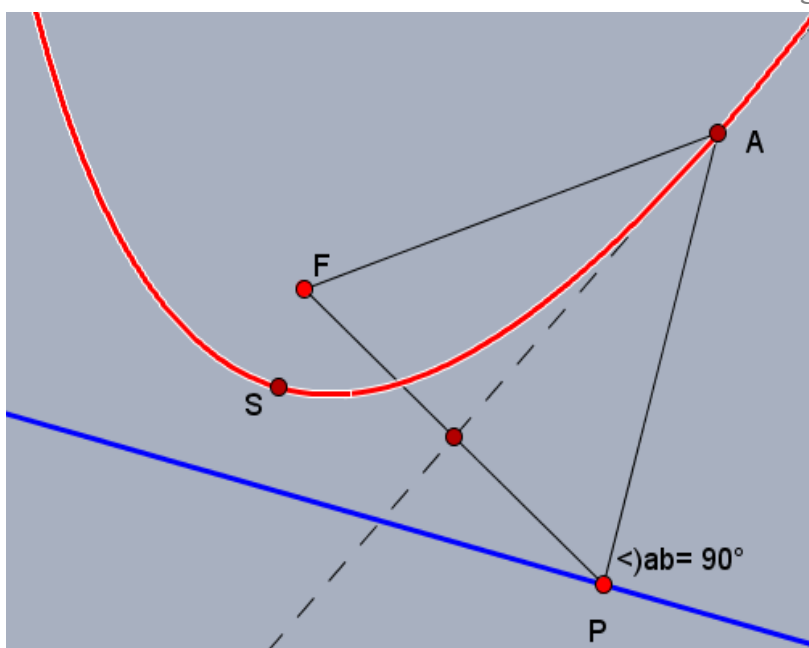
$$a = \sqrt{\frac{-F}{A}} \quad \text{und} \quad b = \sqrt{\frac{-F}{C}}.$$

14. Gegeben sind eine Gerade l und ein Punkt F . Auf der Geraden ist ein Punkt P verschiebbar angebracht. A ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von FP und der Senkrechten zu l durch P .
- Welche Bahn beschreibt A , wenn P auf l verschoben wird?
 - Ermitteln Sie aus der Konstruktionsvorschrift die spezielle Lage des Punktes A bezüglich der Geraden l und des Punktes F und formulieren Sie daraus eine Definition der entstehenden Figur.



Überlegen wir uns zunächst, dass die Mittelsenkrechte von FP die Spiegelachse bezüglich F und P darstellt. Da A auf dieser Mittelsenkrechten liegt, sind die Strecken FA und PA ebenfalls Spiegelbilder bezüglich der Mittelsenkrechten. Aus dieser Eigenschaft folgt, dass FA und PA gleich lang sind. Außerdem ist PA gleich der Abstand von A zu l . Aus all dem folgt schließlich, dass A gleich weit von F entfernt ist wie von der Geraden l .

Beim Bewegen von P bewegt sich A auf einer Linie. Diese Linie ist die Menge aller Punkte A , die von F denselben Abstand haben wie von der Geraden l . Überraschend ist nun, dass sich hinter dieser rätselhaften Definition eine wohlbekannte Kurve verbirgt:



15. Zeichnen Sie im Koordinatensystem eine Gerade l parallel zur y -Achse durch den Punkt $[-f, 0]$ – d.h. die Gerade soll links von der y -Achse im Abstand f (den Sie beliebig wählen können) verlaufen. Setzen Sie den Punkt F in die Koordinate $(f, 0)$ – also im selben Abstand wie die Gerade rechts von der y -Achse.

- Erstellen Sie nun entsprechend der obigen Konstruktionsvorschrift die zu l und F gehörende Parabel.
- Warum verläuft der Scheitel der Parabel genau durch den Koordinatenursprung?

Nach Def. ist der Abstand zwischen Gerade und F gleich groß.

- Nehmen Sie einen beliebigen Parabelpunkt A mit den Koordinaten $[x, y]$ und fällen Sie von ihm aus das Lot auf die Gerade. Der Schnittpunkt dieses Lotes mit der Geraden sei P . Drücken Sie die Länge der Strecke PA in Koordinaten aus.

$$PA = x + f$$

- Berechnen Sie nach Pythagoras die Länge der Strecke FA .

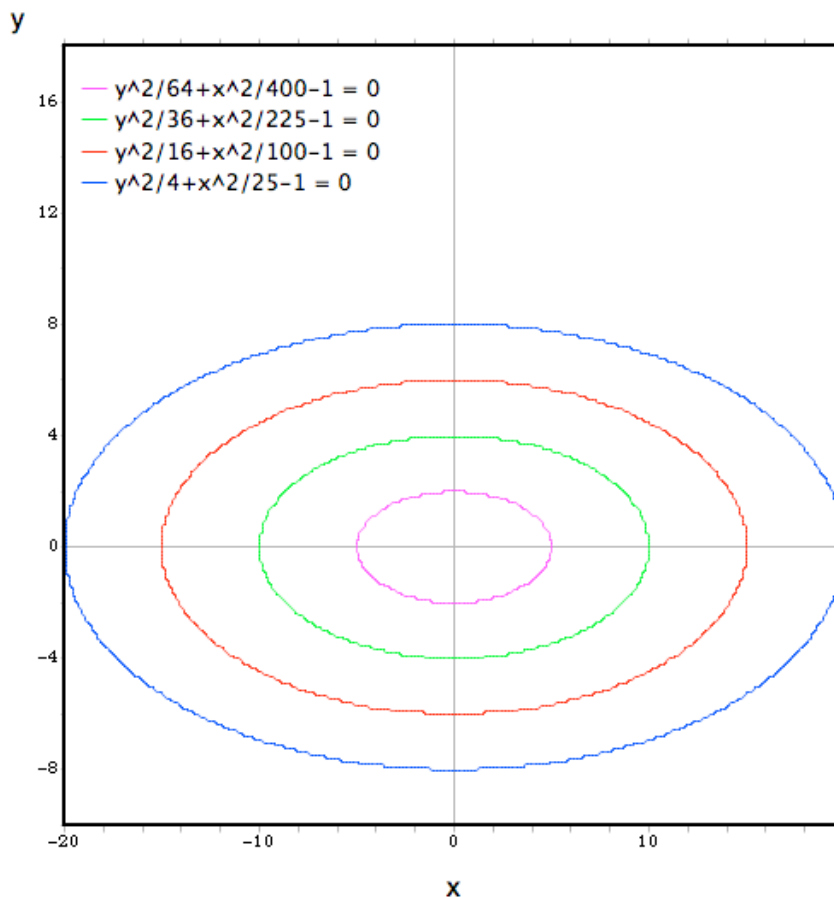
$$FA = \sqrt{y^2 + (x - f)^2}$$

- Beide Strecken PA und FA sind nach der Konstruktionsvorschrift gleich lang. Bestimmen Sie daraus eine Gleichung für y^2 . Diese Gleichung nennt man „Scheitelgleichung“ der Parabel.

$$y^2 = 4fx$$

16. Gegeben sind vier Ellipsen jeweils mit ihren Parametern $[a, b]$:
 $e1:[5, 2]$, $e2:[10, 4]$, $e3:[15, 6]$, $e4:[20, 8]$.

- Lassen Sie alle Ellipsen auf einmal plotten. Welchen Eindruck haben Sie von der Exzentrizität der vier Ellipsen?



Die vier Ellipsen sehen „ähnlich“ aus, insbesondere gleich „exzentrisch“.

- b) Bestimmen Sie die linearen Exzentrizitäten der vier Ellipsen und vergleichen Sie diese Ergebnisse mit ihrem optischen Eindruck.

Lineare Exzentrizität: Abstand eines Brennpunkts vom Mittelpunkt (Längenmaß) ... = e

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} \text{ (Ellipse) bzw. } e = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hyperbel)}$$

4.58, 9.17, 13.75, 18.33

Die berechneten Exzentrizitäten steigen an, obwohl alle vier Ellipsen gleich „unrund“ aussehen.

- c) Bestimmen Sie die numerische Exzentrizität der oben angegebenen Ellipsen. Was stellen Sie fest? Hätten Sie die Antwort bereits an den Zahlen in der Aufgabenstellung ersehen können?

Numerische Exzentrizität: Verhältnis aus linearer Exzentrizität zur großen Halbachse a : $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

Alle Ellipsen haben dieselbe numerische Exzentrizität $\sqrt{\frac{21}{5}} \approx 0.92$.

Aus den Zahlen der Aufgabenstellung wird bereits deutlich, dass die Halbachsen der Ellipsen lediglich im gleichen Verhältnis vergrößert worden sind. Die eigentliche (numerische) Exzentrizität muss daher jeweils dieselbe sein.

17. Die numerische Exzentrizität kann mit der Formel $\varepsilon = \frac{e}{a}$ bestimmt werden.

- a) Bestimmen Sie die numerische Exzentrizität für einige selbst gewählte Beispiele von Ellipsen und Hyperbeln. Versuchen Sie, möglichst verschiedene (extreme) Werte für die numerische Exzentrizität zu erreichen und lassen Sie sich die zugehörigen Kegelschnitte immer ausplotten.

Beginnend beim Kreis mit $\varepsilon = 0$ geht ε immer mehr gegen 1, je exzentrischer die Ellipse wird. Geht man mit denselben Halbachsenwerten über zur Hyperbel, so erhält man eine Exzentrizität von knapp über 1 und die Hyperbeläste verlaufen sehr flach beinahe auf der x -Achse. Vergrößert man den Nebenscheitel b oder/und verkleinert man den Hauptscheitel a , so wird die numerische Exzentrizität weiter vergrößert. Die Hyperbeläste verlaufen dabei immer steiler und entarten schließlich zur Mittelsenkrechten zwischen den Brennpunkten.

- b) Welche allgemeine Aussage können Sie zur numerischen Exzentrizität von Ellipsen im Gegensatz zu Hyperbeln machen. Begründen Sie Ihre Aussage.

$\varepsilon < 1$: Ellipse, $\varepsilon > 1$: Hyperbel, ($\varepsilon = 1$: Parabel)

- c) Wo findet der Begriff „Hyperbel“ außerhalb der Mathematik Verwendung? Was bedeutet er dort? Können Sie sich vorstellen, warum er in der Mathematik für diese Form des Kegelschnitts verwendet wird?

In der Literatur bezeichnet man mit einer Hyperbel (griech.: ὑπερβολή hyperbolé „Übertreffung, Übertreibung“, von ὑπερβάλλειν hyperballein „über das Ziel hinaus werfen“) einen Tropus. Bei einer Hyperbel wird über das Glaubwürdige hinaus übertrieben. Die Namensgebung für den Kegelschnitt bezieht sich auf dessen „Übertreibung“ beim Schnittwinkel mit dem Kegel, der Schnittwinkel ist ja größer als die Steigung der Mantellinie. Die „Übertreibung“ findet sich auch bei der numerischen Exzentrizität, deren Wert für die Hyperbel immer größer als 1 ist.

- d) Untersuchen Sie auch die Begriffe „Ellipse“ und „Parabel“ auf deren sonstige Verwendung und stellen Sie daraus einen Zusammenhang mit deren Verwendung für die jeweiligen Kegelschnitte her.

Als Ellipse (griechisch ἔλλειψις élleipsis „Fehlen“, „Aussparung“, „Auslassung“, „Mangel“) bezeichnet man das Auslassen von Satzteilen, aber auch Sätze mit Auslassungen. Die Namensgebung für den Kegelschnitt bezieht sich auf dessen Exzentrizität $\varepsilon < 1$.

Die Parabel (griechisch παραβολή) ist eine mit dem Gleichnis verwandte Form von Literatur, eine lehrhafte und kurze Erzählung. In der Mathematik ist eine Parabel (von lat. parabola zu altgriechisch parabolē, Nebeneinanderstellung, Vergleichung, Gleichnis; zurückzuführen auf παρά pará ‚neben‘ und βάλλειν bállein ‚werfen‘) eine Kurve zweiter Ordnung. Neben dem Punkt, dem Kreis, der Ellipse und der Hyperbel zählt sie zu den Kegelschnitten, bei denen sie die Exzentrizität eins hat. Sie ist wie der Kreis eine spezielle Ellipse. Bei ihr liegt einer der beiden Ellipsen-Brennpunkte im Unendlichen, beim Kreis fallen beide zusammen.

18. Der Formparameter p ist das Verhältnis aus dem Quadrat der Nebenachse zur Hauptachse

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

- a) Wiederholen Sie, wie man aus den beiden Halbachsen a und b die lineare Exzentrizität e und die numerische Exzentrizität ε für eine Ellipse bzw. eine Hyperbel bestimmt.

Ellipse: $e^2 = a^2 - b^2$ Hyperbel: $e^2 = a^2 + b^2$

Numerische Exzentrizität ε grundsätzlich $\frac{e}{a}$.

- b) Legen Sie sich in EXCEL eine Tabelle an, in welcher Sie – ausgehend von den Halbachsen a und b die lineare Exzentrizität e , die numerische Exzentrizität ε und den Formparameter p errechnen lassen, etwa nach folgendem Muster:

	A	B	C	D	E
1	Ellipse				
2	a	b	lin. Ex. e	num. Ex. ε	FP p
3	5	2	4,58	0,9165	0,800

- c) Machen Sie dies auch für die Hyperbel und untersuchen Sie in beiden Fällen möglichst viele unterschiedlich geformte Kegelschnitte.
- d) Finden Sie anhand Ihrer Tabelle heraus, wie sich der Formparameter p verändert, wenn die numerische Exzentrizität ε einer Ellipse größer wird.

Er wird kleiner!

- e) Wie verändert sich der Formparameter p , wenn die numerische Exzentrizität ε einer Hyperbel größer wird?

Er wird größer! Die Steigung b/a der Hyperbeläste wird (betragsmäßig) größer, damit wächst auch b^2/a .

- f) Können Sie Ihre empirisch festgestellten Zusammenhänge zwischen der numerischen Exzentrizität ε und dem Formparameter p algebraisch nachweisen?

Für die Ellipse gilt: $b^2 = a^2 - e^2$

Eingesetzt in $p = \frac{b^2}{a}$ folgt: $p = \frac{a^2 - e^2}{a}$. Umgeformt: $p = a - \frac{e^2}{a} = a - e \cdot \frac{e}{a}$

Der letzte Faktor $\frac{e}{a}$ ist aber genau die numerische Exzentrizität ε , also: $p = a - e \cdot \varepsilon$

Bei größer werdendem ε wird der Subtrahend größer und damit die Differenz p kleiner!

Für die Hyperbel gilt: $b^2 = e^2 - a^2$

Eingesetzt in $p = \frac{b^2}{a}$ folgt: $p = \frac{e^2 - a^2}{a}$. Umgeformt: $p = \frac{e^2}{a} - a = \frac{e}{a} \cdot e - a$

Der erste Faktor $\frac{e}{a}$ ist aber genau die numerische Exzentrizität ε , also: $p = \varepsilon \cdot e - a$

Bei größer werdendem ε wird der Minuend größer und damit die Differenz p größer!

- g) Welchen Formparameter p hat ein Kreis?

$$p = r$$

19. Gegeben sind der Formparameter p und der halbe Brennpunktabstand e einer Ellipse. Bestimmen Sie aus diesen Werten jeweils die Halbachsen a und b .

$$p = \frac{4}{5}, \quad e = \sqrt{21} \quad p = \frac{81}{13}, \quad e = 2\sqrt{22} \quad p = \frac{169}{17}, \quad e = 2\sqrt{30}$$

$$p = \frac{4}{5}, \quad e = 8\sqrt{6} \quad p = \frac{81}{13}, \quad e = 162\sqrt{42} \quad p = \frac{169}{17}, \quad e = 2028\sqrt{2}$$

- a) Vergleichen Sie die ersten drei Aufgaben mit den letzten drei Aufgaben. Welche grundlegende Schlussfolgerung ziehen Sie aus diesem Vergleich?

Der Formparameter p alleine liefert keine eindeutige Aussage über die Form der Ellipse.

- b) Wie konnten Sie die ersten drei (speziellen) Aufgaben a) bis c) recht einfach lösen?

Nach der Formel $p = \frac{b^2}{a}$

- c) Warum hat bei den Aufgaben a) bis c) diese einfache Lösungsmethode funktioniert. Was ist das Spezielle an diesen Aufgaben?

Weil der Bruch für p vollständig gekürzt ist und a und b (konkret b^2) sofort aus dem Nenner und dem Zähler abgelesen werden können und schließlich auch die „Probe“ stimmt, da die Beziehung $e^2 = a^2 - b^2$ für die so ermittelten Werte für a und b richtig ist:

a) $a:5$ und $b:2$, daraus folgt für $e^2 = 25 - 4 = 21$ und schließlich $e = \sqrt{21}$.

b) $a:13$ und $b:9$, daraus folgt für $e^2 = 169 - 81$ und schließlich $e = \sqrt{88} = \sqrt{4 \cdot 22} = 2\sqrt{22}$.

c) $a:17$ und $b:13$, daraus folgt für $e^2 = 289 - 169$ und schließlich $e = \sqrt{120} = \sqrt{4 \cdot 30} = 2\sqrt{30}$.

- d) Wie können Sie die gestellte Aufgabe allgemein lösen?

Es gibt mehrere Möglichkeiten, zwei davon seien nachfolgend dargestellt:

Gegeben sind $p = \frac{b^2}{a}$ und $e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - e^2$.

Wir substituieren b^2 in der Gleichung für p und erhalten:

$$p = \frac{a^2 - e^2}{a}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in a :

$$a^2 - pa - e^2 = 0 \quad \text{mit den Lösungen} \quad a_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + e^2}, \quad \text{wobei man die negative Lösung}$$

ignoriert, da a eine Strecke ist. Die Halbachse b kann dann über eine der Ausgangsgleichungen bestimmt werden.

Weitere Möglichkeit:

Man quadriert $p = \frac{b^2}{a}$ und erhält $p^2 = \frac{b^4}{a^2}$

Hierin ersetzt man a^2 entsprechend der Beziehung $a^2 = e^2 + b^2$ und erhält $p^2 = \frac{b^4}{e^2 + b^2}$

Diese Gleichung formt man um nach b : $b^4 - p^2 b^2 - p^2 e^2 = 0$ und löst diese Gleichung – vorzugsweise mit Hilfe von Maxima. Man erhält vier Lösungen, zwei sind komplex, die beiden anderen real. Die beiden reellen Lösungen sind Gegenzahlen, davon nimmt man die positive Zahl als Wert für b .

Die große Halbachse a kann dann über $a^2 = e^2 + b^2$ ermittelt werden.

d) $b^4 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 b^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot (8\sqrt{6})^2 = 0$, Lösung laut Maxima: 4, daraus a : 20

e) $b^4 - \left(\frac{81}{13}\right)^2 b^2 - \left(\frac{81}{13}\right)^2 \cdot (162\sqrt{42})^2 = 0$, Lösung laut Maxima: 81, daraus a : 1053

f) $b^4 - \left(\frac{169}{17}\right)^2 b^2 - \left(\frac{169}{17}\right)^2 \cdot (2028\sqrt{2})^2 = 0$, Lösung laut Maxima: 169, daraus a : 2873

- e) Bestimmen Sie den Formparameter p der Ellipse mit den Halbachsen $[13, 11]$. Welche andere Ellipse hat denselben Formparameter p ?

Aus $p = \frac{b^2}{a}$ kann man leicht den Formparameter $p = \frac{121}{13}$ bestimmen.

In dem Bruch, der einen Formparameter bezeichnet, muss der Zähler immer eine Quadratzahl sein. So einen Bruch kann man aus dem gegebenen erzeugen, indem man mit dem Zähler

erweitert. Man erhält $p = \frac{14641}{1573}$, was gekürzt natürlich wieder $\frac{121}{13}$ ergibt. Formt man diesen

Bruch allerdings auf die oben angesprochene einfache Weise in die Halbachsen a und b um, so können wir die Halbachse $a = 1573$ direkt aus dem Nenner ablesen, die Halbachse $b = 121$ erhalten wir, indem wir die Wurzel aus dem Nenner ziehen. Die Ellipse mit den Halbachsen

$[1573, 121]$ hat somit denselben Formparameter $\frac{121}{13}$ wie die Ellipse mit den Halbachsen $[13, 11]$.

Natürlich sind auch andere Vorgehensweisen möglich. Insgesamt gibt es unendlich viele Ellipsen mit demselben Formparameter p . Für die Unterscheidung muss deshalb noch ein weiterer Wert, bspw. der halbe Brennpunktabstand e angegeben werden.

- f) Berechnen Sie den halben Brennpunktabstand e sowohl für die gegebene Ellipse $[13, 11]$ als auch für die von Ihnen gefundene weitere Ellipse mit demselben Formparameter.
 $e^2 = a^2 - b^2$

Für die vorgegebene Ellipse $[13, 11]$ ist $e = 4\sqrt{3}$, für die alternativ gefundene Ellipse $[1573, 121]$ ist $e = 242\sqrt{42}$.