

## kg\_aufgaben\_12.docx

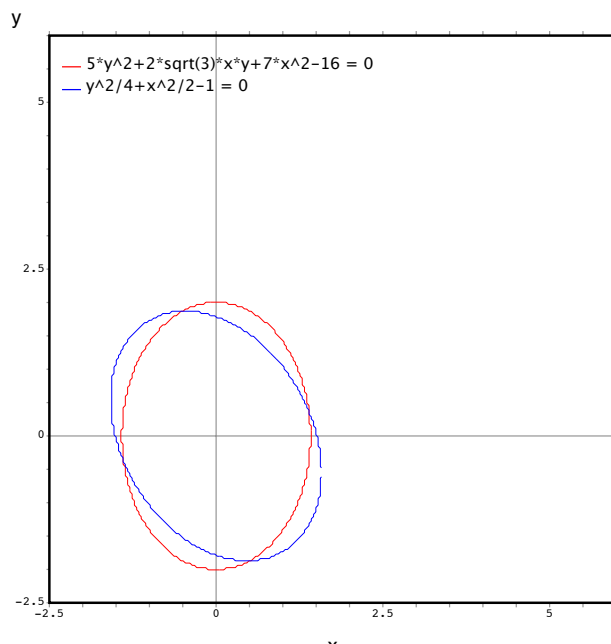
1. Gegeben ist eine Ellipse in Hauptachsenlage mit den Hauptachsen  $a = \sqrt{2}$  und  $b = 2$ . Skizzieren Sie zunächst diese Ellipse bzw. lassen Sie diese von Maxima plotten.

- a) Diese Ellipse wird um  $30^\circ$  gedreht. Ermitteln Sie die zugehörige Gleichung durch Substitution der Transformationsterme „von Hand“ und berücksichtigen Sie dabei die besonderen Werte der Winkelfunktionen für  $30^\circ$ . Überprüfen Sie Ihre Rechnung, indem Sie die ursprüngliche und die gedrehte Ellipse in Maxima plotten lassen.

$$\frac{(x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ)^2}{\sqrt{2}^2} + \frac{(y \cos 30^\circ - x \sin 30^\circ)^2}{2^2} - 1 = 0$$

$$\frac{\left(x \frac{\sqrt{3}}{2} + y \frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(y \frac{\sqrt{3}}{2} - x \frac{1}{2}\right)^2}{4} - 1 = 0$$

$$7x^2 + 5y^2 + 2\sqrt{3}xy - 16 = 0$$



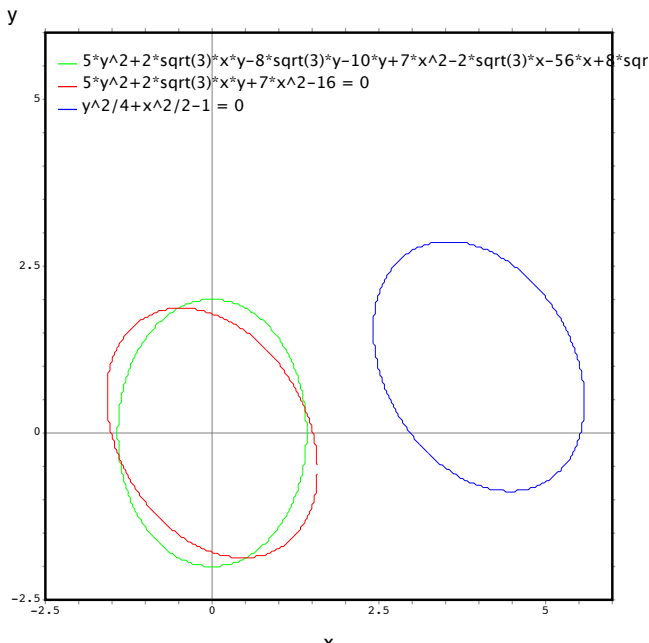
- b) Nun soll diese gedrehte Ellipse noch um den Vektor  $[4, 1]$  verschoben werden. Ermitteln Sie auch diese Gleichung „von Hand“ durch Substitution und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie alle drei Ellipsen plotten lassen.

$$7(x-4)^2 + 5(y-1)^2 + 2\sqrt{3}(x-4)(y-1) - 16 = 0$$

$$7x^2 - 56x + 112 + 5y^2 - 10y + 5 + 2\sqrt{3}(xy - x - 4y + 4) - 16 = 0$$

$$7x^2 - 56x + 112 + 5y^2 - 10y + 5 + 2\sqrt{3}xy - 2\sqrt{3}x - 8\sqrt{3}y + 8\sqrt{3} - 16 = 0$$

$$7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - (56 + 2\sqrt{3})x - (10 + 8\sqrt{3})y + 101 + 8\sqrt{3} = 0$$



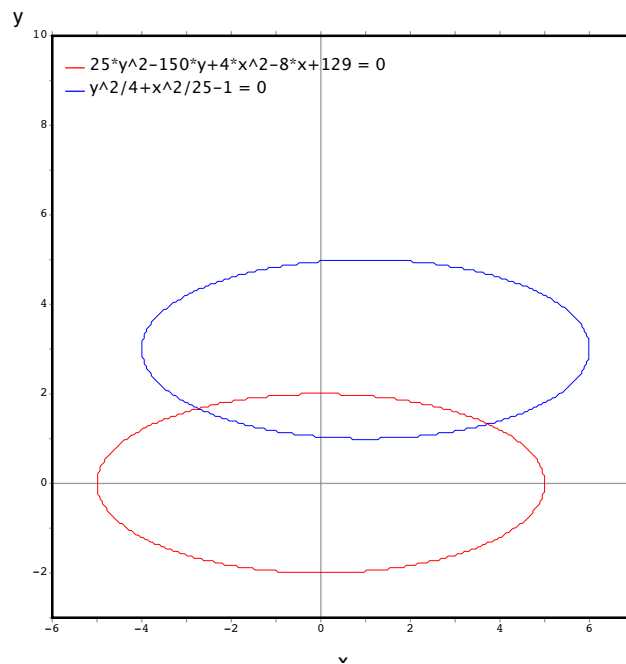
- c) Schließlich soll die gesamte Transformation (zuerst drehen und dann schieben) in einer Gleichung zusammengefasst werden. Substituieren Sie dazu in der Ellipsengleichung zuerst die Transformationsterme für die Drehung und danach diejenigen für die Verschiebung. Wie lautet die Gleichung? (Hinweis: In dieser Gleichung müssen Sie nichts „ausrechnen“, Sie sollen dort lediglich die Substitutionen in der korrekten Reihenfolge vornehmen.)
- d) Tragen Sie in diese Gleichung die Werte für die Drehung und die Verschiebung ein und lassen Sie auch diese Gleichung zusätzlich zu den drei bereits erarbeiteten Gleichungen plotten. Was fällt Ihnen auf?

Egal ob sukzessive substituiert oder „auf einmal“ in einer Gleichung gedreht und dann verschoben: Das Ergebnis ist dasselbe!

2. Wir gehen aus von einer Ellipse mit den Halbachsen  $a = 5$  und  $b = 2$ . Lassen Sie diese Ellipse plotten.

- a) Die Ellipse soll achsenparallel um den Vektor  $[1, 3]$  verschoben werden. Ermitteln Sie die Gleichung von Hand und überprüfen Sie diese durch einen Plot.

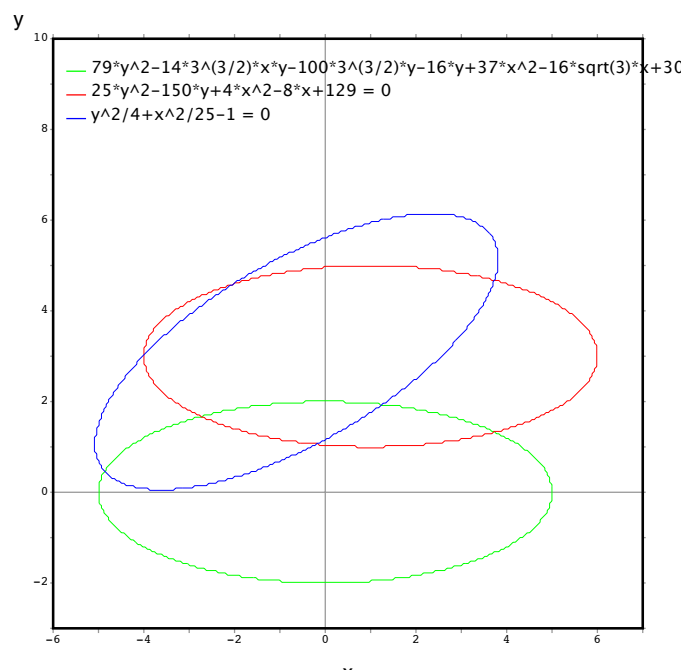
$$\text{Ellipse: } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} - \frac{2}{25}x - \frac{3}{2}y + \frac{129}{100} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 + 25y^2 - 8x - 150y + 129 = 0$$



b) Diese verschobene Ellipse soll nun um  $30^\circ$  gedreht werden. Ermitteln Sie auch diese zugehörige Gleichung „von Hand“ durch Substitution der Transformationsterme und überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch einen Plot aller drei Ellipsen.

$$4 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \right)^2 + 25 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2}x \right)^2 - 8 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \right) - 150 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2}x \right) + 129 = 0$$

$$37x^2 - 42\sqrt{3}xy + 79y^2 + (300 - 16\sqrt{3})x - (16 + 300\sqrt{3})y + 516 = 0$$



c) Schließlich soll die gesamte Transformation (zuerst schieben und dann drehen) in einer Gleichung zusammengefasst werden. Substituieren Sie dazu in der Ellipsengleichung zuerst die Transformationsterme für die Verschiebung, dann diejenigen für die Drehung und setzen Sie schließlich die Werte für die Transformationen ein. Wie lautet die Gleichung? Lassen Sie auch diese Gleichung zusätzlich zu den drei bereits erarbeiteten Gleichungen plotten. Was fällt Ihnen auf?

Genau dasselbe Ergebnis wie in b)

3. Die in der nachfolgenden Tabelle angegebenen Kegelschnitte sollen jeweils um die ebenfalls aufgeführten Vektoren und Drehwinkel verschoben und gedreht werden. Wie lauten die resultierenden Gleichungen? Führen Sie dabei die Bewegungen in beiden möglichen Reihenfolgen durch.

Kegelschnitt	Halbachsen $[a, b]$	Vektor	Drehwinkel
a) Ellipse	[17, 13]	[39, 31]	45°
b) Hyperbel	[17, 13]	[39, 31]	45°
c) Ellipse	[251, 73]	[51, 79]	30°
d) Hyperbel	[13, 11]	[7, 5]	62°

a) schieben – drehen:  $229y^2 - 120xy - 21991.021y + 229x^2 + 3348.858x + 485937 = 0$

drehen – schieben:  $229y^2 - 120xy - 9518y + 229x^2 - 14142x + 374457 = 0$

b) schieben – drehen:  $-60y^2 + 458xy + 3348.858y - 60x^2 - 21991.021x - 69521 = 0$

drehen – schieben:  $-60y^2 + 458xy - 14142y - 60x^2 - 9518x + 355961.0 = 0$

c) schieben – drehen:  $48583y^2 - 49945.417xy - 8892332.701y + 19747x^2 + 4506343.964x + 71317641 = 0$

drehen – schieben:  $48583y^2 - 49945.417xy - 5128897.729y + 19747x^2 + 1931493.950x - 1.824 \cdot 10^8 = 0$

d) schieben – drehen:  $57.083y^2 + 240.421xy - 702.306y - 105.083x^2 - 2287.466x - 18745 = 0$

drehen – schieben:  $57.083y^2 + 240.421xy - 2253.776y - 105.083x^2 + 269.057x - 15756.26 = 0$

- e) Vergleichen sie jeweils die Gleichungen, die bei der umgekehrten Durchführung der Bewegungen (schieben – drehen bzw. drehen – schieben) entstehen. Was fällt Ihnen auf?

Die Koeffizienten der quadratischen Glieder und der Koeffizient des gemischten Glieds sind jeweils gleich!

4. Eine Ellipse mit den Halbachsen  $[5, 2]$  wird so weit nach rechts verschoben, dass ihr linker Scheitel genau durch den Koordinatenursprung verläuft.

- a) Wie lautet die zugehörige implizite Gleichung?

$$-\frac{4}{25} \cdot x^2 + \frac{8}{5}x - y^2 = 0$$

- b) Wie können Sie Ihre Rechnung überprüfen?

Plotten oder Punktprobe mit  $[0, 0]$

- c) Wie lautet die allgemeine Gleichung einer entsprechend verschobenen Ellipse? Lösen Sie diese Gleichung nach  $y^2$  auf und integrieren Sie den Formparameter  $p$  sowie die numerische Exzentrizität  $\varepsilon$  in die Gleichung!

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$\frac{x^2 - 2ax + a^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$\frac{b^2x^2 - 2b^2ax + a^2b^2}{a^2} + y^2 - b^2 = 0$$

$$\frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 - \frac{2b^2}{a} \cdot x + b^2 + y^2 - b^2 = 0$$

$$\frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 - \frac{2b^2}{a} \cdot x + y^2 = 0$$

$$y^2 = 2 \cdot \frac{b^2}{a} \cdot x - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 \quad \text{mit } p = \frac{b^2}{a} \text{ und } e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - e^2$$

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x - \frac{a^2 - e^2}{a^2} \cdot x^2$$

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x - \left( \frac{a^2}{a^2} - \frac{e^2}{a^2} \right) \cdot x^2$$

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x + \left( \frac{e^2}{a^2} - 1 \right) \cdot x^2$$

mit  $\varepsilon = \frac{e}{a}$  folgt daraus

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x + (\varepsilon^2 - 1) \cdot x^2$$

d) Bestimmen Sie die Zahlenwerte für  $p$  und für  $\varepsilon$  sowie  $\varepsilon^2$  und setzen Sie diese Werte in die eben gefundene Gleichung ein.

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{4}{5} \text{ und } \varepsilon^2 = \frac{e^2}{a^2} \text{ mit } e^2 = a^2 - b^2, \text{ also } \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{25 - 4}{25} = \frac{21}{25} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sqrt{21}}{5} \approx 0.9165...$$

$$y^2 = 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot x + \left( \frac{21}{25} - 1 \right) \cdot x^2$$

5. Eine Hyperbel mit den Halbachsen  $[5, 2]$  wird so weit nach links verschoben, dass ihr rechter Scheitel genau durch den Koordinatenursprung verläuft.

a) Wie lautet die zugehörige implizite Gleichung?

$$4x^2 + 40x - 25y^2 = 0$$

b) Wie lautet die allgemeine Gleichung einer entsprechend verschobenen Hyperbel? Lösen Sie diese Gleichung nach  $y^2$  auf und integrieren Sie den Formparameter  $p$  sowie die numerische Exzentrizität  $\varepsilon$  in die Gleichung!

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$\frac{x^2 + 2ax + a^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$\frac{b^2 x^2 + 2b^2 ax + a^2 b^2}{a^2} - y^2 - b^2 = 0$$

$$\frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 + \frac{2b^2}{a} \cdot x + b^2 - y^2 - b^2 = 0$$

$$\frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 + \frac{2b^2}{a} \cdot x - y^2 = 0$$

$$y^2 = 2 \cdot \frac{b^2}{a} \cdot x + \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 \quad \text{mit } p = \frac{b^2}{a} \text{ und } e^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = e^2 - a^2$$

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x + \frac{e^2 - a^2}{a^2} \cdot x^2$$

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x + \left( \frac{e^2}{a^2} - \frac{a^2}{a^2} \right) \cdot x^2$$

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x + \left( \frac{e^2}{a^2} - 1 \right) \cdot x^2$$

mit  $\varepsilon = \frac{e}{a}$  folgt daraus

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x + (\varepsilon^2 - 1) \cdot x^2$$

- c) Bestimmen Sie die Zahlenwerte für  $p$  und für  $\varepsilon$  sowie  $\varepsilon^2$  und setzen Sie diese Werte in die eben gefundene Gleichung ein.

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{4}{5} \text{ und } \varepsilon^2 = \frac{e^2}{a^2} \text{ mit } e^2 = a^2 + b^2, \text{ also } \varepsilon^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{25 + 4}{25} = \frac{29}{25} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sqrt{29}}{5} \approx 1.077...$$

$$y^2 = 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot x + \left( \frac{29}{25} - 1 \right) \cdot x^2$$

- d) Worin unterscheidet sich laut den beiden gefundenen *Scheitelfgleichungen* letztlich die Hyperbel von der Ellipse?

... in der Exzentrizität!  $\varepsilon < 1$ : Ellipse und  $\varepsilon > 1$ : Hyperbel

- e) Notieren Sie die in c) bzw. h) gefundene Gleichung mit  $\varepsilon = 1$ . Was erhalten Sie?

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x \quad \text{Scheitelfgleichung der Parabel!}$$