

kg_aufgaben_11.docx

1. Sie diskutieren in der Schule die Scheitelpunktform $y = (x + 3)^2 + 7$ und erklären, dass es sich dabei um eine um 3 Einheiten nach links und 7 Einheiten nach oben verschobene Normalparabel handelt. Ein Schüler fragt, warum der Scheitel um 3 Einheiten nach links verschoben wird, obwohl in der Gleichung $(x + 3)$ steht und wenn man zu einer x -Koordinate 3 addiert man dann ja auch um 3 Schritte weiter nach rechts gelangt. Außerdem werde der Scheitel ja auch um +7 Einheiten nach oben in die positive y -Richtung verschoben!

Der Unterschied besteht darin, dass der eine Parameter zu x addiert wird, bevor x in die „Funktionsmaschine“ gesteckt wird und der andere erst hernach zum Funktionsergebnis addiert wird.

2. Eine Normalparabel soll um den Vektor $v: [3, 2]$ verschoben werden. Ersetzen Sie in der Gleichung für die Normalparabel $y = x^2$ die Variable x durch die rechte Seite der Transformationsgleichung für die x -Koordinate und y durch die rechte Seite der Transformationsgleichung für die y -Koordinate, wobei Sie für v_x und v_y die entsprechenden Werte 3 bzw. 2 einsetzen.

$$(y - 2) = (x - 3)^2 \Rightarrow y = (x - 3)^2 + 2 \text{ Man erhält die Scheitelpunktform.}$$

3. Wie lautet die allgemeine Gleichung eines Kreises k_0 um den Koordinatenursprung?

$$x^2 + y^2 = r^2$$

- a) Wie lautet die Gleichung eines Kreises k_1 um $M_1: [3, 2]$?

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = r^2$$

- b) Wie lautet die Gleichung eines Kreises k_2 um $M_2: [-3241, 1648]$?

$$(x + 3241)^2 + (y - 1648)^2 = r^2$$

- c) In welcher geometrischen Beziehung stehen die Kreise k_0 und k_1 bzw. k_0 und k_2 zueinander?

k_1 bzw. k_2 sind um $[3, 2]$ bzw. $[-3241, 1648]$ aus dem Ursprung verschoben.

- d) Wie lautet die Gleichung eines Kreises k_n um $M_n: [x_M, y_M]$?

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$$

- e) In welcher geometrischen Beziehung stehen die Kreise k_0 und k_n zueinander?

... um $[x_M, y_M]$ verschoben

- f) Wie kann daher die gerichtete Strecke vom Ursprung zum Mittelpunkt M interpretiert werden?

Als Vektor, um welchen der Kreis aus dem Ursprung verschoben wurde.

4. Nachfolgend sind Ellipsen und Hyperbeln anhand deren Halbachsen a und b gegeben.

	a	b	v_x	v_y
Ellipse	6	3	5	2
Hyperbel	6	3	5	2
Ellipse	2	7	-3	-1
Hyperbel	2	7	-3	-1

- a) Stellen Sie die Gleichungen dieser und der folgenden Kegelschnitte immer in der Form $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ dar. Dabei kann es natürlich sein, dass einzelne Koeffizienten Null sind!

$$9x^2 + 36y^2 - 324 = 0$$

$$9x^2 - 36y^2 - 324 = 0$$

$$49x^2 + 4y^2 - 196 = 0$$

$$49x^2 - 4y^2 - 196 = 0$$

- b) Überprüfen Sie Ihre Rechnung, indem Sie die Kegelschnitte mit Hilfe der oben angegebenen Plotfunktion zeichnen lassen.
- c) Nun werden die Kegelschnitte durch den jeweils angegebenen Vektor (v_x, v_y) im Koordinatensystem verschoben. Wie lauten nun deren Gleichungen in der Form $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$?

$$9x^2 + 36y^2 - 90x - 144y + 45 = 0$$

$$9x^2 - 36y^2 - 90x + 144y - 243 = 0$$

$$49x^2 + 4y^2 + 294x + 8y + 249 = 0$$

$$49x^2 - 4y^2 + 294x - 8y + 241 = 0$$

- d) Überprüfen Sie wiederum mit Hilfe der Plotfunktion.

5. Nachfolgend sind Ellipsen und Hyperbeln anhand deren Halbachsen a und b gegeben.

	a	b	α
Ellipse	7	2	27°
Hyperbel	7	2	27°
Ellipse	8	6	115°
Hyperbel	8	6	115°

- a) Stellen Sie die Gleichungen dieser und der folgenden Kegelschnitte in der Form $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ dar.

$$4x^2 + 49y^2 - 196 = 0$$

$$4x^2 - 49y^2 - 196 = 0$$

$$36x^2 + 64y^2 - 2304 = 0$$

$$36x^2 - 64y^2 - 2304 = 0$$

- b) Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie jeweils die Ausgangsfigur und deren Bild in Maxima zeichnen lassen.
- c) Nun werden die Kegelschnitte durch den jeweils angegebenen Winkel α im Koordinatensystem gedreht. Wie lauten nun deren Gleichungen?

$$13,27x^2 + 39,73y^2 - 36,41xy - 196 = 0$$

$$-6,92x^2 - 38,08y^2 + 42,88xy - 196 = 0$$

$$59x^2 + 41y^2 + 21,45xy - 2304 = 0$$

$$-46,14x^2 + 18,14y^2 - 76,6xy - 2304 = 0$$

- d) Überprüfen Sie wiederum mit Hilfe der Plotfunktion.

6. Eine Ellipse mit den Halbachsen $[5, 2]$ wird um 90° gedreht. Wie lautet die Gleichung der gedrehten Ellipse? Was fällt Ihnen auf?

$$\frac{(x \cdot \cos 90^\circ + y \cdot \sin 90^\circ)^2}{5^2} + \frac{(y \cdot \cos 90^\circ - x \cdot \sin 90^\circ)^2}{2^2} - 1 = 0$$

$$\frac{(x \cdot 0 + y \cdot 1)^2}{5^2} + \frac{(y \cdot 0 - x \cdot 1)^2}{2^2} - 1 = 0$$

$$\frac{y^2}{5^2} + \frac{x^2}{2^2} - 1 = 0$$

Die beiden Halbachsen wurden vertauscht!

7. Die Scheitelgleichung für Kegelschnitte lautet $y^2 = 2 \cdot p \cdot x + (\varepsilon^2 - 1) \cdot x^2$. Setzen Sie in Maxima den Formparameter p auf 1 und variieren Sie in kleinen Schritten die numerische Exzentrizität ε ausgehend von null über eins und darüber hinaus. Welche Kegelschnitte werden bei welchen Werten dargestellt?

p:1;

eps:1;

scheitelgl:y^2=2*p*x+(eps^2-1)*x^2;

```
draw2d(proportional_axes=xy,
dimensions=[1500,900],
font="Helvetica",
font_size=16,
xaxis=true,xaxis_type=solid,xaxis_width=3,
yaxis=true,yaxis_type=solid,yaxis_width=3,
line_width=4,ip_grid=[300,300],
color=red,
implicit(scheitelgl_kreis,x,-1,25,y,-8,8),
color=blue,
implicit(scheitelgl_ellipse,x,-1,25,y,-8,8),
color=dark_green,
implicit(scheitelgl_parabel,x,-1,25,y,-8,8),
color=brown,
implicit(scheitelgl_hyperbel,x,-1,25,y,-8,8))
```

Eine numerische Exzentrizität von null ergibt einen Kreis.

Werte zwischen null und eins erzeugen eine Ellipse.

Die Parabel hat eine numerische Exzentrizität von eins.

Werte größer eins ergeben eine Hyperbel.